F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

3166

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL VII

IANUARIE—MARTIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL VII
IANUARIE — MARTIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F

2557

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene, etc.).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor).

— Metrologie (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice, precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă şi franceză. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză, germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti Str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratraktár
5060

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VII, nr. 1 Ianuarie—martie 1956

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

HIDRODINAMICĂ Pag.

MINCIO POPOV, Încercări pe modele cu pulverizarea fluidelor 9

AEROMECANICĂ

AL. MARINESCU, Asupra stabilităţii dinamice a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative 29

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

N. TIPEI, Mişcarea fluidelor vîscoase între pereţi solizi, cu o deplasare relativă oarecare 45

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU, Determinarea şi utilizarea parametrilor de caracterizare a viscozităţii lubrifianţilor 63

V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze 81

ORGANE DE MAŞINI

D. BODNĂRESCU, Asupra combinării prăjinilor în pompajul de adîncime din industria de petrol, după criterii de rezistenţă la oboseală..... 107

VIBRAŢII

L. HAMBURGER, Asupra influenţei inerţiei solului la fundaţii cu pături elastice intermediare 123

V. MARCU şi A. LEZER, Studiul metodei « Rijkov » pentru eliminarea vibraţiilor la strungire..... 135

S. RĂUTU, Calculul vibraţiilor cadrelor prin aproximări succesive..... 151

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

A. PETRE, Flambajul barelor drepte prin şoc axial 173

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

T. REVICI, O metodă pentru simplificarea consolidării podurilor metalice.... 179

A. FROIMESCU, Grinda continuă din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil şi efort de preîntindere constant pe toată lungimea..... 203

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE

GH. I. PANĂ, Contribuţii la studiul penetrabilităţii lemnului de către lichide la diferite presiuni şi temperaturi 235

METODE DE CALCUL

N. S. PÎRVULESCU, Rezolvarea ecuaţiilor algebrice printr-o metodă de recurenţă şi o metodă de iteraţie 249

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

D. PAVELESCU, Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate.... 271

L. DUMITRESCU, Tubul de şoc şi aplicaţiile sale..... 283

RECENZII 293

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

A DUPLUMCSERE-AKCIÓ KERETÉBEN AJÁNDÉKOZTA A MTA; KÖZP. KÖNYVTÁRA

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолётостроение, использование энергии ветра и пр.).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей).

— Метрологию (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханики, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения ценных работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, написанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском, русском и французском языках. Резюме должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VII № 1. Январь—март 1956

СОДЕРЖАНИЕ

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

Стр.

ГИДРОДИНАМИКА

М. ПОПОВ, Испытание на моделях распыления жидкостей 9

АЭРОМЕХАНИКА

А. МАРИНЕСКУ, Об устойчивости геликоптера с соосными взаимообратно вращающимися роторами 29

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ЦИПЕЙ, Движение вязких жидкостей между твердыми стенками с некоторым относительным перемещением 45

Л. РОЗЯНУ и О. ПРЕОЦЕСКУ, Определение и использование параметров, характеризующих вязкости смазочных веществ 63

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расчете круглых бесконечно удлиненных подшипников с газовой смазкой 81

ДЕТАЛИ МАШИН

Д. БОДНЭРЕСКУ, О подборе бурильных труб при глубинном выкачивании в нефтяной промышленности по критериям выносливости на усталость 107

ВИБРАЦИИ

Л. ГАМБУРГЕР, О влиянии инерции почвы на фундаменты с промежуточными упругими прокладками 123

В. МАРКУ и А. ЛЕЗЕР, Изучение метода Рыжкова для устранения вибрации при точении 135

С. РЭУТУ, Расчет вибраций рам по способу последовательных приближений 151

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

А. ПЕТРЕ, Изгиб прямых брусьев под влиянием осевого удара 173

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. РЕВИЧ, Метод усиления металлических мостов 179

А. ФРОЙМЕСКУ, Неразрезная балка из предварительно сжатого бетона с переменным моментом инерции и постоянным по всей длине усилием на предварительное растяжение 203

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Г. И. ПАНЭ, К вопросу о проницаемости древесины для жидкостей при различных давлениях и температурах 235

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Решение алгебраических уравнений рекуррентным способом и способом итерации 249

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Д. ПАВЕЛЕСКУ, Исследование в области прикладной механики при помощи радиоактивных изотопов 271

Л. ДУМИТРЕСКУ, Ударная труба и ее применение 283

РЕЦЕНЗИИ 293

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment :

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne, etc.).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces).

— Métrologie (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation de l'ultrason et des isotopes radio-actifs dans la technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique du sol, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VII, nº 1 Janvier—mars 1956

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

HYDRODYNAMIQUE Page

MINTSCHO POPOV, Essais de pulvérisation des fluides à l'aide de modèles expérimentaux 9

AÉROMÉCANIQUE

AL. MARINESCU, Sur la stabilité dynamique de l'hélicoptère à rotors coaxiaux contre-rotatifs 29

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

N. TIPEI, Le mouvement des fluides visqueux entre parois solides ayant un déplacement relatif quelconque 45

L. ROZEANU et O. PREOȚESCU, Détermination et utilisation des paramètres de caractérisation de la viscosité des lubrifiants 63

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur le calcul des paliers circulaires d'allongement infini, lubrifiés aux gaz 81

ORGANES DES MACHINES

D. BODNĂRESCU, Sur la façon de combiner les tiges pour le pompage en profondeur, dans l'industrie du pétrole, suivant des critériums de résistance à la fatigue 107

VIBRATIONS

L. HAMBURGER, Sur l'influence de l'inertie du sol sur les fondations à couches élastiques intermédiaires 123

V. MARCU et A. LEZER, Etude sur la méthode de Ryjkov pour l'élimination des vibrations lors du tournage 135

S. RĂUTU, Le calcul des vibrations des cadres par approximations successives 151

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — ÉLASTICITÉ

A. PETRE, Flambage des barres droites par choc axial 173

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

T. REVICI, Méthode pour la simplification du renforcement des ponts métalliques 179

A. FROIMESCU, Poutre continue en béton précontraint à moment d'inertie variable et à effort de prétension constant sur toute la longueur 203

ESSAIS DES MATÉRIAUX

GH. I. PANĂ, Contribution à l'étude de la pénétrabilité du bois par des liquides à différentes pressions et températures 235

MÉTHODES DE CALCUL

N. S. PÎRVULESCU, Résolution des équations algébriques par une méthode de récurrence et une méthode d'approximations successives 249

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

D. PAVE LESCU, Recherches à l'aide des isotopes radio-actifs dans le domaine de la mécanique appliquée 271

L. DUMITRESCU, Le tube à chocs et ses applications 283

COMPTES RENDUS 293

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI — redactor responsabil;
ACADEMICIAN N. PROFIRI; A. BELEȘ; C. MATEESCU;
A. BĂRGLĂZAN; R. BOGDAN; N. TIPEI; M. ARCAN.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

HIDRODINAMICĂ

ÎNCERCĂRI PE MODELE CU PULVERIZAREA FLUIDELOR

DE

MINCIO POPOV *)

I. SCOPUL LUCRĂRII

Stabilirea legilor pulverizării complexe a fluidelor nu a fost posibilă pînă acum pe cale analitică, din cauza dificultăţilor de ordin matematic. De aceea, studierea pulverizării se face în general pe cale experimentală. Dar şi aceste cercetări sînt legate de dificultăţi foarte mari, condiţionate în cea mai mare parte de micimea picăturilor care se formează şi de vitezele lor relativ mari. Introducerea încercărilor pe modele aduce uşurări importante în cercetarea experimentală, dînd posibilitatea de a se folosi dimensiuni mai mari şi viteze mai mici; în afară de aceasta, similitudinea permite generalizarea rezultatelor măsurătorilor pentru sisteme dinamic asemenea.

Scopul lucrării de faţă este stabilirea legilor de similitudine pentru pulverizarea fluidelor în cazul mai simplu al unor constante fizice invariabile şi verificarea lor pe calea încercărilor comparative pe modele.

II. MECANISMUL PULVERIZĂRII FLUIDELOR

Pentru deducerea legilor de similitudine sînt necesare cunoştiinţe cît mai exacte asupra procesului fizic; de aceea, în cele ce urmează vom descrie pe scurt procesul pulverizării.

La instalaţiile tehnice, pulverizarea fluidului are loc astfel încît fluidul care urmează a fi pulverizat, să iasă dintr-un ajutaj în mediul gazos, unde se descompune în particule individuale, care se transformă în picături sferice.

Principial deosebim două feluri de pulverizări:

a) pulverizarea hidraulică, la care mediul gazos are o viteză proprie neînsemnată, în timp ce lichidul iese cu o viteză mare şi furnizează energia necesară pulverizării, şi

b) pulverizarea pneumatică, la care viteza gazului este mult mai mare decît a lichidului şi unde scurgerea gazului produce energia de pulverizare.

*) Profesor la Institutul politehnic din Sofia.

În cele ce urmează, ne vom ocupa în special de pulverizarea hidraulică; la deducerea legilor de similitudine se ia în consideraţie însă şi pulverizarea pneumatică.

Descompunerea vinei de fluid se produce în cîteva forme tipice, în funcţie de viteza de ieşire.

La viteze foarte mici de ieşire a lichidului (cazul aproape static), formarea picăturilor la ieşirea din ajutaj se face aşa cum este arătat în figura 1 (într-o serie de imagini cinematografice), pentru un ajutaj vertical. Greutatea picăturii suspendate este egalată de efectul tensiunii superficiale. Dacă, în cazul măririi debitului de lichid, picătura ajunge la o mărime limită, ea se rupe sub efectul forţei gravitaţionale şi tinde spre forma stabilă, sferică.

În cazul unei viteze suficient de mici de ieşire a lichidului din ajutaj, după cum arată Lohnstein [1], are loc procesul denumit « picurare » sub efectul forţei gravitaţionale şi a tensiunii superficiale, care exercită o forţă de tracţiune σ kg/m pe unitatea de lungime, tangenţială la suprafaţa fluidului.

După cum se ştie, prin efectul tensiunii superficiale între lichid şi gazul învecinat se produce o diferenţă de presiune conform ecuaţiei lui Laplace

$$p = p_g + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{1}$$

unde s-a notat cu: p, presiunea lichidului; p_g, presiunea gazului şi R_1 şi R_2, razele principale de curbură ale elementului de suprafaţă considerat (în cele ce urmează, mărimile care se referă la mediul gazos, vor fi prevăzute cu indicele « g »).

La o viteză mai mare a lichidului, formarea picăturilor la ieşire încetează şi lichidul iese în forma unei vine cilindrice, care este însă labilă, sub efectul tensiunii superficiale; neregularităţile condiţionate de perturbaţiile iniţiale la suprafaţa lui cresc din cauza tensiunii superficiale, vîna se contractă în mai multe locuri şi la o anumită distanţă de la ieşire — lungimea de descompunere — el se descompune în particule individuale care, mai tîrziu, iau formă sferică, după cum arată cercetările lui Haenlein [2] şi Weber [3]. În figura 2 se arată o serie de imagini cinematografice, descompunerea în picături a unei astfel de vine de lichid*). Formarea picăturilor are loc în special sub influenţa tensiunii superficiale, în timp ce efectul forţei gravitaţionale descreşte o dată cu creşterea vitezei. Aici însă intervin, ca rezistenţă împotriva deformării, şi forţele de viscozitate ale lichidului.

La viteze şi mai mari de ieşire, intră în acţiune forţele de inerţie, proporţionale cu pătratele vitezelor, care au ca urmare crearea diferenţelor de presiune şi, în anumite condiţii, pot fi cauza principală a descompunerii vinei. Avem acest caz atunci cînd scurgerea lichidului devine turbulentă încă din ajutaj. După cum se ştie, particulele de lichid (numite şi bule de lichid) efectuează atunci mişcări transversale în mai multe direcţii. La ieşirea din ajutaj, eliberate de îngrădirea pereţilor, particulele de lichid se separă unele de altele şi vîna se descompune în părţi individuale, în cea mai mare parte sub formă de fire şi pelicule, din care se formează ulterior picături sferice.

Figura 3 cuprinde o serie de fotografii luate cu ajutorul unui procedeu special (« Zeitlupenaufnahme » cu 25 000 de imagini pe secundă), şi anume: în camera obscură, cu obturatorul deschis, prin tragere continuă a filmului şi iluminarea obiectului

*) Figurile 1 şi 2 au fost luate din lucrarea lui Ohnesorge.

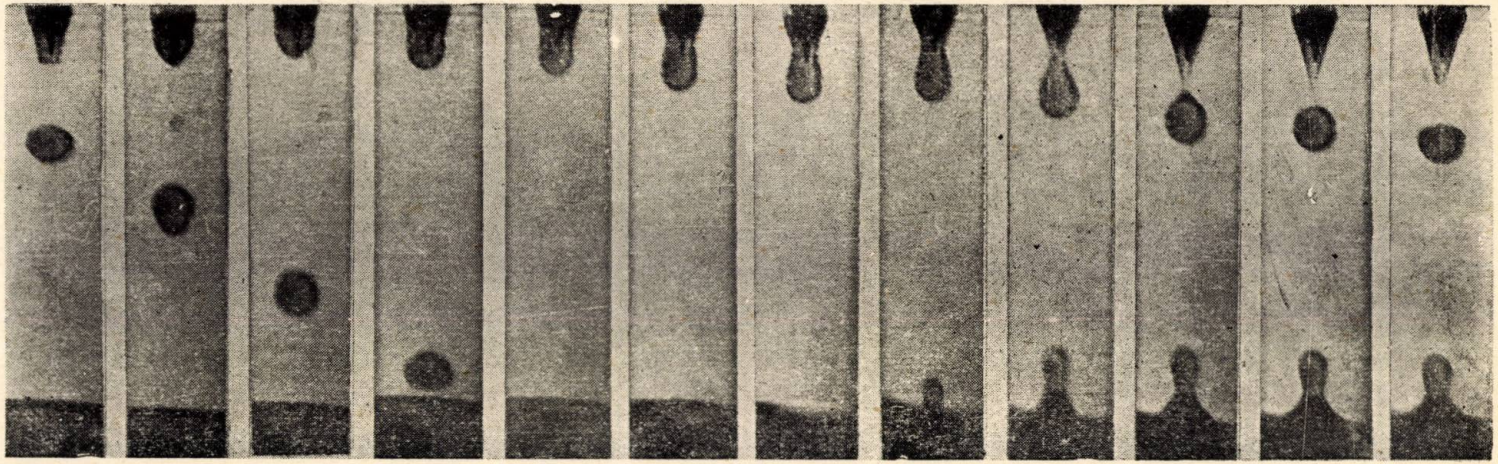
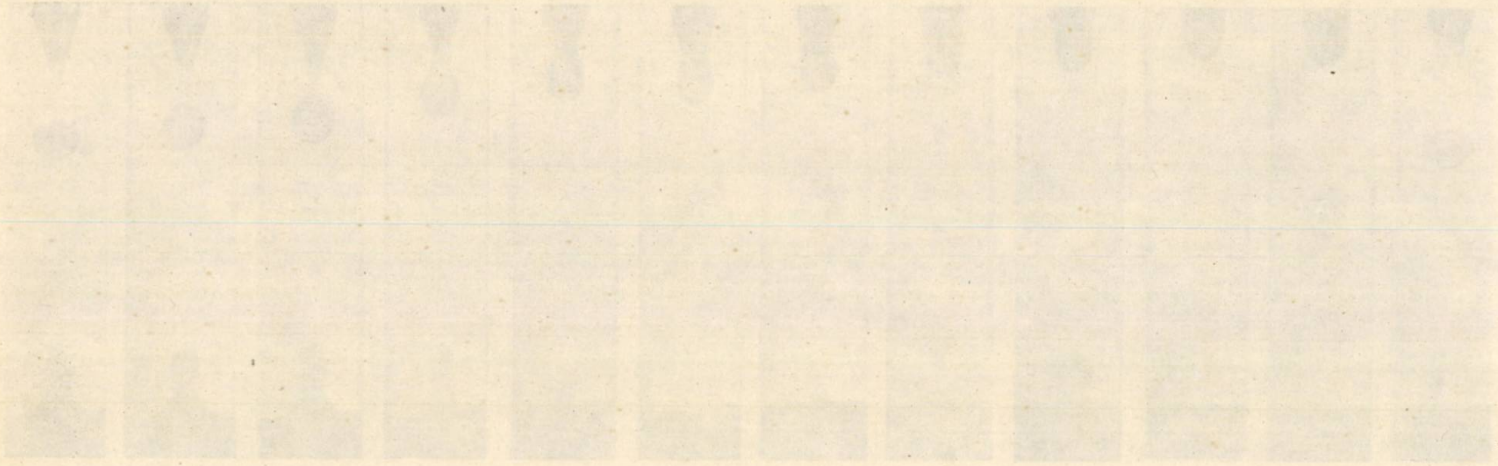


Fig. 1. — Picurare sub acţiunea forţei gravitaţionale.



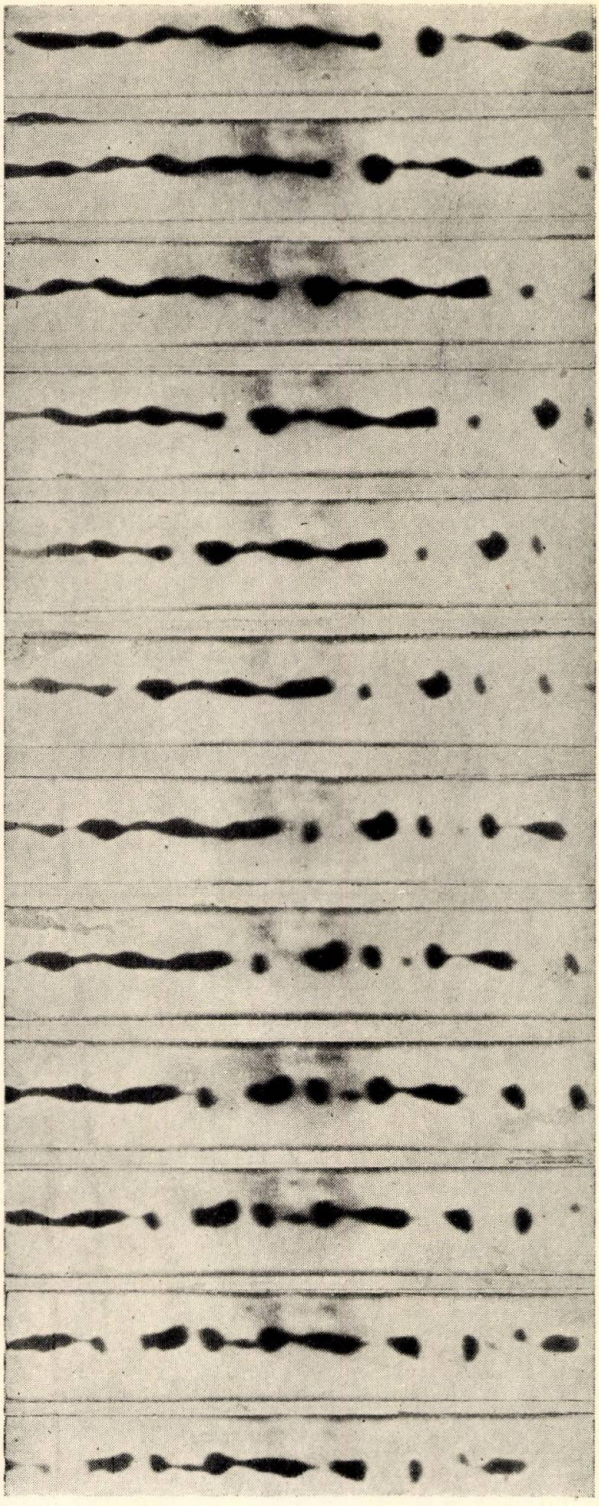


Fig. 2. — Descompunerea unei vine de lichid sub acțiunea tensiunii superficiale.

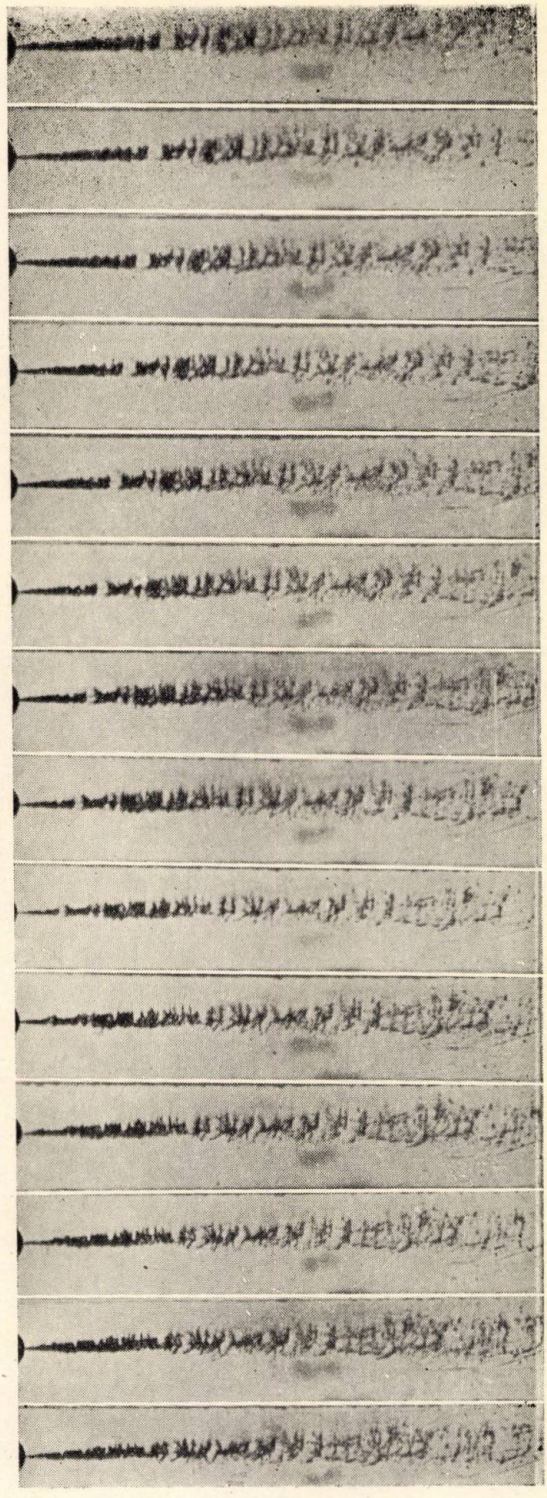


Fig. 3. — Descompunerea turbulentă a vinei în vid.

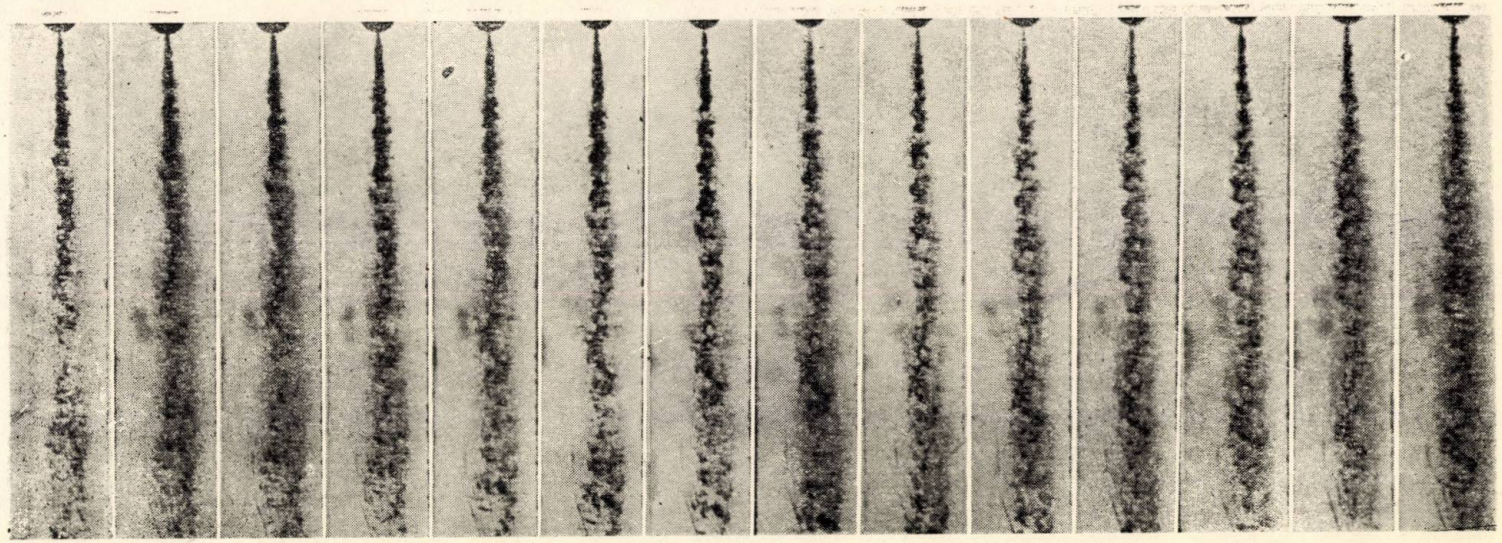


Fig. 4. — Descompunerea vinei în aer sub presiunea atmosferică.

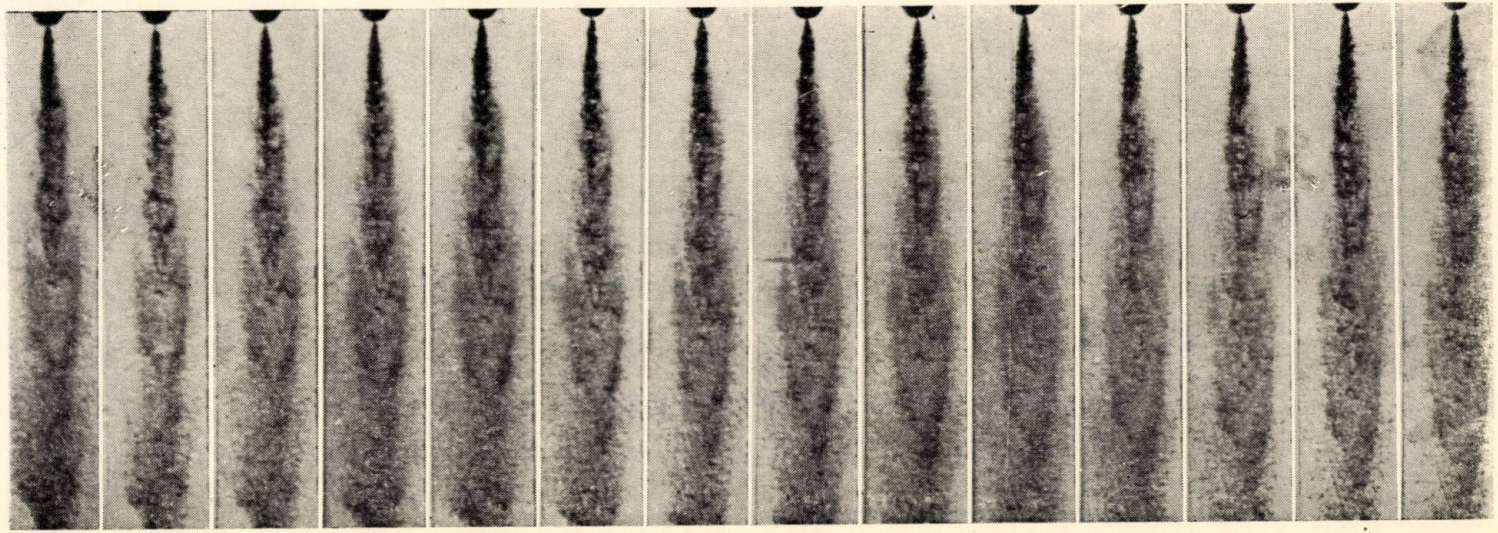


Fig. 5. — Descompunerea vinei de aer sub o suprapresiune de 3 ata.

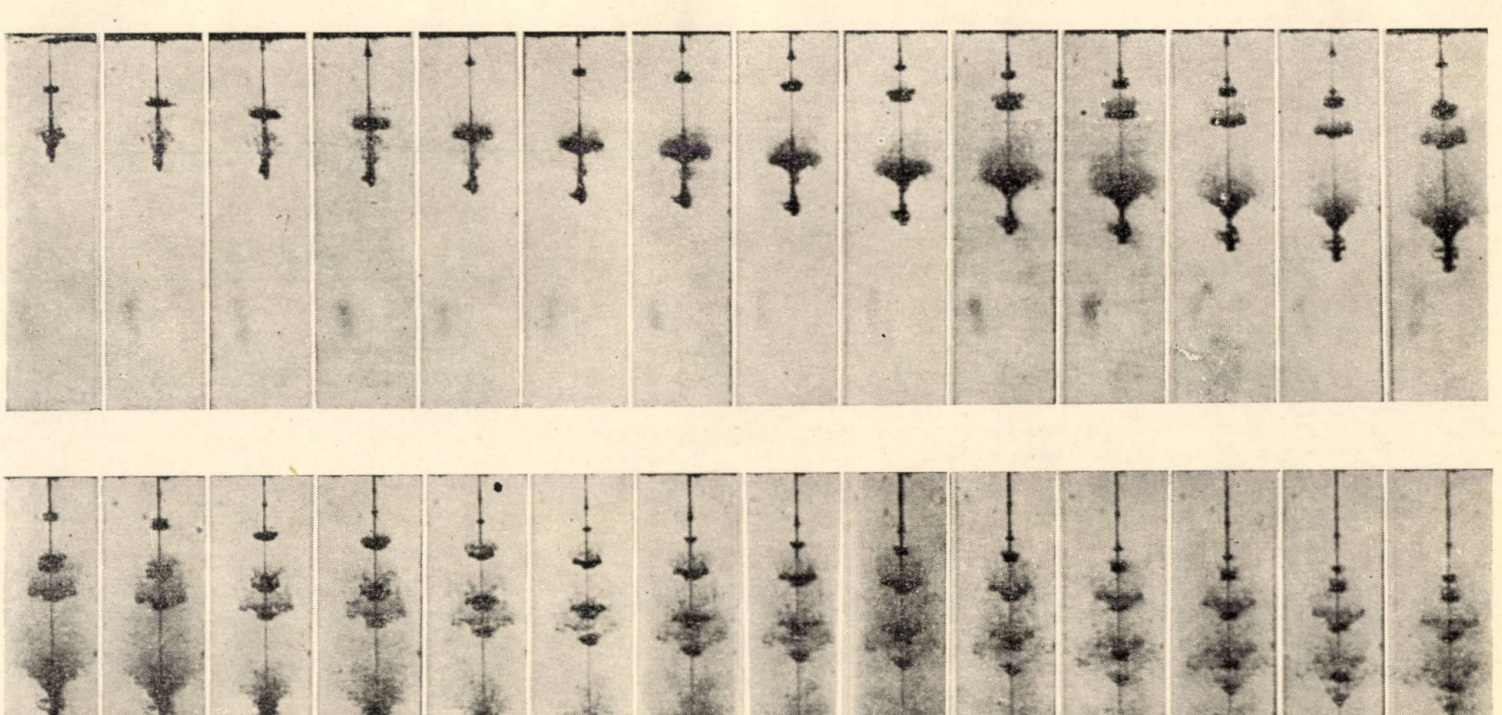


Fig. 6. — Procesul de împrăştiere prin suflare sub acţiunea forţelor gazului.

cu scîntei succesive de foarte scurtă durată*). Aceste fotografii arată descompunerea unei vine de metanol cu viteza de ieşire de 52 m/s în vid (circa 100 mm Hg), care a fost folosită pentru a îndepărta cît mai mult efectul forţelor gazului. De aici se vede forma părţilor descompuse, precum şi lărgirea vinei în direcţie transversală pe direcţia scurgerii, care este provocată de mişcările transversale turbulente ale particulelor de lichid. Procesul de descompunere este favorizat de intensitatea turbulenţei, care, la rîndul ei, este condiţionată de perturbaţiile iniţiale (turbionare prin muchii ascuţite, curburi etc.) în ajutaj.

În acest caz se formează picături mult mai mici decît în cazul descompunerii vinei de lichid arătată în figura 2. Din cauza vitezelor mai mari de deformare, influenţa forţelor de viscozitate este corespunzător mai mare, forţele gravitaţionale însă nu au o influenţă practică asupra descompunerii vinei şi formării picăturilor.

La tratarea analitică a scurgerii lichidului cu constante fizice invariabile, trebuie să pornim, pentru a ţine seama de toate forţele ce intervin, de la ecuaţia diferenţială a lui Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\vec{v} \qquad (2)$$

şi de la ecuaţia de continuitate

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad (3)$$

unde s-a notat cu: t, timpul; g, acceleraţia gravitaţională; v, viteza; ρ, densitatea; p, presiunea şi μ, viscozitatea fluidului.

La viteze relativ mai mari dintre vîna de lichid şi gazul înconjurător apar şi acele forţe ale gazului, care acţionează asupra suprafeţei lichidului sub formă de presiuni normale şi tensiuni tangenţiale. După cum este arătat în lucrările menţionate mai sus ale lui Haenlein [2] şi Weber [3], presiunile normale măresc neregularităţile iniţiale ale suprafeţei vinei, scurtează lungimea descompunerii şi favorizează astfel descompunerea vinei.

Figurile 4 şi 5 reprezintă descompunerea vinei în aceleaşi condiţii ca în figura 3, însă la o presiune a aerului mai ridicată, şi anume: presiunea atmosferică în cazul figurii 4 şi o presiune de 3 ata pentru figura 5. O comparaţie cu figura 3 arată că forţele gazului crescute o dată cu densitatea aerului, influenţează esenţial descompunerea vinei, prin aceea că micşorează lungimea descompunerii, măresc împrăştierea vinei şi provoacă formarea de particule, respectiv picături mai mici.

Un efect foarte important al forţelor gazului constă în faptul că, în anumite condiţii, ele pot împărţi mai departe particulele formate la descompunerea vinei, în picături de dimensiuni foarte mici. Procesul acesta a fost cercetat de Hochschwender [4] pentru picături libere de apă în curent de aer şi a fost denumit de el «împrăştiere prin suflare».

Un proces de împrăştiere prin suflare este arătat în figura 6 prin fotografii luate cu ajutorul procedeului descris mai sus. Vîna de lichid are perturbări iniţiale mici şi îşi păstrează, prin urmare, forma sa cilindrică pe o distanţă mai mare. Din cauza variaţiei vitezei de ieşire şi a acumulărilor, se formează în unele puncte, în

*) O descriere a aparaturii folosite se găseşte în lucrarea: *Cercetarea unui injector cu unghi de împrăştiere variabil al vinei de pulverizare*, de Mincio Popov, Annuaire de l'École Polytechnique Staline, Sofia, 1953/1954.

lungul vinei, îngroşări nodulare, care sînt expuse acţiunii aerului în mod deosebit. În timp ce pe suprafaţa frontală acţionează suprapresiuni, la periferie se nasc subpresiuni care atrag îngroşările în afară, în direcţia radială, pînă cînd acestea se transformă în pelicule subţiri, conice care, la sfîrşit, se desfac într-un număr mare de picături foarte mici (care nu pot fi deosebite pe fotografii). O astfel de împrăştiere prin suflare are loc la o mulţime de particule formate la descompunerea vinei şi are ca urmare formarea unor picături finale extrem de mici.

Din cele spuse cu privire la efectul forţelor gazului, se poate trage concluzia că în cazul unei viteze relative mai mari între lichid şi gaz, care este folosită în general la instalaţiile tehnice, aceste forţe pot influenţa în mod hotărîtor descompunerea vinei, împrăştierea prin suflare şi deci întregul proces de pulverizare.

La tratarea analitică a scurgerii gazului ar trebui să pornim de asemenea de la ecuaţia diferenţială a lui Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v_g}}{\partial t} + (\vec{v_g}\,\mathrm{grad})\,\vec{v_g} = \vec{g} - \frac{1}{\rho_g}\,\mathrm{grad}\,p_g + \frac{\mu_g}{\rho_g}\,\Delta\,\vec{v_g} \tag{4}$$

şi de la ecuaţia de continuitate

$$\mathrm{div}\,\vec{v_g} = 0, \tag{5}$$

unde de asemenea se presupun constantele fizice invariabile.

Soluţia matematică a problemei cere integrarea sistemului format din ecuaţiile (2), (3), (4) şi (5), unde trebuie avute în vedere şi o serie de condiţii iniţiale şi la limită.

O condiţie la limită o reprezintă ecuaţia lui Laplace (1), care trebuie să fie îndeplinită pentru fiecare punct al suprafeţei lichidului şi de asemenea pentru picăturile sferice cu diametrul d. Deoarece $R_1 = R_2 = d/2$, putem scrie ecuaţia (1) sub forma

$$p = p_g + \frac{4\sigma}{d}. \tag{6}$$

Alte condiţii la limită sînt constituite de repartiţiile vitezelor lichidului v_{gr} şi a gazului $v_{g,gr}$, la ieşirea din ajutaj în sistem. Ele pot fi date prin următoarele funcţii:

$$\vec{v}_{gr} = \vec{\varphi}\,(\vec{r}, \nu, t) \tag{7}$$

şi

$$\vec{v}_{g,gr} = \vec{\varphi}_g\,(\vec{r}_g, \nu_g, t), \tag{8}$$

unde $\vec{r}$ şi $\vec{r}_g$ sînt vectori de poziţie, care descriu secţiunile de ieşire. În funcţiile φ şi φ_g figurează şi viscozităţile cinematice ν şi ν_g, deoarece din motive dimensionale, în cazul scurgerilor staţionare, vitezele nu pot fi funcţii numai de un vector de poziţie (lungime).

Condiţii la limită care nu pot fi influenţate de acţiuni exterioare sînt: egalitatea vitezelor şi a tensiunilor tangenţiale la limita dintre lichid şi gaz. În afară de aceasta, viteza relativă dintre lichid sau gaz şi pereţii solizi ai ajutajului trebuie să fie egală cu zero.

După cum am menţionat mai sus, sistemul de ecuaţii obţinut nu poate fi rezolvat pe cale matematică pentru partea generală a pulverizării lichidului; el poate fi folosit însă — ţinînd seama de condiţiile la limită — pentru stabilirea legilor de similitudine sau a modelelor.

III. LEGILE DE MODELARE

În cele ce urmează se presupune cunoscută teoria similitudinii care a fost tratată rezumativ de Kirpicev [5], Eugensson [6], Weber [7] ş.a. De aici reiese că procesele la instalaţia folosită în practică şi cele din model decurg asemenea, dacă amîndouă sistemele sînt asemenea din punct de vedere geometric, dacă există egalitate a criteriilor adimensionale de similitudine şi dacă s-au realizat condiţii adimensionale iniţiale la limită egale.

Stabilirea criteriilor de similitudine se obţine din ecuaţiile care descriu procesul şi condiţiile sale la limită, transformîndu-le în formă adimensională. Aici nu trebuie să se ţină seama de condiţiile la limită care nu pot fi influenţate de elemente exterioare

Pentru pulverizarea în cazul constantelor fizice invariabile, trebuie ca ecuaţiile (2), (3), (4), (5), (6), (7) şi (8) să fie aduse în formă adimensională. În acest scop se introduc următoarele unităţi de măsură relative: l_0 — diametrul orificiului de ieşire a lichidului, t_0 — durata procesului sau a unei anumite faze a acestuia, $v_m = 4Q/\pi l_0^2 t_0$ = viteza medie de ieşire a lichidului, calculată din debitul Q ieşit în timpul t_0, p_0 — presiunea într-un anumit punct al sistemului, g — acceleraţia gravitaţională, ρ, μ, σ — constantele: densitate, viscozitate şi tensiunea superficială ale lichidului. În consecinţă putem scrie

$$\vec{v} = v_m \vec{V},\ \vec{v_g} = v_m \vec{V_g},\ \vec{v_{gr}} = v_m \vec{V}_{gr},\ \vec{v_{g,gr}} = v_m \vec{V}_{g,gr},\ x = l_0 X,\ y = l_0 Y,\ z = l_0 Z$$

$$\vec{l} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = l_0 \vec{L} = l_0 (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}),\ \vec{r} = l_0 \vec{R},\ \vec{r_g} = l_0 \vec{R_g},\ d = l_0 D$$

$$p = p_0 P,\quad t = t_0 T,\quad \mu_g = \mu M,\quad \rho_g = \rho N,$$

unde cu majuscule au fost notate mărimile corespunzătoare adimensionale; de exemplu $\vec{V}$, $\vec{V_g}$, $\vec{V}_{gr}$, $\vec{V}_{g,gr}$ sînt viteze adimensionale, X, Y, Z, coordonate adimensionale etc.

Dacă ţinem seama că componentele scalare ale lui $\partial\vec{v}/\partial t$, $\vec{v}$ grad $\vec{v}$, grad p, $\Delta\vec{v}$, div $\vec{v}$ sînt respectiv de forma $\partial v_x/\partial t$, $\partial v_x^2/\partial x$, $\partial p/\partial x$, $\partial^2 v_x/\partial x^2$, $\partial v_x/\partial x$, atunci ecuaţiile (2) ... (8) pot fi transformate după cum urmează

$$\frac{v_m}{t_0}\frac{\partial\vec{V}}{\partial T} + \frac{v_m^2}{l_0}(\vec{V}\,\mathrm{grad})\,\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\frac{p_0}{l_0}\,\mathrm{grad}\,P + \frac{\mu}{\rho}\frac{v_m}{l_0^2}\Delta\vec{V}, \tag{9}$$

$$\frac{v_m}{l_0}\,\mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{v_m}{t_0}\frac{\partial\vec{V}_g}{\partial T} + \frac{v_m^2}{l_0}(\vec{V}_g\,\mathrm{grad})\,\vec{V}_g = \vec{g} - \frac{1}{\rho N}\frac{p_0}{l_0}\,\mathrm{grad}\,P_g + \frac{\mu}{\rho}\frac{M}{N}\frac{v_m}{l_0^2}\Delta\vec{V}_g, \tag{11}$$

$$\frac{v_m}{l_0}\,\mathrm{div}\,\vec{V}_g = 0, \tag{12}$$

$$p_0 P = p_0 P_g + \frac{\sigma}{l_0}\frac{4}{D}. \tag{13}$$

Pentru a aduce aceste ecuații la forma adimensională, vom împărți ecuațiile (9) și (11) prin v_m^2/l_0, iar ecuația (13) prin p_0, în timp ce la ecuațiile (10) și (12) vom ține seama că $v_m/l_0 \neq 0$; obținem astfel ecuațiile adimensionale

$$\frac{l_0}{v_m t_0}\frac{\partial \vec{V}}{\partial T} + (\vec{V}\,\mathrm{grad})\,\vec{V} = \frac{\vec{g} l_0}{v_m^2} - \frac{p_0}{\rho v_m^2}\,\mathrm{grad}\,P + \frac{\mu}{\rho v_m l_0}\Delta\vec{V}, \tag{14}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{l_0}{v_m t_0}\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial T} + (\vec{V}_g\,\mathrm{grad})\,\vec{V}_g = \frac{\vec{g} l_0}{v_m^2} - \frac{p_0}{\rho v_m^2}\frac{1}{N}\,\mathrm{grad}\,P_g + \frac{\mu}{\rho v_m l_0}\frac{M}{N}\Delta\vec{V}_g, \tag{16}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{V}_g = 0, \tag{17}$$

$$P = P_g + \frac{\sigma}{p_0 l_0}\frac{4}{D}. \tag{18}$$

După introducerea unităților relative de măsură l_0, v_m, μ, ρ și t_0 în ecuațiile (7) și (8) obținem

$$v_m \vec{V}_{gr} = \vec{\varphi}(l_0 \vec{R},\ \nu, t_0 T) \tag{19}$$

și

$$v_m \vec{V}_{g,gr} = \vec{\varphi}_g(l_0 \vec{R}_g,\ \nu\frac{M}{N},\ t_0 T). \tag{20}$$

Procedeul aplicat mai sus pentru aducerea ecuațiilor la forma adimensională nu poate fi folosit mai departe, deoarece ecuațiile (19) și (20) sînt date în formă neexplicită. Putem însă în acest caz să pornim de la faptul că termenii funcțiilor φ și φ_g trebuie să aibă dimensiunea unei viteze. Deoarece argumentele lor $\vec{R}$ respectiv $\vec{R}_g$ și T sînt adimensionale, coeficienții care, evident, se compun din mărimile l_0, ν și t_0 trebuie să aibă această dimensiune (m/s). Trebuie considerate însă numai două combinații de acest gen

$$\frac{l_0}{t_0} \text{ și } \frac{\nu}{l_0};$$

toate celelalte combinații de puteri din l_0, ν și t_0, care au dimensiunea m/s, pot fi obținute, după cum se poate demonstra ușor *), prin formarea unor produse

---

*) Combinația generală a lui l_0, ν și t_0 are forma $l_0^k \nu^p t_0^q$ și este supusă condiției $[l_0^k \nu^p t_0^q] = m s^{-1}$ respectiv $m^k m^{2p} s^{-p} s^q = m s^{-1}$.
Prin compararea dimensiunii obținem

$$k + 2p = 1 \quad \text{și} \quad q - p = -1.$$

De aici rezultă $k = 1 - 2p$, $q = p - 1$ și $l_0^k \nu^p t_0^q = \left(\frac{l_0}{t_0}\right)^{1-p}\left(\frac{\nu}{l_0}\right)^p$, unde p poate fi ales arbitrar, ceea ce a fost de demonstrat.

din puteri ale acestor două. Coeficienții funcțiilor φ și φ_g pot fi compuși, bineînțeles, și din sume ale unor asemenea combinații.

Dacă împărțim ecuațiile (19) și (20) prin v_m, atunci obținem în partea stîngă vitezele adimensionale $\vec{V}_{gr}$ și $\vec{V}_{g,gr}$, și în partea dreaptă din l_0/t_0 și ν/l_0 criteriile adimensionale

$$\frac{l_0}{t_0 v_m} = H_0^{-1} \quad \text{și} \quad \frac{\nu}{v_m l_0} = Re^{-1},$$

unde H_0 este așa-numitul criteriu pentru omocronism și Re criteriul lui Reynolds.

Pe baza celor de mai sus este ușor de observat că toți ceilalți coeficienți ai ecuațiilor (18) și (20) dau criterii compuse din H_0 și Re. În consecință, ecuațiile (19) și (20) pot fi aduse la următoarea formă adimensională

$$\vec{V}_{gr} = \vec{\Phi}(Re, H_0, \vec{R}, T), \tag{21}$$

$$\vec{V}_{g,gr}, = \vec{\Phi}_g(Re, H_0, M, N, \vec{R}_g, T). \tag{22}$$

Integrarea sistemului de ecuații diferențiale (14)... (17), ținînd seama de condițiile la limită conform ecuațiilor (18), (21) și (22), ar da funcțiile pentru $\vec{V}$, $\vec{V}_g$, P, P_g și D care vor cuprinde, evident, vectorul de poziție $\vec{L}$, timpul T, vitezele $\vec{V}_{gr}$ și $\vec{V}_{g,gr}$ și coeficienții care apar în ecuațiile adimensionale.

Pentru practică, mărimea picăturilor care se formează este de cel mai mare interes. De aceea, în cele ce urmează, vom trata numai funcția pentru $D = d/l_0$, care va fi de forma

$$D = \psi\left(\frac{l_0}{v_m t_0}, \frac{\vec{g} l_0}{v_m^2}, \frac{p_0}{\rho v_m^2}, \frac{\mu}{\rho v_m l_0}, \frac{\sigma}{p_0 l_0}, M, N, \vec{V}_{gr}\, \vec{V}_{g,gr}, \vec{L}, T\right). \tag{23}$$

Toate expresiile cuprinse în ecuație sînt adimensionale și reprezintă așa-numitele criterii de similitudine; primele cinci expresii din partea dreaptă a ecuației (23) sînt criterii complexe și celelalte criterii simplexe. Ecuația (23) este așa-numita ecuație criterială și poate fi determinată prin încercări.

Este cunoscut că fiecare criteriu de similitudine poate fi înlocuit prin produsul de puteri din oricare alte criterii din ecuația criterială. Putem pune, de exemplu în loc de $\sigma/p_0 l_0$

$$\left(\frac{\sigma}{p_0 l_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_0}{\rho v_m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{\rho v_m l_0} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma \rho l_0}} = Z,$$

ceea ce reprezintă criteriul introdus de Ohnesorge [8] pentru descompunerea vinei fără influența forțelor gazului.

Mai departe, în ecuația (23) avem:

$$l_0/v_m t_0 = H_0^{-1}, \quad \vec{g} l_0/v_m^2 = Fr^{-1},$$

unde s-a notat cu: Fr, criteriul lui Froude, $p_0/\rho v_m^2 = Eu$, criteriul lui Euler și $\mu/\rho v_m l_0 = \nu/v_m l_0 = Re^{-1}$.

În consecință putem scrie ecuația (23) și sub forma următoare:

$$D = \psi\left(\frac{v_m t_0}{l_0}, \frac{v_m}{\vec{g} l_0}, \frac{p_0}{\rho v_m^2}, \frac{v_m l_0}{\nu}, \frac{\mu}{\sqrt{\sigma \rho l_0}}\ M,\ N,\ \vec{V}_{gr},\ \vec{V}_{g,gr},\ \vec{L},\ T\right) =$$

$$= \psi\,(H_0, Fr, Eu, Re, Z, M, N, \vec{V}_{gr}, \vec{V}_{g,gr}, \vec{L}, T). \qquad (24)$$

La procese asemenea trebuie să existe egalitate între criteriile corespunzătoare. Este, de exemplu, necesar ca pentru instalația industrială (mărimile au indicația « prim ») și pentru model (mărimile sînt indicate cu « secund ») să existe egalitatea primului complex H_0

$$\frac{v_m' t_0'}{l_0'} = \frac{v_m'' t_0''}{l_0''}.$$

Deoarece $v_m = 4Q/\pi l_0^2 t_0$ ecuația precedentă ia forma

$$\frac{Q'}{l_0'^3} = \frac{Q''}{l_0''^3}, \qquad \text{respectiv} \qquad \frac{Q'}{Q''} = \frac{l_0'^3}{l_3''}$$

înseamnă că volumul de lichid Q' ieșit la instalația industrială și volumul de lichid Q'' ieșit la model în timpurile t_0' și t_0'' trebuie să fie în același raport ca volumele l'^3_0 și l''^3_0 respectiv volumele sistemelor. Această condiție geometrică însă este îndeplinită, în mod evident, prin funcția vitezelor la limită după ecuația (21); de aceea criteriul H_0 nu mai trebuie luat în considerație.

Datorită ipotezei făcute asupra invariabilității constantelor fizice, dintre care și ρ_g = const., criteriul lui Euler, după cum se știe, poate fi scos din ecuația criterială (24).

După cum s-a arătat la tratarea mecanismului de pulverizare, în cazul vitezelor mai mari, practic nu mai există influența forțelor gravitaționale asupra formării picăturilor; de aceea criteriul lui Froude F_r, care ia în considerație efectul forțelor gravitaționale, poate fi de asemenea neglijat.

În consecință, ecuația criterială (24) pentru pulverizarea lichidului în cazul vitezelor mai mari și a constantelor fizice invariabile, poate fi adusă la următoarea formă simplificată:

$$D = \psi\,(Re, Z, M, N, \vec{V}_{gr}, \vec{V}_{g,gr}, \vec{L}, T). \qquad (25)$$

Din condițiile de similitudine $Re' = Re''$ și $Z' = Z''$ precum și din ecuația dinamică fundamentală (forța = masă × accelerație) rapoartele de scară pot fi stabilite după cum urmează:

— pentru toate lungimile corespunzătoare $c_l = \dfrac{l'}{l''} = \dfrac{\mu'^2 \sigma'' \rho''}{\mu''^2 \sigma' \rho'}$; (26)

— pentru toate timpurile corespunzătoare $c_t = \dfrac{t'}{t''} = \dfrac{\mu'^3 \sigma''^2 \rho''}{\mu''^3 \sigma'^2 \rho'}$; (27)

— pentru toate forțele corespunzătoare $c_k = \dfrac{k'}{k''} = \dfrac{\mu'^2 \rho''}{\mu''^2 \rho'}$. (28)

De aici se pot calcula rapoartele de scară pentru toate celelalte mărimi mecanice; pentru viteze obținem

$$c_v = \frac{v'}{v''} = \frac{c_l}{c_t} = \frac{\mu'' \sigma'}{\mu' \sigma''}. \tag{29}$$

Este clar că rapoartele de scară nu pot fi alese în mod arbitrar — ele sînt funcție de constantele fizice ale lichidului din model. De aici reiese de asemenea că, în model, se poate obține în același timp o mărire a dimensiunilor $c_l < 1$ și o reducere a vitezelor $c_v > 1$ prin alegerea unui lichid de model cu o viscozitate mai mare $\mu'' > \mu'$, o tensiune superficială $\sigma'' < \sigma'$ mai mică și o densitate mai mică $\rho'' < \rho'$.

Simplexele $M = \mu_g/\mu$ și $N = \rho_g/\rho$ sînt satisfăcute prin aceea că în model se folosește un gaz a cărui viscozitate și densitate sînt în același raport cu acelea ale fluidului din model cît și cu acelea ale instalației industriale.

Cel mai greu de satisfăcut sînt simplexele variabile în timp și spațiu $\vec{V}_{gr}$ și $\vec{V}_{g,gr}$, deoarece determinarea experimentală a funcțiilor lor, (ecuațiile (21) și (22)) este legată de mari dificultăți. Aceste dificultăți pot fi ocolite, dacă introducem în sistemul de experimentare și ajutajul de pulverizare, conductele și pompele pentru lichid și gaz, și le construim asemenea. Trebuie în special ca elementele care provoacă perturbații inițiale (muchii ascuțite, curburi) să fie executate geometric asemenea, cu o grijă deosebită, deoarece de ele depinde în cea mai mare măsură turbulența. De asemenea, trebuie să se țină seama și de variațiile elastice ale presiunii în sistemul pompă — conductă — ajutaj, care pot fi modelate conform legilor de similitudine deduse de Lindner [9]

La procese de pulverizare nestaționare trebuie să ținem seama și de condițiile inițiale respective, care pot fi împlinite în cazul cel mai general prin crearea aceleiași repartizări spațiale a vitezelor adimensionale ale lichidului și gazului în sistem, la începutul procesului, $T = 0$. Este indicat să se măsoare timpul de la începerea scurgerii lichidului, astfel încît pentru $T = 0$ să avem și $\vec{V} = 0$. Dacă însă în acest moment există și o scurgere a gazului cu $\vec{V}_g \neq 0$, atunci trebuie să se țină seama de repartizarea spațială a vitezei ei adimensionale. În cazul cel mai simplu nu există la începutul procesului de pulverizare o scurgere de gaz sau de lichid.

Dacă condițiile de similitudine sînt îndeplinite, vor exista la momente corespunzătoare $T' = T''$ în punctele corespunzătoare $\vec{L}' = \vec{L}''$ picături cu aceleași diametre adimensionale $D' = D''$. Pentru o apreciere sumară a finețiipulverizării este util a se măsura toate picăturile care apar în momentele corespunzătoare în spațiile situate corespunzător și să se determine din aceasta diametrul mediu al picăturilor respectiv repartizarea spațială a picăturilor existente care, în cazul proceselor asemenea, trebuie să dea aceleași valori numerice în unități relative de măsură.

IV. ÎNCERCĂRI PE MODELE

Pentru verificarea legilor de similitudine deduse au fost efectuate încercări comparative pe modele cu pulverizare hidraulică. Pulverizarea a avut loc într-o încăpere închisă fără mișcare proprie a aerului, astfel încît simplexul $\vec{V}_{g,dr}$ nu trebuia luat în considerație. În afară de aceasta a fost amenajată o scurgere

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

aproape staționară (staționară în valoarea medie temporară), astfel încît comparațiile rezultatelor au putut fi efectuate în valori medii statistice, fără a se ține seama de timpul adimensional T și de condițiile inițiale.

Ajutajul de pulverizare al instalației industriale avea un orificiu de ieșire cu diametrul $l_0' = 1$ mm și folosea la pulverizarea apei ale cărei constante fizice sînt: $\rho' = 102$ kgs^2/m^4, $\mu = 1{,}08 \cdot 10^{-4}$ s/m^2 și $\sigma' = 74{,}3 \cdot 10^{-4}$ kg/m în aer cu $\rho_g' = 0{,}122$ kgs^2/m^4 și $\mu_g' = 1{,}83 \cdot 10^{-6}$ kg s/m^2.

Cele două medii aveau aceeași temperatură (20°C), iar vitezele erau mici în comparație cu viteza sunetului, astfel încît condițiile de invariabilitate a constantelor fizice erau bine îndeplinite.

Ca lichid de model a fost folosită tetraclorura de carbon C Cl_4 ale cărei constante fizice sînt: $\rho'' = 162$ kg s^2/m^4, $\mu'' = 1{,}02 \cdot 10^{-4}$ kg s/m^2 și $\sigma'' = 26{,}1 \cdot 10^{-4}$ kg/m.

Din ecuațiile (26) și (29) se calculează rapoartele de scară:

pentru lungimi $$c_l = \frac{l'}{l''} = \frac{1}{1{,}6};$$

și pentru viteze $$c_v = \frac{v'}{v''} = 2{,}68.$$

Deci cu acest lichid poate fi obținută o mărire liniară de 1,6 ori a modelului, o micșorare de 2,68 ori a vitezelor și egalitate între criteriile Re și Z din ecuația (25) la instalația industrială și model. Mai departe se determină

$$Z' = Z'' = Z = 0{,}39 \cdot 10^{-2}.$$

Simplexul M pentru instalația industrială are valoarea

$$M' = \frac{\mu_g'}{\mu'} = 1{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Din cauza diferenței mici dintre viscozitatea apei și cea a tetraclorurei de carbon (numai circa 6%), a putut fi întrebuințat în model aer în locul gazului, obținîndu-se o concordanță suficientă între M' și M''.

Pentru instalația industrială, simplexul N are valoarea

$$N' = \frac{\rho_g'}{\rho'} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}.$$

Pentru a se obține aceeași valoare numerică în model, a trebuit ca densitatea aerului să fie adusă la

$$\rho_g'' = \rho'' \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}194 \text{ kg s}^2/\text{m}^4,$$

ceea ce a fost realizat printr-o ridicare corespunzătoare a presiunii aerului în camera de experiențe. Aici trebuie notat că ridicarea realizată a densității aerului (de la 0,122 la 0,194) nu are o influență practică asupra valorilor lui μ'' și σ'' măsurate la presiunea atmosferică.

Condiția la limită $\vec{V}_{gr}' = \vec{V}_{gr}''$ a fost îndeplinită printr-o similitudine geometrică riguroasă a ajutajelor și a conductelor lor de aducere, în timp ce ieșirea

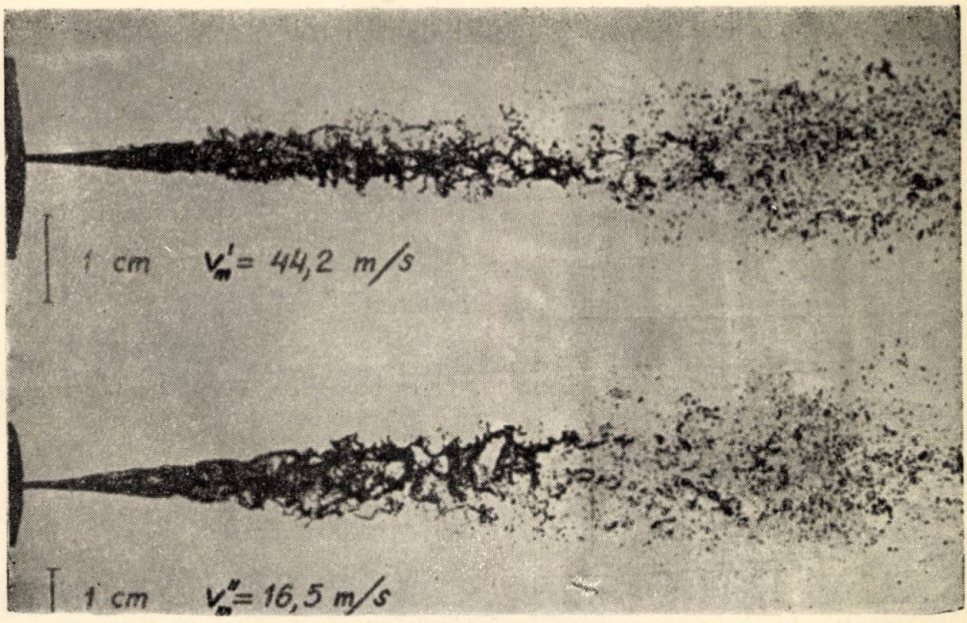


Fig. 7. — Vine de pulverizare amenajate în mod asemănător la $Re = 41\,800$, $Z = 0{,}39.10^{-2}$, $N = 1{,}2.10^{-3}$ și $M = 1{,}7.10^{-2}$.

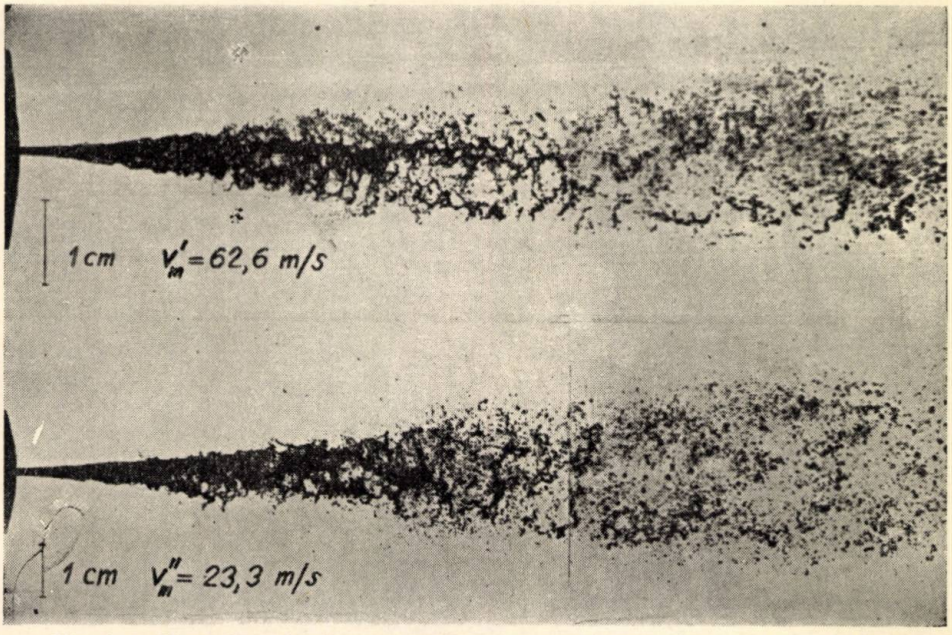


Fig. 8. — Vine de pulverizare amenajate în mod asemănător la $Re = 59\,100$, $Z = 0{,}39.10^{-2}$, $N = 1{,}2.10^{-3}$ și $M = 1{,}7.10^{-2}$.

lichidelor a fost provocată de suprapresiuni corespunzătoare constante în recipientul de lichid.

Cercetarea pulverizărilor a avut loc prin fotografiere cu ajutorul scînteilor electrice, care au o durată foarte scurtă (circa 10^{-6} s) și permit imagini clare chiar în cazul unor viteze mari ale vinelor de pulverizare.

În figura 7 sînt arătate vinele de pulverizare amenajate în mod asemănător a instalației industriale (sus) la o viteză medie de ieșire $v'_m = 44{,}2$ m/s și a modelului (jos) la $v''_m = 16{,}5$ m/s și $Re' = Re'' = Re = 41800$. Imaginea instalației industriale a fost mărită liniar de 1,6 ori, astfel încît ambele vine apar în dimensiuni egale, ceea ce ușurează compararea lor. Din cauza dificultăților experimentale mari, fotografiile nu au fost luate la timpuri corespunzătoare $T' = T''$, astfel încît nu există, din cauza turbulenței, o similitudine geometrică deplină; totuși, o anumită similitudine este evidentă.

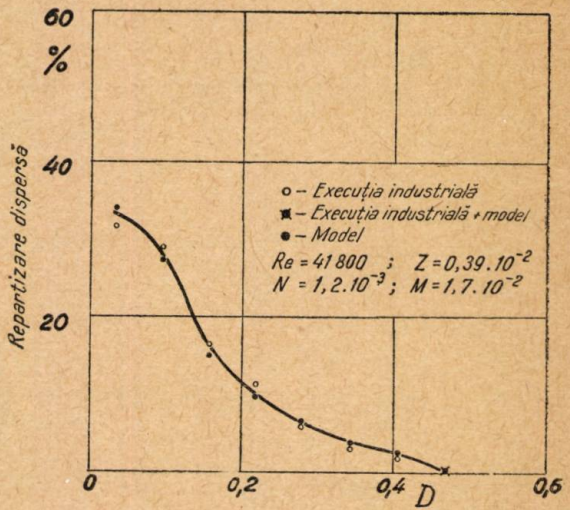


Fig. 9. — Repartizarea dispersă a picăturilor la două pulverizări amenajate asemenea.

În figura 8 sînt arătate vinele asemenea la viteze mai mari $v'_m = 62{,}6$ m/s și $v''_m = 23{,}3$ m/s respectiv $Re' = Re'' = Re = 59\,100$.

Pentru a permite comparații cantitative ale pulverizărilor similare au fost luate fotografii ale vinei pulverizate în regiuni situate asemenea ale sistemelor (la circa 130 l_0 de la orificiul ajutajului), unde pulverizările sînt complete, toate picăturile au fost măsurate cu ajutorul microscopului, clasate după ordinea mărimii și a fost determinată repartizarea lor dispersă.

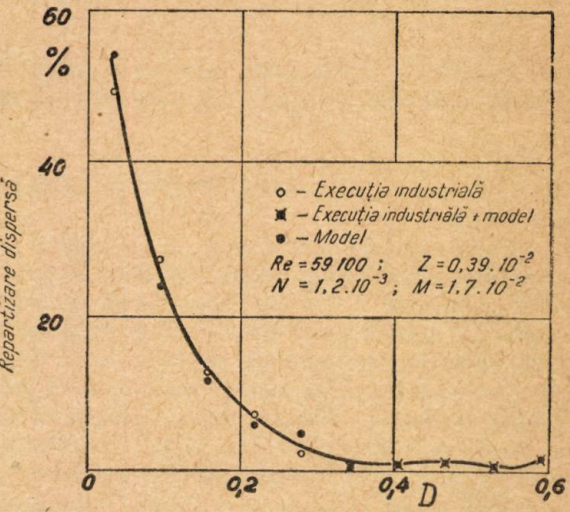


Fig. 10. — Repartizarea dispersă a picăturilor la două pulverizări amenajate asemenea.

În figurile 9 și 10 sînt arătate rezultatele la $Re = 41\,800$ și $Re = 59\,100$; pe abscisă este indicat diametrul adimensional al picăturii $D = d/l_0$, iar pe ordonată dispersarea în procente. Amîndouă imaginile arată că punctele instalației industriale și ale modelului dau curbe de egală repartizare într-o bună concordanță.

În figura 11 se arată diametrul adimensional mediu $D_m = d_m/l_0$ calculat din picăturile măsurate la fenomenul real și model, în funcție de numărul lui Reynolds, *Re*. Și aici punctele instalației industriale și ale modelului coincid pe o curbă comună în mod satisfăcător.

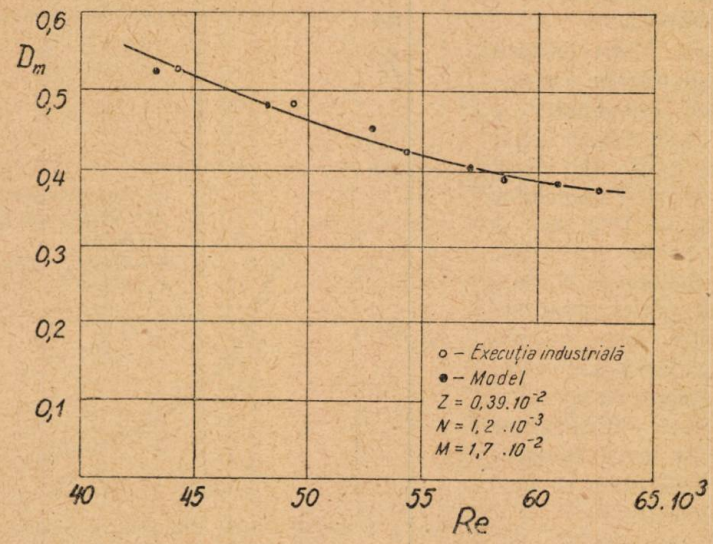


Fig. 11. — Diametrul mediu al picăturii în funcție de numărul lui Reynolds.

Rezultatele reprezentate în ultimele figuri arată în mod convingător că îndeplinirea criteriilor ecuației (25) duce într-adevăr la similitudinea pulverizărilor.

V. INFLUENȚA VISCOZITĂȚII GAZULUI

După cum am arătat mai sus, pentru a se obține mărirea dimensiunilor și micșorarea vitezelor din model, trebuie să alegem pentru model un lichid cu o viscozitate mai mare și tensiune superficială și densitate mai mică. Lichidele folosite în practică pentru pulverizare au însă, în general, tensiuni superficiale și densități mici. De aceea este aproape imposibil a se găsi un lichid de model cu tensiuni superficiale și densități atît de mici, încît să permită o mărire esențială a dimensiunilor modelului. Aceasta poate fi obținută mai ales prin alegerea unui lichid de model cu o viscozitate mai mare. Din condițiile de similitudine $M' = M''$ respectiv $\mu_g'/\mu' = \mu_g''/\mu''$ reiese însă că viscozitatea gazului de model trebuie mărită în același raport ca acela al lichidului de model. La aceeași temperatură, viscozitățile gazelor nu se deosebesc însă prea mult unele de altele; neonul de exemplu are viscozitatea cea mai mare, care însă este numai de 1,7 ori mai mare decît aceea a aerului. Această împrejurare limitează mărirea dimensiunilor modelelor.

Se naște deci întrebarea, în ce măsură este perturbată similitudinea, dacă simplexul M nu este îndeplinit și se folosește în model un gaz cu o viscozitate mai mică? Răspunsul trebuie căutat în influența forțelor gazului asupra procesului de pulverizare.

După cum am menționat, gazul exercită asupra suprafeței lichidului presiuni normale și tensiuni tangențiale, care influențează descompunerea vinei și împrăștierea prin suflare. Dacă celelalte condiții rămîn aceleași, presiunile normale sînt proporționale cu densitatea, în timp ce tensiunile tangențiale sînt proporționale cu viscozitatea. În consecință, o variație a viscozității gazului va influența în primul rînd tensiunile tangențiale.

Se știe că raportul dintre forțele care acționează asupra corpurilor, în jurul cărora există o scurgere și care rezultă pe de o parte din presiunile normale și pe de alta din tensiunile tangențiale (corespunzătoare așa-numitelor rezistențe de presiune și de frecare), depinde de numărul Re și de forma și poziția corpurilor respective.

Numărul Reynolds, calculat din dimensiunile corpului și din viteza relativă, este o măsură pentru raportul dintre forțele de presiune și forțele tangențiale. De aceea, influența forțelor tangențiale descrește o dată cu creșterea numărului Reynolds.

După cum se vede din figurile 7 și 8, particulele de lichid formate la descompunerea vinei au dimensiuni care, în parte, sînt mai mari decît diametrul ajutajului. În prima aproximație, dimensiunile lor pot fi considerate egale cu diametrul ajutajului l_0, iar viteza lor relativă față de aer, egală cu viteza de ieșire v_n. Atunci ordinul de mărime al numerelor Reynolds ale scurgerii aerului rezultă pentru pulverizarea arătată în figura 7 de circa 2 800 și pentru pulverizarea din figura 8, de circa 4 000. După cum se știe din teoria rezistenței, în cazul unor astfel de numere Reynolds și a anumitor corpuri, ca de exemplu sfere, cilindri și plăci în jurul cărora există o scurgere transversală, forțele de frecare sînt foarte mici față de forțele de presiune. Din aceleași figuri se observă că particulele de lichid reprezintă în cea mai mare parte fire și pelicule (aproximativ cilindri și plăci), în jurul cărora există o scurgere transversală. De aici se poate trage concluzia că forțele tangențiale respectiv viscozitatea gazului exercită o influență mult mai mică asupra pulverizării decît forțele de presiune respectiv densitatea gazului.

Viscozitatea gazului va avea o influență mai mare asupra deplasărilor picăturilor mici care, din cauza dimensiunilor și vitezelor relative mici, se produc la numere Reynolds corespunzători mici. Aceasta ar exercita o oarecare influență asupra vitezei de deplasare și formei vinei pulverizate, nu însă atît asupra mărimii picăturilor formate.

Pentru determinarea cantitativă a influenței viscozității gazului respectiv a simplexului M au fost efectuate încercări de pulverizare cu metanol ($\rho = 80{,}6$ kg s^2/m^4, $\mu = 0{,}643 \cdot 10^{-4}$ kg s/m^2 și $\sigma = 23{,}3 \cdot 10^{-4}$ kg/m) în gaze cu diferite viscozități — celelalte condiții rămînînd constante — și anume în acetilenă cu $\mu_g = 1{,}04 \cdot 10^{-6}$ și $M = 1{,}62 \cdot 10^{-2}$ în aer cu $\mu_g = 1{,}83 \cdot 10^{-6}$ și $M = 2{,}85 \cdot 10^{-2}$ și în neon cu $\mu_g = 3{,}17 \cdot 10^{-6}$ kg s/m^2 și $M = 4{,}93 \cdot 10^{-2}$.

În figura 12 se arată repartizarea spațială a picăturilor la $Re = 29\,300$ și în figura 13 la $Re = 35\,500$. După cum se vede, punctele celor trei încercări se depărtează destul de puțin de curba medie a repartizării.

În figura 14 se arată dependența diametrului mediu al picăturii, D_m, de simplexul M al pulverizării la $Re = 29\,300$ și $Re = 35\,500$. Deoarece punctele experimentale se deosebesc între ele foarte puțin ca valoare, ele au fost prevăzute, pentru mai multă claritate, cu valorile lor numerice. De aici se vede că o dată cu creșterea lui M respectiv a viscozității gazului, diametrul mediu al picăturilor scade, ceea ce se explică prin creșterea forțelor de frecare ale gazului. Trebuie remarcat că la un număr Reynolds mai mare, variația diametrului mediu al pică-

turilor este mai mică: la o creştere de circa 3 ori a lui M, D_m la $Re = 29\,300$ descreşte cu 9,6%, iar la $Re = 35\,000$ numai cu 5%. Conform expunerii teoretice

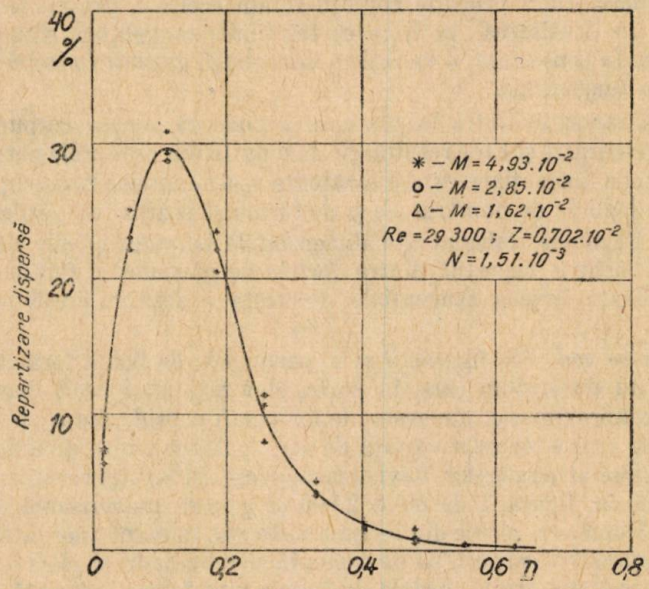


Fig. 12. — Repartizarea dispersă a picăturilor la viscozităţi diferite ale gazului.

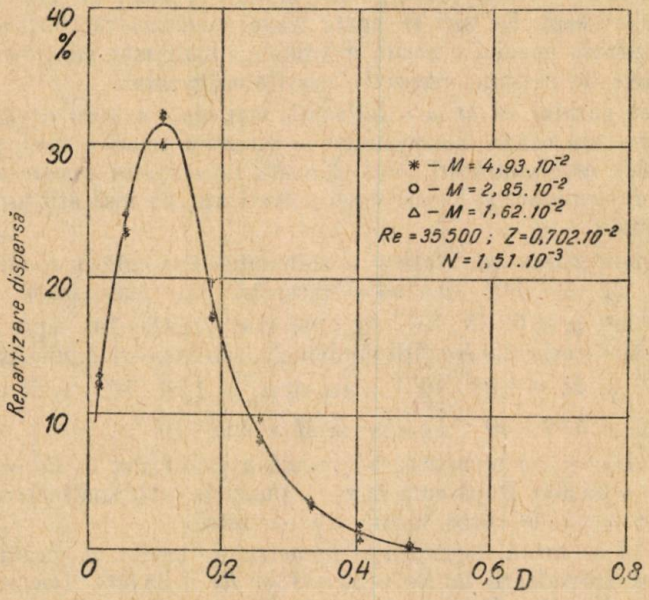


Fig. 13. — Repartizarea dispersă a picăturilor la viscozităţi diferite ale gazului.

de mai sus, în cazul unei noi creşteri a numărului Reynolds trebuie să ne aşteptăm la o şi mai mică influenţă a simplexului M.

Pentru a putea aprecia în mod just influența lui M, s-a cercetat efectul densității gazului respectiv a simplexului $N = \rho_g/\rho$ în care — celelalte condiții rămînînd neschimbate — numai densitatea aerului a fost ridicată prin modificarea

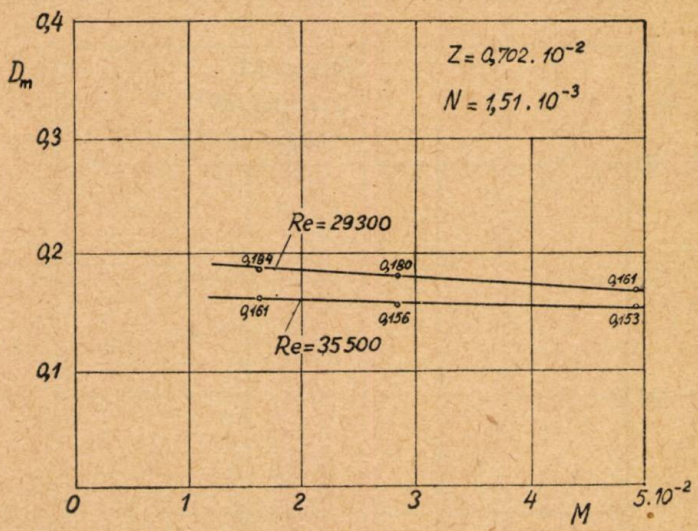


Fig. 14. — Diametrul mediu al picăturii în funcție de viscozitatea gazului.

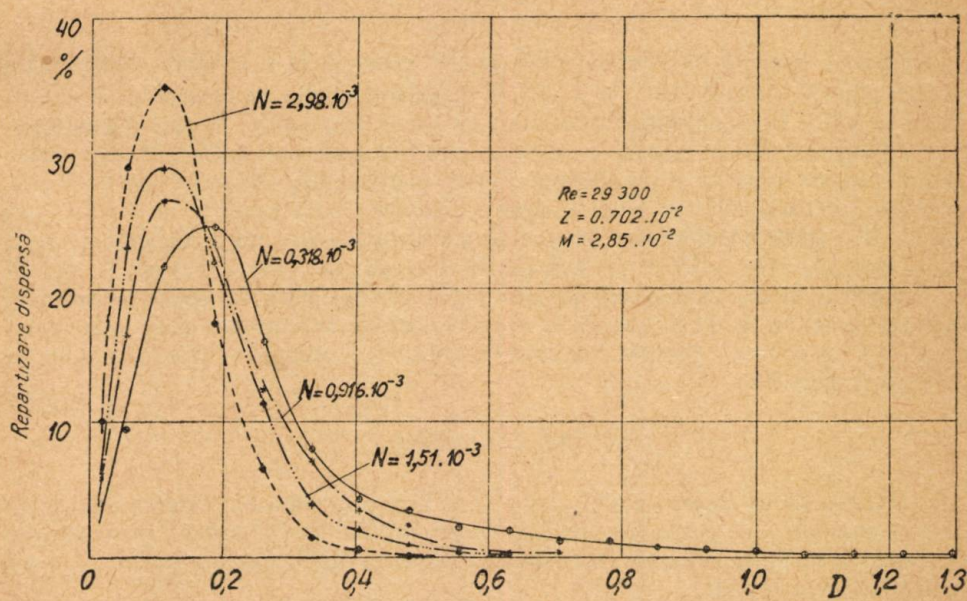


Fig. 15. — Repartizarea picăturilor la diferite densități ale gazului.

presiunii. În figura 15 se arată repartizarea spațială a picăturilor la pulverizări cu o densitate a aerului $\rho_g = 0{,}0257$ și $N = 0{,}318 \cdot 10^{-3}$, $\rho_g = 0{,}074$ și $N = 0{,}916 \cdot 10^{-3}$, $\rho_g = 0{,}122$ și $N = 1{,}51 \cdot 10^{-3}$ și $\rho_g = 0{,}240$ kg s²/m⁴ și $N = 2{,}98 \cdot 10^{-3}$.

De aici se poate vedea că efectul densității gazului respectiv al simplexului M asupra repartizării picăturilor este suficient de mare. În figura 16 este dată dependența de N a diametrului mediu D_m al picăturilor; o dată cu creșterea lui N respectiv a densității gazului scade diametrul mediu al picăturilor, ceea ce se

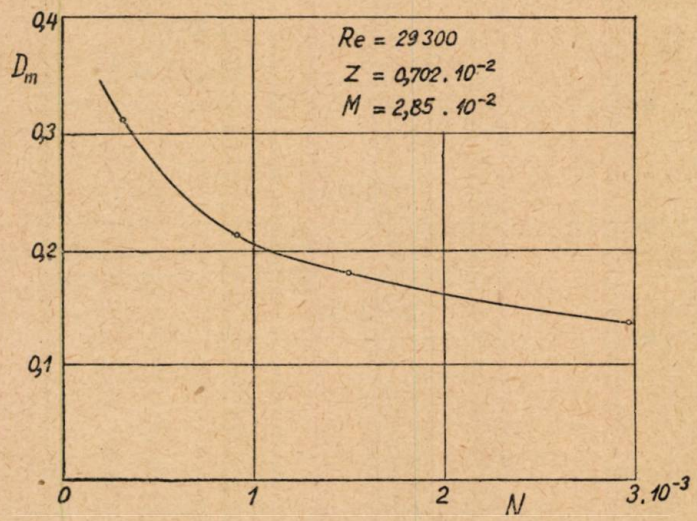


Fig. 16. — Diametrul mediu al picăturii în funcție de densitatea gazului.

explică prin mărirea forțelor de presiune. De exemplu la o creștere de trei ori a simplexului N, de la $1 \cdot 10^{-3}$ la $3 \cdot 10^{-3}$, diametrul mediu al picăturilor descrește cu circa 57%. În comparație cu aceasta, influența simplexului M este foarte mică.

Ajungem astfel la concluzia că la numere Reynolds mai mari, influența viscozității gazului respectiv a simplexului M este relativ mică. De aceea putem efectua încercări aproximative pe modele, fără a ține seama de condiția de similitudine $M' = M''$, adică întrebuințînd un gaz cu o viscozitate mai mică. La numere Reynolds peste 35 000, întîlnite cel mai des în practică, am face o greșeală cu privire la diametrul mediu al picăturii de mai puțin de 5%, dacă la utilizarea aceluiași gaz am folosi un lichid de model cu o viscozitate de trei ori mai mare care, chiar la $\rho' = \rho''$ și $\sigma' = \sigma''$ permite o mărire de nouă ori a modelului și o micșorarea de trei ori a vitezelor.

VI. CONCLUZII

Din descrierea mecanismului pulverizării lichidelor reies forțele care acționează asupra acestora și se pot trage concluzii despre ordinul lor de mărime. De asemenea, au putut fi stabilite ecuațiile care exprimă mișcările lichidului și a gazului precum și condițiile la limită.

Prin introducerea unor unități relative de măsură, sistemul de ecuații care descrie procesul a putut fi adus la formă adimensională. De aici au rezultat criteriile necesare similitudinii dinamice și ecuația criterială pentru diametrul picăturilor, care a putut fi simplificată într-o măsură foarte mare în cazul invariabilității constantelor fizice.

Pentru verificarea legilor de similitudine deduse au fost efectuate încercări comparative pe modele de pulverizare hidraulică. Concordanţa relativ bună a repartizărilor adimensionale spaţiale ale picăturilor şi ale diametrelor medii ale picăturilor dovedeşte că criteriile cuprinse în ecuaţia criterială sînt suficiente pentru obţinerea similitudinii.

Pe bază de cercetare calitativă teoretică şi de experienţe s-a dovedit că la numere Reynolds mai mari, influenţa viscozităţii gazului respectiv a simplexului M asupra mărimii picăturilor formate este relativ mică. De aceea, încercări aproximative pe modele pot fi efectuate fără îndeplinirea lui M, cu condiţii de experimentare simplificate.

Legile de modelare deduse permit modelarea pulverizărilor de lichide şi dau posibilităţi pentru o cercetare experimentală mai uşoară a procesului de pulverizare, în scopul perfecţionării instalaţiilor de pulverizare şi a generalizării rezultatelor experimentale.

Primită la redacţie la 15 august 1955

ИСПЫТАНИЕ НА МОДЕЛЯХ РАСПЫЛЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Целью настоящей работы было установление законов подобия при распылении жидкостей с неизменными физическими постоянными и проверки этих законов экспериментальным путем.

В начале описывается механизм процесса распыления и исследуется образование капель у выхода из канала при различных выходных скоростях жидкости.

Автор выводит заключения, касающиеся влияния различных параметров при различных режимах вытекания (например эффект производимый поверхностным натяжением и силой тяготения при малых скоростях, эффект производимый вязкостью при больших скоростях, влияние сил инерции при больших скоростях, каковые силы при турбулентном течении могут стать главной причиной распадения струи).

При аналитическом трактовании вопроса автор исходит из уравнений механики реальных жидкостей (уравнение Навье-Стокса и уравнение непрерывности), к которым присоединяет и граничные условия (уравнение Лапласа, распределение скоростей жидкости и газа у выходов). Получаются таким образом безразмерные уравнения заключающие в себе критерии подобия.

Заключения, выведенные на основании полученных уравнений, указывают условия, которым должна удовлетворять выбранная жидкость для возможности использования увеличенной модели при уменьшении скоростей.

Для проверки законов подобия были произведены испытания на моделях с двумя сходными между собой установками: в одной была использована вода, а в другой — четыреххлористый углерод.

Констатирована хорошая согласованность между распылением в действительном случае и на моделе.

Опыты подтверждают, что влияние вязкости газа очень мало и что можно производить испытания на моделях, не соблюдая подобия с этой точки зрения.

В заключение автор указывает, что установленные и экспериментально проверенные законы подобия позволяют моделирование распыления жидкостей, что дает возможность значительно облегчить опыты и обобщить результаты измерений.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Каплепадение под действием силы тяготения.
Рис. 2. — Распадение струи жидкости под действием поверхностного натяжения.
Рис. 3. — Турбулентное распадение струи в пустоте.
Рис. 4. — Распадение струи воздуха под атмосферным давлением.
Рис. 5. — Распадение струи воздуха под повышенным давлением в 3 атм.
Рис. 6. — Процесс рассеивания дутьем под действием сил газа.
Рис. 7. — Струи сходно производимых распылений при $Re = 41\,800$, $Z = 0{,}39 \cdot 10^{-2}$, $N = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ и $M = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$.
Рис. 8. — Струи сходно производимых распылений при $Re = 59\,100$, $Z = 0{,}39 \cdot 10^{-2}$, $N = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ и $M = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$.
Рис. 9. — Дисперсное распределение капель при двух сходно производимых распылениях.
Рис. 10. — Дисперсное распределение капель при двух сходно производимых распылениях.
Рис. 11. — Средний диаметр капли в зависимости от числа Рейнольдса.
Рис. 12. — Дисперсное распределение капель при различных вязкостях газа.
Рис. 13. — Дисперсное распределение капель при различных вязкостях газа.
Рис. 14. — Средний диаметр капли в зависимости от вязкости газа.
Рис. 15. — Распределение капель при различных плотностях газа.
Рис. 16. — Средний диаметр капли в зависимости от плотности газа.

ESSAIS DE PULVÉRISATION DES FLUIDES À L'AIDE DE MODÈLES EXPÉRIMENTAUX

(RÉSUMÉ)

Le but de ce travail est d'établir les lois de similitude pour la pulvérisation des fluides aux constantes physiques invariables et de vérifier ces lois par voie expérimentale.

Pour commencer, on décrit le mécanisme du processus de pulvérisation et l'on étudie la formation des gouttes à la sortie du canal, pour différentes vitesses de sortie du liquide.

On obtient des données ayant trait à l'influence des divers paramètres qui interviennent, pour différents régimes d'écoulement (effet de la tension superficielle et de la force de gravitation à des vitesse réduites, effet de la viscosité à des vitesses augmentées, influence des forces d'inertie à de grandes vitesses qui, au cas de l'écoulement turbulent, peuvent devenir la principale cause de décomposition du jet).

L'Auteur traite le problème au point de vue analytique en partant des équations de la mécanique des fluides réels (équation de Navier-Stokes et continuité) auxquelles il associe les conditions à la limite (équation de Laplace, répartition des vitesses du liquide et du gaz aux points de sortie). On obtient ainsi les équations adimensionnelles qui comprennent les critériums de similitude.

En raison des équations établies, l'Auteur indique les conditions que doit remplir un liquide choisi en vue d'utiliser un modèle agrandi pour le cas de la réduction des vitesses.

Dans le but de vérifier les lois de similitude, des essais ont été effectués sur des modèles avec deux installations semblables. Pour la première, le liquide utilisé a été l'eau, pour la deuxième, le tétrachlorure de carbone.

Les résultats ont prouvé un accord satisfaisant entre les pulvérisations, pour le phénomène réel et pour le modèle expérimental.

La expériences confirment la faible influence de la viscosité du gaz et le fait que l'on peut effectuer les essais à l'aide de modèles approximatifs, en négligeant, à ce point de vue, la similitude.

En conclusion, les lois de similitude établies et vérifiées expérimentalement permettent de déterminer les types de pulvérisation des liquides, facilitant ainsi les expériences et permettant de généraliser les résultats des mesures effectuées.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Formation des gouttes sous l'action de la gravitation.
Fig. 2. — Décomposition d'une veine de liquide sous l'action de la tension superficielle.
Fig. 3. — Décomposition turbulente de la veine dans le vide.
Fig. 4. — Décomposition de la veine à la pression atmosphérique dans l'air.
Fig. 5. — Décomposition de la veine à une surpression de 3 ata dans l'air.
Fig. 6. — Le processus de dispersion par fuite sous l'action des forces du gaz.
Fig. 7. — Veines de pulvérisation aménagées d'une manière similaire pour $Re = 41\,800$, $Z = 0{,}39 \cdot 10^{-2}$, $N = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ et $M = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$.
Fig. 8. — Veines de pulvérisation aménagées d'une manière similaire pour $Re = 59\,100$ $Z = 0{,}39 \cdot 10^{-2}$, $N = 1{,}2.10^{-3}$ et $M = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$.
Fig. 9. — Répartition disperse des gouttes pour deux pulvérisations aménagées d'une manière similaire.
Fig. 10. — Répartition disperse des gouttes pour deux pulvérisations aménagées d'une manière similaire.
Fig. 11. — Diamètre moyen de la goutte en fonction du nombre de Reynolds.
Fig. 12. — Répartition disperse des gouttes pour différentes viscosités du gaz.
Fig. 13. — Répartition disperse des gouttes pour différentes viscosités du gaz.
Fig. 14. — Diamètre moyen de la goutte en fonction de la viscosité du gaz.
Fig. 15. — Répartition des gouttes pour différentes densités du gaz.
Fig. 16. — Diamètre moyen de la goutte en fonction de la densité du gaz.

BIBLIOGRAFIE

1. Th. Lohnstein, *Zur Theorie des Abtropfens mit besonderer Rücksicht auf die Bestimmung der Kapillarkonstanten durch Tropfenversuche.* Annalen der Physik, 1906, vol. 20.
2. A. Haenlein, *Ueber den Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1931.
3. C. Weber, *Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1931.
4. E. Hochschwender, *Ueber das Zerblasen von Wassertropfen im Luftstrom und die Wasserfalltheorie der Gewitter.* Dissertation. Heidelberg, 1919.
5. M. V. Kirpicev, *Teoriia podobiia.* Akademia Nauk SSSR, 1953.
6. L. S. Eugensson, *Modelirovanie.* Gosudarstvennoe izdatelstvo Sovetskaia Nauka, Moscova, 1952.
7. M. Weber, *Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen unter besonderer Berücksichtigung schiffbautechnischer Anwendung.* Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1918.
8. W. Ohnesorge, *Die Bildung von Tropfen an Düsen und die Auflösung flüssiger Strahlen.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1936.
9. K. Lindner, *Modellversuche an Druckrohrleitungen.* Wasserwirtschaft, 1934.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

AEROMECANICA

ASUPRA STABILITĂŢII DINAMICE A ELICOPTERULUI CU ROTOARE COAXIALE CONTRAROTATIVE

DE

AL. MARINESCU

NOTAŢII

$Oxyz$ — sistem de axe de coordonate rigid legat de corpul elicopterului

$R_1 = R_2 = R$ — razele rotoarelor amonte, aval

r — raza unui element de pală faţă de axul de rotaţie

h_1, h_2 — distanţele centrului de greutate respectiv faţă de planele articulaţiilor rotorului amonte şi aval

d_1, d_2 — distanţele punctelor neutre faţă de planele articulaţiilor

a — distanţa articulaţiilor faţă de axul de rotaţie *)

t_p — profunzimea palei (constantă)

λ — grad de permeabilitate = $\dfrac{\text{viteza aerului paralelă cu axul rotorului}}{\text{viteza periferică a palei}}$

$x = \dfrac{r}{R}$

$\zeta_1, \zeta_2 = \dfrac{h_1}{R}, \dfrac{h_2}{R}$

$z = 2$ — numărul de pale al unui singur rotor

$\sigma = \dfrac{Zt_p}{\pi R}$ — soliditatea unui singur rotor

$B = 1 - \dfrac{t_p}{2R}$ — factor de scădere a portanţei la capătul palei

w — viteza indusă axială

V_x, V_y, V_z — viteze de translaţie a elicopterului în direcţiile axelor x, y, z

$\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z$ — perturbaţiile vitezelor în direcţia axelor x, y, z

Ω_x, Ω_y, Ω_z — viteze de rotaţie a elicopterului în jurul axelor x, y, z

$\Delta\Omega_x, \Delta\Omega_y, \Delta\Omega_z$ — perturbaţiile vitezelor de rotaţie în jurul axelor x, y, z

$\omega_1 = \omega, \omega_2 = -\omega$ — viteze unghiulare constante ale rotoarelor amonte, aval

ω_0 — frecvenţa proprie a palei (legată elastic)

$U = \omega R$ — viteza periferică a palei

$\xi\omega R$ — viteza aerului care loveşte elementul de pală paralel cu axul rotorului (fig. 2)

$\eta\omega R$ — viteza aerului care loveşte elementul de pală în planul de rotaţie

R_{t_1}, R_{t_2} — forţe rezultante a rotoarelor amonte, aval

R_x, R_y, R_z — forţe aerodinamice în direcţia axelor x, y, z

G_x, G_y, G_z — componentele greutăţii G a elicopterului de-a lungul axelor x, y, z

M_x, M_y, M_z — momente a forţelor aerodinamice în jurul axelor x y z

*) Legătura elastică a palei de arbore se consideră înlocuită cu o articulaţie în planul de bătaie şi un resort [1].

M_s — momentul forțelor aerodinamice de pe pală în raport cu punctul $r = a$

M_g — momentul greutății palei în raport cu punctul $r = a$

φ_x, φ_y, φ_z — unghiuri de poziție a axelor x, y, z față de direcția verticalei

$\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$, $\Delta\varphi_z$ — perturbații ale unghiurilor de poziție

θ_{01}, θ_{02} — unghiuri de așezare ale profilelor palelor la $x = a$, amonte, aval

$\theta = \theta_0 + \theta_1 x$ — unghiul de așezare al profilului palei

θ_{07}^1, θ_{07}^2 — unghiuri de așezare ale profilelor palelor la $x = 0{,}7$ astfel ca cuplurile rezistente ale rotoarelor să se anuleze

i_r — unghiul total de incidență al profilului palei

α_{em} — unghi efectiv de incidență considerînd așezarea $\theta_{07} = \theta_{07}^1 + \theta_{07}^2$ și $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

β — unghiul de bătaie al palei

ψ — unghiul azimutal al palei măsurat dinspre înapoi

ψ_r — unghiul față de direcția vitezei de înaintare sub care se atinge maximul unghiului de bătaie

C_a' — panta curbei de portanță a profilului palei

C_z — coeficientul de portanță al profilului palei

C_T — coeficient de tracțiune al unui rotor

I_x, I_y, I_z — momente de inerție ale elicopterului față de axele x, y, z

l — momentul de inerție al palei față de un ax trecînd prin $r = a$

K — constanta de rigiditate a palei

$\gamma = \dfrac{\rho C_a' t_p R}{I}$ — constanta masei palei

m_p — masa palei pe unitatea de lungime

ρ — densitatea

t — timpul

g — accelerația gravitației.

În lucrarea de față, urmînd metoda indicată într-o lucrare anterioară [1], vom cerceta stabilitatea dinamică a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative care tinde să devină azi, foarte răspîndit. Palele rotoarelor se presupun legate elastic de arborii ce le antrenează, și fuselajul fără ampenaje.

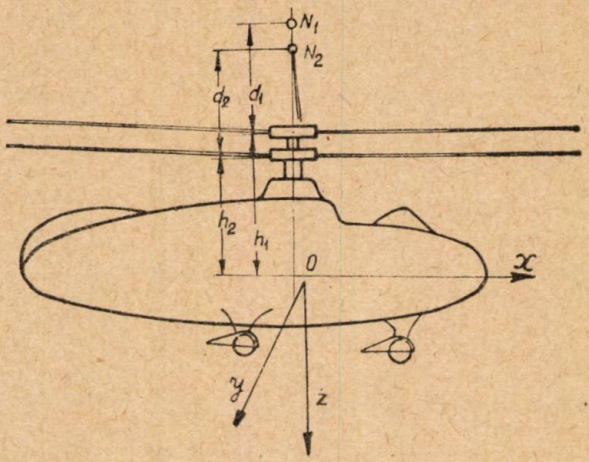


Fig. 1

Față de sistemul $0x\,y\,z$ legat de elicopter (fig. 1) în ipoteza că rotoarele sînt identice ca masă și au viteze unghiulare egale și de sens contrar *), vom reține

*) Momentele giroscopice ale rotoarelor considerate cu aproximație ca rigide, se anulează reciproc.

următorul sistem de ecuații diferențiale al mișcării neperturbate

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{g}{G}(R_x + G\cos\varphi_x) + \Omega_z V_y - \Omega_y V_z = F_1(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y),$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{g}{G}(R_y + G\cos\varphi_y) + \Omega_x V_z - \Omega_z V_x = F_2(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y),$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{g}{G}(R_z + G\cos\varphi_z) + \Omega_y V_x - \Omega_x V_y = F_3(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y),$$

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{I_z - I_y}{I_x}\cdot\Omega_y\Omega_z = F_4(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y), \tag{1}$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} = \frac{M_y}{I_y} + \frac{I_x - I_z}{I_y}\cdot\Omega_z\Omega_x = F_5(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y),$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{M_z}{I_z} + \frac{I_y - I_x}{I_z}\cdot\Omega_x\Omega_y = F_6(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y),$$

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = \frac{\Omega_y\cos\varphi_z - \Omega_z\cos\varphi_y}{\sin\varphi_x} = F_7(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y),$$

$$\frac{d\varphi_y}{dt} = \frac{\Omega_z\cos\varphi_x - \Omega_x\cos\varphi_z}{\sin\varphi_y} = F_8(V_x, \ldots, \Omega_x, \ldots, \varphi_y).$$

Deoarece prin ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z, $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, $\Delta\Omega_z$, $\Delta\varphi_y$, $\Delta\varphi_x$ am însemnat perturbațiile mărimilor V_x, V_y, V_z, Ω_x, Ω_y, Ω_z, φ_x, φ_y, admițînd că funcțiile F_1, $F_2, \ldots, F_8$ sînt dezvoltabile în serie Taylor, sistemul de ecuații diferențiale al mișcării perturbate, în primă aproximație, se poate scrie

$$\frac{d\Delta V_x}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\varphi_x}\Delta\varphi_x,$$

$$\frac{d\Delta V_y}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\varphi_x}\Delta\varphi_x, \tag{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\Delta\varphi_x}{dt} = \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_8}{\partial \Delta\varphi_x}\Delta\varphi_x.$$

Ne ocupăm de evoluţia de bază cea mai importantă pentru stabilitate, anume aceea de punct fix definită de

$$V_x = 0 \quad , \quad V_y = 0 \quad , \quad V_z = 0,$$
$$\Omega_x = 0 \quad , \quad \Omega_y = 0 \quad , \quad \Omega_z = 0, \tag{3}$$
$$\varphi_x = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_y = \frac{\pi}{2}.$$

Apare clară acum stabilirea expresiilor funcţiilor $F_1, F_2, \ldots, F_8$ de variabilele $\Delta V_x, \Delta V_y, \ldots, \Delta\varphi_y$.

După cum am arătat în [1], variabila $\Delta\Omega_z$ nu introduce schimbări esenţiale iar influenţa lui ΔV_z se traduce printr-o amortizare aperiodică.

În acest mod sistemul (2) se poate reduce de la 8 la 6 ecuaţii.

De asemenea, în expresiile funcţiilor $F_1, F_2, \ldots, F_8$ variabilele $\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y$ intră prin termeni aditivi aşa că esenţialul problemei se reduce de fapt la găsirea acelor termeni care depind numai de $\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta\Omega_x, \Delta\Omega_y$, adică reacţiunile aerodinamice în zbor perturbat $\Delta R_x, \Delta R_y, \Delta M_x, \Delta M_y$.

Afectăm cu indicele 1 mărimile ce se referă la rotorul amonte şi cu 2 pe cele ce se referă la rotorul aval.

Coeficienţii Fourier $a_0^{1,2}$, $a_1^{1,2}$, $b_1^{1,2}$ ai unghiurilor de bătaie pentru cele două rotoare stau în următoarea relaţie cu coeficienţii Fourier $A_0^{1,2}$, $A_1^{1,2}$, $B_1^{1,2}$, ai momentelor forţelor aerodinamice de pe pale în raport cu axe ce trec prin secţiunile de încastrare [1]:

$$a_0^{1,2} = \frac{\gamma}{2\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} A_0^{1,2} - \frac{M_g}{I\Omega_0^2},$$
$$a_1^{1,2} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} A_1^{1,2}, \tag{4}$$
$$b_1^{1,2} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} B_1^{1,2},$$

în care

$$A_0^{1,2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B \{\theta^{1,2}[\eta^{1,2}]^2 + \xi^{1,2}\eta^{1,2}\}\, x d\psi dx,$$
$$A_1^{1,2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B \{\theta^{1,2}[\eta^{1,2}]^2 + \xi^{1,2}\eta^{1,2}\}\, x\cos\psi d\psi dx, \tag{5}$$
$$B_1^{1,2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B \{\theta^{1,2}[\eta^{1,2}]^2 + \xi^{1,2}\eta^{1,2}\}\, x\sin\psi d\psi dx$$

și

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I} \quad ; \quad \Omega_0^2 = \omega^2 + \omega_0^2 \quad ; \quad \gamma = \frac{\rho C_a t_p \cdot R}{I}.$$

Pentru cele două cazuri de translație cu vitezele ΔV_x, ΔV_y respectiv de roto-

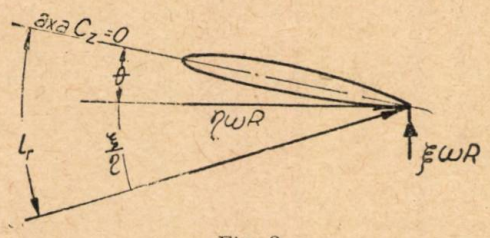


Fig. 2

translație ca urmare a rotirii elicopterului cu vitezele $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, mărimile η, ξ (fig. 2) intrînd în expresiile (5) sînt

$$\eta^1_{x,y} = x + \left(\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right) \sin\psi,$$

$$\xi^1_{x,y} = \lambda_1 - \frac{x}{\omega} \cdot \frac{d\beta_1}{dt} - \left(\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right) \beta_1 \cos\psi,$$

$$\eta^2_{x,y} = x + \left(\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right) \sin\psi,$$

$$\xi^2_{x,y} = \lambda_2 - \frac{x}{\omega} \frac{d\beta_2}{dt} - \left(\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right) \beta_2 \cos\psi,$$

și (6)

$$\eta^1_{x,y} = x + \zeta_1 \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right) \sin\psi,$$

$$\xi^1_{x,y} = \lambda_1 - \frac{x}{\omega} \frac{d\beta_1}{dt} - \zeta_1 \beta_1 \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right) \cos\psi - \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right) x \cos\psi,$$

$$\eta^2_{x,y} = x + \zeta_2 \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right) \sin\psi,$$

$$\xi^2_{x,y} = \lambda_2 - \frac{x}{\omega} \frac{d\beta_2}{dt} - \zeta_2 \beta_2 \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right) \cos\psi - \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right) x \cos\psi,$$

unde

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{R} \quad , \quad \zeta_2 = \frac{h_2}{R}.$$

Soluțiile sistemului (4) vor fi respectiv pentru rotorul amonte și aval în cazul translației a^1_0, a^1_{1x}, a^1_{1y}, b^1_{1x}, b^1_{1y} și a^2_0, a^2_{1x}, a^2_{1y}, b^2_{1x}, b^2_{1y}, iar în cazul rototranslației $\bar{a}^1_0$, $\bar{a}^1_{1x}$, $\bar{a}^1_{1y}$, $\bar{b}^1_{1x}$, $\bar{b}^1_{1y}$, și $\bar{a}^2_0$, $\bar{a}^2_{1x}$, $\bar{a}^2_{1y}$, $\bar{b}^2_{1x}$, $\bar{b}^2_{1y}$.

Vom avea, făcînd toate calculele pentru palele cu torsiune, și $Mg \sim 0$

$$a_0^1 = \bar{a}_0^1 = n\left(\frac{\lambda_1}{3}B^3 + \frac{\theta_{01}}{4}B^4 + \theta_{11}\frac{B^5}{5}\right),$$

$$a_0^2 = \bar{a}_0^2 = n\left(\frac{\lambda_2}{3}B^3 + \frac{\theta_{02}}{4}B^4 + \theta_{12}\frac{B^5}{5}\right),$$

$$(a_{1x}^1, a_{1y}^1) = \frac{1}{q}\left\{m \cdot n\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda_1}{3}B^3 + \frac{\theta_{01}}{4}B^4 + \theta_{11}\frac{B^5}{5}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\theta_{01}B^7 + \frac{1}{8}\lambda_1 B^6 + \frac{1}{8}\theta_{11}B^8\right\}\left\{\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right\},$$

$$(a_{1x}^2, a_{1y}^2) = \frac{1}{q}\left\{m \cdot n\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda_2}{3}B^3 + \frac{\theta_{02}}{4}B^4 + \theta_{12}\frac{B^5}{5}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\theta_{02}B^7 + \frac{1}{8}\lambda_2 B^6 + \frac{1}{8}\theta_{12}B^8\right\}\left\{\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right\},$$

$$(\bar{a}_{1x}^1, \bar{a}_{1y}^1) = \frac{1}{q}\left\{\frac{B^4}{4}\left(2\theta_{11}\frac{B^4}{4}\zeta_1 + \frac{2}{3}\theta_{01}B^3\zeta_1 + \frac{B^2}{2}\zeta_1\lambda_1\right) + \right.$$
$$\left. + m\left(n\frac{B^6}{9}\zeta_1\lambda_1 + n\frac{\theta_{01}B^7}{12}\zeta_1 + n\theta_{11}\frac{B^8}{15}\zeta_1 + \frac{B^4}{4}\right)\right\}\left\{\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\},$$

$$(\bar{a}_{1x}^2, \bar{a}_{1y}^2) = \frac{1}{q}\left\{\frac{B^4}{4}\left(2\theta_{12}\frac{B^4}{4}\zeta_2 + \frac{2}{3}\theta_{02}B^3\zeta_2 + \frac{B^2}{2}\zeta_2\lambda_2\right) + \right. \tag{7}$$
$$\left. + m\left(n\frac{B^6}{9}\zeta_2\lambda_2 + n\frac{\theta_{02}B^7}{12}\zeta_2 + n\theta_{12}\frac{B^8}{15}\zeta_2 + \frac{B^4}{4}\right)\right\}\left\{\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\},$$

$$(b_{1x}^1, b_{1y}^1) = \frac{1}{q}\left\{-m\left(\frac{2}{3}\theta_{01}B^3 + \frac{\lambda_1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\theta_{11}B^4\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}B^7 n\left(\frac{\lambda_1}{3}B^3 + \frac{\theta_{01}}{4}B^4 + \theta_{11}\frac{B^5}{5}\right)\right\}\left\{\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right\},$$

$$(b_{1x}^2, b_{1y}^2) = \frac{1}{q}\left\{-m\left(\frac{2}{3}\theta_{02}B^3 + \frac{\lambda_2}{2}B^2 + \frac{1}{2}\theta_{12}B^4\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}B^7 n\left(\frac{\lambda_2}{2}B^3 + \theta_{02}\frac{B^4}{4} + \theta_{12}\frac{B^5}{5}\right)\right\}\left\{\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right\},$$

$$(\bar{b}_{1x}^1, \bar{b}_{1y}^1) = \frac{1}{q}\left\{\frac{B^4}{4}\left[\zeta_1 n\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda_1}{3}B^3 + \theta_{01}\frac{B^4}{4} + \theta_{11}\frac{B^5}{5}\right) + \frac{B^4}{4}\right] - \right.$$
$$\left. - m\left(2\theta_{11}\frac{B^4}{4}\zeta_1 + \frac{2}{3}\theta_{01}B^3\zeta_1 + \frac{B^2}{2}\lambda_1\zeta_1\right)\right\}\left\{\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\},$$

$$(\bar{b}_{1x}^2, \bar{b}_{1y}^2) = \frac{1}{q}\left\{\frac{B^4}{4}\left[\zeta_2 n\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda_2}{3}B^3 + \frac{\theta_{02}}{4}B^4 + \theta_{12}\frac{B^5}{5}\right) + \frac{B^4}{4}\right] - \right.$$
$$\left. - m\left(2\theta_{12}\frac{B^4}{4}\zeta_2 + \frac{2}{3}\theta_{02}B^3\zeta_2 + \frac{B^2}{2}\lambda_2\zeta_2\right)\right\}\left\{\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\},$$

unde vom considera

$$n = \frac{\gamma}{2\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\ ;\ m = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{2}{\gamma}\ ;\ q = m^2 + \frac{B^3}{16} \text{ și } \theta_{12} = \theta_{11} = \theta_1. \tag{8}$$

Cînd palele n-au torsiune vom face în (7), $\theta_{12} = \theta_{11} = \theta_1 = 0$.

Reacțiunile căutate vor apărea acum ca sume de termeni liniari față de ΔV_x, ΔV_y, $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$.

Într-adevăr, scriind rezultatele rotoarelor amonte și aval

$$\begin{aligned} R_{t_1} &= \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \omega^2 \beta_1 m_p\, r\, d\psi\, dr = z\,\omega^2 M_p\, a_0^1 \\ R_{t_2} &= \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \omega^2 \beta_2 m_p\, r\, d\psi\, dr = z\,\omega^2 M_p\, a_0^2, \end{aligned} \tag{9}$$

unde

$M_p = \int_0^R m_p\, r\, dr$, și interpretîndu-le ca forțe în spațiu, [1], ce trec prin punctele

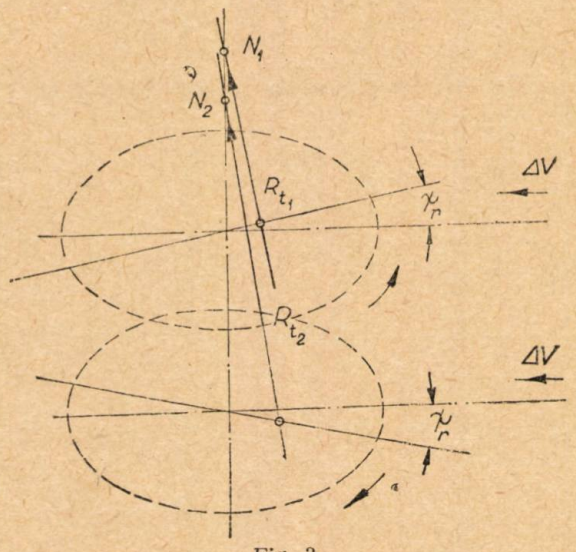


Fig. 3

neutre N_1, N_2 (fig. 3) definite față de planul rotoarelor prin

$$d_1 \sim \frac{a}{2\,a_0^1}\ ;\quad d_2 \sim \frac{a}{2\,a_0^2} \tag{10}$$

coeficienții (7), nu reprezintă altceva decît înclinările proiecțiilor forțelor R_t față de două plane perpendiculare ce trec prin axul de rotație*).

*) Mai exact, prin axele de comandă ale rotoarelor însă acestea se pot confunda aproximativ cu axa de rotație din cauza unghiului de comandă foarte mic.

Scriind relaţiile (7) sub forma condensată

$$
\begin{aligned}
a^1_{1x} &= K^1_1 \frac{\Delta V_x}{U} & a^1_{1y} &= K^1_1 \frac{\Delta V_y}{U}, \\
a^2_{1x} &= K^2_1 \frac{\Delta V_x}{U} & a^2_{1y} &= K^2_1 \frac{\Delta V_y}{U}, \\
\bar{a}^1_{1x} &= \overline{K}^1_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} & \bar{a}^1_{1y} &= \overline{K}^1_1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega}, \\
\bar{a}^2_{1x} &= \overline{K}^2_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} & \bar{a}^2_{1y} &= \overline{K}^2_1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega}, \\
b^1_{1x} &= K^1_2 \frac{\Delta V_x}{U} & b^1_{1y} &= K^1_2 \frac{\Delta V_y}{U}, \\
b^2_{1x} &= K^2_2 \frac{\Delta V_x}{U} & b^2_{1y} &= K^2_2 \frac{\Delta V_y}{U}, \\
\bar{b}^1_{1x} &= \overline{K}^1_2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} & \bar{b}^1_{1y} &= \overline{K}^1_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega}, \\
\bar{b}^2_{1x} &= \overline{K}^2_2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} & \bar{b}^2_{1y} &= \overline{K}^2_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

şi cum planul de control al rotoarelor este aproape paralel cu planul xOy, reacţiunile căutate sînt respectiv

$$
\begin{aligned}
\Delta R_x &= R_{t_1}\left\{ -K^1_1 \frac{\Delta V_x}{U} + \overline{K}^1_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} - K^1_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}^1_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + \\
&+ R_{t_2}\left\{ -K^2_1 \frac{\Delta V_x}{U} + \overline{K}^2_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} + K^2_2 \frac{\Delta V_y}{U} + \overline{K}^2_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\}, \\
\Delta R_y &= R_{t_1}\left\{ -K^1_1 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}^1_1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} + K^1_2 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}^1_2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} + \\
&+ R_{t_2}\left\{ -K^2_1 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}^2_1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - K^2_2 \frac{\Delta V_x}{U} + \overline{K}^2_2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\}, \\
\Delta M_x &= (h_1 + d_1) R_{t_1}\left\{ -K^1_1 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}^1_1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} + K^1_2 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}^1_2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} + \\
&+ (h_2 + d_2) R_{t_2}\left\{ -K^2_1 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}^2_1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - K^2_2 \frac{\Delta V_x}{U} + \overline{K}^2_2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\}, \\
\Delta M_y &= (h_1 + d_1) R_{t_1}\left\{ K^1_1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}^1_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} + K^1_2 \frac{\Delta V_y}{U} + \overline{K}^1_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + \\
&+ (h_2 + d_2) R_{t_2}\left\{ K^2_1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}^2_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} - K^2_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}^2_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

În calculul expresiilor (12) trebuie remarcat că singura dificultate este determinarea gradelor de permeabilitate λ_1, λ_2 care intră în expresiile coeficienților a, b.

Datorită faptului că rotoarele sînt apropiate și deci n-ar exista deformări sensibile a venei de aer ce străbate rotorul, putem considera viteza de trecere prin rotoare aceeași, rotorul aval fiind sub influența rotației celui din amonte.

Deoarece însă ipoteza lui Th. Theodorsen [2] exprimă mai corect interacțiunea celor două rotoare o vom accepta în cele ce urmează.

Aproximația pe care o facem este că înlocuim în determinarea coeficientului de masă, [2],

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(x, \psi)\, x\, d\psi\, dx, \tag{13}$$

unde $F(x, \psi)$ este funcția circulației, viteza de trecere prin rotor w exactă, cu una medie lucru care se utilizează frecvent în cazul elicopterelor.

Cunoscînd coeficientul de masă, cu condiția ca cuplurile celor două rotoare să fie egale, se obțin următoarele viteze de trecere prin rotorul amonte respectiv aval

$$w_1 = w\left(1 + \Gamma \frac{1}{2} \varkappa \operatorname{tg}^2 i\right),$$
$$w_2 = w\left(1 - \Gamma \frac{1}{2} \varkappa \operatorname{tg}^2 i\right), \tag{14}$$

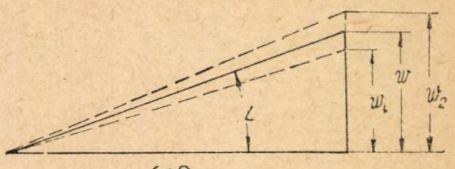


Fig. 4

w fiind jumătate din viteza la infinit a curentului din spatele ambelor rotoare iar i unghiul din figura 4.

În calcule pornim cu următoarea valoare dată de relația obținută prin teorema impulsului

$$w = -\frac{\omega R}{2} \sqrt{2 C_{T_t}}, \tag{15}$$

unde

$$C_{T_t} = C_{T_1} + C_{T_2} = \frac{z C'_a}{\pi R} \int_{\frac{a}{R}}^{R} t_p\, x^2\, \alpha_{em}\, dx \sim \frac{G}{\frac{\rho}{2} \pi (R\omega)^2 R^2}. \tag{16}$$

Cu valoarea lui w astfel dedusă, din relația*)

$$\varkappa = 1 - 0{,}785 \frac{w}{U} \tag{17}$$

deducem coeficientul de masă $\varkappa$. Cînd nu sînt cunoscute prin încercări așezările θ^1_{07}, θ^2_{07} se pot determina aproximativ din relația (16) și aceea a egalității cuplurilor rezistente a rotoarelor

$$\lambda_1 (\theta^1_{07}, -\lambda_1) \sim \lambda_2 (\theta^2_{07} - \lambda_2).$$

*) Expresia coeficientului $\varkappa$ este dedusă după diagramele lui Theodorsen [2] pentru elici coaxiale cu cîte două pale.

Avînd complet cunoscute funcţiile care ne interesau, ecuaţiile (2) ale mişcării perturbate devin

$$\frac{d\Delta V_x}{dt} = \frac{g}{G} R_{t_1}\left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U} - K_2^1 \frac{\Delta V_y}{U} + \overline{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} - \overline{K}_2^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} +$$

$$+ \frac{g}{G} R_{t_2}\left\{ -K_1^2 \frac{\Delta V_x}{U} + K_2^2 \frac{\Delta V_y}{U} + \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} + \overline{K}_2^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} -$$

$$- g\Delta\varphi_y \frac{d\Delta V_y}{dt} = \frac{g}{G} R_{t_1}\left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} + K_2^1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - \right.$$

$$\left. - \overline{K}_2^1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} + \frac{g}{G} R_{t_2}\left\{ -K_1^2 \frac{\Delta V_y}{U} - K_2^2 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} + \overline{K}_x^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} +$$

$$+ g\Delta\varphi_x, \frac{d\Delta \Omega_x}{dt} = \frac{h_1 + d_1}{I_x} R_{t_1}\left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} + K_2^1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - \right. \tag{18}$$

$$\left. - \overline{K}_2^1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} + \frac{h_2 + d_2}{I_x} R_{t_2}\left\{ -K_1^2 \frac{\Delta V_y}{U} - K_2^2 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} + \right.$$

$$\left. + \overline{K}_2^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\}, \frac{d\Delta \Omega_y}{dt} = \frac{h_1 + d_1}{I_y} R_{t_1}\left\{ K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U} + K_2^1 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} + \right.$$

$$\left. + \overline{K}_2^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + \frac{h_2 + d_2}{I_y} R_{t_2}\left\{ K_1^2 \frac{\Delta V_x}{U} - K_2^2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} - \right.$$

$$\left. - \overline{K}_2^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\}, \frac{d\Delta\varphi_x}{dt} = \Delta \Omega_x \quad ; \quad \frac{d\Delta\varphi_y}{dt} = \Delta \Omega_y .$$

Utilizăm notaţiile adimensionale

$$\overline{\Delta V}_x = \frac{\Delta V_x}{U} ; \quad \overline{\Delta V}_y = \frac{\Delta V_y}{U} ; \quad \overline{\Delta \Omega}_x = \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} ; \quad \overline{\Delta \Omega}_y = \frac{\overline{\Delta \Omega}_y}{\omega},$$

$$\bar{t} = \frac{g}{U} t ; \quad \bar{I}_x = \frac{gI_x}{GR^2} ; \quad \bar{I}_y = \frac{gI_y}{GR^2} ; \quad \frac{U\omega}{g} = \sigma$$

cu care sistemul (18) devine

$$\frac{d\Delta \overline{V}_x}{d\bar{t}} = -\alpha_1 \Delta \overline{V}_x - \alpha_2 \Delta \overline{V}_y + \alpha_3 \Delta \overline{\Omega}_y - \alpha_4 \Delta \overline{\Omega}_x - \overline{\alpha}_1 \Delta \overline{V}_x +$$

$$+ \overline{\alpha}_2 \Delta \overline{V}_y + \overline{\alpha}_3 \Delta \overline{\Omega}_y + \overline{\alpha}_4 \Delta \overline{\Omega}_x - \Delta \overline{\varphi}_y ,$$

$$\frac{d\Delta \overline{V}_y}{d\bar{t}} = -\alpha_1 \Delta \overline{V}_y + \overline{\alpha}_2 \Delta \overline{V}_x - \overline{\alpha}_3 \Delta \overline{\Omega}_x - \alpha_4 \Delta \overline{\Omega}_y - \overline{\alpha}_1 \Delta \overline{V}_y -$$

$$- \overline{\alpha}_2 \Delta \overline{V}_x - \overline{\alpha}_3 \Delta \overline{\Omega}_x + \overline{\alpha}_4 \Delta \overline{\Omega}_y + \Delta \overline{\varphi}_x , \tag{19}$$

$$\frac{d\Delta \overline{\Omega}_x}{d\bar{t}} = -\beta_1 \Delta \overline{V}_y + \beta_2 \Delta \overline{V}_x - \beta_3 \Delta \overline{\Omega}_x - \beta_4 \Delta \overline{\Omega}_y - \overline{\beta}_1 \Delta \overline{V}_y -$$

$$- \overline{\beta}_2 \Delta \overline{V}_x - \overline{\beta}_3 \Delta \overline{\Omega}_x + \overline{\beta}_4 \Delta \overline{\Omega}_y ,$$

$$\frac{d\Delta \overline{\Omega}_y}{d\bar{t}} = \beta_1' \Delta \overline{V}_x + \beta_2' \Delta \overline{V}_y - \beta_3' \Delta \overline{\Omega}_y + \beta_4' \Delta \overline{\Omega}_x + \overline{\beta}_1' \Delta \overline{V}_x -$$

$$- \overline{\beta}_2' \Delta \overline{V}_y - \overline{\beta}_3' \Delta \overline{\Omega}_y - \overline{\beta}_4' \Delta \overline{\Omega}_x ,$$

$$\frac{d\Delta \overline{\varphi}_x}{d\bar{t}} = \sigma \Delta \overline{\Omega}_x \qquad \frac{d\Delta \overline{\varphi}_y}{d\bar{t}} = \sigma \Delta \overline{\Omega}_y ,$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{R_{t_1}}{G} K_1^1; \quad \alpha_2 = \frac{R_{t_1}}{G} K_2^1; \quad \alpha_3 = \frac{R_{t_1}}{G} \bar{K}_1^1; \quad \alpha_4 = \frac{R_{t_1}}{G} \bar{K}_2^1$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{R_{t_2}}{G} K_1^2; \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{R_{t_2}}{G} K_2^2; \quad \bar{\alpha}_3 = \frac{R_{t_2}}{G} \bar{K}_1^2; \quad \bar{\alpha}_4 = \frac{R_{t_2}}{G} \bar{K}_2^2$$

$$(\beta_1 \beta_1') = \frac{U(h_1 + d_1) R_{t_1}}{(\bar{I}_x, \bar{I}_y) GR^2\omega} K_1^1; \quad (\beta_2 \beta_2') = \frac{U(h_1 + d_1) R_{t_1}}{(\bar{I}_x, \bar{I}_y) GR^2\omega} K_2^1$$

$$(\beta_3, \beta_3') = \frac{U(h_1 + d_1) R_{t_1}}{(\bar{I}_x, \bar{I}_y) GR^2\omega} \bar{K}_1^1; \quad (\beta_4, \beta_4') = \frac{U(h_1 + d_1) R_{t_1}}{(\bar{I}_x, \bar{I}_y) GR^2\omega} \bar{K}_2^1,$$

$$(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_1') = \frac{U(h_2 + d_2) R_{t_2}}{(\bar{I}_x, \bar{I}_y) GR^2\omega} K_1^2; \quad (\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_2') = \frac{U(h_2 + d_2) R_{t_2}}{(\bar{I}_x \bar{I}_y) GR^2\omega} K_2^2,$$

$$(\bar{\beta}_3, \bar{\beta}_3') = \frac{U(h_2 + d_2) R_{t_2}}{(\bar{I}_x \bar{I}_y) GR^2\omega} \bar{K}_1^2; \quad (\bar{\beta}_4, \bar{\beta}_4') = \frac{U(h_2 + d_2) R_{t_2}}{(\bar{I}_x \bar{I}_y) GR^2\omega} \bar{K}_2^2.$$

În scopul unor importante simplificări ce se pot aduce sistemului (19) îl putem scrie sub forma complexă utilizată în [1], însă ușor modificată, deoarece nu urmărim întrebuințarea variabilelor complexe $u = \Delta \bar{V}_x + i \Delta \bar{V}_y$, $v = \Delta \bar{\Omega}_x + i \Delta \bar{\Omega}_y$, $w = \Delta \bar{\varphi}_x + i \Delta \bar{\varphi}_y$.

$$\frac{d\Delta \bar{V}_x}{d\bar{t}} + i \frac{d\Delta \bar{V}_y}{d\bar{t}} = [-(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1) + i(\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)] \Delta \bar{V}_x +$$

$$+ [-\alpha_2 + \bar{\alpha}_2 - i(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)] \Delta \bar{V}_y + [-\alpha_4 + \bar{\alpha}_4 - i(\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)] \Delta \bar{\Omega}_x +$$

$$+ [\alpha_3 + \bar{\alpha}_3 + i(-\alpha_4 + \bar{\alpha}_4)] \Delta \bar{\Omega}_y + i \Delta \varphi_x - \Delta \varphi_y, \qquad (20)$$

$$\frac{d\Delta \bar{\Omega}_x}{d\bar{t}} + i \frac{d\Delta \bar{\Omega}_y}{d\bar{t}} = [\beta_2 - \bar{\beta}_2 + i(\beta_1' + \bar{\beta}_1')] \Delta \bar{V}_x +$$

$$[-(\beta_1 + \bar{\beta}_1) + i(\beta_2' - \bar{\beta}_2')] \Delta \bar{V}_y + [-(\beta_3 + \bar{\beta}_3) + i(\beta_4' - \bar{\beta}_4')] \Delta \bar{\Omega}_x +$$

$$+ [-\beta_4 + \bar{\beta}_4 - i(\beta_3' + \bar{\beta}_3')] \Delta \bar{\Omega}_y,$$

$$\frac{d\Delta \bar{\varphi}_x}{d\bar{t}} + i \frac{d\Delta \bar{\varphi}_y}{d\bar{t}} = \sigma (\Delta \bar{\Omega}_x + i \Delta \bar{\Omega}_y).$$

Diferențele perechilor de valori $\alpha_2 \bar{\alpha}_2$, $\alpha_4 \bar{\alpha}_4$, $\beta_2 \bar{\beta}_2$, $\beta_4 \bar{\beta}_4$, $\beta_2' \bar{\beta}_2'$, $\beta_4' \bar{\beta}_4'$ sînt foarte mici față de sumele perechilor de valori $\alpha_1 \bar{\alpha}_1$, $\alpha_3 \bar{\alpha}_3$ etc.

Neglijînd diferențele perechilor de valori menționate din sistemul (20) revine la a înlocui numerele complexe respective cu părțile lor reale sau pur imaginare care sînt mult mai mari față de cele omise.

Vom obține atunci un sistem de ecuații diferențiale cu coeficienți reali separabili în două grupe ca în cazul avionului.

Pentru mișcarea longitudinală avem

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\overline{V}_x}{d\bar{t}} &= -(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\Delta\overline{V}_x + (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)\Delta\overline{\Omega}_y - \Delta\bar{\varphi}_y, \\
\frac{d\Delta\overline{\Omega}_y}{d\bar{t}} &= (\beta_1' + \bar{\beta}_1')\Delta\overline{V}_x - (\beta_3' + \bar{\beta}_3')\Delta\overline{\Omega}_y, \\
\frac{d\Delta\bar{\varphi}_y}{d\bar{t}} &= \sigma\Delta\overline{\Omega}_y
\end{aligned} \tag{21}$$

și pentru cea laterală

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\overline{V}_y}{d\bar{t}} &= -(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\Delta\overline{V}_y - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)\Delta\overline{\Omega}_x + \Delta\bar{\varphi}_x, \\
\frac{d\Delta\overline{\Omega}_x}{d\bar{t}} &= -(\beta_1 + \bar{\beta}_1)\Delta\overline{V}_y - (\beta_3 + \bar{\beta}_3)\Delta\overline{\Omega}_x, \\
\frac{d\Delta\bar{\varphi}_x}{d\bar{t}} &= \sigma\Delta\overline{\Omega}_x.
\end{aligned} \tag{22}$$

Făcînd substituțiile

$$\Delta\overline{V}_x = \Delta\overline{V}_{x0}\, e^{\Lambda\bar{t}}; \quad \Delta\overline{V}_y = \Delta\overline{V}_{y0}\, e^{\Lambda\bar{t}}; \quad \Delta\overline{\Omega}_x = \Delta\overline{\Omega}_{x0}\, e^{\Lambda\bar{t}}$$

$$\Delta\overline{\Omega}_y = \Delta\overline{\Omega}_{y0}\, e^{\Lambda\bar{t}}; \quad \Delta\bar{\varphi}_x = \Delta\bar{\varphi}_{x0}\, e^{\Lambda\bar{t}}; \quad \Delta\bar{\varphi}_y = \Delta\varphi_{y0}\, e^{\Lambda\bar{t}}$$

și înlocuind în (21), (22) din condițiile ca să nu existe soluții toate nule a sistemelor algebrice omogene ce se obțin, ajungem la următoarele ecuații caracteristice respectiv pentru mișcarea longitudinală și laterală

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0, \tag{23}$$

unde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3' + \bar{\beta}_3', \\
A_2 &= (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3' + \bar{\beta}_3') - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1' + \bar{\beta}_1'), \\
A_3 &= \sigma(\beta_1' + \bar{\beta}_1')
\end{aligned}$$

și

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0, \tag{24}$$

unde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3 + \bar{\beta}_3, \\
A_2 &= (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3 + \bar{\beta}_3) - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1 + \bar{\beta}_1), \\
A_3 &= \sigma(\beta_1 + \bar{\beta}_1).
\end{aligned}$$

Pe baza ecuațiilor (23), (24) vom încerca să vedem dacă elicopterul este stabil sau nu.

Aplicînd criteriile lui Hurvitz obținem pentru (23) respectiv (24) inegalitățile

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3' + \bar{\beta}_3' > 0,\\
&\sigma(\beta_1' + \bar{\beta}_1') > 0,\\
&[\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3' + \bar{\beta}_3'][(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3' + \bar{\beta}_3') - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1' + \bar{\beta}_1'] -\\
&\qquad - \sigma(\beta_1' + \bar{\beta}_1') > 0
\end{aligned} \tag{25}$$

și

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3 + \bar{\beta}_3 > 0,\\
&\sigma(\beta_1 + \bar{\beta}_1) > 0,\\
&[\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3 + \bar{\beta}_3][(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3 + \bar{\beta}_3) - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1 + \bar{\beta}_1)] -\\
&\qquad - \sigma(\beta_1 + \bar{\beta}_1) > 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Ultimele inegalități din (25) și (26) nu pot fi verificate din cauza termenului care conține pe σ întrucît acesta este foarte mare în comparație cu ceilalți.

Aceasta înseamnă că elicopterul cu rotoare coaxiale contrarotative este dinamic instabil în zbor la punct fix, ceea ce este confirmat de experiență, [3].

Se impune acum o cercetare a rădăcinilor ecuațiilor (23) (24) spre a avea o imagine completă asupra mișcării perturbate.

După metoda lui Cardan se obține cîte o ecuație redusă de forma

$$X^3 + pX + q = 0. \tag{27}$$

în care pentru ecuația (23) avem

$$\begin{aligned}
p &= [(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3' + \bar{\beta}_3') - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1' + \bar{\beta}_1')] - \frac{1}{3}[\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3' + \bar{\beta}_3']^2,\\
q &= \sigma(\beta_1' + \bar{\beta}_1') + \frac{2}{27}[\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3' + \bar{\beta}_3']^3 -\\
&\quad - \frac{1}{3}[(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3' + \bar{\beta}_3') - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1' + \bar{\beta}_1')][\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3' + \bar{\beta}_3']
\end{aligned} \tag{28}$$

și pentru (24)

$$p = [(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3 + \bar{\beta}_3) - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1 + \bar{\beta}_1)] - \frac{1}{3}[\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3 + \bar{\beta}_3]^2, \tag{29}$$

$$q = \sigma(\beta_1 + \bar{\beta}_1) + \frac{2}{27}[\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3 + \bar{\beta}_3]^3 -$$

$$- \frac{1}{3}[(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_3 + \bar{\beta}_3) - (\alpha_3 + \bar{\alpha}_3)(\beta_1 + \bar{\beta}_1)][\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \beta_3 + \bar{\beta}_3].$$

Întrucît p și q sînt reali considerînd în ambele cazuri discriminantul

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) \tag{30}$$

se vede că datorită termenului conținînd pe σ expresia $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ și în consecință $D<0$.

Neglijînd $\frac{p^3}{27}$ față de $\frac{q^2}{4}$, prin aceasta făcînd erori sub 1%, obținem două grupe de rădăcini

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &\sim -\sqrt[3]{q},\\ \Lambda_2 &\sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{q}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{q},\\ \Lambda_3 &\sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{q}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{q}.\end{aligned} \tag{31}$$

Rădăcinile ecuației (23) se obțin înlocuind în (31) pe q dat de (28) iar cele ale ecuației (24) înlocuind pe q dat de (29).

Lăsînd deoparte rădăcinile Λ_1, care reprezintă mișcări aperiodice amortizate, rădăcinile Λ_2, Λ_3 reprezintă mișcări oscilatorii neamortizate, din cauza amortizmentului $\frac{1}{2}\sqrt[3]{q}>0$, lucru pe care-l arată și experiența, [3].

Instabilitatea dinamică pusă în evidență de criteriile (25) și (26) se poate verifica de această dată prin amortizmentul pozitiv.

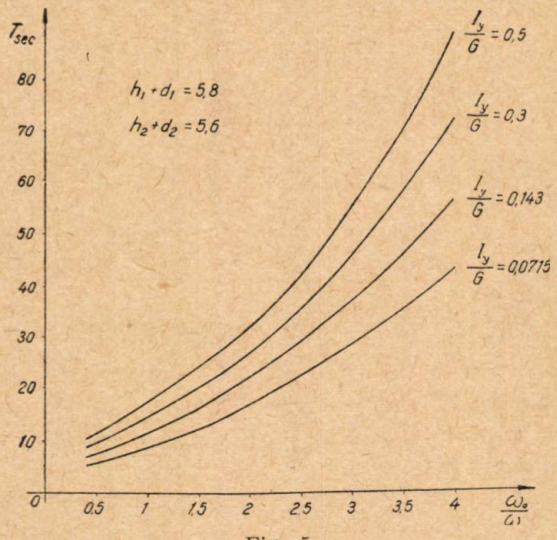


Fig. 5

Frecvența oscilațiilor ne conduce la formula perioadei

$$T_{sec}=\frac{4\pi U}{\sqrt{3}\,q\cdot\sqrt[3]{q}}, \tag{32}$$

care este fundamentală în calculul de stabilitate al elicopterului.

Se recomandă ca parametrii constructivi să fie astfel aleși încît $T>4$ secunde care este limita inferioară admisă.

Pe baza formulei (32) pentru un elicopter cu următoarele date

$G = 1000$ kg $\quad h_1 = 1{,}5$ m $\quad \gamma = 6 \quad \frac{\omega_0}{\omega} = 1{,}5$

$R = 4$ m $\quad h_2 = 1{,}3$ m $\quad C_a' = 5{,}6$

$t_p = 0{,}26$ m $\quad d_1 \sim d_2 \sim 4{,}3$ m $\quad \rho = \frac{1}{8} \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$

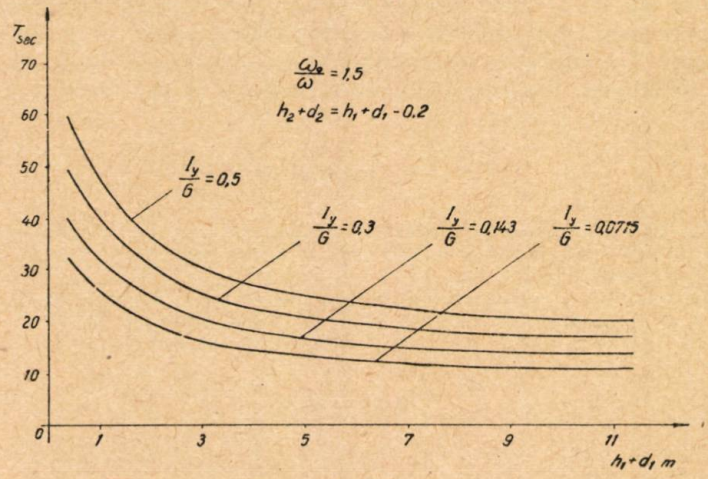


Fig. 6

am reprezentat în figurile 5 și 6 perioada T (în secunde) funcție de $\frac{\omega_0}{\omega}$, respectiv $h_1 + d_1$ pentru diverse valori ale raportului $\frac{I_y}{G}$ cu același semnificație și pentru $\frac{I_x}{G}$.

Primită la redacție la 10 septembrie 1955

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕЛИКОПТЕРА С СООСНЫМИ ВЗАИМООБРАТНО ВРАЩАЮЩИМИСЯ РОТОРАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе изучается устойчивость геликоптера с соосными взаимообратно вращающимися роторами при висении, причем предполагается, что лопасти роторов упруго соединены с валом, приводящим их в движение.

Исходя из уравнения невозмущенного движения, выводятся уравнения возмущенного движения, после чего указывается способ разделения возмущенного движения на продольное и боковое.

Даются критерии устойчивости и выражения корней характеристических уравнений, из которых выводится формула периода колебания.

SUR LA STABILITÉ DYNAMIQUE DE L'HÉLICOPTÈRE À ROTORS COAXIAUX CONTRE-ROTATIFS

(RÉSUMÉ)

On étudie, dans cette Note, la stabilité de l'hélicoptère à rotors coaxiaux contre-rotatifs, dans le vol à point fixe, les pales des rotors étant supposées reliées élastiquement à l'arbre qui les entraîne.

On déduit—en partant des équations générales du mouvement non perturbé — les équations du mouvement perturbé et l'on indique ensuite le mode de séparation du mouvement perturbé, en mouvement longitudinal et latéral.

On indique les critériums de stabilité et les expressions des racines des équations caractéristiques, dont on déduit la formule de la période d'oscillation.

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Marinescu, *Problema stabilității elicopterului cu rotor antrenat prin jet în zbor la punct fix.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, iulie — decembrie 1955, p. 299.
2. Th. Theodorsen, *Theory of Propellers.* New York, 1948, p. 24—134.
3. A. Young, *Helicoptère et stabilité.* Interavia, iulie 1947, p. 27.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

MIŞCAREA FLUIDELOR VÎSCOASE ÎNTRE PEREŢI SOLIZI, CU O DEPLASARE RELATIVĂ OARECARE

DE

N. TIPEI

În construcţiile mecanice apar frecvent suprafeţe cu mişcare de rostogolire, la palierele cu bile şi cu role, la came etc., iar ungerea lor se poate face cu lubrifianţi lichizi sau cu unsori consistente. Încercări experimentale recente au arătat că şi în ultimul caz fenomenul lubrificaţiei este tot de natură hidrodinamică, cu atît mai mult cu cît la temperaturile de regim a pieselor unsorile consistente devin foarte fluide. Este deci necesar să se studieze ungerea în cazul cînd suprafeţele au o mişcare relativă de rostogolire, completîndu-se prin aceasta teoria hidrodinamică a lubrificaţiei, aplicată în mod curent la piesele cu o mişcare relativă de alunecare.

Se poate observa de la început că în cazul rostogolirii nu se poate vorbi în general de un singur regim de ungere. Astfel, în punctu de contact al pieselor, vitezele relative se anulează, atrăgînd posibilitatea apariţiei unui regim de ungere semifluidă sau chiar semiuscată. Totuşi extinderea redusă a zonei cu viteze foarte mici şi direcţia vitezelor relative în punctele învecinate aproape după normala comună în punctul de contact, atenuează tendinţa de dispariţie a regimului hidrodinamic sau o suprimă complet, cu atît mai mult cu cît lubrifiantul nu poate fi expulzat dintre suprafeţe într-un timp suficient de scurt, decît în cazul mişcărilor foarte lente. De obicei aceste condiţii nu sînt îndeplinite de majoritatea elementelor enumerate mai înainte şi care apar în construcţia de maşini, iar în cazul vitezelor foarte reduse a pieselor în mişcare fenomenul lubrificaţiei poate nici să nu mai fie necesar, în tot cazul joacă un rol secundar.

Pe de altă parte, curbura mult diferită a suprafeţelor atrage existenţa în unele zone a unei grosimi mari a peliculei de lubrifiant şi în acest caz ipotezele care se fac în mod curent, avînd la bază tocmai dimensiunile reduse ale grosimii δ corespunzătoare nu mai sînt valabile. Astfel poate fi cazul lagărelor cu bile care lucrează în baie de ulei sau în care s-a introdus o cantitate mare de unsoare consistentă, ansamblul fiind bine capsulat, spre a evita expulzarea acesteia. Se remarcă totuşi că asemenea situaţii nu trebuie considerate ca normale, ele avînd drept efect o supraîncălzire inutilă sau chiar dăunătoare a lagărului. În mod obişnuit, alimentarea se face prin picurare de ulei sau introducînd o cantitate moderată de unsoare, astfel încît surplusul acesta să poată fi înlăturat de elementele în mişcare, iar grosimile

stratului de lubrifiant rămîn în limitele valabilităţii ipotezelor ce se admit la studiul mişcării în straturi subţiri a fluidelor vîscoase.

Rezultă astfel că şi pentru suprafeţe cu mişcare de rostogolire pot fi admise în multe cazuri ecuaţiile Navier-Stokes transformate în ipoteza grosimilor mici de lubrifiant, dar introducînd elementele noi legate de cinematica mişcării, cu deosebire valorile vitezelor pe frontierele solide. Totuşi, deoarece nu întotdeauna este posibilă introducerea în întregime a acestor simplificări, este util să se considere posibilităţile de lărgire a ipotezelor simplificatoare sau de suprimare completă a lor, considerînd mişcarea lubrifiantului în pături groase. Pe de altă parte, se va admite cazul cel mai interesant, al mişcărilor rapide ale pieselor lubrificate, atrăgînd existenţa unui regim hidrodinamic de ungere în toate punctele zonei de contact. De asemenea condiţiile la limită a problemei trebuie examinate ţinînd seama de natura mişcării nu numai a suprafeţelor solide dar şi a fluidului care le înconjoară.

Ecuaţiile lubrificaţiei în straturi groase. Se remarcă de la început că din cauza dimensiunilor reduse ale zonei de contact dintre suprafeţe, temperatura în această zonă este mai uniformă decît la lagărele cu alunecare şi în consecinţă viscozitatea lubrifiantului variază în limite mai strînse. Este deci posibil să se considere viscozitatea $\mu = \text{const.} = \mu_m$ egală cu o valoare medie, ipoteză care se admite uneori şi pentru lagărele cu alunecare, dar cu o aproximaţie mai mare.

Neglijînd apoi forţele de inerţie şi greutatea fluidului, ecuaţiile Navier-Stokes sînt

$$\operatorname{grad} p = \mu \nabla^2 v, \tag{1}$$

iar ecuaţia de continuitate pentru lichide se scrie

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \tag{2}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (1) şi (2) a fost studiat de Sommerfeld [1] în cazul mişcărilor plane. Astfel dacă Ox_1 şi Ox_2 sînt două axe ortogonale, iar v_1 şi v_2 proiecţiile vitezei pe acestea, punînd

$$v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}; \qquad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{3}$$

se deduce înlocuind în (1) şi eliminînd presiunile

$$\Delta\Delta\psi = 0, \tag{4}$$

iar ecuaţia de continuitate este satisfăcută de relaţiile (3), după cum se vede imediat.

Problema în cazul mişcării plane constă în determinarea funcţiei ψ care introdusă în (1) dă

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta\psi), \\ \frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta\psi). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Această ecuație arată că $\frac{p}{\mu}$ și $\Delta\psi$ satisfac condițiile lui Cauchy, deci sînt două funcții armonice asociate; se poate scrie astfel

$$\Delta\psi + i\frac{p}{\mu} = f(x_1 + ix_2) = f(z), \tag{6}$$

relație din care se pot apoi calcula presiunile p.

Condițiile la limită sînt pentru cazul suprafețelor de secțiune circulară cu razele r_1 și r_2, dacă $\bar{t}$ este vectorul tangent la suprafață,

$$\left.\begin{aligned} &\psi = \text{constant pe fiecare din cercuri},\\ &\frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = \bar{t}\cdot r_1\Omega_1 \text{ pe cercul de rază } r_1,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = \bar{t}\cdot r_2\Omega_2 \text{ pe cercul de rază } r_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

În plus mai există două condiții pentru valorile presiunilor care sînt date în două puncte oarecare; de obicei se consideră presiunea egală cu aceea din mediul exterior în punctele care corespund începutului și sfîrșitului zonei lubrificate.

Soluția ecuației (4) a fost dată de Gr. Wannier [2] pentru cazul particular cînd p este o funcție uniformă, în care caz presiunile au o repartiție antisimetrică față de linia centrelor. În cele ce urmează se va calcula soluția pentru condiții pe frontiere oarecare, referitor la presiuni. Notînd cu Δ diferența $r_2 - r_1$, cu c distanța dintre axele celor două suprafețe, $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ și

$$\left.\begin{aligned} &s^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)[(r_1 + r_2)^2 - \alpha^2\Delta^2],\\ &x_1^2 + x_2^2 + s^2 = 2\bar{x}\,x_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

rezultă, în sistemul de coordonate $\bar{x}$, x_2

$$\psi = [C_1 + (C_2 + C_3\bar{x})\,x_2]\ln\frac{\bar{x}+s}{\bar{x}-s} + C_4\frac{s+x_2}{s+\bar{x}} + C_5\frac{s-x_2}{s-\bar{x}} + C_6\,x_2 + C_7\,\bar{x}\,x_2. \tag{9}$$

Pentru a se putea introduce condițiile la limită (7) este necesar să se pună în evidență derivatele $\frac{\partial\psi}{\partial n}$. Se observă pentru aceasta că a doua relație (8) reprezintă ecuația unei familii de cercuri cu centrul pe axa Ox_2 la distanța $\bar{x}$ de origine și de rază $r^2 = \bar{x}^2 - s^2$. Pe aceste cercuri $\bar{x} = \text{const.}$, ψ este o funcție liniară de x_2 care se poate reduce la o constantă dacă se aleg valorile C_i astfel ca să se anuleze coeficientul lui x_2. Cercurile de raze r_1, r_2 oarecare, cu centrele situate la distanța $e = \alpha\Delta$ de asemenea oarecare, corespund unei valori determinate a parametrului s (8), iar funcția ψ poate fi constantă pe conturul lor, conform primei condiții (7). Normala la fiecare cerc este o dreaptă care trece prin centrul acestuia,

iar distanța de la un punct oarecare situat pe normală pînă la punctul fix care reprezintă centrul cercului considerat este (fig. 1)

$$\rho = \sqrt{(x_2 - \bar{x})^2 + x_1^2}, \tag{10}$$

iar $d\rho = dn$. Este suficient deci să se pună ρ în evidență în formula (9) și să se

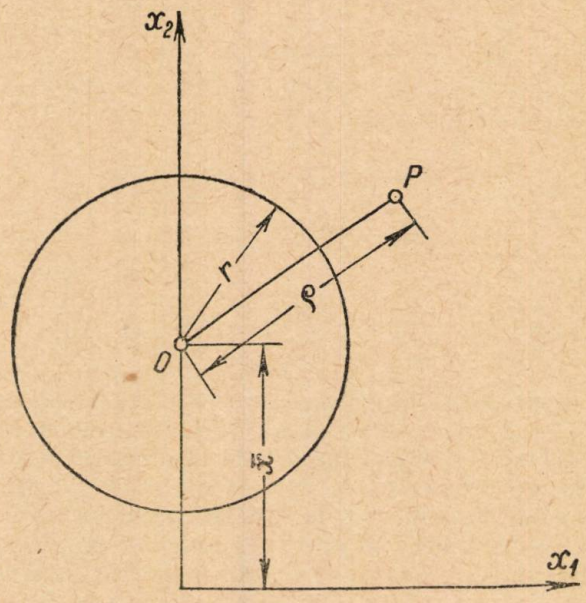


Fig. 1

ia derivata în raport cu această cantitate pentru a se deduce viteza tangentă la cerc, conform relațiilor (3) care definesc legătura dintre ψ și viteze.

Ecuația (9) se scrie astfel, ținînd seama de (8) și (10)

$$\psi = \left[C_1 + C_2 x_2 + \frac{C_3}{2}(\rho^2 + 2\bar{x}\,x_2 - r^2)\right] \ln \frac{\rho^2 + 2x_2(\bar{x} + s) - r^2}{\rho^2 + 2x_2(\bar{x} - s) - r^2} +$$

$$+ 2C_4 \frac{x_2(s + x_2)}{\rho^2 + 2x_2(\bar{x} + s) - r^2} - 2C_5 \frac{x_2(s - x_2)}{\rho^2 + 2x_2(\bar{x} - s) - r^2} + C_6 x_2 + \frac{C_7}{2}(\rho^2 + 2\bar{x}x_2 - r^2). \tag{11}$$

Derivata $\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho} = \dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ va fi apoi

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\left[C_1 + C_2 x_2 + \frac{C_3}{2}(\rho^2 + 2\bar{x}\,x_2 - r^2)\right] \cdot \frac{8\rho\, x_2 s}{(\rho^2 + 2x_2\bar{x} - r^2)^2 - 4x_2^2 s^2} +$$

$$+ C_3 \rho \ln \frac{\rho^2 + 2x_2(\bar{x} + s) - r^2}{\rho^2 + 2x_2(\bar{x} - s) - r^2} - 4C_4 \frac{\rho x_2(s + x_2)}{[\rho^2 + 2x_2(\bar{x} + s) - r^2]^2} +$$

$$+ 4C_5 \frac{\rho x_2(s - x_2)}{[\rho^2 + 2x_2(\bar{x} - s) - r^2)^2} + C_7 \rho. \tag{12}$$

Relațiile (11) și (12) depind de variabilele ρ, x_2 și au $\bar{x}$, r ca parametri. Făcînd $r = r_1, r_2$ rezultă $\bar{x}_{1,2}^2 = r_{1,2}^2 + s^2$ pentru cercurile date. Pe aceste curbe $\rho = r_1$, iar vitezele au expresia

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)_{\rho = r_{1,2}} = -2\left[C_1 + (C_2 + C_3 \bar{x}_{1,2})\, x_2\right] \frac{s}{x_2 r_{1,2}} + C_3 r_{1,2} \ln \frac{\bar{x}_{1,2} + s}{\bar{x}_{1,2} - s} -$$

$$- C_4 \frac{(x_2 + s)(\bar{x}_{1,2} - s)}{r_{1,2}\, x_2 (\bar{x}_{1,2} + s)} + C_5 \frac{(s - x_2)(\bar{x}_{1,2} + s)}{r_{1,2}\, x_2 (\bar{x}_{1,2} - s)} + C_7 r_{1,2}. \tag{13}$$

Derivata $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)_{\rho = r_{1,2}}$ depinde, la rîndul ei, de $\frac{1}{x_2}$. Deoarece pe cercuri vitezele au valori constante (7), coeficientul acestui termen trebuie să fie de asemenea nul. Rezultă astfel 6 condiții, în locul sistemului (7) și anume cîte două pentru fiecare din cercuri anulînd coeficienții termenilor în x_2 și $\frac{1}{x_2}$ din expresiile lui ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, apoi cîte una pentru fiecare cerc, fixînd valorile vitezelor tangențiale. Se obține

$$\left.\begin{aligned}
&(C_2 + C_3 \bar{x}_1) \ln \frac{\bar{x}_1 + s}{\bar{x}_1 - s} + C_4 \frac{1}{\bar{x}_1 + s} + C_5 \frac{1}{\bar{x}_1 - s} + C_6 + C_7 \bar{x}_1 = 0,\\
&(C_2 + C_3 \bar{x}_2) \ln \frac{\bar{x}_2 + s}{\bar{x}_2 - s} + C_4 \frac{1}{\bar{x}_2 + s} + C_5 \frac{1}{\bar{x}_2 - s} + C_6 + C_7 \bar{x}_2 = 0,\\
&2C_1 + C_4 \frac{\bar{x}_1 - s}{\bar{x}_1 + s} - C_5 \frac{\bar{x}_1 + s}{\bar{x}_1 - s} = 0,\\
&2C_1 + C_4 \frac{\bar{x}_2 - s}{\bar{x}_2 + s} - C_5 \frac{\bar{x}_2 + s}{\bar{x}_2 - s} = 0,\\
&-2\frac{s}{r_1}(C_2 + C_3 \bar{x}_1) + C_3 r_1 \ln \frac{\bar{x}_1 + s}{\bar{x}_1 - s} - C_4 \frac{\bar{x}_1 - s}{r_1 (\bar{x}_1 + s)} - C_5 \frac{\bar{x}_1 + s}{r_1 (\bar{x}_1 - s)} + C_7 r_1 = r_1 \Omega_1,\\
&-2\frac{s}{r_2}(C_2 + C_3 \bar{x}_2) + C_3 r_2 \ln \frac{\bar{x}_2 + s}{\bar{x}_2 - s} - C_4 \frac{\bar{x}_2 - s}{r_2 (\bar{x}_2 + s)} - C_5 \frac{\bar{x}_2 + s}{r_2 (\bar{x}_2 - s)} + C_7 r_2 = r_2 \Omega_2.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Rămîne astfel o constantă arbitrară care, împreună cu excentricitatea relativă α de care depinde s (8), permite să se impună valorile presiunilor în două puncte oarecare. O dată cunoscută funcția ψ, se pot deduce presiunile cu ajutorul ecuațiilor (4) și (5), deoarece $\frac{p}{\mu}$ este o diferențială exactă

$$\frac{p}{\mu} = -\int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial x_2}\, dx_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Delta \psi\,(x_{10}, x_2)\right] dx_2 + C, \tag{15}$$

C fiind o constantă, iar x_{10} și x_{20} două valori astfel alese încît funcțiile de sub integrală să fie continue și finite între limitele de integrare. Cu ajutorul presiunilor p și al vitezelor (3) se poate construi apoi tensorul tensiunilor

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -p - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}, \\ p_{22} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -p + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}, \\ p_{12} &= p_{21} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Formulele astfel stabilite pentru mișcarea plană se aplică în cazul rostogolirii a două suprafețe de secțiuni circulare cu raze r_1, r_2, (fig. 2), dacă se pune condiția ca în punctele A, B de contact să nu existe alunecare relativă

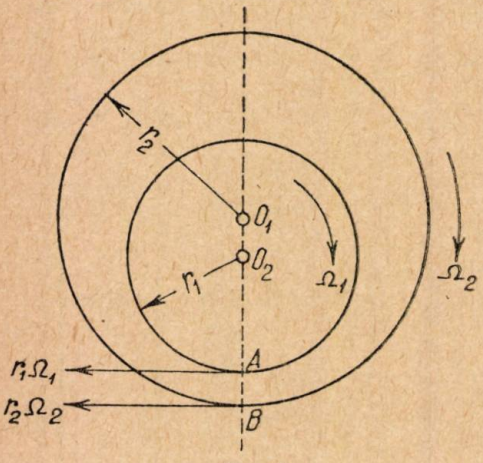


Fig. 2

$$r_1\Omega_1 = r_2\Omega_2 \tag{17}$$

care determină raportul vitezelor unghiulare Ω_1, Ω_2.

Soluția în trei dimensiuni nu poate fi dată, pînă în prezent, decît în cazuri particulare. Astfel este cazul cînd alimentarea se face sub presiune, iar aceasta rămîne constantă în interiorul stratului fluid

$$p = p_1;\ \text{grad}\ p = 0, \tag{18}$$

iar vitezele satisfac ecuațiile lui Laplace și ecuația (2) de continuitate

$$\Delta v_j = 0 \tag{19}$$

Soluțiile pentru viteze sînt de forma

$$v_j = \mathfrak{V}_{0j} + \mathfrak{V}_{1j}\,x_1 + \mathfrak{V}_{2j}\,x_2 + \mathfrak{V}_{3j}\,x_3 + \sum_{p,q,r=0}^{\infty}\mathfrak{V}^*_{jpqr}\,e^{(\beta_p x_1+\beta_q x_2+\beta_r x_3)} \tag{20}$$

cu condițiile

$$\left.\begin{aligned} &\beta_p^2 + \beta_q^2 + \beta_r^2 = 0, \\ &\mathfrak{V}_{11} + \mathfrak{V}_{22} + \mathfrak{V}_{33} = 0, \\ &\sum_{p,q,r=0}^{\infty}(\mathfrak{V}^*_{1pqr}\,\beta_p + \mathfrak{V}^*_{2pqr}\,\beta_q + \mathfrak{V}^*_{3pqr}\,\beta_r) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Mai apar apoi condițiile pe frontierele $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ și $f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, care impun valorile corespunzătoare vitezelor pentru cele 2 corpuri ($i = 1,2$)

$$v_j = V_{ij}. \tag{22}$$

Cu ajutorul relațiilor (21), (22) pot fi astfel determinați coeficienții $\mathfrak{V}_{ij}$ și deci ecuațiile vitezelor în funcție de punct. Acești coeficienți depind de funcțiile

$f_1(x_1, x_2, x_3)=0$ și $f_2(x_1, x_2, x_3)=0$ care determină forma suprafețelor și variația grosimii stratului de fluid dintre acestea. Se obțin astfel vitezele pentru o distribuție constantă a presiunilor, realizată cu ajutorul alimentării sub presiune în diferite puncte. Astfel este cazul pivoților, al lagărelor discontinue cu presiune din exterior etc. Pentru lubrificația suprafețelor cu mișcare de rostogolire această soluție se aplică destul de exact la studiul mișcării fluidului în afara zonei de presiuni $A\,B$ care constituie zona de contact a suprafețelor (1) și (2). Într-adevăr, în punctele A, B presiunile ating valoarea p_0 care este de obicei aceea a mediului exterior (respectiv în $A'\,B'$ pentru al doilea corp, (fig. 3)), iar în afară, pe conturul $A\,C\,B$ sau $A'\,D$, $B'\,E$, $p=p_0$. Deși zona activă este $A\,B$, $A'\,B'$ este interesant să se studieze mișcarea și în exterior dacă fluidul umple parțial sau tot spațiul dintre suprafețe, pentru a se putea determina pierderile prin frecare și poziția cea mai potrivită a orificiilor de alimentare.

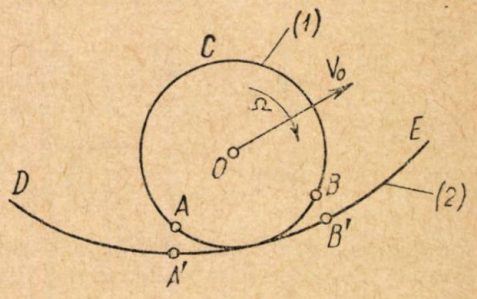


Fig. 3

Se observă că sub forma (20) v_j nu verifică riguros condițiile pe suprafețele frontiere, dar că acestea pot fi îndeplinite cu orice aproximație se cere, impunîndu-se condițiile (22) într-un număr infinit de puncte.

Mișcarea fluidelor vîscoase în straturi de grosime mijlocie. Fără a considera cazul cel mai general reprezentat prin ecuațiile (1) și (2), se pot ridica totuși o parte din restricțiile care limitează domeniul de aplicare al ecuațiilor pentru straturi subțiri folosite în mod curent în teoria hidrodinamică a ungerii. Se obțin astfel mișcări mai generale, valabile pentru straturi de lubrifiant suficient de groase spre a descrie fenomenul aproape în toate situațiile reale, cu deosebire pentru lagărele cu jocuri radiale foarte mari sau pentru pătura de lubrifiant care se formează la lagărele cu rostogolire.

Ca și pentru peliculele subțiri se va presupune că, curbura suprafețelor este mare față de grosimea δ a păturii fluide și deci axele de coordonate $0x_1$, $0x_3$ se așternpe una din suprafețe, iar x_2 se măsoară de la aceasta pe normala în fiecare punct. Se vor neglija apoi derivatele $\frac{\partial v_2}{\partial x_j}(j=1,3)$ ca fiind mici față de $\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$ fără a se considera însă nule v_2 și $\frac{\partial p}{\partial x_2}$. De asemenea nu se vor mai neglija derivatele $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k^2}(j,\ k=1,3)$; în aceste condiții, ecuațiile (1) se scriu

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=\mu\,\Delta v_1;\ \frac{\partial p}{\partial x_2}=\mu\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2};\ \frac{\partial p}{\partial x_3}=\mu\,\Delta\,v_3. \tag{23}$$

Din acestea și din ecuația de continuitate (2) se obține, eliminînd presiunile și pe v_2

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu\Delta v_j)=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\,\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{24}$$

În aceste ecuații μ poate fi considerat variabil, așa cum se procedează în rezolvarea mișcărilor de fluide vîscoase, după ce au fost deduse ecuațiile Navier-Stokes

pentru o viscozitate constantă. Din (23) se obține

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\mu \Delta v_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\mu \Delta v_3) \tag{25}$$

și dacă μ este constant, din (24)

$$\Delta v_j = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \varphi_j(x_1, x_3), \tag{26}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta v_1 &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \varphi_1(x_1, x_3), \\ 2\Delta v_3 &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) + \varphi_3(x_1, x_3). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Se vede că parantezele reprezintă componența rotorului după normala la suprafața (1). Se poate scrie astfel, dacă i_2 este vectorul unitar al normalei

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta v_1 &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{i}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{v}) + \varphi_1(x_1, x_3), \\ 2\Delta v_3 &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{i}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{v}) + \varphi_3(x_1, x_3). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Din cauza variației mari a vitezelor în raport cu x_2 față de variația după direcțiile Ox_1, Ox_3, componenta rotorului pe normala la suprafețe este mică față de celelalte componente $\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}$ și $\frac{\partial v_3}{\partial x_1}$ au valori mici față de derivatele în raport cu $x_2\right)$. Ținînd seama de asemenea că vîrtejurile au tendința să se orienteze pe direcția generală a curentului și că liniile de curent nu întretaie suprafețele, iar componentele v_2 sînt mici, deci această direcție face unghiuri mici cu planurile tangente la suprafețe, se poate admite că $\bar{i}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{v}$ și derivatele sale în raport cu x_1, x_3 sînt nule.

Soluția ecuațiilor (28) se poate exprima prin suma a două soluții v_j^* și v_j^{**} (x_1, x_3) care verifică ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta v_j^* &= \frac{\partial^2 v_j^*}{\partial x_2^2}, \\ 2\Delta v_j^{**} &= \varphi_j(x_1, x_3). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Fie

$$v_j^* = V_{j_1}^*(x_1) \times V_{j_2}^*(x_2) \times V_{j_3}^*(x_3). \tag{30}$$

Înlocuind această expresie în prima ecuație (29) se obține

$$\frac{2}{V_{j1}^*} \cdot \frac{d^2 V_{j1}^*}{dx_1^2} + \frac{1}{V_{j2}^*} \cdot \frac{d^2 V_{j2}^*}{dx_2^2} + \frac{2}{V_{j3}^*} \cdot \frac{d^2 V_{j3}^*}{dx_3^2} = 0. \tag{31}$$

Fie β^{*}_{j1n}, β^{*}_{j3n} două constante sau două funcții arbitrare de timp, ambele reale sau imaginare; punînd

$$\frac{1}{V^{*}_{j1n}} \cdot \frac{d^2 V^{*2}_{j1n}}{dx_1^2} = \beta^{*2}_{j1n}; \quad \frac{1}{V^{*}_{j3n}} \cdot \frac{d^2 V^{*}_{j3n}}{dx_3^2} = \beta^{*2}_{j3n} \tag{32}$$

și dînd diferite valori indicelui n rezultă soluția v^{*}_{j}, [2] ($j = 1,3$) ținînd seama de condiția (25)

$$\begin{aligned} v^{*}_{j} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{jn} \pm e^{\beta^{*}_{j1n} x_1 + \beta^{*}_{j3n} x_3 \pm \sqrt{-2\left(\beta^{*2}_{j1n} + \beta^{*2}_{j3n}\right)} x_2} + K_{ji} x_i^3 + k_{ji} x_i^2 + \\ + - x_2 (x_2 - x_{20}) [6 K_{ji} x_i + 2 k_{ji}] + a_{j2} x_1^2 + a_{j1} x_1 + \\ + a_{j0} + b_{j2} x_2^2 + b_{j1} x_2 + c_{j2} x_3^2 + c_{j1} x_3 \end{aligned} \tag{33}$$

cu condițiile

$$\left.\begin{aligned} 2a_{j2} + b_{j_2} + 2c_{j_2} = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n+} + C_{1n-}) \beta^{*}_{13n} (\beta^{*2}_{11n} + \beta^{*2}_{13n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{3n+} + C_{3n-}) \beta^{*}_{31n} (\beta^{*2}_{31n} + \beta^{*2}_{33n}), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

β^{*}_{j1n}, β^{*}_{j3n} pot fi reale sau imaginare, ecuația (33) modificîndu-se în consecință de la caz la caz, iar $C_{1(3)n}$, K_{ji}, k_{ji}, a_{jl}, b_{jl}, c_{jl} ($i, j = 1, 3, l = 0, 1, 2$) sînt constante sau funcții de timp.

Pentru v^{**}_{j} nu se poate da o expresie în cazul general, decît dezvoltînd în serie $\varphi_j(x_1, x_3)$ și v^{**}_{j}. Acestea fiind însă funcții de două variabile, calculele necesare sînt laborioase. Se remarcă totuși că φ_j este o funcție arbitrară și astfel se pot găsi o serie de soluții particulare. Fie astfel succesiv $\varphi_j(x_1, x_3) = 0$, $\varphi_j(x_1, x_3) = \varphi(t)$ sau constantă și însfîrșit cazul $\varphi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn}(x_1, x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{2}_{jn} v^{**}_{j}$ care permite determinarea ambelor funcții. Se obține

$$v^{**}_{j} = f_{j1}(x_1 + ix_3) + f_{j2}(x_1 - ix_3) + a_{j2} x_1^2 + a_{j1} x_1 + c_{j2} x_3^2 + c_{j1} x_3 + K_j \tag{35}$$

cu condiția

$$a_{j2} + c_{j2} = \frac{1}{2} \varphi_j(t)$$

pentru cazurile $\varphi_j = 0$ sau $\varphi_j(x_1, x_3) = \varphi_j(t)$. Admițînd $\varphi_{jn}(x_1, x_3) = \beta^{2}_{jn} v^{**}_{jn}$ rezultă soluția [2], ținînd seama de condiția (25)

$$v^{**}_{jn} = c_{0n} e^{\pm x_3} + a_{0n} e^{\pm x_1} + \sum_{m=1}^{m=4} C_{jnm} e^{\pm \frac{1}{2} \beta_{jn} (x_1 \pm x_2)}. \tag{36}$$

β_{jn} fiind real sau imaginar, a_{0n}, c_{0n} și C_{jnm} sînt funcții de timp care pot fi de asemenea determinate cu ajutorul condițiilor la frontiere. Aceste condiții pot fi satisfăcute în mod exact în cazuri practice interesante. Fie astfel condițiile cunoscute, în cazul cînd grosimea δ a peliculei depinde numai de timp.

$$\begin{aligned} &v_1 = V_{11} \quad , \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \text{ pentru } x_2 = 0, \\ &v_1 = v_3 = 0; \qquad\qquad v_2 = \dot{\delta} \text{ pentru } x_2 = \delta. \end{aligned} \tag{37}$$

Acestea pot fi îndeplinite de ecuaţia (33) dacă se consideră o zonă de acoperire a suprafeţelor solide definită de suprafaţa situată pe corpul (1) şi avînd ecuaţia $\frac{x_1^2}{l^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$, dacă se ia

$$a_{j2} = a_{j1} = c_{j2} = c_{j1} = b_{j2} = 0,\ \sqrt{2(\beta_{j1n}^{*2} + \beta_{j3n}^{*2})} = \frac{n\pi}{\delta};\ a_{10} = V_{11};\ b_{11} = -\frac{V_{11}}{\delta}$$

$$a_{30} = b_{31} = 0;\ K_{11} = -\frac{K}{3l^2};\ K_{33} = -\frac{K}{3b^2};\ K_{13} = K_{31} = k_{ji} = \tag{38}$$

$$= K_{2i} = 0;\ x_{20} = \delta.$$

Ca soluţii particulare, dacă se ia $\varphi_1 = 4K\frac{x_1}{l^2}$, $\varphi_3 = 4K\frac{x_3}{b^2}$, se va admite

$$v_1^{**} = \frac{K}{3}\cdot\frac{x_1^3}{l^2} \quad \text{şi} \quad v_3^{**} = \frac{K}{3}\cdot\frac{x_3^3}{b^2}. \tag{39}$$

Se poate constata apoi uşor că $v_1 = v_1^{*} + v_1^{**}$ şi $v_3 = v_3^{*} + v_3^{**}$ verifică exact condiţiile pe frontiere şi (25). Deoarece s-a admis de la început că φ_j este o funcţie arbitrară care urmează a fi determinată, faptul că s-a considerat în acest caz dependentă numai de x_1 sau de x_3 nu constituie o particularizare, ci o ipoteză cerută de condiţiile la limită ale problemei.

Din ecuaţiile (23) şi (26) se deduce apoi, dacă μ = const.,

$$\frac{p}{\mu} = -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \int \varphi_j\, dx_j + p_k^{*}(x_2, x_k) = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \Phi(x_1, x_3), \tag{40}$$

$$(j,\ k = 1,3,\ j \neq k)$$

din care se obţin apoi relaţiile între funcţiile arbitrare φ_j, Φ şi p_k^{*}

$$\Phi(x_1, x_3) = \int \varphi_j\, dx_j + p_k^{*}(x_k),$$

$$\int \varphi_1\, dx_1 - \int \varphi_3\, dx_3 = p_1^{*}(x_1) - p_3^{*}(x_3), \tag{41}$$

iar p_1^{*}, p_3^{*} nu depind de x_2. Dacă se consideră în (40) $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$ rezultă

$$\frac{\widetilde{p}}{\mu} = \int \varphi_j\, dx_j + p_k^{*}(x_k) = \Phi(x_1, x_3), \tag{42}$$

în care $\widetilde{p}$ reprezintă soluţia obişnuită a presiunilor în cazul lubrificaţiei hidrodinamice în straturi subţiri.

Se deduce apoi din ecuaţia de continuitate

$$v_2 = -\int \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) dx_2 + v_2^{*}(x_1, x_3), \tag{43}$$

funcţia v_2^{*} fiind determinată prin condiţiile pe frontiere.

În cazul exemplului precedent, dacă se ia

$$p_1^* = 2K\mu\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{1}{2}K\mu + p_0;\quad p_3^* = 2K\mu\frac{x_3^2}{b^2} - \frac{1}{2}K\mu + p_0 \tag{44}$$

se vede imediat că sînt satisfăcute ecuațiile (41), iar $\widetilde{p}$ rezultă (42)

$$\widetilde{p} = p_0 + 2\mu K\left(\frac{x_1^2}{l^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - \frac{1}{4}\right). \tag{45}$$

Se regăsește astfel soluția cunoscută din teoria hidrodinamică obișnuită, dată de Reynolds pentru suprafețele eliptice [3]. K este o funcție arbitrară de timp, iar p_0 este presiunea în mediul exterior.

Din ecuația (43) se găsește viteza v_2

$$v_2 = \frac{\delta}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(C_{1n}^* e^{\beta_{11n}x_1+\beta_{13n}x_3} + C_{3n}^* e^{\beta_{31n}x_1+\beta_{33n}x_3}\right)\cos n\pi\frac{x_2}{\delta} - \\ - 2Kx_2^2\left(\frac{x_2}{3} - \frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{b^2}\right) + v_2^*(x_1, x_3) \tag{46}$$

cu condițiile (37)

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{11n} = \beta_{31n};\quad \beta_{13n} = \beta_{33n};\quad C_{1n}^* + C_{3n}^* = 0,\\ &v_2^* = 0;\quad K = \frac{3\delta\dot{\delta}\,l^2b^2}{\delta^3(l^2+b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Constantele $C_{1n}^* C_{3n}^*$ permit, în general, să se impună condiții suplimentare pentru viteze sau presiuni de-a lungul grosimii stratului fluid pe conturul care mărginește zona de acoperire a suprafețelor. În exemplul studiat suma (46) este nulă din cauza condițiilor (47), iar variația cu x_2 pe contur rezultă, atît pentru viteze, cît și pentru presiuni. În locul primelor trei condiții (47) se poate pune direct

$$C_{1n}^* = C_{3n}^* = 0. \tag{48}$$

Ecuația (45) dă apoi soluția particulară cunoscută pentru lubrificația în straturi subțiri. Soluția completă pentru presiuni este dată de (40) și are o formă simplă în acest caz

$$p = p_0 + \frac{6\dot{\delta}\,l^2b^2\mu}{\delta^3(l^2+b^2)}\left[\frac{x_1^2}{l^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - x_2(x_2-\delta)\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{4}\right]. \tag{49}$$

Această relație arată că pe frontierele situate pe ambele suprafețe $p = p_0$, iar pentru $0 < x_2 < \delta$ presiunile variază după o lege parabolică, fiind în general mai mici decît pe suprafețe cînd acestea se apropie ($\dot{\delta} < 0$). Dacă δ este mic față de l și b se observă apoi imediat că termenul în x_2 este neglijabil pe lîngă ceilalți, iar $p \to \widetilde{p}$.

Condiții la limită. Soluțiile precedente permit în cazul general îndeplinirea aproximativă a condițiilor pe frontiere, atunci cînd se dau vitezele în fiecare punct al suprafețelor (1) și (2). Gradul de aproximație poate fi împins ori cît de departe, alegînd un număr foarte mare de puncte pe cele două suprafețe și determinînd în consecință constantele de integrare. Pentru unele cazuri particulare s-a arătat chiar că aceste condiții pot fi satisfăcute în mod exact.

Pentru mișcarea de rostogolire a unei sfere pe o placă se pot alege axele astfel ca originea să coincidă cu punctul de contact (fig. 4), Ox_1 situat în planul suprafeței (2) să fie dirijat pe direcția vitezei de înaintare, rotația $\overline{\Omega_1}$ a sferei rezultînd atunci paralelă cu Ox_3. Coordonatele unui punct P de pe sferă sînt r_1, θ și φ, iar mișcarea plăcii față de sistemul de axe este o translație cu viteza V, bila fixă rotindu-se cu viteza unghiulară Ω în jurul unui ax care trece prin centrul C al sferei.

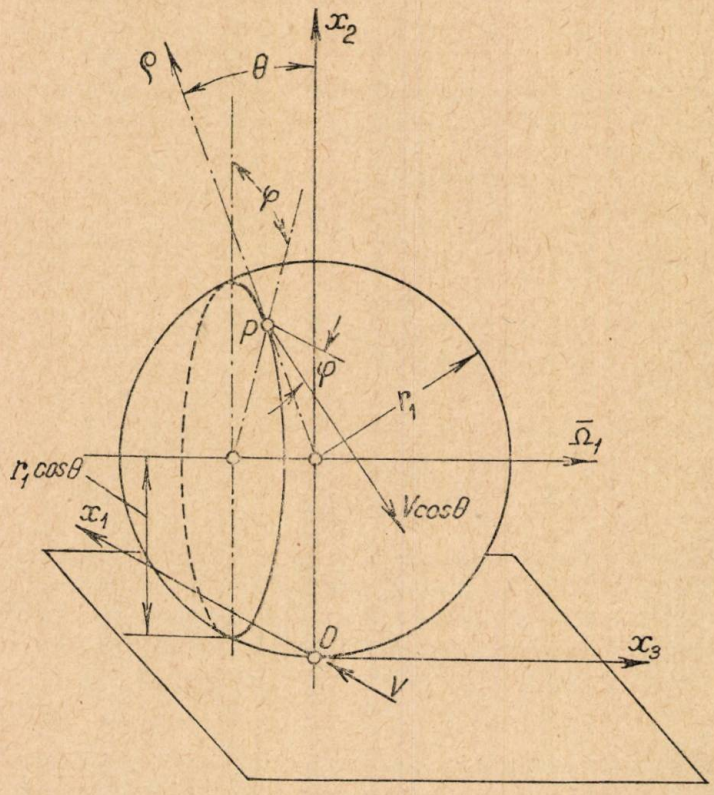


Fig. 4

Rezultă $V = r_1\,\Omega_1\,V_{21} = V$; $V_{22} = V_{23} = 0$ pentru suprafața (2)
$V_{11} = V\cos\theta\cos\varphi$; $V_{12} = -V\sin\varphi\cos\theta$; $V_{13} = 0$, pentru suprafața (1), } (50)
iar cînd sfera este înlocuită printr-un cilindru cu axul paralel cu Ox_3 formulele (50) rămîn valabile făcînd $\theta = 0$. Între variabilele x_1, x_2, x_3 și θ, φ, ρ există relațiile

$$x_1 = -\rho\cos\theta\sin\varphi;\ x_2 = \rho(1+\cos\varphi\cos\theta);\ x_3 = -\rho\sin\theta,$$

sau

$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{x_3^2}{\rho^2}};\ \sin\varphi = -\frac{x_1}{\rho}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_3^2}{\rho^2}}} = -$$

$$= -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+(x_2-r_1)^2}};\ \cos\varphi = \frac{x_2-r_1}{\sqrt{x_1^2+(x_2-r_1)^2}}. \qquad (51)$$

Dacă suprafața (2) este de asemenea o sferă de rază r_2, cu centrul pe axa Ox_2 (alegerea axelor este totdeauna posibilă pentru a îndeplini aceste condiții) rezultă notînd cu $\overline{\Omega}_2$ rotația sferei exterioare, paralelă cu $\overline{\Omega}_1$

$$\left.\begin{aligned} & r_1\Omega_1 = r_2\Omega_2 = V;\ \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{r_2}{r_1}, \\ & V_{21} = V\cos\theta'\cos\varphi';\ V_{22} = -V\cos\theta'\sin\varphi';\ V_{23} = 0, \\ & \cos\theta' = -\frac{e}{r_2}\sin^2\theta + \cos\theta\sqrt{1-\frac{e^2}{r_2^2}\sin^2\theta}, \\ & \cos\varphi' = -\frac{e\sin^2\varphi}{r_2\cos\theta'} + \cos\varphi\sqrt{1-\frac{e^2\sin^2\varphi}{r_2^2\cos^2\theta'}}, \\ & \sin\varphi' = \sin\varphi\left(\frac{e\cos\varphi}{r_2\cos\theta'} + \sqrt{1-\frac{e^2\sin^2\varphi}{r_2^2\cos^2\theta'}}\right), \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

în care $e = \alpha(r_2 - r_1) = \alpha\Delta$ este distanța dintre cele două centre ale sferelor; condițiile pe suprafața (2) rămîn aceleași ca și în cazul precedent (50).

În cazul cînd suprafața exterioară este un cilindru rămîn valabile relațiile (52), făcînd $\theta' = 0$.

Distanța δ dintre cele două corpuri, măsurată în planul normal la suprafața (1) este, notînd cu δ_2 distanța minimă în punctul de contact, $e = \alpha\Delta$ (fig. 4),

$$\left.\begin{aligned} & \delta = -\left(\frac{r_1+\delta_2}{\cos\varphi} + r_1\right) \qquad \text{pentru cilindru-placă} \\ & \delta = -\left(\frac{r_1+\delta_2}{\cos\varphi} + r_1\cos\theta\right) \qquad \text{pentru sferă-placă} \\ & \delta = e\cos\theta + r_2\sqrt{1-\frac{e^2}{r_2^2}\sin^2\theta} - r_1 \cong \Delta(1+\alpha\cos\theta) \text{ pentru 2 sfere.} \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Din cele arătate reiese că pentru viteze condițiile pe frontiere sînt perfect determinate o dată cu geometria și cinematica sistemului de corpuri lubrificate. Pentru presiuni însă condițiile sînt mai greu de stabilit, ele necesitînd o interpretare a fenomenelor care au loc în mediul fluid, de la caz la caz. Astfel pentru suprafețele de revoluție avînd o zonă de contact limitată în direcția axelor respective, la capete există o presiune dată, constantă, de obicei aceea a mediului ambiant. Dacă grosimea stratului de fluid este mare, lubrifiantul nu mai poate înconjura complet corpurile, el scurgîndu-se în exterior pe la capete.

Apar astfel două cazuri caracteristice. Primul, cînd suprafața exterioară (2) este o suprafață închisă care înconjoară celălalt corp, de exemplu interiorul unei sfere, al unui tor etc., permite o umplere completă cu fluid a zonei dintre suprafețe. În acest caz, condițiile la limită exprimă periodicitatea funcției presiunilor în raport cu variabilele unghiulare (θ, φ)

$$p(\theta) = p(\theta + 2\pi)\ ;\quad p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi). \quad (54)$$

Ca urmare, rezultă o regiune de presiuni negative care în general nu sînt posibile în interiorul fluidului. Dacă volumul ocupat de fluid comunică cu exteriorul,

aerul pătrunde emulsionînd lubrifiantul lichid, sau acesta se rupe sub acțiunea eforturilor de întindere, restabilind în zona corespunzătoare presiunea atmosferică. Astfel condițiile (54) rămîn valabile dacă se consideră că zona activă de contact între corpuri este limitată la regiunea în care presiunile sînt mai mari decît în mediul exterior, iar în cealaltă regiune, unde fluidul poate avea o mișcare mai dezordonată, turbionară, se consideră în toate punctele aceeași presiune, p_0, din exterior. Din relația

$$p(\rho, \theta, \varphi) = p_0 \tag{55}$$

se deduce pentru fiecare suprafață $\rho_{1,2} = \rho(\theta, \varphi)$ unul din unghiuri

$$\theta_{1,2} = f(\varphi) \quad \text{sau} \quad \varphi_{1,2} = g(\theta) \tag{56}$$

în funcție de celălalt și deci curba care delimitează zona activă a stratului lubrifiant.

Al doilea caz caracteristic corespunde unei umpleri incomplete a zonei dintre cele două corpuri, iar zona activă este limitată de curba de intersecție a corpurilor cu suprafață liberă a fluidului. Această curbă este în general greu de determinat dacă se ține seama că suprafața liberă are o formă complicată îm apropierea pereților solizi în mișcare, fiind o suprafață de remuu în cazul unui lichid vîscos și în jurul unor corpuri ale căror dimensiuni variază după 3 direcții normale (Ox_1, x_2, x_3). Problema plană se prezintă sensibil mai simplu. Fie astfel un cilindru care se rostogolește pe o suprafață plană, figurile 5 și 6. Debitul Q_i la intrare este egal cu acela de la ieșire, iar aspectul mișcării este acela redat în figurile 5 și 6 .În punctul A suprafața liberă este tangentă la cerc, deoarece viteza particulelor corespunzătoare este egală cu aceea tangențială a cercului, iar presiunea în același punct este egală cu aceea din mediul exterior $p_A = p_0$. De-a lungul conturului A—B presiunile cresc, apoi scad, diferența $p - p_0$ anulîndu-se din nou în B, după care ea devine negativă, iar într-un punct apropiat, C, lichidul se rupe desprinzîndu-se de suprafața solidă sub influența tensiunilor interne σ; în acel punct presiunea se restabilește brusc la valoarea p_0. Viteza în C este nulă, iar forma suprafeței în jurul acestuia corespunde cu aceea dată de ecuația lui Laplace pentru suprafețele libere. Suprafața liberă nu mai este tangentă la cerc, avînd forma unui menisc în apropierea corpului (1). În cazul cînd $Q_i \neq Q_e$, lichidul corespunzător diferenței de debit $Q_i - Q_e$ formează unul sau două rulouri, în fața corpului (1), după cum punctele de viteză nulă D și E sînt distincte sau confundate. Debitul $Q_i - Q_e$ trebuie evacuat în exterior, dacă mișcarea este staționară, iar în cazul contrariu nivelul în amonte va crește, punctul A înaintează, iar fluidul tinde să deverseze pe deasupra cilindrului înecînd tot spațiul înconjurător.

Cînd cilindrul are o lărgime finită mișcarea este tridimensională, există un debit de scăpări laterale, iar mișcarea variază de la o secțiune la alta, liniile de curent ne mai fiind cuprinse în planul acestora. În aval se formează astfel o cale de vîrtejuri iar mișcarea în ansamblu este mult mai complicată.

Condițiile

$$p_A = p_B = p_0, \quad p_C = \sigma \tag{57}$$

permit, o dată cunoscute vitezele V și Ω_1 ($V = r_1 \Omega_1$) să se studieze această mișcare. În cazul tridimensional, se observă apoi că unghiurile θ_A, θ_B, θ_C, figura 5, sînt funcții de x_3 (normal pe planul figurii). În amonte ca și în aval, presiunea în stratul de fluid este constantă și egală cu p_0 (neglijînd înălțimea hidrostatică care este

foarte redusă și observînd că lichidul se deplasează în bloc cu suprafața (2)). În consecință, dacă $Q_i = Q_e$, lichidul are același nivel în amonte și în aval, sau nivele diferite în cazul figurii 7 ($Q_i \neq Q_e$).

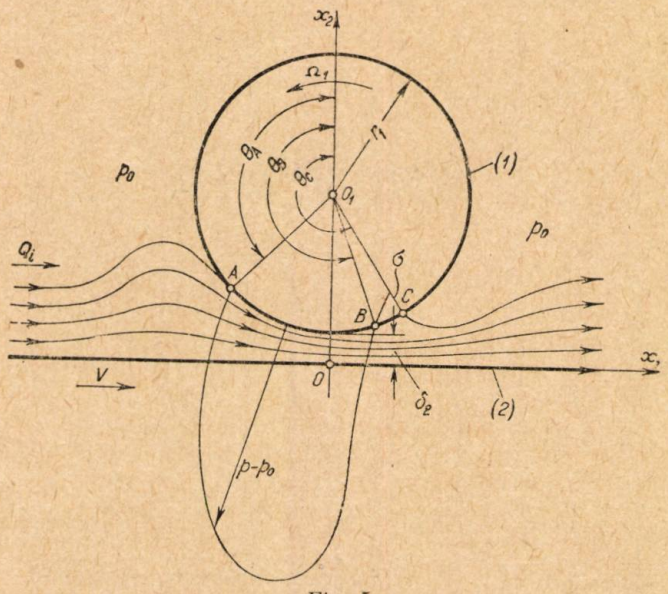


Fig. 5

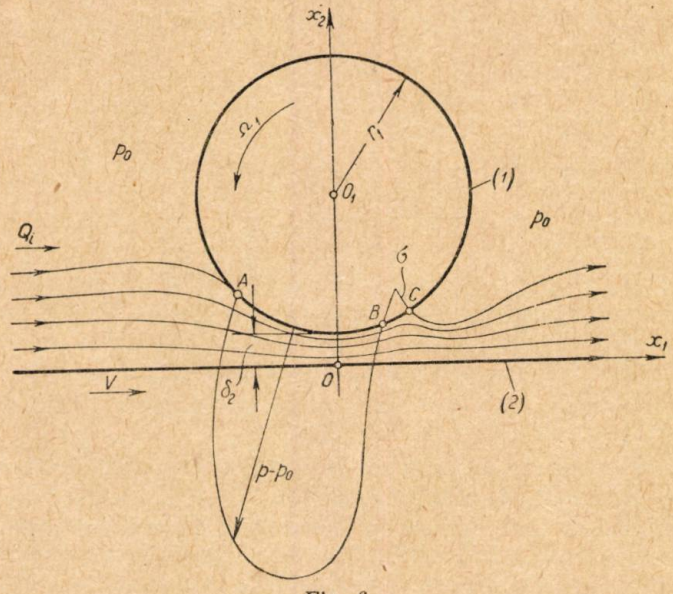


Fig. 6

Pentru fenomenul lubrificației interesează numai zona $A\,B$, de presiuni mai mar decît p_0. La o distanță δ_2 dată (fig. 5, 6, 7), rezultă, în cazul mișcării plane,

debitul Q_i cu ajutorul căruia se pot găsi unghiurile θ_A, θ_B, cunoscînd expresiile vitezelor şi ţinînd seama de condiţiile (57). Dacă mişcarea este tridimensională rezultă de asemenea debitele Q_A, Q_e, iar în ambele cazuri Q_i este debitul cunoscut de la intrare. Din ecuaţiile de debit

$$Q_{x_1} = \int_{-b_1}^{b_2} \int_0^{\delta} v_1 \, dx_2 \, dx_3 \; ; \quad Q_{x_3} = \int_{x_{1A}}^{x_{1B}} \int_0^{\delta} v_3 \, dx_1 \, dx_2 , \tag{58}$$

$$Q_A = Q_{x_{1A}} \; ; \quad Q_B = Q_e = Q_{x_{1B}} \; ; \quad Q_A - Q_e = Q_{x_3},$$

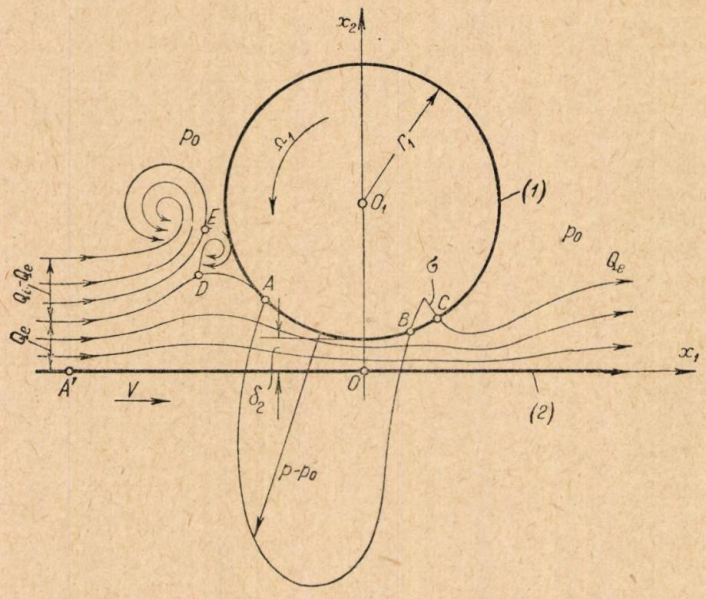


Fig. 7

în care x_{1A} şi x_{1B} sînt valorile lui x_1 în punctele A şi B, iar $-b_1$ şi b_2 valorile lui x_3 la cele 2 extremităţi ale zonei lubrificate (pe direcţia $0x_3$) şi utilizînd condiţiile (50), (51), (52), (57) se pot deduce de asemenea unghiurile θ_A, θ_B, ca funcţii de x_3, deci curbele de pe suprafaţa (1) de-a lungul cărora $p = p_0$.

În mod analog se poate proceda în cazul cînd suprafaţa (1) este o sferă iar (2) o suprafaţă curbă cilindrică sau toroidală.

Se remarcă, în cazul cînd grosimile stratului de fluid sînt de mărime mijlocie, că vitezele pot fi determinate prin condiţiile (50), (51), (52) iar constantele care intră în expresia presiunilor apar sub aceeaşi formă ca şi în soluţiile cunoscute $\tilde{p}$ pentru lubrificaţia în straturi subţiri (40), (41), (42). Determinarea acestor constante, respectiv a funcţiunilor θ_A (x_3), θ_B (x_3) se face scriind că în punctele A, B debitele sînt cunoscute (prin funcţiile φ_j (28) debitele sînt legate de presiuni), iar presiunile sînt egale cu p_0.

Primită la redacţie la 2 decembrie 1955

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ СТЕНКАМИ С НЕКОТОРЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Гидродинамический режим смазки может существовать и в случае относительных движений соприкасающихся тел, более сложных, чем обыкновенное скольжение, например, в случае простого катания или одновременного катания и скольжения. В этом случае уравнения Навье-Стокса должны рассматриваться в их общем виде. Для двухразмерной задачи решение Ванние распространено на более общие предельные условия, с учетом только положительных величин давлений.

Дается решение трехразмерных уравнений Навье-Стокса для вязких жидкостей в предположении, что градус $p =$ и вводятся затем упрощающие предположения, сохраняющие все же бо́льшую общность, чем обычные. Полученные таким образом уравнения для толстых слоев жидкости могут быть решены. Указывается способ, применяемый в этом случае, а также связь с решениями уравнений Рейнольдса. Исследуется затем для очень тонких слоев известная задача двух эллиптических параллельных поверхностей, движущихся по общей нормали.

В последней части работы анализируются граничные условия для скоростей и давлений в случае поверхностей с относительным катящимся движением.

LE MOUVEMENT DES FLUIDES VISQUEUX ENTRE PAROIS SOLIDES AYANT UN DÉPLACEMENT RELATIF QUELCONQUE

(RÉSUMÉ)

Considéré comme une caractéristique des surfaces glissantes, le régime hydrodynamique de la lubrification intervient également dans les mouvements relatifs plus compliqués, tels le roulement de deux corps ou le glissement et le roulement combinés. Il est nécessaire alors de considérer les équations de Navier-Stokes sous une forme plus complète. Pour le problème bidimensionnel, on étend la solution de Wannier aux conditions à la limite plus générales, en considérant seulement les valeurs positives des pressions.

On établit la solution des équations Navier-Stokes à trois dimensions pour les liquides visqueux, dans l'hypothèse grad $p = 0$ et l'on introduit ensuite des hypothèses simplificatrices qui admettent toutefois une généralité plus grande que celles couramment utilisées. Les équations ainsi obtenues pour les couches épaisses de fluide peuvent être résolues; à ces fins, on indique la méthode à suivre et la relation existant avec les solutions de l'équation de Reynolds. On étudie ensuite le problème connu pour la couche lubrifiante très mince, de deux surfaces elliptiques parallèles ayant un mouvement selon la normale commune.

Dans le dernier paragraphe, on étudie des conditions aux frontières pour les vitesses et les pressions, dans le cas des surfaces ayant un mouvement de roulement relatif.

BIBLIOGRAFIE

A. Sommerfeld, Z. Math. Phys., 1904, t. 50, p. 97.
2. Gregory Wannier, *A Contribution to the Hydrodynamics of Lubrication.* Quarterly of Applied Mathematics, 1950, vol. VIII, nr. 1, p. 1.
3. L. Hopf, *Abhandlungen über die Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung von N. Petrov, O. Reynolds, A. Sommerfeld und A. Gh. Michell.* Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig, 1927, nr. 218.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

DETERMINAREA ŞI UTILIZAREA PARAMETRILOR DE CARACTERIZARE A VISCOZITĂŢII LUBRIFIANŢILOR

DE

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU

Într-o lucrare anterioară s-a tratat problema generală a caracterizării şi clasificării lubrifianţilor după criteriul viscozităţii, arătîndu-se că există două condiţii necesare şi suficiente, care trebuie prevăzute în buletinele de analiză, pentru a o rezolva.

Cele două condiţii sînt:

— Temperatura (t_m) la care viscozitatea uleiului este 4 000 cST.

— Temperatura (t_c) şi viscozitatea (ν_c) la care variaţia specifică a viscozităţii $\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)$ are valoarea 0,02.

Prima condiţie se poate exprima fără dificultate depinzînd de o determinare directă. Deoarece la prima încercare nu se va obţine chiar temperatura pentru care viscozitatea este 4 000 cST, se poate face uz de observaţia că în această zonă variaţia viscozităţii cu temperatură are un caracter aproape liniar în funcţie de viscozitate, adică

$$\frac{d\nu}{dt} = f(\nu) \simeq a\,\nu + b, \tag{1}$$

în care $a = 0{,}144$,

$b = -109$.

Din (1) prin integrare şi după înlocuirile necesare, se obţine ecuaţia

$$t_m = N - 42{,}8 + t, \tag{2}$$

în care

t_m — temperatura în °C la care viscozitatea uleiului este 4 000 cST;

t — temperatura la care s-a făcut determinarea, în °C;

N — un parametru a cărui valoare depinde de viscozitatea determinată la temperatura t, avînd valoarea $N = 6{,}95 \ln (0{,}144\,\nu - 109)$.

Pentru uşurinţă şi în scopuri practice, în tabloul nr. 1 se indică valorile lui N pentru diferite valori ale viscozităţii (ν) determinate la o temperatură convenabilă.

Tabloul nr. 1

ν, în cSt	N	ν, în cSt	N	ν, în cSt	N	ν, în cSt	N
1 000	24,7	4 500	43,8	8 000	48,4	13 000	52,25
1 500	32,6	5 000	44,7	8 500	48,9	14 000	52,9
2 000	36,1	5 500	45,5	9 000	49,3	15 000	53,4
2 500	38,3	6 000	46,2	9 500	49,7	16 000	53,85
3 000	40,1	6 500	46,85	10 000	50,1	17 000	54,25
3 500	41,7	7 000	47,4	11 000	50,8	18 000	54,6
4 000	42,8	7 500	47,9	12 000	51,45	19 000	54,95
						20 000	55,25

În aceste condiţii indicarea lui t_m în buletinul de analiză nu mai prezintă dificultate pentru tehnicianul din laborator care va determina viscozitatea la o temperatură t, pe care o consideră apropiată de t_m, obţinînd o valoare oarecare ν. În tabloul nr. 1 va găsi valoarea lui N corespunzătoare lui ν determinat. Introducînd apoi pe N şi t în ecuaţia (2) se obţine t_m care nu va diferi de cel real cu mai mult decît $\sim 0{,}5\,^\circ$C, ceea ce este perfect admisibil.

A doua condiţie pare mai greu de exprimat pentru că implică determinări la temperaturi peste 100 °C. Pe de altă parte această a doua condiţie cuprinde doi parametri, astfel că pentru exprimarea ei nu se mai poate folosi o singură ecuaţie de forma simplă a ecuaţiei (2).

Ca punct de plecare pentru rezolvarea acestei probleme, se admite că în tot cazul se dispune de două determinări de viscozitate la două temperaturi diferite.

Derivînd cunoscuta relaţie a lui Walter-Ubbelöhde

$$\log \log (\nu + c) = a \log T + b, \tag{3}$$

unde ν este exprimat în cSt, iar T în °K, se obţine

$$\frac{d(\nu + c)}{d T} = 10^{T^a \cdot 10^b} \cdot a\, T^{(a-1)} \cdot 10^b \cdot \mathrm{L}\, 10, \tag{4}$$

care se mai poate scrie şi sub forma

$$(\nu + c) = 10^{T^a \cdot 10^b} \tag{5}$$

împărţind (4) prin (5) se ajunge la

$$\frac{d(\nu + c)}{d T} \cdot \frac{1}{(\nu + c)} = a\, T^{(a-1)} \cdot 10^b \cdot \mathrm{L}\, 10. \tag{6}$$

Condiţia care trebuie satisfăcută este

$$\left[\frac{d(\nu + c)}{d T} \cdot \frac{1}{\nu + c}\right]_{\substack{\nu = \nu_c \\ T = T_c}} = -0{,}02 = a \cdot T_c^{(a-1)} \cdot 10^b \,\mathrm{L} \cdot 10. \tag{7}$$

Din (7), prin logaritmare se obține

$$\log 0{,}02 = \log |a| + (a-1) \log T_c + b + \log \mathrm{L}\, 10 \tag{8}$$

care scăzută din (3), în care s-au introdus valorile ν_c, T_c, conduce la

$$\log \log (\nu_c + c) - \log T_c = \log 0{,}02 - \log |a| - \log \mathrm{L}\, 10, \tag{9}$$

sau

$$\log T_c = \log \log (\nu_c + c) - f(a), \tag{10}$$

în care

$$f(a) = \log 0{,}02 - \log a - \log \mathrm{L}\, 10 = \log \frac{0{,}02}{a \,\mathrm{L}\, 10}. \tag{11}$$

Rezolvarea ecuației (9) se poate face grafic într-un sistem de coordonate în care pe ordonată luăm dublul logaritmului viscozității (ν), iar pe abscisă logaritmul temperaturii absolute (T), (la origine valorile fiind evident $\nu = 10$ și $T = 1$) cu ajutorul unei bisectoare ajutătoare, după cum se vede în construcția din figura 1.

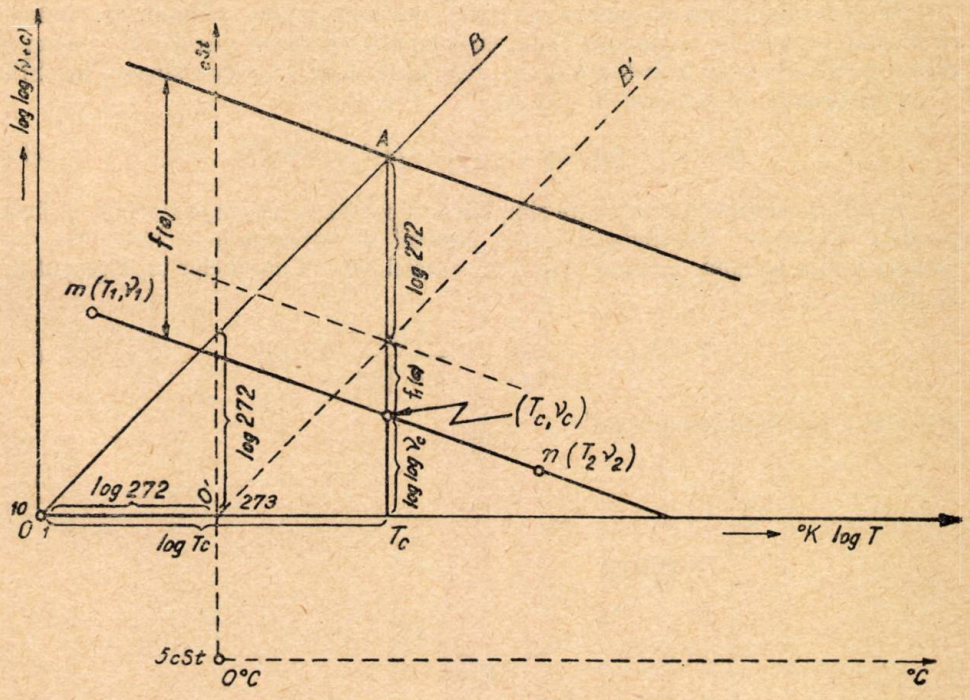


Fig. 1. — Rezolvarea grafică a ecuației (9).

Curba viscozitate — temperatură a unui ulei oarecare este o linie dreaptă, $\overline{m\,n}$, definită de două perechi de valori (T_1, ν_1) și (T_2, ν_2).

Pe această curbă se află un punct, de coordonate ν_c, T_c pentru care avem

$$\left(\frac{d\nu}{dT} \cdot \frac{1}{\nu}\right) = -0{,}02, \tag{12}$$

și care rezultă din relația (10).

Acest punct se obţine grafic dacă se construieşte o paralelă la dreapta $\overline{n,m}$, la distanţa $f(a)$ de aceasta. Valoarea lui $f(a)$ este dată de relaţia (11) şi se măsoară pe ordonată de la dreapta $\overline{m\,n}$ în sus.

La întretăierea acestei drepte paralele cu bisectoarea $\overline{OB}$ se obţine un punct A, astfel ca

$$\overline{A\,T_c} = \log\,\log\,\nu_c - f(a).$$

Cum triunghiul OAT_c este un triunghi dreptunghic isoscel, urmează că

$$\overline{AT_c} = \log\,T_c.$$

În practică este însă avantajos să se lucreze cu intervalul de temperaturi 273—410 °K şi cu viscozităţi mai mici decît 10 cSt. Aceasta impune adoptarea unui nou sistem de axe de coordonate, desenat punctat în figura 1. În mod corespunzător şi bisectoarea $\overline{OB}$ trebuie să capete o mişcare de translaţie devenind $\overline{O'B'}$.

Se vede din figură că pentru a obţine, din nou, grafic, punctul T_c, trebuie să ducem o paralelă la dreapta $\overline{m\,n}$ care reprezintă curba viscozitate — temperatură a uleiului — la o distanţă $f_1(a)$, mai mică decît $f(a)$ cu valoarea log 272.

Prin urmare, în noul sistem de axe,

$$\log\,T_c = \log\,\log\,(\nu + c) - f(a) - \log\,272. \tag{13}$$

În sfîrşit, construcţia se poate simplifica în sensul că se poate renunţa la linia paralelă ajutătoare, folosindu-se direct punctul de intersecţie al bisectoarei cu dreapta $\overline{m\,n}$ a uleiului, de la care se duce paralel cu axa absciselor un segment de lungime

$$l = f_1(a)\,\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{f_1(a)}{1 + |a|} = f_2(a) \tag{14}$$

deoarece a este totdeauna negativ.

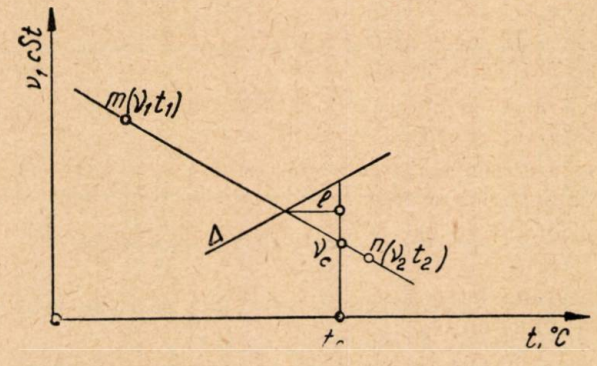


Fig. 2. — Reprezentarea schematică a modului de utilizare a diagramei din figura 3.

De asemenea pe axe putem nota direct valorile ν şi t corespunzătoare lui $\log(\nu + c)$ şi $\log T$ renunţînd astfel atît la utilizarea logaritmilor cît şi la utilizarea

gradelor de temperatură Kelvin. Astfel se ajunge la diagrama din figura 3, a cărei utilizare — redată schematic în figura 2 — se face ușor dacă se cunoaște valoarea lui $l = f_2(a)$ pentru fiecare două perechi de valori ν_1, t_1 și ν_2, t_2 care definesc un ulei oarecare.

După cum se vede din relațiile (11), (13) și (14), singurul parametru variabil este coeficientul a din (3) care se poate scrie

$$a = \frac{\log\left[\log(\nu_1 + c)/\log(\nu_2 + c)\right]}{\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} \tag{15}$$

Prin urmare sînt necesare valorile numărătorului, A, în funcție de valorile cunoscute ale lui ν_1 și ν_2 și valorile numitorului, B, în funcție de T_1 și T_2 corespunzători.

Valorile lui A pentru domeniul de viscozități și uleiurile minerale întîlnite în mod obișnuit în practică, sînt date în tabloul nr. 2.

Valorile B pentru domeniul de temperaturi și uleiurile minerale întîlnite în mod obișnuit în practică, sînt date în tabloul nr. 3.

În tabloul nr. 4 se dau rezultatele celorlalte operații, care se fac pe baza lui A și B, adică valorile lui l care rezultă, după cum s-a arătat, din relația

$$l = \left[\log \frac{0{,}02}{\frac{\log|A|}{\log|B|} \cdot \mathrm{L}\,10} - \log 272\right] \cdot \frac{1}{\frac{\log|A|}{\log|B|} + 1}. \tag{16}$$

Pe baza acestor date se poate întocmi diagrama de lucru la care trebuie să se țină seama pe faptul că pe abscisă scara corespunde logaritmilor unor valori de ordinul sutelor, iar pe ordonată scara corespunde logaritmilor unor valori de ordinul unităților (log log ν).

Deoarece scările din figura 3 nu sînt identice nici bisectoarea nu poate trece la 45°. Trebuie de asemenea remarcat faptul că în noul sistem de axe cu ordonata la origine $\nu = 5$ cSt, în locul bisectoarei apare o dreaptă paralelă la bisectoarea din primul sistem de axe, deplasată în jos față de aceasta cu log 272.

În sfîrșit, trebuie să se țină seama de unitatea de măsură în care se exprimă l, respectiv în care sînt exprimate scările.

În figura 3 este prezentată o reducere la jumătate a diagramei de lucru construită pe hîrtie milimetrică la care valorile lui l sînt exprimate în mm.

În această diagramă redusă evident, valorile lui l sînt 1/2 din cele indicate în tabloul 4.

Precizia nomogramei este satisfăcătoare, abaterile fiind de ordinul de mărime al erorilor de determinare.

Exemplu: Se determină în laborator viscozitatea cinematică a uleiului 413, la două temperaturi convenabile, obținîndu-se următoarele rezultate:

la $t_1 = 7{,}6\,°C$	$\nu_1 = 2\,000$ cSt
$t_2 = 98{,}9\,°C$	$\nu_2 = 16{,}2$ cSt

Tablou

ν_2 in cSt \ ν_1 in cSt	600	800	1 000	1 200	1 400	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
5	3,641	3,805	3,932	4,035	4,123	4,209	4,266	4,326	4,380	4,430	4,476	4,518	4,557
6	3,337	3,487	3,604	3,698	3,779	3,849	3,910	3,965	4,014	4,060	4,102	4,141	4,177
7	3,114	3,254	3,363	3,451	3,527	3,592	3,649	3,700	3,746	3,789	3,828	3,864	3,896
8	2,941	3,074	3,176	3,260	3,331	3,392	3,446	3,495	3,538	3,579	3,616	3,650	3,681
9	2,803	2,929	3,027	3,106	3,174	3,232	3,284	3,330	3,372	3,410	3,445	3,477	3,508
10	2,689	2,810	2,904	2,981	3,046	3,103	3,153	3,196	3,234	3,270	3,304	3,336	3,366
11	2,592	2,708	2,799	2,873	2,935	2,989	3,037	3,080	3,118	3,153	3,186	3,216	3,244
13	2,437	2,547	2,632	2,701	2,760	2,811	2,855	2,896	2,932	2,965	2,996	3,024	3,050
15	2,317	2,421	2,502	2,569	2,624	2,673	2,717	2,753	2,786	2,817	2,846	2,873	2,899
17	2,222	2,322	2,399	2,462	2,516	2,562	2,603	2,640	2,673	2,703	2,731	2,757	2,781
20	2,108	2,203	2,266	2,332	2,386	2,433	2,473	2,505	2,536	2,563	2,592	2,617	2,640
25	1,968	2,057	2,125	2,182	2,230	2,271	2,307	2,338	2,367	2,394	2,419	2,442	2,463
30	1,866	1,960	2,013	2,068	2,114	2,154	2,190	2,218	2,245	2,270	2,293	2,314	2,334
35	1,788	1,868	1,930	1,982	2,025	2,063	2,096	2,125	2,151	2,175	2,197	2,217	2,235
40	1,725	1,802	1,862	1,912	1,954	1,989	2,021	2,049	2,074	2,098	2,120	2,140	2,158
45	1,673	1,748	1,806	1,854	1,894	1,930	1,959	1,984	2,008	2,031	2,052	2,072	2,091
50	1,628	1,702	1,760	1,806	1,845	1,878	1,878	1,935	1,958	1,980	2,001	2,020	2,038

Tablou

T_2 °C	T_2 °K	T_1 °C	−10	−8	−6	−4	−2	0	+2
		T_1 °K	263,15	265,15	267,15	269,15	271,15	273,15	275,15
37,8	310,95		0,8463	0,8527	0,8591	0,8656	0,8720	0,8784	0,8849
38	311,15		0,8457	0,8522	0,8586	0,8650	0,8714	0,8779	0,8843
40	313,15		0,8403	0,8467	0,8531	0,8595	0,8659	0,8723	0,8787
42	315,15		0,8350	0,8413	0,8477	0,8540	0,8604	0,8667	0,8731
44	317,15		0,8297	0,8360	0,8423	0,8487	0,8550	0,8613	0,8676
46	319,15		0,8245	0,8308	0,8371	0,8433	0,8496	0,8559	0,8621
48	321,15		0,8194	0,8256	0,8319	0,8381	0,8443	0,8505	0,8568
50	323,15		0,8143	0,8205	0,8267	0,8329	0,8391	0,8453	0,8515
52	325,15		0,8093	0,8155	0,8216	0,8278	0,8340	0,8401	0,8463
54	327,15		0,8044	0,8105	0,8166	0,8227	0,8288	0,8349	0,8410
90	363,15		0,7246	0,7301	0,7356	0,7411	0,7467	0,7522	0,7577
92	365,15		0,7206	0,7261	0,7315	0,7370	0,7426	0,7481	0,7535
94	367,15		0,7167	0,7222	0,7276	0,7330	0,7385	0,7440	0,7494
96	369,15		0,7129	0,7183	0,7237	0,7291	0,7345	0,7399	0,7453
98	371,15		0,7090	0,7144	0,7198	0,7252	0,7306	0,7360	0,7413
98,9	372,05		0,7073	0,7127	0,7180	0,7234	0,7288	0,7342	0,7396
100	373,15		0,7052	0,7106	0,7160	0,7213	0,7267	0,7320	0,7375

nr. 2

$$A = \frac{\log(\nu_1+0{,}8)}{\log(\nu_2+0{,}8)}$$

3 500	4 000	4 500	5 000	5 500	6 000	6 500	7 000	7 500	8 000	8 500	9 000	9 500	10 000
4,640	4,721	4,791	4,848	4,902	4,952	4,997	5,039	5,079	5,115	5,150	5,182	5,213	5,242
4,257	4,327	4,388	4,443	4,493	4,538	4,580	4,619	4,655	4,688	4,720	4,749	4,778	4,805
3,973	4,038	4,095	4,146	4,193	4,235	4,274	4,310	4,344	4,375	4,405	4,432	4,459	4,484
3,752	3,814	3,868	3,916	3,960	4,000	4,037	4,071	4,103	4,132	4,160	4,186	4,211	4,235
3,575	3,634	3,685	3,732	3,773	3,811	3,847	3,879	3,909	3,938	3,964	3,989	4,013	4,035
3,436	3,487	3,541	3,581	3,619	3,655	3,689	3,721	3,751	3,779	3,805	3,829	3,851	3,872
3,306	3,360	3,408	3,451	3,490	3,525	3,557	3,587	3,615	3,641	3,666	3,689	3,711	3,732
3,109	3,160	3,205	3,245	3,281	3,314	3,345	3,373	3,399	3,424	3,447	3,460	3,489	3,509
2,957	3,004	3,050	3,085	3,118	3,149	3,178	3,205	3,230	3,253	3,275	3,296	3,316	3,335
2,834	2,881	2,922	2,958	2,991	3,021	3,049	3,075	3,099	3,121	3,142	3,162	3,181	3,199
2,690	2,733	2,773	2,807	2,838	2,867	2,894	2,919	2,942	2,963	2,982	3,000	3,017	3,033
2,513	2,552	2,590	2,620	2,648	2,674	2,698	2,721	2,743	2,764	2,784	2,803	2,821	2,837
2,380	2,420	2,456	2,485	2,512	2,537	2,560	2,581	2,601	2,620	2,638	2,655	2,671	2,686
2,280	2,318	2,353	2,380	2,405	2,429	2,452	2,474	2,494	2,512	2,529	2,545	2,560	2,574
2,201	2,236	2,271	2,297	2,322	2,345	2,366	2,386	2,405	2,423	2,440	2,456	2,471	2,485
2,134	2,169	2,201	2,227	2,251	2,273	2,293	2,312	2,330	2,347	2,363	2,378	2,392	2,405
2,076	2,111	2,143	2,168	2,191	2,212	2,232	2,251	2,269	2,287	2,303	2,318	2,332	2,344

nr. 3

$$B = \frac{T_1}{T_2}$$

+4	+6	+8	+10	+12	+14	+16	+18	+20	°C
277,15	279,15	281,15	283,15	285,15	287,15	289,15	291,15	293,15	°K
0,8913	0,8977	0,9042	0,9106	0,9170	0,9235	0,9299	0,9363	0,9427	
0,8907	0,8971	0,9036	0,9100	0,9164	0,9229	0,9293	0,9357	0,9421	
0,8850	0,8914	0,8978	0,9042	0,9106	0,9170	0,9234	0,9297	0,9361	
0,8794	0,8858	0,8921	0,8985	0,9048	0,9112	0,9175	0,9238	0,9302	
0,8739	0,8802	0,8865	0,8928	0,8991	0,9054	0,9117	0,9180	0,9243	
0,8684	0,8747	0,8809	0,8872	0,8935	0,8997	0,9060	0,9123	0,9185	
0,8630	0,8692	0,8754	0,8817	0,8879	0,8941	0,9004	0,9066	0,9128	
0,8577	0,8639	0,8700	0,8762	0,8824	0,8886	0,8948	0,9010	0,9072	
0,8524	0,8586	0,8647	0,8709	0,8770	0,8832	0,8893	0,8954	0,9016	
0,8471	0,8532	0,8594	0,8655	0,8716	0,8777	0,8838	0,8900	0,8961	
0,7632	0,7687	0,7742	0,7797	0,7852	0,7907	0,7962	0,8017	0,8072	
0,7590	0,7645	0,7700	0,7755	0,7810	0,7865	0,7920	0,7973	0,8027	
0,7549	0,7603	0,7658	0,7712	0,7766	0,7821	0,7875	0,7930	0,7984	
0,7507	0,7561	0,7616	0,7670	0,7724	0,7778	0,7832	0,7887	0,7941	
0,7467	0,7521	0,7575	0,7629	0,7683	0,7737	0,7791	0,7845	0,7899	
0,7450	0,7503	0,7557	0,7611	0,7665	0,7718	0,7772	0,7826	0,7880	
0,7427	0,7481	0,7535	0,7588	0,7642	0,7695	0,7749	0,7802	0,7856	

Tabloul

A \ B	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80
1,7											
1,8											
1,9											
2,0											36,1
2,1										37,8	43,9
2,2									37,8	43,9	49,1
2,3								38,9	43,9	49,1	53,3
2,4							38,9	43,9	47,8	52,3	56,1
2,5						38,9	43,9	47,8	52,3	56,1	59,3
2,6					37,8	42,4	47,8	51,2	55,2	58,6	62,0
2,7				37,8	42,4	46,5	50,1	54,3	57,8	60,7	63,8
2,8			37,8	40,9	45,2	50,1	53,3	56,9	60,0	62,6	65,4
2,9		36,1	40,9	45,2	49,1	52,3	56,1	58,6	62,0	64,3	66,7
3,0	36,1	38,9	43,9	47,8	51,2	54,3	57,8	60,7	63,2	65,8	68,1
3,1	37,8	42,4	46,5	50,1	53,3	56,9	59,3	62,6	64,9	67,2	69,0
3,2	40,9	45,2	49,1	52,3	55,2	58,6	61,4	63,8	66,3	68,4	69,9
3,3	43,9	47,8	51,2	54,3	56,9	60,0	62,6	64,9	67,2	69,0	70,8
3,4	46,5	49,1	53,3	56,1	58,6	61,4	63,8	66,3	68,4	69,9	71,5
3,5	47,8	51,2	54,3	57,8	60,0	62,6	64,9	67,2	69,0	70,5	71,9
3,6	50,1	53,3	56,1	58,6	61,4	63,8	65,8	68,1	69,6	71,3	72,5
3,7	51,2	54,3	56,9	60,0	62,6	64,9	66,7	68,7	70,2	71,7	
3,8	53,3	56,1	58,6	61,4	63,8	65,8	67,7	69,3	70,8	72,1	
3,9	54,3	56,9	60,0	62,0	64,3	66,7	68,4	69,9	71,5		
4,0	56,1	58,6	60,7	63,2	65,4	67,2	69,0	70,5	71,9		
4,1	56,9	59,3	62,0	64,3	66,4	68,1	69,6	71,1			
4,2	57,8	60,7	62,6	64,9	66,7	68,7	70,2	71,5			
4,3	59,3	61,4	63,8	65,8	67,7	69,0	70,5				
4,4	60,0	62,6	64,3	66,3	68,1	69,6	71,1				
4,5	60,7	63,2	65,4	67,2	68,7	70,2					
4,6	62,0	63,8	65,8	67,7	69,0	70,5					
4,7	62,6	64,3	66,3	68,1	69,6						
4,8	63,2	65,4	66,7	68,7	69,9						
4,9	63,8	65,8	67,7	69,0							
5,0	64,3	66,3	68,1	69,3							
5,1	64,9	66,7	68,4								
5,2	65,4	67,2	68,7								
5,3	65,8	67,7									

Se citeşte în tabloul nr. 2, valoarea lui A pentru $\nu_1 = 2\,000$ cSt şi $\nu_2 = 16{,}2$ cSt, obţinîndu-se (prin interpolare aproximativă) $A = 2{,}70$.

Se citeşte în tabloul nr. 3, valoarea lui B pentru $t_1 = 7{,}6\,^\circ C$ şi $t_2 = 98{,}9\,^\circ C$, obţinîndu-se (tot prin interpolare aproximativă) $B = 0{,}752$.

Se citeşte în tabloul nr. 4 valoarea lui l pentru $A = 2{,}70$ şi $B = 0{,}752$, obţinîndu-se (înterpolînd aproximativ) $l = 46{,}5$ mm.

Construcţia grafică se face astfel:

Se construieşte pe diagramă dreapta care trece prin cele două puncte (ν_1, t_1) şi (ν_2, t_2). De la intersecţia acestei drepte cu bisectoarea care se găseşte pe diagramă se duce un segment pozitiv de 46,5 mm paralel cu axa absciselor. De la capătul segmentului se duce o perpendiculară pe axa absciselor, care va intersecta dreapta (ν_1, t_1), (ν_2, t_2) în punctul căutat, avînd coordonatele (ν_c, t_c), ale căror valori se citesc direct, obţinîndu-se pentru exemplul citat, $\nu_c = 8{,}8$ cSt şi $t_c = 124\,^\circ C$. Aceste valori s-au verificat cu abateri sub 0,5%.

nr. 4
$I = f(A, B)$

0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	B / A
			34,3	40,9	47,8	54,3	59,3	69,0	71,7	1,7
		36,1	43,9	50,1	56,1	60,7	65,4	71,7		1,8
34,3	40,9	47,8	52,3	56,9	61,4	65,4	68,7			1,9
42,4	47,8	52,3	57,8	61,4	65,4	68,7	71,1			2,0
47,8	53,3	57,8	61,4	64,9	68,1	70,8				2,1
53,3	56,9	61,4	64,3	67,7	70,2	72,1				2,2
56,9	60,7	63,8	67,2	69,6	71,5					2,3
60,0	63,2	66,3	68,7	71,1	72,7					2,4
62,6	65,4	68,1	70,2	72,1						2,5
64,9	67,2	69,3	71,5							2,6
66,3	68,7	70,8	72,3							2,7
68,1	69,9	71,7								2,8
69,0	70,8	72,3								2,9
69,9	71,7									3,0
70,8	72,3									3,1
71,5										3,2
72,1										3,3
72,7										3,4
										3,5
										3,6
										3,7
										3,8
										3,9
										4,0
										4,1
										4,2
										4,3
										4,4
										4,5
										4,6
										4,7
										4,8
										4,9
										5,0
										5,1
										5,2
										5,3

Din cele arătate mai sus se vede că eventualele dificultăți la determinarea parametrilor de caracterizare ν_c și t_c sînt aparente; ele dispar după primele 2 sau 3 aplicații și sînt restrînse la cadrul laboratorului.

Tablourile prezentate au fost întocmite cu preocuparea de a conține suficiente valori pentru domeniul de necesități întîlnite în practică; erorile ce se pot face la stabilirea valorilor intermediare sînt neînsemnate.

Pentru teren (în exploatare) aceste considerații nici nu intervin. Acolo se dispune de trei parametri care definesc complet uleiul și care se pot interpreta fără dificultate:

— t_m este un parametru valabil în orice condiții reprezentînd o frontieră de temperatură de utilizare, sub care nu se poate coborî, în cazul acelui ulei;

— ν_c și t_c definesc un punct pe curba viscozitate-temperatură a uleiului, în raport cu care punct variația viscozității cu temperatura este aceeași pentru toate uleiurile minerale din sortimentul STAS de uleiuri pentru motoare.

În punctul de coordonate ν_c şi t_c variaţia viscozităţii uleiurilor este de 2% °C, iar legea generală de variaţie a viscozităţii cu temperatura este exprimată [1] prin relaţia:

$$\nu = e^{a(t_c - t)} \cdot \left(\frac{t_c + c}{t + c}\right)^b \cdot \nu_c , \tag{17}$$

în care

$$a = -0{,}01,$$
$$b = 4{,}14,$$
$$c = 100.$$

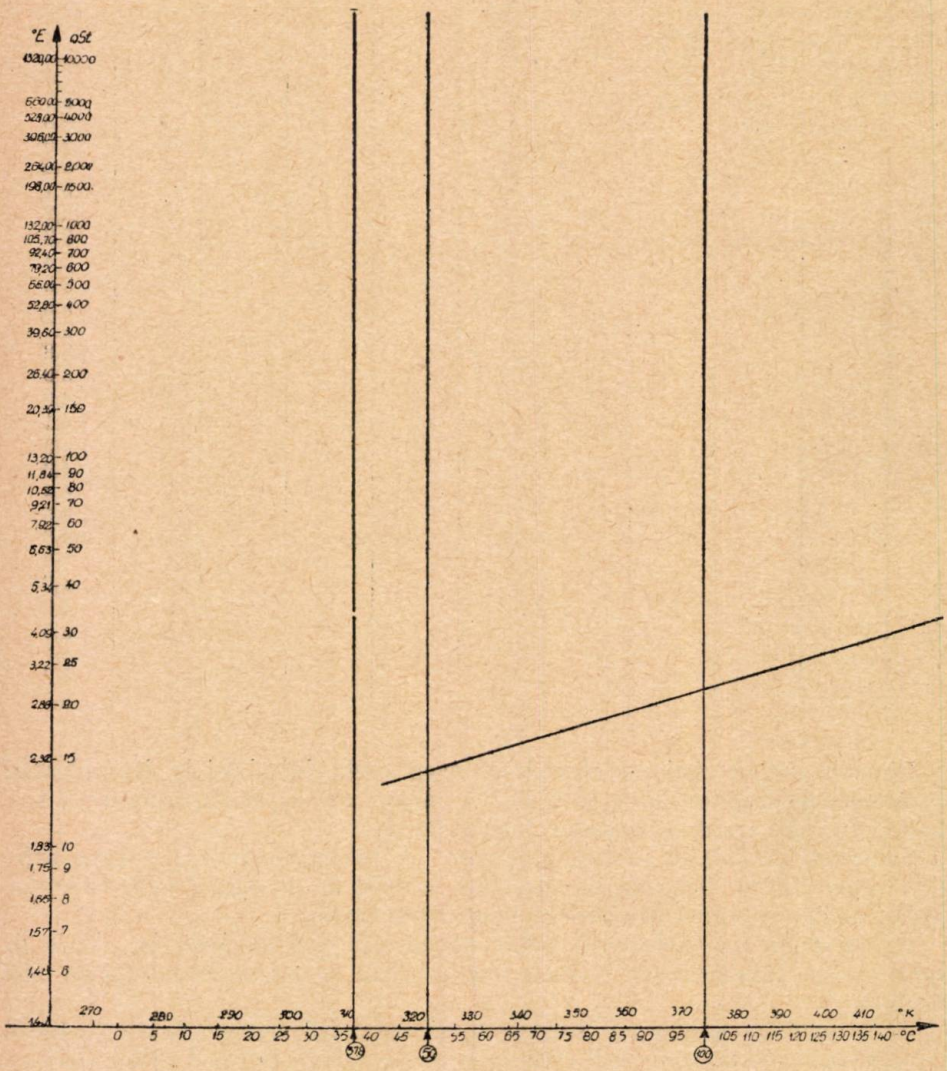


Fig. 3. — Diagrama pentru determinarea parametrilor ν_e şi t_e în funcţie de segmentul l (la reducerea adoptată (1/2), segmentul l are jumătate din lungimea indicată în tabloul nr. 4).

În apropierea temperaturii caracteristice, t_c, deducerea viscozității la orice temperatură se poate face mintal, avînd în vedere că variația viscozității crește pînă la 3%/°C la o temperatură cu ~ 32 °C sub t_c și scade pînă la 1% /°C la o temperatură cu ~ 62°C/peste t_c.

Cu ajutorul parametrilor de caracterizare ν_c și t_c se poate face o clasificare a lubrifianților în condiții identice.

★

Din punct de vedere practic, parametrii de caracterizare propuși (t_m, ν_c și t_c) prezintă avantaje deosebite care sînt scoase în evidență prin posibilitățile noi de înțelegere a noțiunii de calitate a uleiurilor lubrifiante și de exprimare a acestei calități. Această problemă prezintă o mare importanță pentru clasificarea lubrifianților, atunci cînd această clasificare se face pe bază de calitate, cum este cazul la noi.

Clasificarea actuală STAS a lubrifianților, datează din anul 1949 și și-a găsit expresia în nomenclatorul uleiurilor minerale, STAS 871—49.

În momentul elaborării sale acest STAS reprezenta un important pas înainte pe calea raționalizării situației în domeniul lubrifianților, pentru două motive:

— adopta un criteriu de calitate larg acceptat — indicele de viscozitate,

— punea ordine într-o producție nereglementată, caracterizată prin existența unei mari varietăți de produse, a căror calitate era inconstantă, deseori necorespunzătoare și necontrolată.

Astăzi situația a evoluat mult, s-a trecut la o nouă fază. Există condițiile necesare pentru a face un nou pas înainte. Deficiențele actualului sistem de clasificare a uleiurilor lubrifiante, au fost sezisate de forul de standardizare, care caută o cale nouă pentru reglementarea situației.

Rezultatele obținute de noi conduc la concluzii semnificative care ar putea fi folosite la elaborarea viitoarei clasificări.

În principiu, clasificarea uleiurilor lubrifiante trebuie să aibă în vedere:

— domeniul de utilitate a lubrifiantului în starea în care a fost livrat;

— comportarea lubrifiantului, în timp.

Se cunoaște modul cum se rezolvă aceste condiții în prezent:

— domeniul de utilitate este definit printr-o temperatură de congelare, care se presupune că indică comportarea la temperaturi joase, și viscozitatea la 100 °C, care, în mod greșit, se consideră a fi temperatura de regim a motorului,

— comportarea lubrifiantului în timp — sau calitatea lubrifiantului — este definită indirect printr-un parametru convențional: indicele de viscozitate.

Cu ajutorul parametrilor propuși de noi, situația se simplifică și se precizează astfel:

— domeniul de utilitate este definit, prin temperatura minimă la care poate fi utilizat uleiul respectiv și viscozitatea la o temperatură din zona temperaturilor de regim, la care se cunoaște exact variația viscozității cu temperatura,

— comportarea lubrifiantului în timp — sau calitatea lubrifiantului — este definită tot indirect prin aceeași pereche de valori caracteristice (ν_c și t_c) care, prin ele însile, definesc întreaga curbă viscozitate-temperatură a lubrifiantului.

Pe baza cunoștințelor actuale se poate afirma — după cum s-a scos în evidență într-o lucrare anterioară [1] — că temperatura de congelare nu este o caracteristică semnificativă pentru exploatare, depinzînd de conținutul de parafină solidă, dizolvată în ulei. Această parafină, fără a modifica în mod apreciabil comportarea gene-

rală a lubrifiantului în exploatare, modifică unele caracteristici înscrise în buletinul de analiză.

Prin adoptarea temperaturii minime de utilizare a uleiului, t_m, care în marea majoritate a cazurilor este superioară temperaturii de congelare, se înlătură dificultăţile de interpretare a calităţii uleiului în funcţie de congelare. Parametrul t_m mai prezintă marele avantaj că ocoleşte efectul, uneori mistificator, al depresanţilor, care, fără a modifica viscozitatea uleiului la t_m, coboară în mod spectaculos dar neconcludent, temperatura de congelare.

În ceea ce priveşte viscozitatea la 100 °C, tot ce se poate admite este faptul că are semnificaţie dacă — în mod întîmplător — temperatura de regim în lagărul de bielă este 100 °C. După cum s-a arătat cu altă ocazie [1], temperatura în lagărul de bielă este de cele mai multe ori cuprinsă între 110 şi 130 °C. Pe baza viscozităţii la 100 °C este practic imposibil să se precizeze viscozitatea la o altă temperatură. Prin urmare, în realitate beneficiarul ignoră viscozitatea uleiului din lagăr în condiţii de regim.

Prin adoptarea viscozităţii şi temperaturii caracteristice (ν_c şi t_c) aceste neajunsuri sînt înlăturate şi — cu o eroare cu totul neînsemnată — beneficiarul este în măsură să aprecieze oportunitatea folosirii unui anumit ulei.

Dar, în clasificarea actuală indicele de viscozitate serveşte şi pentru a exprima calitatea uleiului. Chiar cu criticile care i s-au adus, acest parametru reuşeşte totuşi să stabilească oarecare erarhie după principiul calităţii. În fond, indicele de viscozitate nu reprezintă o calitate complexă, intrinsecă a uleiului, ci valorile indicelui de viscozitate păstrează un oarecare paralelism cu calitatea uleiului. Cu alte cuvinte, un ulei cu indice de viscozitate mai mare are o viscozitate mai mică la temperaturi joase, o viscozitate mai mare la temperaturi ridicate, o stabilitate chimică mai mare, o corosivitate mai redusă, o rezistenţă la emulsionare mai mare ş.a.m.d., decît un ulei cu indice de viscozitate mai mic. Analitic însă, indicele de viscozitate depinde de două viscozităţi determinate la două temperaturi anumite. Dacă se poate modifica în mod convenabil viscozitatea la una din aceste temperaturi, fără a influenţa apreciabil celelalte proprietăţi ale uleiului, şi chiar viscozitatea uleiului la alte temperaturi, corespondenţa între indicele de viscozitate şi calitatea uleiului, în general, încetează. Şi o astfel de modificare se poate realiza dizolvînd în ulei parafină sau compuşi macromoleculari, de tipul poliizobutilenei care, fără a avea o influenţă din alte puncte de vedere, modifică apreciabil viscozitatea la temperaturi ridicate.

Aici trebuie să constatăm un fapt surprinzător. Cu timpul indicele de viscozitate şi-a pierdut semnificaţia iniţială de caracteristică indirectă a cărei valoare se datorează corespondenţei naturale cu proprietăţile de întrebuinţare ale uleiului, devenind o caracteristică cu semnificaţie proprie, o calitate a uleiului şi încă dintre cele mai importante. De aici a decurs şi goana din ultima vreme după aditivi, care ameliorează indicele de viscozitate şi apariţia a numeroase uleiuri cu comportare deseori nesatisfăcătoare.

În aceste condiţii, indicele de viscozitate a devenit inutil iar aditivii de indice de viscozitate trebuie consideraţi că au introdus o nouă complicaţie în problema — şi aşa destul de spinoasă — a caracterizării lubrifianţilor.

Trebuie subliniat că perechea de valori ν_c şi t_c este cel puţin tot atît de semnificativă cît este indicele de viscozitate.

Mai puţin pretenţioşi în stabilirea unei ierarhii calitative stricte, noii parametri de caracterizare exprimă mai fidel proprietăţile de utilizare ale uleiului.

Indicele de viscozitate afirmă de exemplu, că între un ulei cu I.V. = 60 și un altul cu I.V. = 40 deosebirea de comportare este mare, net apreciabilă. Parametrii de caracterizare propuși, după cum se vede în figura 4, indică o comportare mai apropiată a celor două uleiuri, iar rezultatele de exploatare confirmă această concluzie.

Astfel, uleiurile din grupele 200 și 300 care par apreciabil diferite, dacă le considerăm după indicele de viscozitate, sînt foarte apropiate — aproape confundîndu-se — dacă le considerăm după ν_c și t_c. Datele din exploatare confirmă însă concluzia care s-ar trage pe baza noilor parametri, în timp ce datele de laborator sînt suficient de necategorice în favoarea indicelui de viscozitate. Astfel se știe că la încercările efectuate pe teren, uleiurile din grupa 300 nu s-au comportat

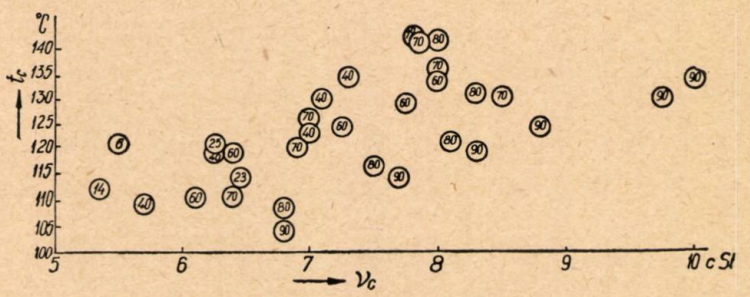


Fig. 4. — Poziția interpătrunsă a punctelor de coordonate ν_c și t_c pentru uleiuri de diferite viscozități și diferiți indici de viscozitate (valoarea indicelui de viscozitate este notată în cercul al cărui centru reprezintă punctul de coordonare ν_c și t_c).

totdeauna mai bine decît cele din grupa 200. Totodată, după datele furnizate de I. Irimescu, constanta de reacție a uleiului 212 este mai mare decît constanta de reacție a uleiului 312 cu numai aproape 50% din cît ar fi normal pe baza diferențelor indicilor de viscozitate.

Fabricarea uleiurilor minerale din componenți comuni în proporții variabile, precum și uzul larg și nu totdeauna mărturisit de aditivi pentru indicele de viscozitate, impun restrîngerea semnificației indicelui de viscozitate și a celorlalți indici și parametri destinați să caracterizeze calitativ lubrifianții, pe baza proprietăților de viscozitate.

În concluzie, trebuie să se reție următoarele:

— Clasificarea uleiurilor minerale naturale (neameliorate cu aditivi) trebuie să se facă pe baza semnificației fizice, directe a proprietăților de viscozitate.

— Deosebirile de calitate a uleiurilor minerale naturale, deduse pe baza indicelui de viscozitate sînt excesive, neconfirmate de deosebirile mai mici și nesistematice ale proprietăților de viscozitate ale acestora.

— Există dovezi din care rezultă că timpul de utilizare actuală a uleiurilor minerale în motoare este prea scurt pentru a provoca alterări de un ordin de mărime foarte diferit, chiar dacă în conformitate cu clasificarea STAS aceste uleiuri fac parte din grupe cu totul diferite.

— În tot cazul, din analiza a numeroase date disponibile [2], se pare că alterarea uleiului — la perioadele de schimb obișnuite — nu este principala cauză

de uzură a motorului. Dimpotrivă, contaminarea uleiului are consecinţe importante care însă, pot fi agravate de produşii de alterare proprie a uleiurilor de calitate inferioară.

Clasificarea pe baza viscozităţii şi temperaturii caracteristice are un caracter mai obiectiv, deoarece este posibil să se definească pentru fiecare ulei un domeniu nominal de utilizare. Adoptînd ca interval nominal de temperatură, temperatura de regim $\pm$ 5 °C, iar ca interval de viscozitate, viscozitatea corespunzătoare temperaturii de regim $\pm$ 10% şi admiţînd că temperatura de regim coincide cu temperatura caracteristică (t_c) a uleiului, domeniul de utilizare a fiecărui ulei se poate reprezenta printr-un patrulater de forma celui din figura 5.

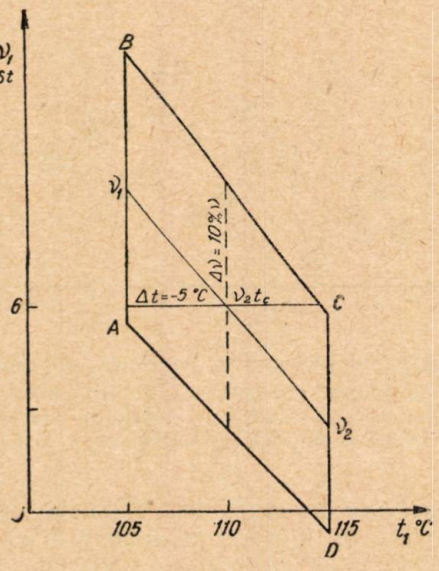


Fig. 5. — Domeniul de utilizare a lubrifianţilor în funcţie de viscozitatea nominală a uleiului exprimată prin ν_c şi t_c pentru o variaţie a temperaturii de $\pm$ 5 °C.

Trebuie remarcat că patrulaterul care defineşte domeniul de utilizare a fiecărui ulei este simetric faţă de axa ν_1, ν_2 şi cu latura $\overline{AB}$ mai mare decît latura $\overline{CD}$. Această inegalitate este determinată de faptul că laturile verticale reprezintă un $\Delta\nu$ şi sînt respectiv egale $\overline{AB} = 2\,\Delta\,\nu_1$ şi $\overline{CD} = 2\,\Delta\,\nu_2$. Deoarece ν_1 — corespunzînd unei temperaturi mai joase — este mai mare decît ν_2, este evident că $\overline{AB} > \overline{CD}$. Cu alte cuvinte, latura verticală a patrulaterului se lungeşte pe măsură ce se trece la temperaturi mai joase. Totodată acest patrulater poate fi lungit la dreapta şi la stînga, indicînd intervalul nominal de viscozitate, la orice temperatură. Cu alte cuvinte, temperatura şi viscozitatea caracteristică definesc în mod precis toate valorile viscozităţii care se pot atribui unui anumit ulei. Această subliniere are scopul să preîntîmpine obiecţia că o clasificare făcută pe baza viscozităţilor la diferite temperaturi, nu poate fi substituită unei clasificări făcute pe baza viscozităţilor la aceeaşi temperatură, de exemplu 100 °C.

Construind pe un grafic domeniile de utilizare a tuturor uleiurilor STAS, pentru motoare, se obține reprezentarea de ansamblu din figura 6.

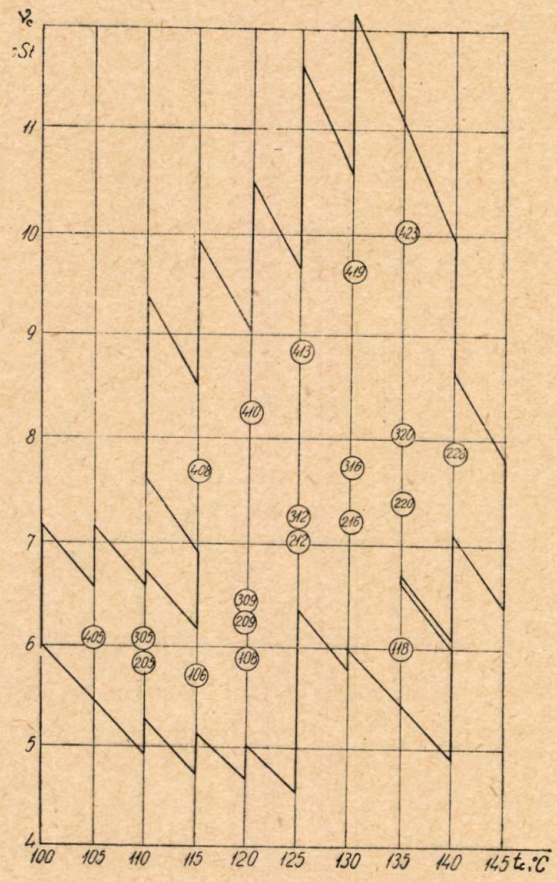


Fig. 6. — Tabloul uleiurilor lubrifiante din actualul sortiment STAS.

Prin analizarea acestei reprezentări, se pot trage următoarele concluzii interesante:

— Actualul sortiment nu prezintă o repartiție uniformă a uleiurilor; în unele zone sînt prea puține uleiuri, în altele prea multe.

— Datorită suprapunerii domeniilor lor de utilizare, coexistența grupelor 200 și 300 pare nejustificată.

— Sortimentul actual de uleiuri din grupa 100 este neadecvat.

Dacă se are în vedere și condiția de t_m, se poate elabora un nou sortiment de uleiuri pentru motoare a cărui reprezentare de ansamblu este dată în figura 7.

Prin analizarea acestei reprezentări se pot trage următoarele concluzii:

— S-a eliminat grupa 200, lăsîndu-se grupa 300 a uleiurilor de calitate medie, rafinate cu acid sulfuric.

— S-au stabilit alte vîscozităţi nominale, pentru a realiza o repartiţie mai uniformă a uleiurilor.

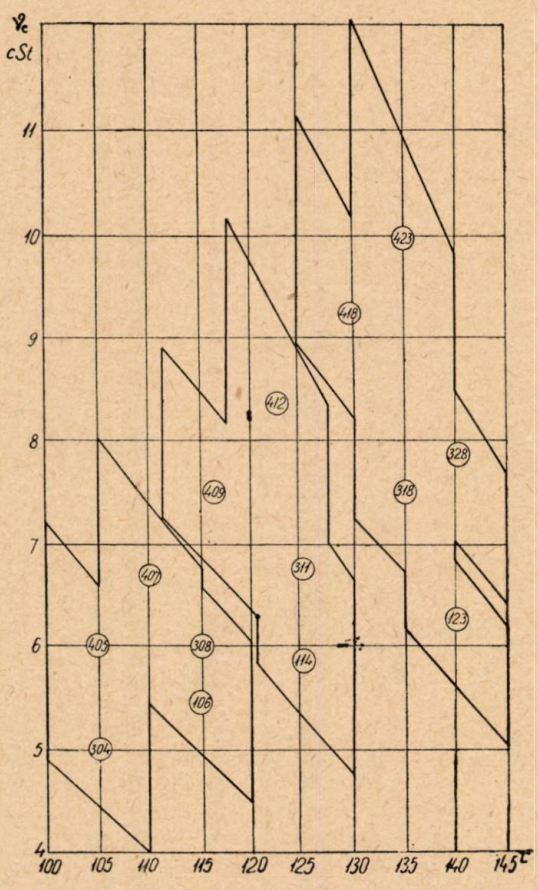


Fig. 7. — Tabloul uleiurilor lubrifiante din sortimentul propus.

— S-au introdus unele uleiuri necesare pentru a satisface condiţia de t_m pentru un domeniu de utilizare dat.

★

Adoptînd clasificarea şi caracterizarea fizică a lubrifianţilor pe baza parametrilor caracteristici, t_m, t_c şi ν_c se poate considera că o parte a problemei generale a clasificării şi caracterizării lubrifianţilor a fost, în oarecare măsură, rezolvată.

Parametri caracteristici au sens fizic, sînt direct interpretabili pe teren, dau criterii precise pentru prescrierea şi substituirea reciprocă — în funcţie de alte condiţii — a lubrifianţilor ale căror domenii de utilizare sînt în prelungire şi deschid perspective noi pentru clasificarea şi caracterizarea de ansamblu a lubrifianţilor. În plus, permit stabilirea unui sortiment raţional în cadrul căruia gradul de utilizare a fiecărui ulei se măreşte cu aproximativ 50%, se reduce numărul de tipuri, se simplifică manipularea lor.

CONCLUZII

Pentru caracterizarea și clasificarea uleiurilor minerale s-au propus trei parametri noi: temperatura minimă de utilizare (t_m), temperatura caracteristică la care variația specifică a viscozității este 0,02 (t_c) și viscozitatea caracteristică corespunzătoare (ν_c).

Pentru a simplifica munca de laborator în vederea determinării acestor parametri, se dau formule și tablouri cu valorile auxiliare necesare. În general, sînt necesare numai două determinări de viscozitate în loc de patru determinări de viscozitate (la 37,8; 50; 98,9 și 100 °C) și una de congelare, cîte se fac în prezent.

Parametri t_m, t_c și ν_c oferă posibilități obiective de clasificare a lubrifianților după criteriul viscozității și arată deficiențele criteriului actual: indicele de viscozitate.

Ca urmare a acestor deficiențe, precum și a largului uz de aditivi, care deseori au efecte înșelătoare, se propune renunțarea totală la indicele de viscozitate și la ceilalți indici, rapoarte și moduli, care încearcă să caracterizeze calitatea uleiurilor minerale pe baza curbei viscozitate-temperatură.

Pe baza noilor parametri de caracterizare se analizează sortimentul actual STAS și se propune un nou sortiment mai rațional din punct de vedere tehnic și mai avantajos din punct de vedere economic.

În lumina noilor parametri se stabilește o legătură concretă între viscozitatea lubrifiantului și necesitatea terenului și se face un pas către sistematizarea și raționalizarea prescrierii lubrifianților, în condiții fizice date.

Primit la redacție la 30 mai 1955

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ВЯЗКОСТИ СМАЗОЧНЫХ ВЕЩЕСТВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Обсуждается техника установления новых объективных критериев для характеристики смазочных веществ по критерию вязкости и применения этих критериев для классификации смазочных веществ.

Указываются недостатки вязкостной константы, представляющей многие условные параметры, употребляемые в настоящее время, но часто имеющие обманчивый характер, и предлагается их устранить.

Предлагается новая классификация смазочных веществ для двигателей, стандардизированных на основании характерных параметров.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Графическое решение уравнения (9).

Рис. 2. — Схематическое представление способа использования диаграммы рис. 3.

Рис. 3. — Диаграмма для определения параметров ν_c и t_c в зависимости от сегмента (l). (При принятом сокращении (1/2) сегмент l имеет 1/2 длины, указанной в таблице 4).

Рис. 4. — Пересеченное положение точек координат ν_c и t_c для масел разных вязкостей и различные вязкостные константы (значение вязкостной константы указано в круге, центр которого является началом координат ν_c и t_c).

Рис. 5. — Область применения смазочных веществ в зависимости от номинальной вязкости масла, выраженной с помощью ν_c и t_c при температуре, варьирующей между $\pm 5°$.

Рис. 6. — Таблица смазочных масел из настоящего ассортимента СТАС.

Рис. 7. — Таблица смазочных масел из предложенного ассортимента.

DÉTERMINATION ET UTILISATION DES PARAMÈTRES DE CARACTÉRISATION DE LA VISCOSITÉ DES LUBRIFIANTS

(RÉSUMÉ)

Les Auteurs étudient la technique de l'établissement de nouveaux critériums objectifs de caractérisation des lubrifiants, selon le critérium de la viscosité et l'application de ces critériums à la classification des lubrifiants.

On indique les déficiences de l'indice de viscosité, représenté à l'aide des nombreux paramètres conventionnels en usage aujourd'hui et ayant souvent un caractère trompeur, et l'on propose de les remplacer.

Une nouvelle classification des lubrifiants pour moteurs, standardisés à l'aide de paramètre caractéristiques, est proposée.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Solution graphique de l'équation (9).

Fig. 2. — Représentation schématique du mode d'emploi du diagramme de la figure 3.

Fig. 3. — Diagramme pour la détermination des paramètres ν_c et t_c en fonction du segment l (étant donné la réduction adoptée ($^1/_2$), la longueur du segment l est la moitié de celle qui est indiquée sur le tableau 4).

Fig. 4. — Position d'interpénétration des points de coordonnées ν_c et t_c pour des huiles de viscosités différentes et à différents indices de viscosité (la valeur de l'indice de viscosité est notée dans le cercle dont le centre représente le point de coordonnées ν_c et t_c).

Fig. 5. — Domaine d'utilisation des lubrifiants en fonction de la viscosité nominale de l'huile exprimée par ν_c et t_c, pour une variation de température de $\pm 5\,°C$.

Fig. 6. — Tableau des huiles lubrifiantes de l'actuel assortiment standardisé (STAS).

Fig. 7. — Tableau des huiles lubrifiantes de l'assortiment proposé.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Rozeanu şi O. Preoţescu, *Clasificarea lubrifianţilor pentru motoare după criteriul viscozităţii.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, iulie—decembrie 1955, p. 401.

2. S. V. Venzel, *Struktura i smazocinoe deistvie otrabotannih motornih masel.* Koloidnîi jurnal, 1953, t. XV, nr. 5, p. 331.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

CONSIDERAŢII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR CIRCULARE DE ALUNGIRE INFINITĂ LUBRIFICATE CU GAZE*)

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Calculul elementelor globale

Să calculăm acum expresiile forţelor şi momentelor de frecare considerînd o lungime a lagărului d upă direcţia z egală cu unitatea

Din figura 20, se vede imediat că

$$F_n = -\int_0^{2\pi} p \cos\theta \, r \, d\theta \qquad (108)$$

şi

$$F_t = -\int_0^{2\pi} p \sin\theta \; r \, d\theta \qquad (109)$$

sau în funcţie de variabila adimensională $\bar{p}$

$$F_n = -p_0 r \int_0^{2\pi} \bar{p} \cos\theta \, d\theta \qquad (110)$$

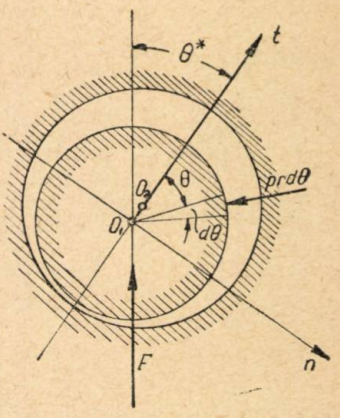


Fig. 20

şi

$$F = -p_0 r \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin\theta \, d\theta. \qquad (111)$$

*) Această parte este continuarea lucrării publicată în Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI. nr. 3—4, 1955, p. 377.

Forța F_n poate fi scrisă

$$F_n = -p_0 r \left[\int_0^{\pi} \bar{p} \cos\theta \, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \bar{p} \cos\theta \, d\theta \right] = F_{n_{AB}} + F_{n_{BC}}. \tag{112}$$

Ținînd seama că pe porțiunea AB

$$\theta = \frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}) \; ; \quad d\theta = -\frac{\pi}{2\alpha} d\bar{\delta} \tag{113}$$

și

$$\bar{\eta} = \bar{p}\,\bar{\delta} \quad ; \quad \bar{\delta} = \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta}), \tag{114}$$

unde $\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})$ este dat de relația (25) sau (29), $F_{n_{AB}}$ se poate scrie

$$F_{n_{AB}} = \frac{\pi r p_0}{2\alpha} \int_{\bar{\delta}_1}^{\bar{\delta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}} \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}) \right] d\bar{\delta} \tag{115}$$

și în sfîrșit, ținînd seama de a doua relație (113):

$$F_{n_{AB}} = \frac{\pi r p_0}{2\alpha} \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})} \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 - \delta_{AB}(\bar{\eta})) \right] \frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} d\bar{\eta} \tag{116}$$

și analog:

$$F_{t_{AB}} = \frac{\pi r p_0}{2\alpha} \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})} \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 - \delta_{AB}(\bar{\eta})) \right] \frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} d\bar{\eta}. \tag{117}$$

Pe porțiunea BC

$$\theta = \frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta} - 2\bar{\delta}_2) \; ; \quad d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} d\bar{\delta} \tag{118}$$

și

$$\bar{\eta} = \bar{p}\,\bar{\delta}; \qquad \bar{\delta} = \bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}), \tag{119}$$

unde $\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})$ este dat de relația (47). Procedînd analog, se obține

$$F_{n_{BC}} = \frac{\pi r p_0}{2\alpha} \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})} \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2) \right] \frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} d\bar{\eta} \tag{120}$$

și

$$F_{t_{BC}} = \frac{\pi r p_0}{2\alpha} \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})} \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2) \right] \frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} d\bar{\eta}. \tag{121}$$

Dacă introducem coeficienții adimensionali

$$C_n = \frac{F_n}{rp_0} \tag{122}$$

$$C_t = \frac{F_t}{rp_0} \tag{123}$$

rezultă, ținînd seama de (116), (117), (120), (121):

$$C_n = \frac{\pi}{2\alpha}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})} \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta}))\right] \frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta} + \right.$$
$$\left. + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})} \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2)\right] \frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta}\right\} \tag{124}$$

și

$$C_t = \frac{\pi}{2\alpha}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})} \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta}))\right] \frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta} + \right.$$
$$\left. + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})} \sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2)\right] \frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta}\right\}. \tag{125}$$

Luînd ca sens pozitiv de rotație sensul invers axei x, momentul forțelor de frecare pe fus este

$$M = \mu r^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} d\theta. \tag{126}$$

Cum [3]

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y-\delta)\, y + V\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \tag{127}$$

rezultă, derivînd în raport cu y:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = -\frac{V}{\delta} - \frac{\delta}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{128}$$

și înlocuind $\frac{dp}{dn}$ din ecuația (4) obținem

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = -\frac{V}{\delta} - \frac{3V}{\delta}\left(1 - \frac{C_1}{p\delta}\right) \tag{129}$$

și deci

$$M = 2\mu r^2 V \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{\delta} - \frac{3C_1}{\delta^2 p}\right] d\theta = M_0 + M_1. \tag{130}$$

Prima integrală se poate rezolva fără dificultăţi:

$$M_0 = \frac{2\mu r^2 V}{\Delta}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\alpha\cos A} = \frac{4}{3}\frac{\xi\alpha p_0 r}{\Delta\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{131}$$

Trecînd la variabilele adimensionale, obţinem pentru M_1:

$$M_1 = -\frac{3}{2}\frac{\mu r^2\Omega\xi K_3}{\psi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\bar{\delta}\bar{\eta}} = -\frac{3}{2}\frac{\mu r^2\Omega}{\psi}\xi K_3\left[\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\bar{\delta}\bar{\eta}} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{\bar{\delta}\bar{\eta}}\right] \tag{132}$$

şi ţinînd seama de (113), (114), (118), şi (119)

$$M_1 = -\frac{\xi^2 K_3\psi p_0 r^2}{2}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2}\frac{1}{\bar{\eta}\,\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}\frac{d\delta_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}d\bar{\eta} + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2}\frac{1}{\bar{\eta}\,\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}\frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}d\bar{\eta}\right\}. \tag{133}$$

Dacă notăm

$$C_m = \frac{M}{p_0 r^2} \tag{134}$$

rezultă

$$C_m = \frac{4}{3}\frac{\xi\alpha\psi}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\xi^2 K_3\psi}{2}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2}\frac{1}{\bar{\eta}\,\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}\frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}d\bar{\eta} + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2}\frac{1}{\bar{\eta}\,\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}\frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}d\bar{\eta}\right\}. \tag{135}$$

Momentul forţelor de frecare pe cuzinet este

$$M_c = \mu r^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=\delta}d\theta \tag{136}$$

şi cum, (128),

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=\delta} = -\frac{V}{\delta} + \frac{\delta}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{137}$$

dacă notăm

$$C_{m_c} = \frac{M_c}{p_0 r^2} \tag{138}$$

rezultă

$$C_{m_c} = \frac{4}{3}\frac{\xi\alpha\psi}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\xi^2 K_3\psi}{2}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2}\frac{1}{\bar{\eta}\,\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}\frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}d\bar{\eta} + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2}\frac{1}{\bar{\eta}\,\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}\frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}d\bar{\eta}\right\}. \tag{139}$$

Elementele globale ale lagărului sînt deci date de relaţiile (124), (125) pentru forţe şi (135) şi (139) pentru momente. În cazul general integralele care intervin în aceste expresii pot fi efectuate grafic sau prin planimetrare.

Este interesant să observăm că pentru calculul momentelor M şi M_c nu este nevoie să se efectueze integralele (135) şi (139), dacă se cunoaşte expresia coeficientului C_n (124). Într-adevăr, relaţia (130) mai poate fi scrisă, ţinînd seama şi de (132), sub forma

$$M = \mu r^2 V \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\delta} - \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \delta \frac{dp}{d\theta} d\theta = M_0 + M_1 \tag{140}$$

şi pentru M_1, în loc de (132), integrînd prin părţi

$$M_1 = -\frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \delta \frac{dp}{d\theta} d\theta = -\frac{r}{2} \left[p\delta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p \frac{d\delta}{d\theta} d\theta \right] \tag{141}$$

şi ţinînd seama că

$$\delta = \Delta (1 + \alpha \cos \theta) \tag{142}$$

putem scrie

$$M_1 = -\frac{r \Delta \alpha}{2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta \, d\theta = \frac{\Delta \alpha}{2} F_n \tag{143}$$

conform relaţiei (111). În aceste condiţii

$$C_m = \frac{4}{3} \frac{\xi \alpha \psi}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\psi \alpha}{2} C_n \tag{144}$$

iar pentru momentul forţelor de frecare pe cuzinet

$$C_{m_c} = \frac{4}{3} \frac{\xi \alpha \psi}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\psi \alpha}{2} C_n . \tag{145}$$

Pentru sarcina globală introducem coeficientul

$$\zeta = \frac{F}{p_0 r} = \sqrt{C_n^2 + C_t^2}, \tag{146}$$

iar unghiul θ^* dintre direcţia sarcinii şi linia centrelor va fi dat de relaţia

$$\operatorname{tg} \theta^* = \frac{C_n}{C_t} . \tag{147}$$

Aceste rezultate presupun o variaţie liniară pentru δ şi vor da, după cum s-a arătat, o aproximaţie în minus faţă de un calcul exact.

Dacă se consideră în calculul final al presiunilor variația reală a grosimii δ, raționamente analoge ne conduc la relațiile

$$C_n = \frac{\pi}{2\alpha}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \bar{\eta}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})\right)}{1+\alpha\cos\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})\right)}\,\frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\,d\bar{\eta} + \right. \tag{148}$$

$$\left. + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \bar{\eta}\,\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2\right)\right]}{1+\alpha\cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2\right)\right]}\,\frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\,d\bar{\eta}\right\},$$

$$C_t = \frac{\pi}{2\alpha}\left\{\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \bar{\eta}\,\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})\right)\right]}{1+\alpha\cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})\right)\right]}\,\frac{d\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\,d\bar{\eta} + \right. \tag{149}$$

$$\left. + \int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \bar{\eta}\,\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2\right)\right]}{1+\alpha\cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}\left(\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta}) + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2\right)\right]}\,\frac{d\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}}\,d\bar{\eta}\right\}$$

în care primele integrale din fiecare relație se referă la zona AB iar celelalte la zona BC.

Momentele de frecare sînt date de aceleași relații (144) și (145) în care, pentru C_n, se utilizează relația (148).

Ecuațiile (148) și (149) vor da, după cum s-a arătat, o aproximație în exces

*

Metoda de calcul a caracteristicilor globale ale lagărului expusă mai sus, deși poate fi aplicată în cazurile practice fără dificultăți, necesitînd doar cîteva integrări grafice, are dezavantajul că nu permite obținerea unor relații analitice finale pentru mărimea sarcinii și direcția ei.

De aceea, vom căuta să dăm totuși formule concise și generale pentru C_n, C_t, C_m. Aceasta este posibil în ipoteza, că se consideră presiunea p ca acționînd nu în punctul θ rezultat din repartiția liniară pentru δ, ci în punctul θ corespunzător repartiției reale a grosimii δ. Această ipoteză nu schimbă aproape de loc mărimea sarcinii introducînd o eroare destul de mică asupra direcției ei θ^* care practic interesează mai puțin, deoarece lagărul este cu cuzinet întreg.

În aceste condiții, deoarece

$$\bar{\delta} = 1 + \alpha\cos\theta \tag{150}$$

atunci

$$C_n = -\int_0^{2\pi} \bar{p}\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \bar{p}\,d\,\bar{\delta}. \tag{151}$$

Pentru zona AB, ţinînd seama de (20)

$$C_{n_{AB}} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta} = \frac{1}{\alpha}\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}^2\, d\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3}. \tag{152}$$

Se poate pune în continuare

$$I = \int \frac{\bar{\eta}^2\, d\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3} = \bar{\eta} + \xi \ln (\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3) + \\ + \xi^2 (2 - K_3) \int \frac{d\,\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3} \tag{153}$$

şi ţinînd seama de faptul că rădăcinile trinomului de gradul doi de la numitorul ultimei integrale sînt date, (27), în cazul $K_3 < 1$ (cazul mai interesant pentru practică, după cum s-a arătat), şi de relaţia (29), se obţine

$$C_{n_{AB}} = \frac{1}{\alpha}\left[-(\bar{\delta}_1 - \bar{\eta}_2) + \frac{\xi K_3}{2} \ln \frac{\bar{\eta}_2^2 - 2\xi\eta_2 + \xi^2 K_3}{\bar{\delta}_1^2 - 2\xi\bar{\delta}_1 + \xi^2 K_3} - \frac{\xi}{2}(2 - K_3) \ln \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}\right]. \tag{154}$$

În mod analog, ţinînd seama de (42)

$$C_{n_{BC}} = \frac{1}{\alpha}\int_{\bar{\eta}_2}^{1+\alpha} \frac{\bar{\eta}^2\, d\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 + 2\xi\bar{\eta} - \xi^2 K_3} \tag{155}$$

şi ţinînd seama de relaţiile (44) şi (47)

$$C_{n_{BC}} = \frac{1}{\alpha}\left[\bar{\delta}_1 + \bar{\eta}_2 + \frac{\xi K_3}{2} \ln \frac{\bar{\delta}_1^2 + 2\xi\bar{\delta}_1 - \xi^2 K_3}{\bar{\eta}_2^2 + 2\xi\bar{\eta}_2 - \xi^2 K_3} - \frac{\xi}{2}(2 + K_3) \ln \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}\right] \tag{156}$$

şi adunînd relaţiile (154) şi (156) se obţine

$$C_n = \frac{\xi K_3}{2\alpha}\left[\ln \frac{\bar{\eta}_2^2 - 2\xi\bar{\eta}_2 + \xi^2 K_3}{\bar{\delta}_1^2 - 2\xi\bar{\delta}_1 + \xi^2 K_3} + \ln \frac{\bar{\delta}_1^2 + 2\xi\bar{\delta}_1 - \xi^2 K_3}{\bar{\eta}_2^2 + 2\xi\bar{\eta}_2 - \xi^2 K_3}\right] - \frac{2\xi}{\alpha} \ln \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}. \tag{157}$$

Pentru proiecţia pe linia centrelor a sarcinii se obţine integrînd prin părţi:

$$C_t = -\int_0^{2\pi} \bar{p} \cos\theta\, d\theta = -\left[p \sin\theta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta} \sin\theta\, d\theta\right] = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta}\, d\bar{\delta}. \tag{158}$$

Pentru porţiunea AB, ţinînd seama de relaţiile (4), (5), (8), (10), (13) se obţine prin calcule elementare

$$C_{t_{AB}} = \frac{2\xi^2 K_3}{\pi}\int_{1+\alpha}^{\bar{\eta}_2} \frac{1}{\bar{\delta}^2 \bar{\eta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta}. \tag{159}$$

Ţinînd seama de (20), (27) şi considerînd aproximativ că χ' este dat de relaţia

$$\chi' = b' - a'\,\overline{\eta}; \qquad \overline{\eta}_3^* = \frac{b'}{a'} \tag{160}$$

se obţine

$$C_{t_{AB}} = \frac{2\xi^2 K_3 \sqrt{a' K_2}}{\pi} \int_{\overline{\eta}_1 = \delta_1}^{\overline{\eta}_2} \frac{(\overline{\eta}_3^* - \overline{\eta})\, d\overline{\eta}}{(\overline{\eta}_1^* - \overline{\eta})(\overline{\eta}_2^* - \overline{\eta})\sqrt{(\overline{\eta}_1^* - \overline{\eta})(\overline{\eta}_2^* - \overline{\eta})(\overline{\eta}_3^* - \overline{\eta})}} \tag{161}$$

cu $\overline{\eta}_1^* > \overline{\eta}_2^* > \overline{\eta}_3^* > 0$, $\overline{\eta}_1^*$ şi $\overline{\eta}_2^*$ fiind date de (27), relaţie care nu conduce la integrale eliptice. Într-adevăr, întrebuinţînd procedeul obişnuit de rezolvare, (4), să facem schimbarea de variabile

$$\overline{\eta} = \frac{s + qt}{1 + t}; \; t = \frac{s - \overline{\eta}}{\overline{\eta} - q} \tag{162}$$

cu

$$\left.\begin{aligned} s &= \overline{\eta}_3^* + R = \frac{b'}{a'} + R \\ q &= \overline{\eta}_3^* - R = \frac{b'}{a'} - R \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} R &= \sqrt{\overline{\eta}_3^{*2} - \overline{\eta}_3^*(\overline{\eta}_1^* + \overline{\eta}_2^*) + \overline{\eta}_1^* \overline{\eta}_2^*} = \\ &= \sqrt{\frac{b'^2}{a'^2} - 2\,\xi\,\frac{b'}{a'} + \xi^2 K_3}. \end{aligned} \tag{163}$$

În acest caz, notînd cu

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= s(\overline{\eta}_1^* + \overline{\eta}_2^*) - \overline{\eta}_1^* \overline{\eta}_2^* - s^2 = 2\,\xi\, s - \xi^2 K_3 - s^2 \\ \beta &= q^2 - q(\overline{\eta}_1^* + \overline{\eta}_2^*) + \overline{\eta}_1^* \overline{\eta}_2^* = q^2 - 2\,\xi\, q + \xi^2 K_3 \\ \gamma' &= s - \overline{\eta}_3^* = s - \frac{b'}{a'}; \quad \beta' = \overline{\eta}_3^* - q = \frac{b'}{a'} - q \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

obţinem

$$C_{t_{AB}} = \frac{4\xi^2 K_3}{\pi} \frac{\sqrt{a' K_2}}{\sqrt{\beta\beta'}} R \left\{ \sqrt{\frac{\beta'}{\gamma'}} [F(k, \varphi_1) - F(k, \varphi_2)] + \right.$$

$$+ \frac{k^2}{1 - k^2}\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\gamma'}{\gamma}\right)[F(k, \varphi_2) - F(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_1) - E(k, \varphi_2)] +$$

$$\left. + \frac{1}{1 - k^2}\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\gamma'}{\gamma}\right)\left[\frac{x_2\sqrt{(1 - x_2^2)(1 - k^2 x_2^2)}}{1 - x_2^2} - \frac{x_1\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - k^2 x_1^2)}}{1 - x_1^2}\right]\right\} \tag{165}$$

în care

$$k = \frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\beta'}{\gamma'} \tag{166}$$

iar $F(k, \varphi)$ şi $E(k, \varphi)$ sînt funcţiile eliptice de speţa întîia şi a doua, de modul k şi argument φ. Limitele de integrare φ_1, φ_2 şi x_1, x_2 se obţin din limitele $\overline{\eta}_1$ şi η_2 prin schimbările de variabile (162) şi

$$t = \frac{\gamma}{\beta}\, x; \quad x = \sin\varphi. \tag{167}$$

Pentru porțiunea BC, coeficientul C_t, ținînd seama de (160) este dat de relația

$$C_{t_{BC}} = \frac{2\xi^2 K_3}{\pi} \int_{\bar{\eta}_2}^{\bar{\eta}_1} \frac{1}{\bar{\delta}^2 \bar{\eta}} \frac{d\delta}{d\bar{\eta}} d\bar{\eta}. \tag{168}$$

Utilizînd relațiile (42), (47) și considerînd (48) că termenul χ'' este dat de relația aproximativă

$$\chi'' = a''\bar{\eta} - b''; \quad \bar{\eta}_3^* = \frac{b''}{a''}, \tag{169}$$

relația (168) se poate scrie sub forma

$$C_{t_{BC}} = \frac{2\xi^2 K_3}{\pi} \sqrt{a'' K_2} \int_{\bar{\eta}_2}^{\bar{\eta}_1} \frac{(\bar{\eta} - \bar{\eta}_3^*)\, d\bar{\eta}}{(\bar{\eta} + \bar{\eta}_1^*)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_2^*)\sqrt{(\bar{\eta} + \bar{\eta}_1^*)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_2^*)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_3^*)}} \tag{170}$$

cu $\bar{\eta}_1^* > \bar{\eta}_2^* > \bar{\eta}_3^* > 0$, relație care conduce de asemenea la integrale eliptice.

Pentru calculul integralei (170) să facem aceeași schimbare de variabile (162) în care vom nota

$$\left.\begin{aligned} \bar{s} &= -\bar{\eta}_1^* - \bar{R} \\ \bar{q} &= -\bar{\eta}_1^* + \bar{R} \end{aligned}\right\} \quad \bar{R} = \sqrt{\bar{\eta}_1^{*2} + \bar{\eta}_1^*(\bar{\eta}_2^* + \bar{\eta}_3^*) + \bar{\eta}_2^* \bar{\eta}_3^*}. \tag{171}$$

În acest caz notăm cu

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \bar{s}^2 - \bar{s}(\bar{\eta}_2^* + \bar{\eta}_3^*) + \bar{\eta}_2^* \bar{\eta}_3^*; \quad -\gamma' = \bar{\eta}_1^* + \bar{s} \\ \bar{\beta} &= q(\bar{\eta}_2^* + \bar{\eta}_3^*) - q^2 - \bar{\eta}_2^* \bar{\eta}_3^*; \quad \beta' = \bar{\eta}_1^* + \bar{q} \\ A &= \bar{q} - \bar{\eta}_3^*; \quad A' = \bar{q}(\bar{\eta}_2^* - \bar{\eta}_1^*) + \bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* - \bar{q}^2 \\ B &= 2\bar{\eta}_3^* - \bar{s} - \bar{q}; \quad B' = 2\bar{s}\bar{q} - 2\bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* + (\bar{s} + \bar{q})(\bar{\eta}_2^* - \bar{\eta}_1^*) \\ C &= \bar{\eta}_3^* - \bar{s}; \quad C' = \bar{s}^2 - \bar{s}(\bar{\eta}_2^* - \bar{\eta}_1^*) - \bar{\eta}_1^* \bar{\eta}_2^* \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

obținem pentru coeficientul C_t pe porțiunea BC

$$\begin{aligned} C_{t_{BC}} = \frac{4\xi^2 K_3}{\pi} \sqrt{a'' K_2'}\, \bar{R} \Bigg\{ & \frac{F(k, \varphi_1) - F(k, \varphi_2)}{\sqrt{\bar{\gamma}\bar{\beta}'}} + \\ & + \frac{1}{A'^2 (t_1^* + t_2^*)} \Bigg[\frac{b_2 t_1^* - c_2}{2\sqrt{\bar{\beta}\bar{\beta}'}\sqrt{(\bar{\mu}^2 - t_1^{*2})(t_1^{*2} - \bar{\lambda}^2)}} \ln \frac{(u_2 + u_1^*)(u_1 - u_1^*)}{(u_2 - u_1^*)(u_1 + u_1^*)} + \\ & + \frac{b_2 t_2^* - c_2}{2\sqrt{\bar{\beta}\bar{\beta}'}\sqrt{(\bar{\mu}^2 - t_2^{*2})(t_2^{*2} - \bar{\lambda}^2)}} \ln \frac{(u_2 + u_2^*)(u_1 - u_2^*)}{(u_2 - u_2^*)(u_1 + u_2^*)} + \\ & + \frac{t_1^*(b_2 t_1^* - c_2)}{(\bar{\mu}^2 - t_1^{*2})\sqrt{\bar{\gamma}\bar{\beta}'}} (D(\eta, \bar{k}, \varphi_2) - D(x, \bar{k}, \varphi_1)) - \\ & - \frac{t_2^*(b_2 t_2^* + c_2)}{(\bar{\mu}^2 - t_2^{*2})\sqrt{\bar{\gamma}\bar{\beta}'}} (D(n', \bar{k}, \varphi_2) - D(n', \bar{k}, \varphi_1)) \Bigg] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{173}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = \frac{B'}{A'};\quad c_1 = \frac{C'}{A'}\quad b_2 = A'B - AB';\quad c_2 = AC' - A'C \\ &\bar{\lambda}^2 = \frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\beta}'};\quad \bar{\mu}^2 = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}\qquad (\bar{\lambda}^2 < \bar{\mu}^2) \\ &t_1^* = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + c_1};\quad -t_2^* = \frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + c_1} \\ &u_1^{*2} = \frac{t_1^{*2} - \bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}^2 - t_1^{*2}};\quad u_2^{*2} = \frac{t_2^{*2} - \bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}^2 - t_2^{*2}} \\ &\bar{k}^2 = \frac{\bar{\mu}^2 - \bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}^2};\quad n = -\frac{\bar{\mu}^2 \bar{k}^2}{\bar{\mu}^2 - t_1^{*2}};\quad n' = -\frac{\bar{\mu}^2 \bar{k}^2}{\bar{\mu}^2 - t_2^{*2}} \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

Funcţiile $D\,(n, \bar{k}, \varphi)$ şi $D\,(n', \bar{k}, \varphi)$ sînt integralele eliptice de speţa a treia de argument φ, modul $\bar{k}$ şi parametru n respectiv n'.

Limitele de integrare u_1, u_2; φ_1, φ_2 se obţin din limitele $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ prin schimbările de variabile (162), (171) şi

$$u^2 = \frac{t^2 - \bar{\lambda}^2}{\bar{\mu}^2 - \bar{t}^2};\quad t^2 = \mu\,(1 - \bar{k}\,x^2);\quad x = \sin\varphi. \qquad (175)$$

Relaţia (173) nu poate fi însă utilizată pentru calcule numerice, deoarece pînă în prezent nu au fost intabulate integralele eliptice de speţa a treia $D\,(n, k, \varphi)$ care intervin în această expresie. De aceea s-a căutat să se înlocuiască relaţia (173) cu o alta susceptibilă de a fi utilizată efectiv.

Acest lucru este posibil, deoarece din calcule se constată că în integrala (170) termenii care apar sub radical $\bar{\beta}t^2$ şi $\bar{\gamma}'$ pot fi neglijaţi faţă de $\bar{\gamma}$ respectiv $\bar{\beta}'t^2$. Într-adevăr, din calculele efective rezultă că $\frac{\bar{\beta}t^2}{\bar{\gamma}} = 0{,}05 - 0{,}1$, iar $\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\beta}'t^2} \sim 10^{-4}$. În aceste condiţii notînd cu

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{t_1^* + t_2^*}\left(B + \frac{C}{t_1^*} - At_1^*\right) \\ b_0 &= \frac{1}{t_1^* + t_2^*}\left(At_2^* - \frac{C}{t_2^*} + B\right) \\ c_0 &= \frac{C}{t_1^* t_2^*} \end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

coeficientul C_t pentru porţiunea BC se scrie aproximativ

$$C_{t_{BC}} = \frac{4\xi^2 K_3}{\pi}\sqrt{\frac{a''K_2}{\bar{\gamma}\bar{\beta}'}}\cdot\frac{\bar{R}}{A'}\cdot\left[a_0 \ln\frac{t_2 - t_1^*}{t_1 - t_2^*} + b_0 \ln\frac{t_2 + t_2^*}{t_1 + t_2^*} + c_0 \ln\frac{t_2}{t_1}\right]. \qquad (177)$$

Coeficientul C_l pentru întregul lagăr va fi deci egal cu

$$C_l = C_{l_{AB}} + C_{l_{BC}}, \tag{178}$$

în care $C_{l_{AB}}$ este dat de relaţia (165) iar $C_{l_{BC}}$ de relaţia (173) sau aproximativ de relaţia (177).

Relaţiile (163), (178) şi (147) permit calculul analitic al elementelor globale ale unui lagăr de alungire infinită lubrificat cu gaze. Aceste relaţii dau o bună concordanţă cu valorile calculate de Scheinberg [2] mai ales cînd ξ nu are o valoare prea apropiată de valoarea critică ξ_c (cînd aproximarea termenilor χ' şi χ'' cu o linie dreaptă nu mai este apropiată de realitate). Totuşi, calculele prezintă unele dificultăţi atît datorită formei relaţiilor obţinute, cît mai ales datorită faptului că precizia rezultatului depinde în foarte mare măsură de exactitatea cu care au fost calculate constantele K_2, K_2', K_3 şi în special valoarea $\bar{\eta}_2$ a lui $\bar{\eta}$ la $\theta = \pi$ (sistemul (64)).

★

În cazul cînd regimul de lucru al lagărului are loc pentru valori ξ destul de mari ($\xi > 5$), s-a arătat anterior că presiunile se pot determina uşor şi destul de exact de o manieră aproximativă, considerînd că pe porţiunea AB presiunile variază liniar cu θ:

$$\bar{p} = 1 + \frac{2\alpha}{\pi(1-\alpha)}\theta \tag{179}$$

iar pe porţiunea BC, presiunea variază după relaţia (47) în care K_3 este dat de (108). Din figura 19 se vede că repartiţia de presiuni în zona BC nu diferă mult de o parabolă de ecuaţie

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_2 - 1}{\pi^2}\theta^2 - 4\frac{\bar{p}_2 - 1}{\pi}\theta + 4p_2 - 3 \tag{180}$$

în care

$$\bar{p}_2 = \frac{\bar{\delta}_1 + \bar{\eta}_2}{2\bar{\delta}_2} \tag{181}$$

cu

$$\bar{\eta}_2 = \xi(\sqrt{1+K_3} - 1) = \xi\left[\sqrt{2 - \left(1 - \frac{\bar{\delta}_1}{\xi}\right)^2} - 1\right]. \tag{182}$$

În aceste condiţii C_n şi C_t se calculează imediat obţinîndu-se

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \bar{p}_2 + 1 - \frac{4}{\pi^2}(\bar{p}_2 - 1) - \frac{2}{1-\alpha} \\ C_t &= \frac{4\alpha}{\pi(1-\alpha)} + 2\frac{\bar{p}_2 - 1}{\pi} \end{aligned}\right\}. \tag{183}$$

Aceste relaţii dau rezultatele apropiate de realitate. Astfel pentru exemplul dat anterior $\alpha = 0{,}33$, $\xi = 7{,}86$, calculînd coeficientul total de încărcare ζ (146) cu ajutorul relaţiilor (183) se obţine $\zeta = 1{,}264$, faţă de $\zeta = 1{,}312$ calculat de Scheinberg. Eroarea nu depăşeşte deci 4%.

★

În cazul limită cînd $\xi = \infty$ s-a arătat că repartiţia de presiuni poate fi obţinută în cazul general al unei evoluţii cu exponent politropic oarecare şi este dată de relaţia (103). În aceste condiţii

$$C_n = -(1+\alpha)^{\varkappa}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa}}\,d\theta = 0 \tag{184}$$

$$C_t = \zeta = -(1+\alpha)^{\varkappa}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{\varkappa}}\,d\theta \tag{185}$$

$$C_m = C_{m_c} = \frac{4}{3}\frac{\xi\,\psi\,\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{186}$$

Pentru o evoluţie izotermă ($\varkappa = 1$), integrala (185) se efectuează imediat

$$C_t = \zeta = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right) \tag{187}$$

Pentru o evoluţie oarecare, integrala (185) poate fi efectuată fie analitic, dezvoltînd numitorul în serie, fie grafic.

Dacă se consideră şi în acest caz o variaţie liniară pentru δ, rezultă, ţinînd seama de (99)

$$C_t = \zeta = \frac{\pi\bar{\delta}_1}{\alpha}\int_{\bar{\delta}_1}^{\bar{\delta}_2}\frac{\cos\dfrac{\pi}{2\alpha}(\bar{\delta}_1-\bar{\delta})}{\bar{\delta}}\,d\bar{\delta} =$$

$$= \frac{\pi(1+\alpha)}{2\alpha}\left\{\cos\frac{\pi(1+\alpha)}{2\alpha}\left[\mathrm{ci}\,\frac{\pi(1-\alpha)}{2\alpha} - \mathrm{ci}\,\frac{\pi(1+\alpha)}{2\alpha}\right] + \right. \tag{188}$$

$$\left. + \sin\frac{\pi(1+\alpha)}{2\alpha}\left[\mathrm{si}\,\frac{\pi(1-\alpha)}{2\alpha} - \mathrm{si}\,\frac{\pi(1+\alpha)}{2\alpha}\right]\right\}.$$

Dacă se fac diverse aplicaţii, se vede imediat că relaţia (188) dă valori mai mici decît relaţia (187). Se verifică astfel şi în acest caz limită, că aproximaţia făcută prin considerarea unei variaţii liniare pentru δ dă valori mai mici decît cele exacte. Dimpotrivă, eroarea făcută, considerînd în calculul final al presiunilor variaţia reală pentru δ, scade la zero cînd $\xi \to \infty$.

★

În expresia lui ζ, ca şi în relaţiile stabilite mai sus, intervine presiunea de referinţă p_0, care este presiunea ce se stabileşte în pelicula de lubrifiant în zona grosimii δ maxime ($\theta = 0$). Dacă lagărul are într-un punct oarecare contact direct cu exteriorul sau cu un mediu în care există o presiune dată (alimentare sub presiune), atunci presiunea p_0 poate fi uşor determinată punînd condiţia ca în punctul considerat presiunea în filmul de lubrifiant să aibă valoarea dată (presiunea atmosferică sau presiunea de alimentare).

Dacă pelicula de lubrifiant nu are în nici un punct contact cu exteriorul, sau nu are nici o priză de presiune, atunci pentru determinarea presiunii p_0 trebuie

făcute alte ipoteze de ordin fizic. Astfel, de exemplu, dacă extremităţile lagărului sînt etanşe, se poate considera în acest caz că masa gazului lubrifiant rămîne constantă. Această condiţie ne conduce la relaţia

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar{\delta}\,d\theta\,, \tag{189}$$

în care p_0' este presiunea din peliculă cînd lagărul este în repaus. Relaţia (189) permite determinarea presiunii p_0 pentru fiecare caz în parte. La $\xi = 0$ rezultă $p_0' = p_0$, iar la $\xi = \infty$

$$\frac{p_0}{p_0'} = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\varkappa}. \tag{190}$$

Variaţia caracteristicilor globale ale lagărelor circulare

Pentru aplicaţiile practice este interesant să se studieze variaţia caracteristicilor globale ale lagărelor circulare în funcţie de regimul de funcţionare şi de caracteristicile lor geometrice, cu scopul de a studia şi pune în evidenţă particularităţile în funcţionare ale acestor lagăre şi pentru a trage concluzii utile pentru proiectare.

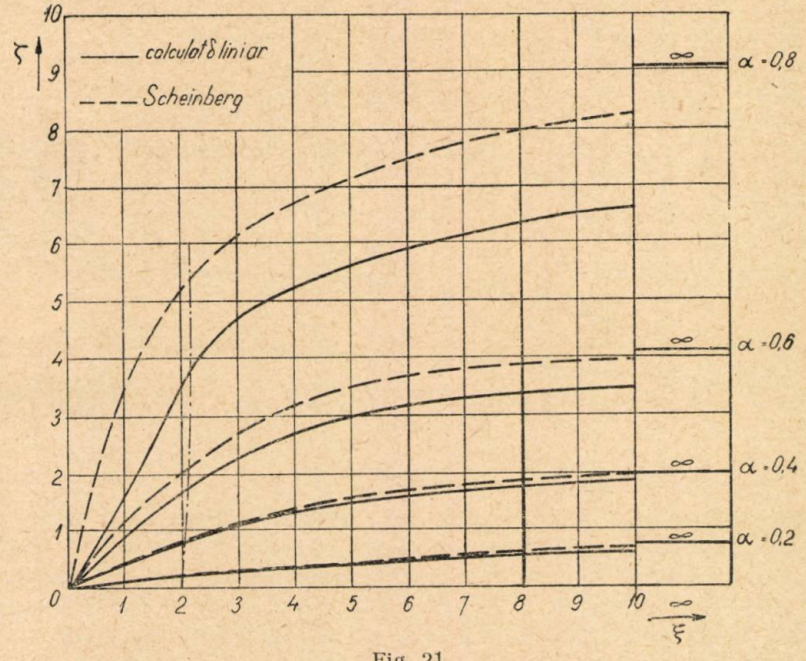


Fig. 21

Din forma relaţiilor care dau caracteristicile unui lagăr circular de alungire infinită lubrificat cu gaze (C_n, C_t, ζ, θ^*, C_m, C_{m_c}) deduse în diferite ipoteze de aproximaţie, se constată că toate aceste mărimi variază în funcţie de cei doi parametrii ξ şi α, care caracterizează funcţionarea unui asemenea lagăr.

Astfel, calculînd coeficientul ζ de încărcare al lagărului în ipoteza că se consideră variația liniară a grosimii δ și în calculul efectiv al repartiției presiunilor, pentru diferite valori α și ξ se obțin curbele prezentate în diagrama din figura 21. În această diagramă s-au trasat pentru comparație și rezultatele calculelor efectuate de Scheinberg, [2]. Din această figură apare evident faptul că metoda dă o aproximație în lipsă, eroare ce se menține și în cazul $\xi = \infty$, (188).

În figura 22 s-au trasat aceleași curbe, însă în ipoteza că în calculul repartiției presiunilor se introduce variația reală a grosimii δ a filmului de lubrifiant. În diagramă s-au trasat, pentru comparație, și rezultatele lui Scheinberg, ca și valoarea lui ζ la $\xi = \infty$ în ipoteza unei evoluții izentropice ($\varkappa = 1{,}4$).

Se constată că se verifică afirmațiile cu privire la natura erorii făcute. Într-adevăr, rezultatele sînt mai mari decît cele obținute de Scheinberg, eroarea scăzînd însă cu ξ și anulîndu-se pentru $\xi = \infty$. De asemenea eroarea la $\xi = 0$ este nulă în ambele cazuri de aproximare.

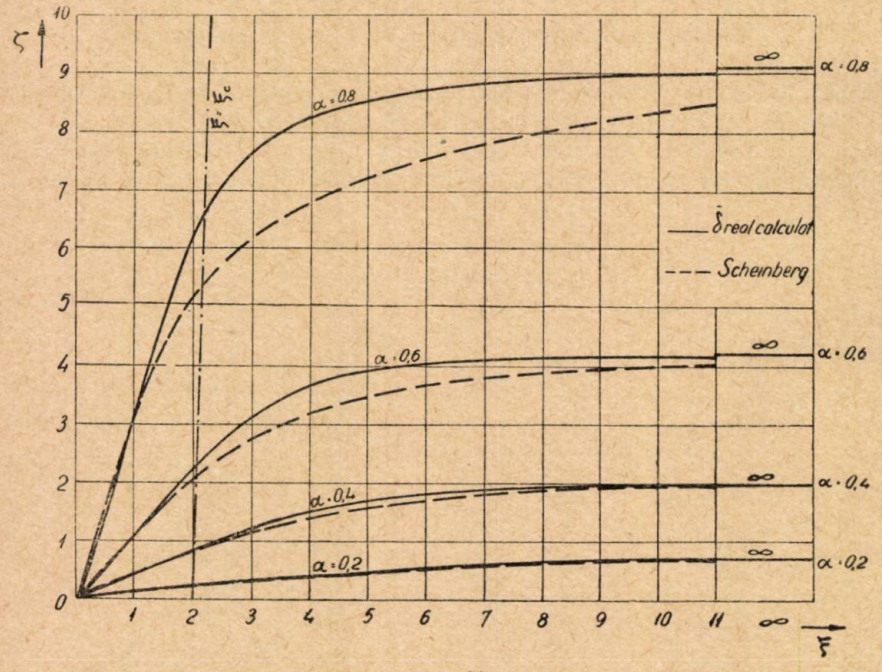


Fig. 22

Comparînd rezultatele obținute în diagramele din figura 21 și figura 22, cu valorile calculate la $\xi = \infty$ pentru o evoluție izentropică, se vede că diferențele cresc cu excentricitatea, iar pentru $\alpha > 0{,}6$ aceste diferențe sînt apreciabile. Acest fapt nu condamnă rezultatele obținute pentru $\varkappa = 1$, deoarece nu se poate considera că nu există schimb de căldură între pelicula de lubrifiant și pereții fusului și cuzinetului. Într-adevăr, suprafața de contact a peliculei de lubrifiant cu exteriorul este foarte mare în comparație cu volumul său. De aceea se poate presupune că $1 < \varkappa < 1{,}4$ însă avînd valori apropiate de $\varkappa = 1$. Este probabil că $\varkappa$ scade cu creșterea lui α și ξ, deoarece în aceste cazuri căldura produsă este mai mare și deci și evacuarea acestei călduri se va face într-o proporție mai mare. De altfel aceste considerații sînt confirmate și de unele experiențe efectuate, [2].

Ţinînd seama de aceste consideraţii, rezultă că metoda de calcul concretizată în figura 22 dă valori apropiate de cele reale şi mai mult, dă erori mai mici decît un calcul exact în ipoteza $\varkappa = 1$. De aceea vom utiliza în calculele ulterioare numai această metodă. Pentru a putea fi mai uşor utilizată practic, în figura 23 se mai dă încă o dată variaţia lui ζ în funcţie de ξ, pentru o gamă mai mare de excentricităţi α.

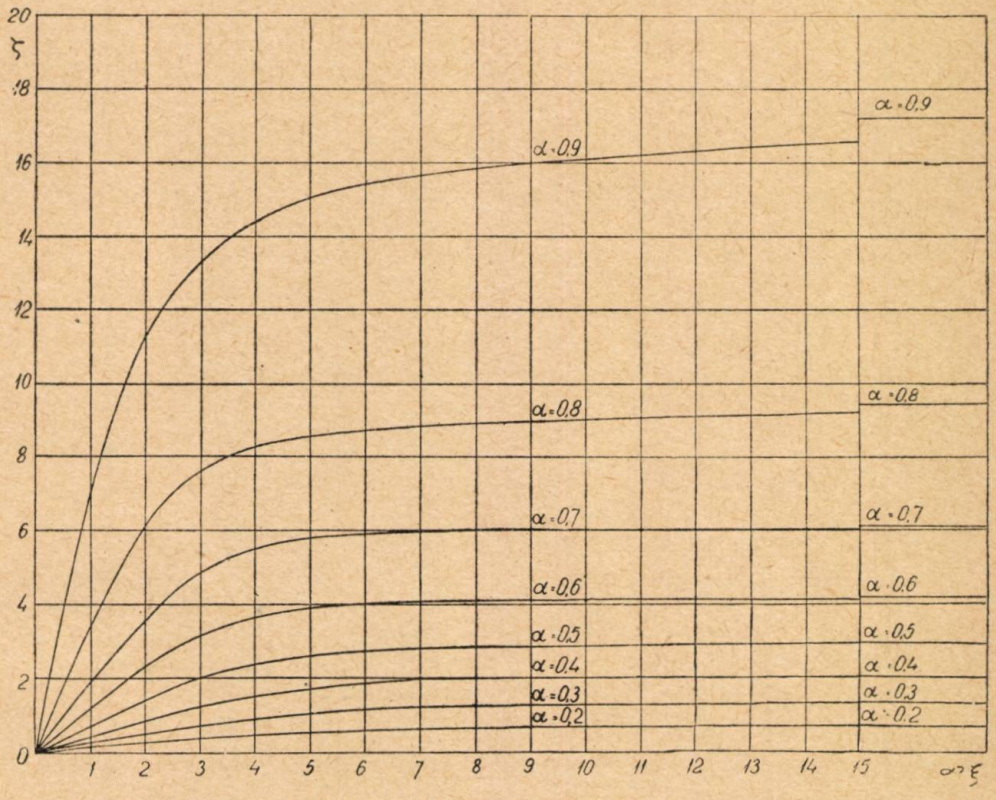


Fig. 23

Coeficientul ζ depinde de α atît direct cît şi prin intermediul lui ξ, (13). De aceea este util să definim un coeficient ξ' care să nu depindă de α:

$$\xi' = \xi\alpha = \frac{3\pi\,\mu\,\Omega}{2p_0\psi^2} \tag{191}$$

şi care are avantajul că este cunoscut dacă se cunoaşte jocul relativ ψ. De aceea în figura 24 s-a trasat variaţia coeficientului ζ în funcţie de α la $\xi' = \text{constant}$, pentru diferite valori ξ'.

Atît în figura 23, cît şi din figura 24 se vede că ζ tinde destul de repede către valoarea limită de la $\xi = \infty$ (pentru $\xi > 8$, $\xi' > 5$). De exemplu, pentru un lagăr cu $\psi = 0{,}5\,/_0$, acest lucru se întîmplă la turaţii mai mari de 14 000 rot./min.

Uneori pentru proiectare este util să introducem și coeficientul

$$\zeta^* = \frac{F\delta_2^2}{4\mu\,\Omega r^3} \tag{192}$$

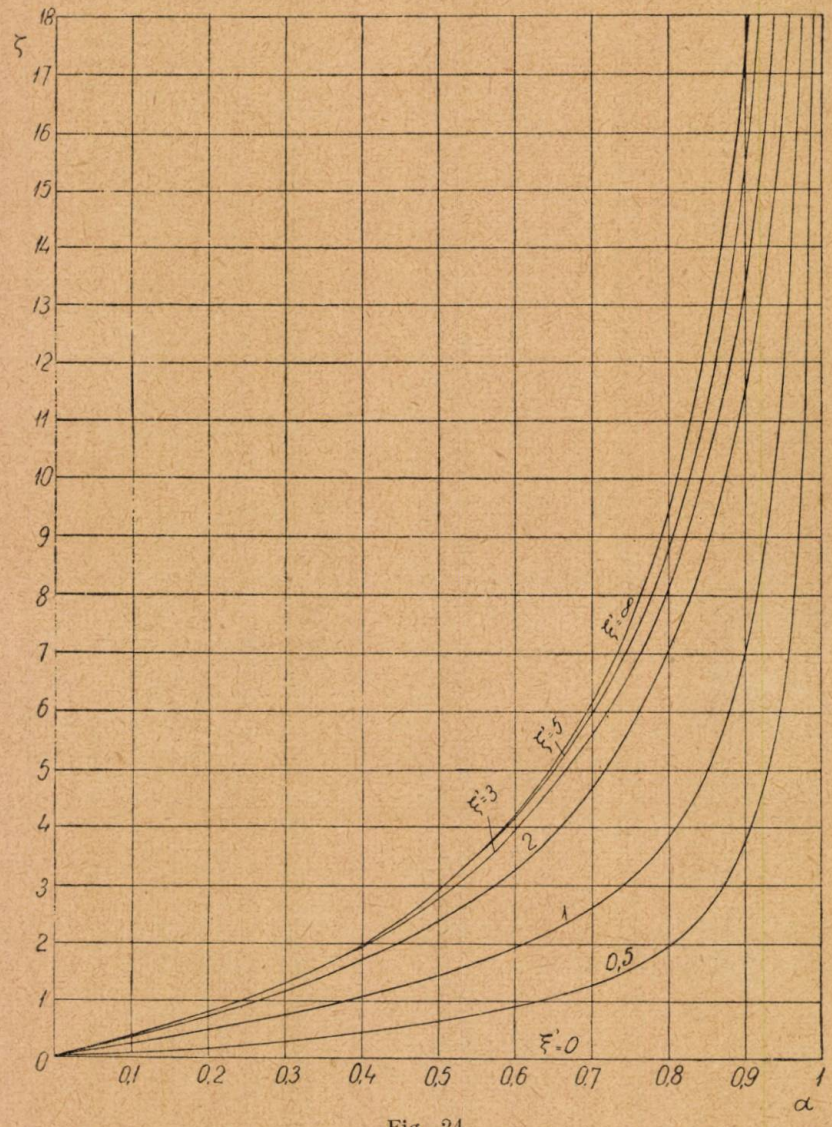


Fig. 24

care în funcție de ζ are valoarea

$$\zeta^* = \frac{3\pi}{8\xi}\zeta\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} = \frac{3\pi}{8\xi'}\zeta\,(1-\alpha)^2. \tag{193}$$

Variaţia acestui coeficient în funcţie de α şi considerînd $\zeta' =$ constant este arătată în figura 25 pentru diferite valori ξ'.

Se constată că în aceste condiţii ζ^* are un maxim în funcţie de α a cărui poziţie depinde de ξ'. Deoarece variaţia considerată corespunde unei funcţionări cu $\Delta =$ constant, vom nota excentricitatea corespunzătoare maximului cu α_Δ. Pentru cazul cînd $\xi' \to 0$, ţinînd seama de cele spuse anterior (în aceste condiţii se poate considera gazul ca fiind incompresibil) se poate calcula uşor valoarea sarcinii

$$(P)_{\xi' \to 0} = \frac{12\,\mu\,\Omega r}{\psi^2} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{1}{2+\alpha^2} \qquad (194)$$

şi deci, (192),

$$\zeta^*_{\xi' \to 0} = 3\pi \frac{\alpha\,(1-\alpha)^2}{(2+\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}}. \qquad (195)$$

Derivînd această relaţie în raport cu α şi egalînd rezultatul cu zero, se obţine o ecuaţie de gradul trei în α cu o singură rădăcină reală egală cu

$$\alpha_\Delta \cong 0{,}34 \qquad (196)$$

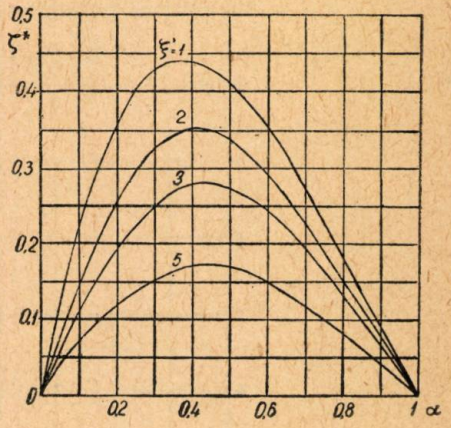


Fig. 25

De asemenea ţinînd seama de relaţia (187) rezultă, pentru $\xi' \to \infty$,

$$\zeta^*_{\xi' \to \infty} = \frac{\pi\psi^2}{\mu r^2 \Omega} \frac{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} (1-\sqrt{1-\alpha^2}) \qquad (197)$$

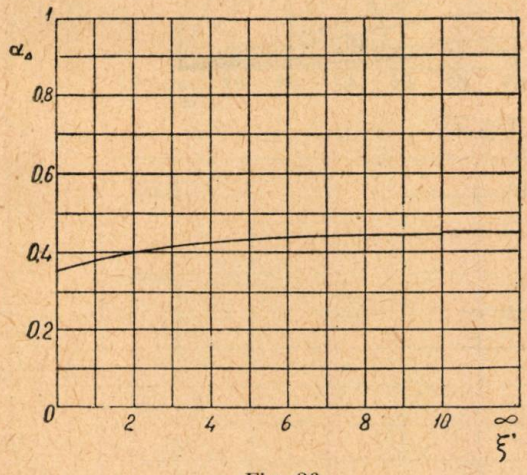


Fig. 26

care este maxim pentru

$$\alpha_\Delta = 0{,}45. \qquad (198)$$

Variaţia lui α_Δ în funcţie de ξ' este arătată în figura 26.

În unele cazuri de proiectare însă, se prescrie valoarea grosimii minime a filmului de lubrifiant, cu scopul de a nu avea pericol de gripaj. Atunci este avantajos să introducem parametrul

$$\xi^* = \frac{3\pi\mu\,\Omega r^2}{2p_0\delta_2^2} = \xi \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \qquad (199)$$

$$= \xi' \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

În acest caz

$$\zeta^* = \frac{3\pi}{8}\zeta \qquad (200)$$

adică ζ şi ζ^* au aceeaşi alură, fiind atunci suficient să ne ocupăm numai de una din aceste mărimi, de exemplu de ζ (ζ^* poate interesa acolo unde nu se cunoaşte presiunea p_0). Variaţia lui ζ în funcţie de α este arătată în figura 27, considerînd

ξ^* = constant. Se constată că și pentru acest caz există un maxim în funcție de α, care variază cu ξ^* și anume între valoarea dată de relația (196) pentru $\xi^* = 0$

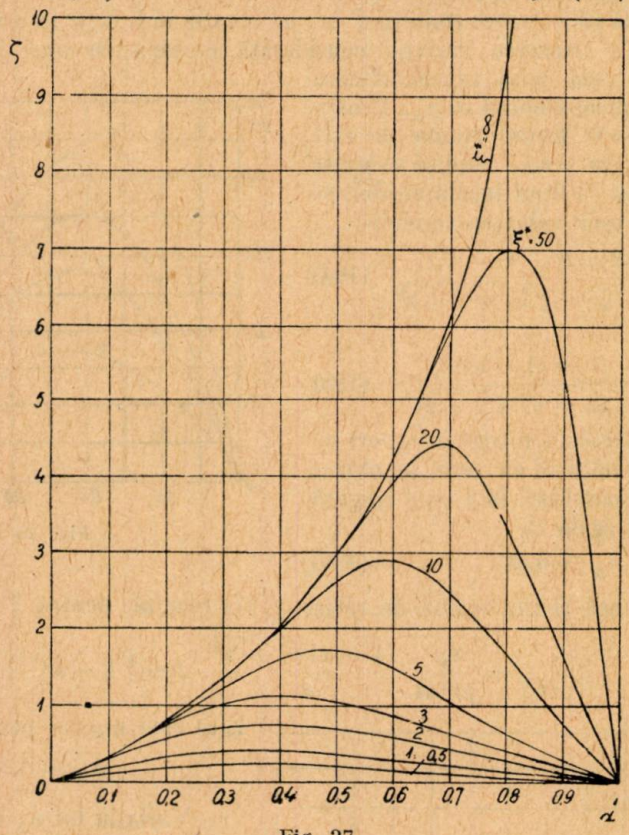


Fig. 27

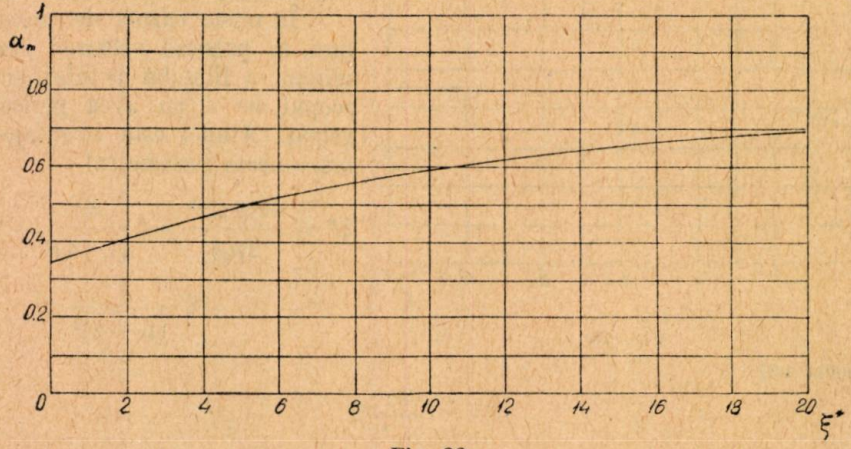


Fig. 28

și valoarea $\alpha_m = 1$ la $\xi^* = \infty$, dacă notăm excentricitatea corespunzătoare maximului cu α_m. Variația excentricității α_m în funcție de ξ^* este arătată în figura 28.

Din figura 27 rezultă $\zeta = 0$ la $\alpha = 1$, deoarece ξ^* fiind constant, și δ_2 este constant. În consecință la $\alpha = 1$ rezultă $\delta_1 = \infty$ și $\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \infty$. Pentru această situație $\xi = \xi' = 0$ și deci și $\zeta = 0$.

Faptul că la $\xi^* \to \infty$, $\alpha_m \to 1$ se explică prin aceea că pe măsură ce viteza V crește, debitul de lubrifiant crește și se nasc presiuni și pentru raporturi $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ mai mari. Aceste considerații trebuie însă aplicate cu o oarecare prudență, deoarece pentru δ_2 dat și $\alpha \sim 1$ pot rezulta pentru δ_1 valori într-atît de mari încît să prejudicieze valabilitatea ecuațiilor problemei.

În realitate pentru δ_2 dat există o limită superioară pentru α de la care lagărul nu mai funcționează în bune condiții, limită care poate fi găsită aproximativ prin considerații de ordin fizic. Astfel în deducerea ecuațiilor problemei s-au neglijat viteza v în direcția y și derivatele ei, ca și derivatele de ordinul întîi și doi ale lui u, în afară de $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Aceste ipoteze presupun că

$$v \leqslant \varepsilon_1 V \; ; \quad \delta_1 \leqslant \varepsilon_2 r \tag{201}$$

în care se poate lua $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\%$. În consecință pentru fiecare caz în parte, considerînd δ_2 constant, excentricitatea este limitată de condițiile (201).

De asemenea se mai poate face o ipoteză privind natura scurgerii în pelicula de lubrifiant. Într-adevăr, interesează regimul pentru care portanța lagărului este maximă. Atunci este necesar ca mișcarea în pelicula de lubrifiant să fie laminară și fără turbioane care produc pierderi și deci scăderea portanței lagărului. La intrare, cînd δ_2 rămîne constant și crește, distribuția de viteze u poate avea aspecte diferite, ca în figura 29. Din această figură se vede că pentru un ξ^* dat există o excentricitate α pînă la care vitezele sînt pozitive pe toată înălțimea peliculei. Dacă însă $\alpha > \alpha_m'$, rezultă viteze negative pe o porțiune din înălțimea δ_1. Acest fenomen dăunează caracteristicilor lagărului, deoarece apar vîrtejuri care produc pierderi. Excentricitatea α_m' poate fi ușor calculată pentru ξ^* dat, punînd condiția ca la intrare

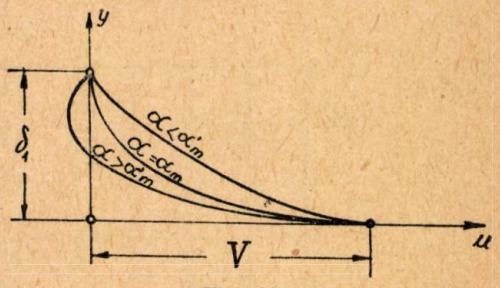


Fig. 29

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta_1} = 0. \tag{202}$$

În figura 30 s-au reprezentat valorile poziției sarcinii θ^*, (147) în funcție de ξ, pentru diferite excentricități α, în cele două metode de aproximare arătate. De asemenea s-au trasat pentru comparație și valorile obținute de Scheinberg. Evident, θ^* variază între $\theta^* = 90°$ la $\xi = 0$ cînd repartiția presiunilor este antisimetrică față de linia centrelor, și $\theta^* = 0$ la $\xi = \infty$ cînd repartiția presiunilor este simetrică față de linia centrelor.

Coeficientul de frecare C_m depinde foarte puțin de încărcarea ζ după cum se poate constata ușor (144), (145). De aceea s-a trasat numai coeficientul C_m

în funcție de ξ pentru diferite excentricități α (fig. 31). Coeficientul C_{m_c} are valori apropiate de C_m, fiind ceva mai mici. De altfel el poate fi ușor calculat cu ajutorul relației (145).

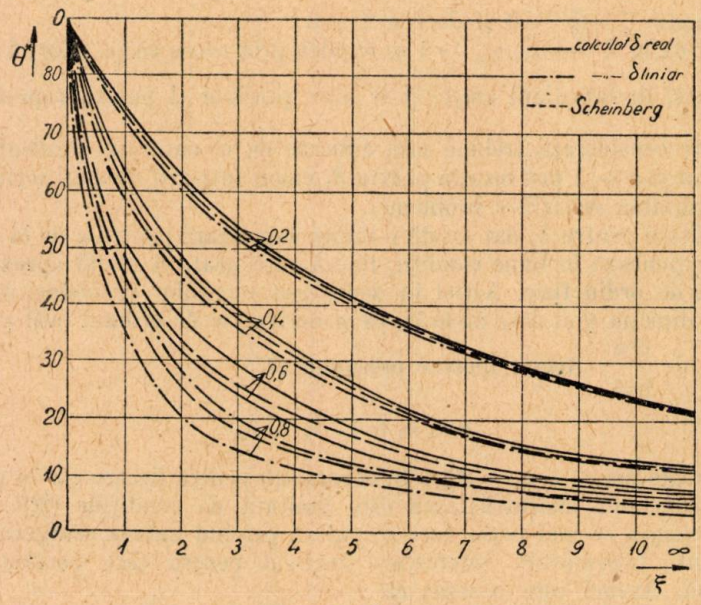


Fig. 30

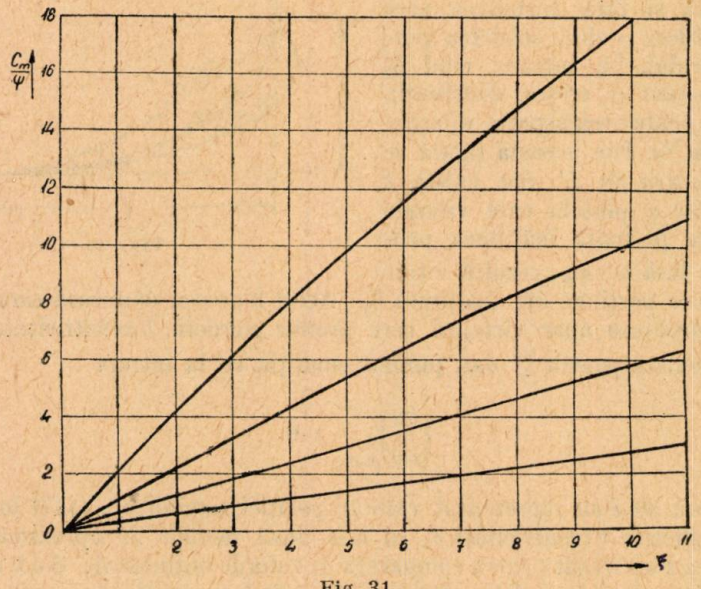


Fig. 31

Ca și pentru lagărele lubrificate cu lichide este util să introducem coeficientul

$$k_m = \frac{6M}{\pi F \delta_2} \tag{203}$$

care poate fi scris, în funcţie de ζ şi C_m,

$$k_m = \frac{6}{\psi(1-\alpha)} \frac{C_m}{\zeta}. \tag{204}$$

În figura 32 s-a reprezentat k_m în funcţie de α considerînd ξ' = constant, pentru diferite valori ξ'. Se constată că k_m are un minim în funcţie de α. Pentru $\xi' = 0$, rezultă

$$M_{\xi'=0} = \frac{4\pi\mu\,\Omega r^2}{\psi} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}, \tag{205}$$

de unde

$$(k_m)_{\xi'=0} = \frac{2}{\pi} \frac{1+\alpha_2}{\alpha(1-\alpha)} \tag{206}$$

care este minim pentru

$$\alpha_m'' = 0{,}414. \tag{207}$$

Pentru $\xi' \to \infty$ rezultă, ţinînd seama de (187) şi (188)

$$(k_m)_{\xi'\to\infty} = \frac{6\,\mu\,\Omega}{\pi\, p_0\, \psi^2} \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)(1-\sqrt{1-\alpha^2})} \tag{208}$$

care este minim pentru

$$\alpha_m'' = 0{,}55. \tag{209}$$

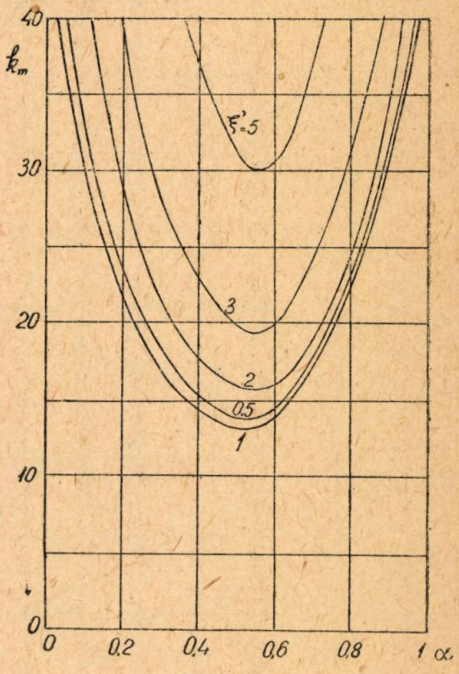


Fig. 32

Deci poziţia maximului variază între valorile (207) şi (209).

În cazul cînd se consideră δ_2 = constant, utilizînd parametrul ξ^*, (199), se poate trasa curba $\frac{C_m}{\psi}$, considerînd ξ^* = constant (fig. 33). Din această figură se vede că la $\alpha = 1$, $\frac{C_m}{\psi} = 0$. Aceasta se datoreşte faptului că la $\alpha = 1$, $\psi = \infty$ aşa că la $\alpha = 1$ rezultă totuşi $C_m = \infty$.

În sfîrşit în figura 34 s-a trasat variaţia coeficientului k_m în funcţie de α, considerînd ξ^* = constant. Se constată şi în acest caz un minim în funcţie de α la o valoare α_m''', valoare care depinde de ξ^*. La $\xi^* = 0$, $\alpha_m''' = \alpha_m''$, (207). Pentru $\xi^* \to \infty$ se poate scrie

$$(k_m)_{\xi^*\to\infty} = \frac{4}{\pi^2} \xi^* \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{\alpha}{1-\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{210}$$

care este minim pentru $\alpha_m'''' = 1$.

Proiectarea lagărelor circulare

Diagramele obţinute (fig. 23 ... fig. 34) permit rezolvarea oricăror probleme în legătură cu calculul lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze.

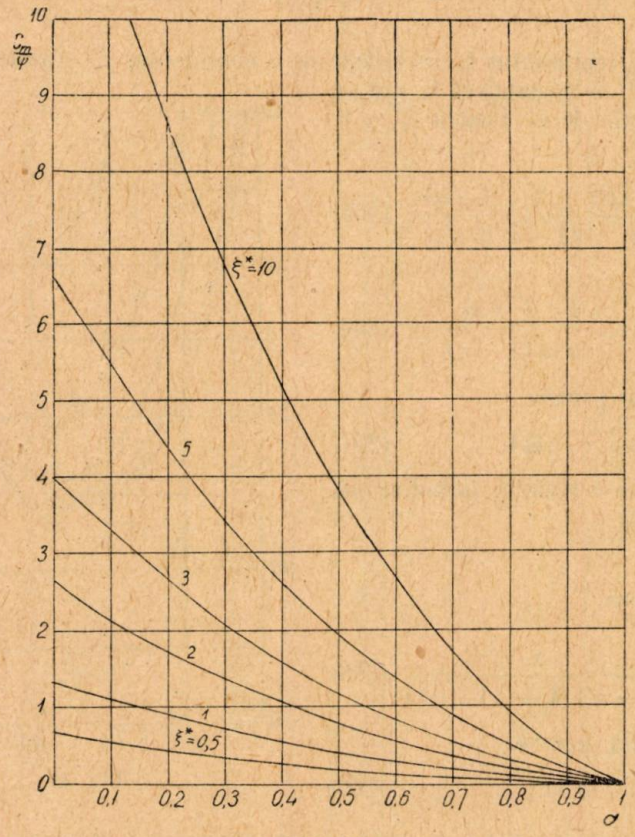


Fig. 33

Într-adevăr, diagramele de mai sus permit atît verificarea funcţionării unui lagăr circular, cît şi proiectarea lui.

Astfel un calcul de verificare poate fi condus în modul următor. Se cunosc în acest caz raza lagărului r, lăţimea lui b, jocul radial ψ, viteza unghiulară de rotaţie a fusului Ω, viscozitatea gazului lubrifiant μ, presiunea de referinţă p_0 şi sarcina P a lagărului. În consecinţă se poate calcula

$$\zeta = \frac{P}{p_0 r b} \tag{211}$$

şi parametrul ξ' (191). Atunci, din diagrama din figura 24 rezultă excentricitatea α. O dată cunoscută această excentricitate se poate trasa repartiţia presiunilor, calcula frecările etc. În special interesează grosimea minimă

$$\delta_2 = \Delta (1 - \alpha) \tag{212}$$

pentru a vedea dacă nu există pericol de gripaj.

Astfel, de exemplu, fie un lagăr cu următoarele caracteristici: $r = 20$ mm, $b = 30$ mm, $\Delta = 0{,}01$ mm, $p_0 = 1$ kg/cm², $\Omega = 3\,140$ rad/s, ($n = 30\,000$ rot/min), $\mu = 2\times10^{-6}$ kg s/m², (la 40 °C), $P = 54$ kg. Rezultă

$$\zeta = \frac{F}{p_0 r b} = \frac{54}{10^4 \times 0{,}02 \times 0{,}03} = 9, \quad (213)$$

iar

$$\xi' = \frac{3\pi\mu\Omega}{2 p_0 \psi^2} =$$

$$= \frac{3\times3{,}14\times2\times10^{-6}\times3\,140}{2\times10^4\times0{,}0005^2} = 11{,}8. \quad (214)$$

Din diagrama din figura 23 rezultă $\alpha = 0{,}8$, $\xi = 14{,}8$, $\delta_2 = 2\,\mu$, $M = 0{,}00162$ kgm, puterea consumată = 50 W.

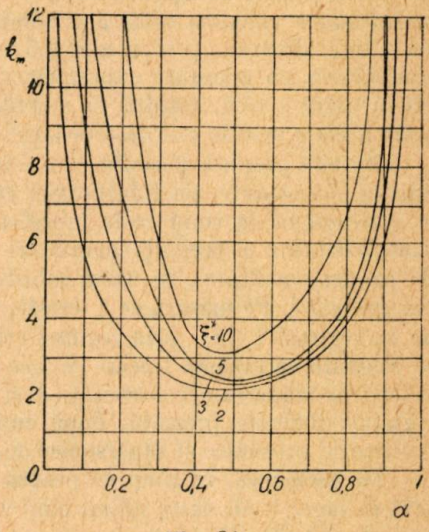


Fig. 34

*

În cazul proiectării se cunoaște în general sarcina P pe care trebuie să o suporte lagărul, viteza unghiulară Ω de rotație a fusului și presiunea de referință p_0. În majoritatea cazurilor se mai prescrie și grosimea minimă δ_2, pentru ca lagărul să poată funcționa în regim hidrodinamic, funcție de calitatea suprafețelor fusului și cuzinetului.

Rămîn deci ca necunoscute: raza r a fusului, lățimea lui b și excentricitatea α, respectiv jocul radial Δ, legate între ele prin relația (212). În general, din condiția ca lagărul să suporte sarcina dată, rezultă un singur parametru. Ceilalți parametrii (doi, în cazul considerat) trebuie determinați în funcție de condițiile de funcționare ale lagărului, ținînd seama de considerațiile făcute.

În general, frecările sînt mici și de o importanță mai redusă, interesînd în special o capacitate portantă cît mai mare a lagărului. Atunci se poate alege $\alpha = \alpha_m$ (fig. 28), ținînd însă seama de limitările făcute. O dată fixată excentricitatea și deoarece ξ^* se cunoaște, (199), din diagrama din figura 27 rezultă ζ și deci produsul br. Dacă se dă lățimea b, rezultă raza r și toate caracteristicile lagărului sînt determinate. Invers, dacă se dă raza r, rezultă lățimea b.

Dacă se impun, din motive constructive, r și b, atunci se poate calcula ζ și, deoarece se cunoaște ξ^*, din diagrama din figura 27 rezultă α.

Orice alte cazuri de calcul care pot interveni se rezolvă de o manieră analogă, cu ajutorul diagramelor obținute.

CONCLUZII

Din considerațiile făcute, rezultă anumite concluzii interesante atît teoretic, cît și practic și anume:

Metoda de calcul propusă, bazată pe aproximarea variației grosimii filmului de lubrifiant cu două linii drepte permite rezolvarea completă pe cale analitică a problemei lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze. S-au putut astfel obține relații analitice pentru determinarea repartiției presiunilor și pentru elementele globale ale lagărului (forțe, momente).

Din compararea cu rezultatele calculelor efectuate de alţi autori [2], rezultă că erorile faţă de o soluţie exactă a ecuaţiei (4) nu sînt mari. Ele cresc cu excentricitatea şi scad cu mărirea lui ξ dacă în calculul efectiv al repartiţiei de presiuni se introduce valoarea reală a grosimii δ şi nu valoarea rezultată din aproximarea cu o linie dreaptă (pentru $\alpha < 0{,}5$ eroarea asupra sarcinii rămîne sub 6%). Din compararea cu rezultate experimentale şi cu unele soluţii particulare ale ecuaţiei (4) în cazul $\varkappa \neq 1$, rezultă că metoda propusă dă valori mai aproape de valorile reale decît o soluţie exactă a ecuaţiei (4) cu $\varkappa = 1$, mai ales la excentricităţi mari.

Metoda propusă permite cunoaşterea calitativă şi cantitativă a unor particularităţi importante ale lubrificaţiei cu gaze faţă de lubrificaţia cu lichide. Astfel se constată că în timp ce la lubrificaţia cu lichide, fenomenul depinde numai de excentricitatea α (ceilalţi parametri μ, Ω, Δ, r, intervenind numai ca factorii de proporţionalitate), în cazul lubrificaţiei cu gaze fenomenul mai depinde şi de parametrul ξ. Pe măsură ce ξ creşte, regimul de lucru se schimbă calitativ, trecînd de la regimul $\xi<\xi_c$, prin regimul critic $\xi=\xi_c$, la regimul $\xi>\xi_c$. Din relaţia (13) se constată că această trecere se face la creşterea vitezei unghiulare de rotaţie Ω a fusului, la scăderea excentricităţii α şi la scăderea jocului relativ ψ. Existenţa a două regimuri distincte, prezintă, după cum s-a mai arătat [1], o oarecare analogie cu regimurile subsonice şi supersonice de scurgere a gazelor în jurul diferitelor corpuri.

De asemenea, în timp ce pentru lagărele lubrificate cu lichide sarcina suportată de lagăr tinde către infinit cînd viteza unghiulară Ω creşte foarte mult, pentru lagărele lubrificate cu gaze sarcina suportată de lagăr rămîne finită în aceleaşi condiţii, adică atunci cînd $\xi \to \infty$ (fig. 22). Cu alte cuvinte, este inutil să se construiască lagăre care să lucreze la valori ξ prea mari (de exemplu pentru $\xi > 10 \ldots 15$) deoarece creşterea capacităţii portante a lagărului este neînsemnată, (excentricitatea fiind presupusă constantă), în timp ce frecările cresc destul de mult. Aceasta bineînţeles în afară de cazurile cînd condiţii speciale de funcţionare nu impun o funcţionare la turaţii foarte mari. În aceste cazuri în comparaţie cu lagărele lubrificate cu lichide, sau în comparaţie cu rulmenţii, datorită avantajelor ce le posedă (frecări comparativ mult mai mici, încălzire redusă, lipsa aproape completă a vibraţiilor etc.), lagărele lubrificate cu gaze sînt singurele recomandabile.

În plus la fiecare valoare ξ există o excentricitate optimă care face maxim coeficientul de încărcare ζ^* (fig. 25) şi o excentricitate optimă care corespunde unor frecări minime (fig. 26). Aceste condiţii pot fi satisfăcute aproape simultan şi pentru orice ξ dacă se alege excentricitatea şi limitele date de relaţia (207).

În sfîrşit rezultatele obţinute permit, ca şi pentru lagărele lubrificate cu lichide [3], calculul unui lagăr circular de alungire infinită lubrificat cu gaze, în orice condiţii de proiectare sau de verificare a funcţionării lui. Se poate efectua astfel o proiectare judicioasă în mod rapid şi prin calcule elementare.

Primită la redacţie la 1 februarie 1955

О РАСЧЕТЕ КРУГЛЫХ БЕСКОНЕЧНО УДЛИНЕННЫХ ПОДШИПНИКОВ С ГАЗОВОЙ СМАЗКОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассчитываются общие характеристические данные функционирования круглых бесконечно удлиненных подшипников с газовой смазкой (равнодействующая сила давлений, моменты трения и пр.). Далее изу-

чается изменение этих характеристических данных в зависимости от условий работы. Результаты представлены в виде диаграмм, с помощью которых указываются практические методы проектирования.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES PALIERS CIRCULAIRES D'ALLONGEMENT INFINI, LUBRIFIÉS AUX GAZ

(RÉSUMÉ)

On calcule les caractéristiques globales de fonctionnement des paliers circulaires, à allongement infini, lubrifiés aux gaz (résultante des pressions, moments de frottement, etc.). On continue par l'étude de la variation de ces caractéristiques en fonction des conditions de fonctionnement. Les résultats sont présentés sous forme de diagrammes, à l'aide desquels on indique des méthodes pratiques d'élaboration des projets.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Repartiția de presiuni în lagărele de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 2, februarie 1955, p. 377.
2. S. A. Scheinberg, *Gazovaia smazka podșipnikov scoljenia.* Trenie i iznos v mașinah. Izd. AN SSSR, 1953, t. VIII, p. 107.
3. N. Tipei, *Considerațiuni asupra calculului lagărelor prin alunecare.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secț. științe chimice și tehnice, t. IV, nr. 3—4, iulie—decembrie 1952, p. 291.
4. G. Scheffers, *Lehrbuch der Differential und Integralrechnung.* B. G. Teubner, Berlin, 1921, vol. II, p. 78—94.
5. E. Ianke i F. Emde, *Tablițî funkții s formulami i krivîmi.* GITTL, Moscova, 1949.
6. N. Tipei, *O metodă generală pentru studiul mișcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafețe de dimensiuni finite.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 27.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

ORGANE DE MAŞINI

ASUPRA COMBINĂRII PRĂJINILOR ÎN POMPAJUL DE ADÎNCIME DIN INDUSTRIA DE PETROL, DUPĂ CRITERII DE REZISTENŢĂ LA OBOSEALĂ

DE

DAN BODNĂRESCU

Deoarece extracţia petrolului prin pompajul de adîncime constituie peste 50% din producţia noastră petroliferă, problemele technologice ale pompajului de adîncime au o importanţă deosebită.

Întrebuinţarea garniturilor de prăjini combinate, în locul celor dintr-o singură secţiune, a devenit obişnuită pe măsura creşterii adîncimilor de plasare ale pompelor de fund, depăşindu-se astăzi, la noi, 2 000 m şi tinzînd spre 3 000 m.

Reducerea preţului de cost, pe de o parte, printr-o cît mai judicioasă dimensionare şi pe altă parte, micşorarea numărului avariilor necesită adîncirea problemelor pompajului de adîncime.

Criteriul folosit la alcătuirea garniturilor de prăjini combinate este acel al eforturilor unitare normale maxime la tensiune, egale pentru toate categoriile în secţiunea lor superioară.

Pompajul de adîncime este un fenomen periodic caracterizat de faptul că în timpul unui ciclu complet fiecare secţiune din prăjini trece succesiv prin diferite stări de tensiune variind între un minim şi un maxim, cu alte cuvinte garnitura este supusă la oboseală.

Necesitatea alcătuirii garniturilor de prăjini combinate după criterii de rezistenţă la oboseală apare deci ca firească.

Din lucrări anterioare [1], [2], [3], se consideră din diagrama rezistenţelor la oboseală (fig. 1):

$$\sigma_a = \frac{0{,}9\,\sigma_s - \sigma_w}{0{,}9\,\sigma_s}\,\sigma_m + \sigma_w \qquad (1)$$

în care s-a notat cu:

σ_a, rezistenţa admisibilă la oboseală;

σ_s, limita de curgere;

σ_w, rezistenţa admisibilă la oboseală pentru sarcini alternate (tensiune-compresiune egale în valoare absolută);

σ_o, efortul unitar maxim de tensiune în secţiunea considerată;

σ_u, efortul unitar minim de tensiune în secţiunea considerată;

σ_m, efortul unitar mediu de tensiune $\left(\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_o + \sigma_u)\right)$.

Expresia (1) va fi utilizată în calculele ulterioare sub forma

$$\sigma_a = K_1 \sigma_m + \sigma_w . \tag{2}$$

Condiţia de rezistenţă la oboseală rămîne

$$\sigma_o \ll \sigma_a = K_1 \sigma_m + \sigma_w \tag{3}$$

care se poate pune sub forma

$$\rho = \frac{\sigma_a}{\sigma_o} \gg 1, \tag{4}$$

unde ρ este coeficientul de siguranţă la oboseală.

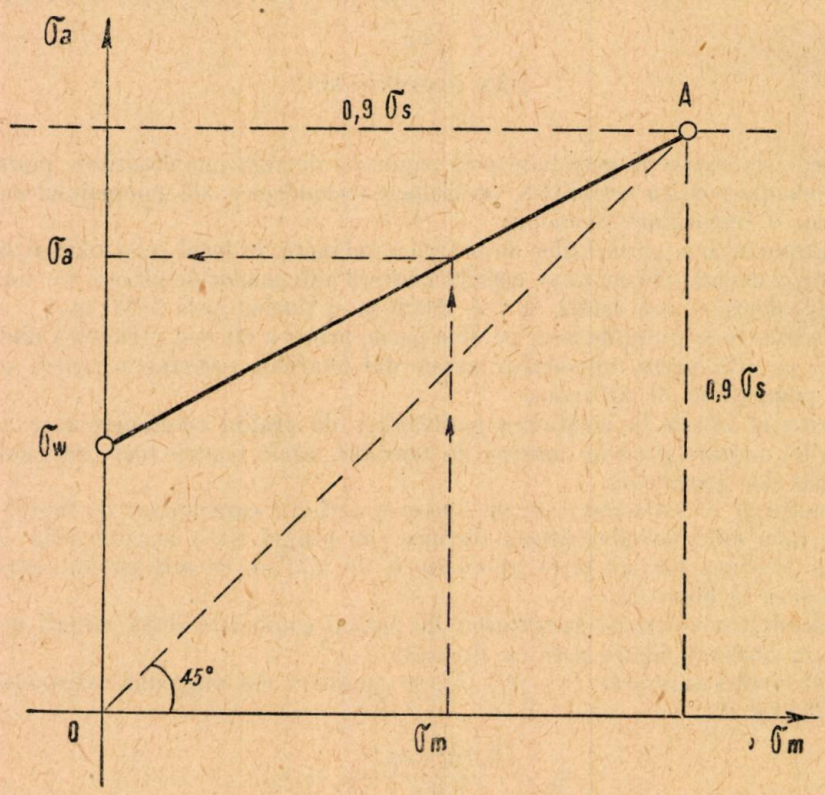


Fig. 1. — Diagrama rezistenţelor la oboseală.

În cele ce urmează vom utiliza următoarele notaţii:
s_p — secţiunea brută a plungerului pompei de adîncime;
d — greutatea specifică a fluidului de extras;
d_0 — greutatea specifică a oţelului prăjinilor de pompare;

E — coeficientul de elasticitate al oţelului (2×10^6 kg/cm^2);
C — cursa la suprafaţă (tija polizată);
N — numărul de curse în unitatea de timp;
L — adîncimea de fixare a pompei de fund;
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *) — lungimile celor n categorii de prăjini;
$s_1, s_2, \ldots, s_n$ *) — secţiunile celor n categorii de prăjini;
$p_1, p_2, \ldots, p_n$ *) — greutăţile lor pe unitatea de lungime;
C_f — cursa la fund (a plungerului pompei);

$$F = \sum_1^{n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \quad \text{şi} \quad H = \sum_1^{n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_i p_i}$$ sînt factori,

[1], [3], caracteristici ai fiecărei combinaţii;

$$\left.\begin{aligned} P_{\max} &= \left(\sum_1^n p_i x_i + d \cdot s_p \cdot L\right)\left(1 + \frac{CN}{137}\right) \\ P_{\min} &= \sum_1^n p_i x_i \left(1 - \frac{d}{d_0}\right)\left(1 - \frac{CN}{137}\right) \\ A &= \left(1 - \frac{d}{d_0}\right)\left(1 - \frac{CN}{137}\right) \\ \text{şi} \quad B &= \left[2 - \frac{d}{d_0}\left(1 - \frac{CN}{137}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

sînt expresii care intervin în calcule.

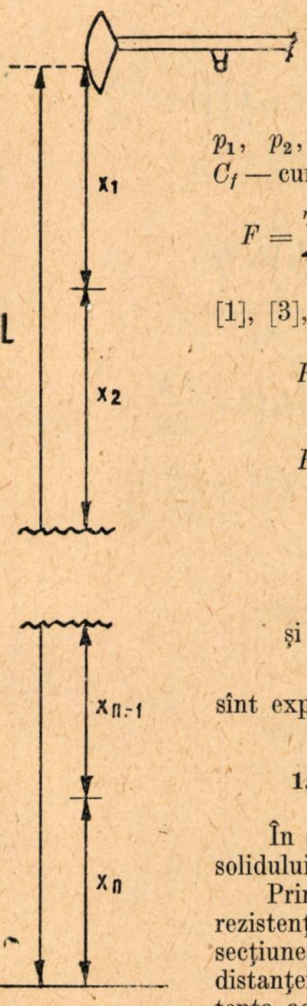


Fig. 2. — Aranjarea prăjinilor de pompare în trepte.

1. Solidul de egală rezistenţă admisibilă la oboseală

În studiile de rezistenţa materialelor este clasică problema solidului de egală rezistenţă la tensiune.

Prin asemănare cu aceasta vom considera solidul de egală rezistenţă la oboseală (fig. 3), pentru care s-a notat cu: s_1, secţiunea circulară cea mai de sus; s_x, pe cea corespunzătoare distanţei x şi s_n secţiunea cea mai de jos. În secţiunea x rezistenţa admisibilă la oboseală, σ_{ax}, va fi

$$\sigma_{ax} = \frac{\sigma_{ox} + \sigma_{ux}}{2} \cdot K_1 + \sigma_w .$$

*) Indicele 1 se referă la secţiunea superioară, n fiind secţiunea categoriei celei mai de jos (fig. 2).
Condiţiile:

$$s_1 > s_2 > s_3 > \ldots > s_n ,$$

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > p_n .$$

sînt satisfăcute.
(Lungimile x_i sînt necunoscutele ce trebuie determinate).

Însă $\sigma_{ax} = \text{constant} = \sigma_a$ rezistența admisibilă la oboseală pe care o luăm aceeași pentru toate secțiunile.

Relația de mai sus se poate pune sub forma

$$2(\sigma_a - \sigma_w) = K_1(\sigma_{ox} + \sigma_{ux}),$$

în care

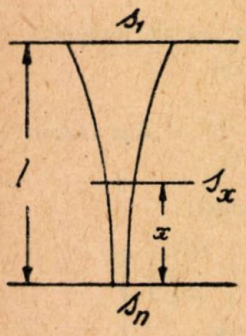


Fig. 3. — Solidul de egală rezistență la oboseală.

$$\sigma_{ox} = \frac{\left(d_0 \int_0^x s_x\,dx + d \cdot s_p L\right)\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{s_x},$$

$$\sigma_{ux} = \frac{Ad_0 \int_0^x s_x\,dx}{s_x},$$

sau

$$2(\sigma_a - \sigma_w)\,s_x = K_1\left[d_0\left(1 + \frac{CN}{137} + A\right)\int_0^x s_x\,dx + d \cdot s_p L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)\right].$$

Diferențiind în ambii membrii:

$$2(\sigma_a - \sigma_w)\,ds = K_1\,d_0 \cdot B \cdot s_x dx.$$

Separînd variabilele și integrînd rezultă

$$2(\sigma_a - \sigma_w)\int_{s_n}^{s_x} \frac{ds}{s_x} = K_1 \cdot d_0 \cdot B \int_0^x dx$$

care se poate pune sub forma

$$s_x = s_n\, e^{\frac{K_1 d_0 B}{2(\sigma_a - \sigma_w)} x}.$$

Secțiunea s_1 va fi

$$s_1 = s_n \cdot e^{\frac{K_1 d_0 B}{2(\sigma_a - \sigma_w)} L}$$

iar secțiunea s_n se va obține din condiția de rezistență la oboseală:

$$\sigma_{on} \ll \sigma_a$$

$$s_n \geqslant \frac{K_1 \cdot d \cdot s_p\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{2(\sigma_a - \sigma_w)} L.$$

Greutatea garniturii va fi

$$G_t = \frac{2(\sigma_a - \sigma_w)}{K_1 B}\left(e^{\frac{K_1 d_0 B}{2(\sigma_a - \sigma_w)} L} - 1\right) s_n.$$

Siguranţa la oboseală ρ_x va fi

$$\rho_x = \frac{\sigma_a}{\sigma_{ox}} = \frac{\sigma_a \cdot s_n \cdot e^{\frac{K_1 d_0 B}{2(\sigma_a - \sigma_w)} x}}{\left[\frac{2\, d_0\, s_n\, (\sigma_a - \sigma_w)}{K_1 \cdot d_0 \cdot B}\left(e^{\frac{K_1 d_0 B}{2(\sigma_a - \sigma_w)} x} - 1\right) + d \cdot s_p\, L\right]\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}.$$

Rezultă că ρ_x este variabil cu x şi apare necesitatea de a studia problema pe criteriul constanţei coeficientului de siguranţă la oboseală.

2. Solidul de egală siguranţă la oboseală

Se impune condiţia

$$\rho = \rho_x = \frac{\sigma_{ax}}{\sigma_{ox}} = \text{const} \geqslant 1,$$

în care

$$\sigma_{ax} = \frac{K_1}{2}(\sigma_{ox} + \sigma_{ux}) + \sigma_w$$

iar

$$\sigma_{ox} = \frac{\left(d_0 \int_0^x s_x\, dx + d \cdot s_p \cdot L\right)\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{s_x},$$

$$\sigma_{ux} = \frac{A d_0 \int_0^x s_x\, dx}{s_x}.$$

Astfel

$$\rho_x = \frac{\frac{K_1}{2}\left[B d_0 \int_0^x s_x\, dx + d \cdot s_p \cdot L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)\right] + \sigma_w \cdot s_x}{\left[d_0 \int_0^x s_x\, dx + d \cdot s_p \cdot L\right]\left(1 + \frac{CN}{137}\right)},$$

care se poate pune sub forma

$$\rho\left[d_0 \int_0^x s_x\, dx + d \cdot s_p \cdot L\right]\left(1 + \frac{CN}{137}\right) = \frac{K_1}{2} \cdot B d_0 \int_0^x s_x\, dx + \frac{K_1}{2} d \cdot s_p \cdot L\left(1 + \frac{CN}{137}\right) + \sigma_w s_x.$$

Diferenţiind obţinem

$$\left(1+\frac{CN}{137}\right)\rho d_0 \cdot s_x\, dx = \frac{K_1}{2} B d_0 \cdot s_x\, dx + \sigma_w\, ds_x$$

sau

$$\sigma_w \cdot \frac{ds_x}{s_x} = d_0\left[\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B\right]dx.$$

Integrînd între limitele zero şi x:

$$\log\frac{s_x}{s_n} = \frac{d_0}{\sigma_w}\left[\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B\right]x.$$

Rezultă

$$s_x = s_n\, e^{\frac{d_0}{\sigma_w}\left[\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B\right]x}.$$

Greutatea de la zero la x va fi

$$G_x = d_0\int_0^x s_x\, dx = d_0\, s_n\int_0^x e^{\frac{d_0}{\sigma_w}\left[\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B\right]x} dx,$$

deci

$$G_x = \frac{s_n\,\sigma_w}{\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)+\frac{K_1}{2}B}\left[e^{\frac{d_0}{\sigma_w}\left[\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B\right]x}-1\right],$$

iar greutatea totală va fi

$$G_t = \frac{s_n\,\sigma_w}{\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B}\left[e^{\frac{d_0}{B}\left[\rho\left(1+\frac{CN}{137}\right)-\frac{K_1}{2}B\right]L}-1\right].$$

În mod practic problema nu se poate rezolva printr-un solid de egală rezistenţă sau siguranţă la oboseală ci va trebui să alcătuim trepte în care (numai) secţiunea lor să satisfacă criteriile considerate în ceea ce privesc solicitările şi eforturile din punctul cel mai de sus al fiecărei trepte.

Concepţia rezistenţelor admisibile la oboseală prin dreapta $\sigma_a = f(\sigma_m)$ este acoperitoare şi simplificatoare.

Pentru fiecare efort unitar mediu de tensiune σ_m corespunde o anumită rezistenţă admisibilă la oboseală, σ_a.

Un prim criteriu pentru combinarea prăjinilor ar fi deci acela de a alege lungimile diverselor categorii de prăjini, astfel ca rezistenţa admisibilă la oboseală să fie aceeaşi pentru fiecare secţiune superioară a fiecărei categorii de prăjini.

Deci primul criteriu de combinare al prăjinilor ar fi criteriul combinării după egale rezistenţe admisibile la oboseală în secţiunile superioare din fiecare categorie

$$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = \ldots = \sigma_{an}.$$

În relaţia (4) s-a arătat condiţia ce trebuie îndeplinită spre a asigura garnitura la oboseală $\rho \geqslant 1$. Dacă

$$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = \ldots = \sigma_{an}$$

atunci

$$\sigma_{o1} \neq \sigma_{o2} \neq \ldots \neq \sigma_{on}$$

adică eforturile unitare maxime de tensiune, nu sînt egale între ele şi deci nici coeficienţii de siguranţă

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \ldots \neq \rho_n .$$

Apare deci ca posibil un al doilea criteriu şi anume:

$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n$$

sau alegerea lungimilor astfel încît coeficienţii de siguranţă la oboseală să fie aceiaşi pentru secţiunile superioare ale tuturor categoriilor, deci combinarea prăjinilor după criteriul aceleiaşi siguranţe la oboseală.

Sigur că în acest caz $\sigma_{a1} \neq \sigma_{a2} \neq \ldots \neq \sigma_{an}$ adică rezistenţele admisibile la oboseală nu mai sînt egale între ele.

Pentru ambele criterii este necesară condiţia prin care se va asigura rezistenţa la oboseală a garniturii astfel combinate.

Va mai fi posibil un al treilea criteriu şi anume:

Lungimea x_n a categoriei celei de mai jos să se determine la limita maximă prin condiţia $\rho_n = 1$; apoi categoria următoare prin $\rho_{n-1} = 1$; apoi se va proceda în acest mod pînă la x_2, determinat prin condiţia $\rho_2 = 1$.

Pentru categoria cea mai de sus lungimea x_1 va rezulta din diferenţa

$$x_1 = L - \sum_2^n x_i .$$

Vom trece la calcularea lungimelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru fiecare din cele trei criterii în parte.

3. Criteriul combinării după rezistenţele admisibile la oboseală egale în secţiunile superioare ale fiecărei categorii de prăjini

Va trebui să determinăm lungimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pe baza sistemului de ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n x_i &= L \\ \sigma_{a1} &= \sigma_{a2} = \ldots = \sigma_{an} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

sau ţinînd seama de relaţiile (5) rezultă

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n x_i &= L \\ \frac{B\sum_1^n p_i x_i + d \cdot s_p L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{s_1} &= \ldots = \frac{B\sum_1^n p_i x_i + d \cdot s_p L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{s_i} = \ldots = \\ = \frac{Bp_n s_n + d \cdot s_p L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{s_n} & . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sistemul (7) este liniar de n ecuaţii cu n necunoscute

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Prin scăderea succesivă a numărătorilor şi numitorilor între ei se obţine

$$\sum_1^n x_i = L$$

$$\frac{Bp_i x_i}{s_i - s_{i+1}} = \frac{Bp_n x_n + d \cdot s_p L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{s_n}. \tag{8}$$

Din (8) rezultă

$$\begin{matrix} i = n-1 \\ i = 1 \end{matrix} \quad x_i = \left[Bp_n x_n + d \cdot s_p L\left(1 + \frac{CN}{137}\right)\right] \frac{s_i - s_{i+1}}{Bs_n p_i}. \tag{9}$$

Scriind valorile lui x_i de la $i = 1$ pînă la $i = n-1$ şi adunînd membru cu membru obţinem

$$\sum_1^{n-1} x_i = L - x_n = \left[p_n x_n + \frac{d \cdot s_p L}{B}\left(1 + \frac{CN}{137}\right)\right] \sum_1^{n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \tag{10}$$

care, reprezentînd o ecuaţie de gradul întîi cu o necunoscută, dă valoarea lui x_n:

$$x_n = \frac{B - d \cdot s_p F\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{(1 + p_n F) B} L \tag{11}$$

şi înlocuind în (9) obţinem

$$\begin{matrix} i = n-1 \\ i = 1 \end{matrix} \quad x_i = \frac{Bp_n + d \cdot s_p\left(1 + \frac{CN}{137}\right)}{(1 + p_n F)} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} L. \tag{12}$$

Situaţia aceasta este asemănătoare combinării prăjinilor după criteriul tensiunilor maxime egale, cînd secţiunea n-a este de asemenea cea mai solicitată la oboseală.

4. Criteriul combinării după coeficientul de siguranţă la oboseală egal în secţiunea cea mai de sus din fiecare categorie de prăjini

Aceasta înseamnă

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_n > 1, \tag{13}$$

ceea ce revine la sistemul liniar de n ecuaţii cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^{n-1} x_i = L - x_n \\ &\frac{K_1 A \sum_1^n p_i x_i + 2s_1 \sigma_w}{\sum_1^n p_i x_i + d \cdot s_p L} = \cdots = \frac{K_1 A \sum_i^n p_i x_i + 2s_i \sigma_w}{\sum_i^n p_i x_i + d \cdot s_p L} = \cdots = \\ &= \frac{K_1 A p_n x_n + 2s_n \sigma_w}{p_n x_n + d \cdot s\ L}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Scăzînd succesiv numărătorii și numitorii între ei rezultă

$$K_1 A + \frac{2\sigma_w (s_i - s_{i+1})}{p_i x_i} = \frac{K_1 A p_n x_n + 2 s_n \sigma_w}{p_n x_n + d \cdot s_p L}, \tag{15}$$

$$x_i = \frac{2 s_n \sigma_w (p_n x_n + d \cdot s_p L)}{2 s_n \sigma_w - K_1 A d \cdot s_p L} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}. \tag{16}$$

Scriind valorile lui x_i de la $i = 1$ la $i = n - 1$ și adunînd apoi membru cu membru:

$$\sum_1^{n-1} x_i = L - x_n = 2\sigma_w s_n \frac{p_n x_n + d \cdot s_p L}{2\sigma_w s_n - K_1 A d \cdot s_p L} \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}, \tag{17}$$

ecuație liniară care rezolvată în raport cu x_n dă

$$x_n = \frac{1 - d \cdot s_p F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p L}{2 s_n \sigma_w}}{1 + p_n F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p L}{2 s_n \sigma_w}} L. \tag{18}$$

Înlocuind în (16) rezultă

$$\begin{matrix} i = n-1 \\ \\ i = 1 \end{matrix} \qquad x_i = \frac{p_n + d \cdot s_p}{1 + p_n F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p L}{2 s_n \sigma_w}} \cdot \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i} \cdot L. \tag{19}$$

Se observă că valorile procentuale $\frac{x_n}{L}$ și $\frac{x_i}{L}$ sînt funcții de L.

Pentru ușurarea calculelor dăm următoarele formule ajutătoare:

$$\sum_1^n p_i x_i = \frac{d \cdot s_p (s_1 - s_n - s_n p_n F) + p_n \left(s_1 - s_n \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L \right)}{1 + p_n F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L} \cdot \frac{L}{s_n}, \tag{20}$$

$$\sum_1^n \frac{x_i}{s_i} = \frac{1 + p_n H - d \cdot s_p (F - H) - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L}{1 + p_n F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L} \cdot \frac{L}{s_n}, \tag{21}$$

$$P_{\max} = \frac{(p_n + d \cdot s_p) \left(s_1 - s_n \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L \right)}{1 + p_n F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L} \cdot \left(1 + \frac{CN}{137} \right) \frac{L}{s_n}, \tag{22}$$

$$P_{\min} = \frac{d \cdot s_p (s_1 - s_n - s_n p_n F) + p_n \left(s_1 - s_n \dfrac{K_1 A d \cdot s_p}{2\sigma_w s_n} L \right)}{1 + p_n F - \dfrac{K_1 A d \cdot s_p L}{2\sigma_w s_n}} \cdot A \cdot \frac{L}{s_n}. \tag{23}$$

Pentru exemplificare, dăm mai jos tablourile comparative (tablourile nr. 1 și 2) ale valorilor procentuale calculate după vechiul sistem în uz și criteriul de mai sus pentru două combinații curente utilizate în șantierele petrolifere:

7/8″ cu 3/4″

și

1″ cu 7/8″ cu 3/4″.

Pentru mediul țiței curat (în jur a 800 kg/m³) diferențele sînt neglijabile pe pistoanele mici (< 1 3/4″ inclusiv).

Pentru mediul țiței curat diferențele nu se mai pot neglija de la 1 500 m în jos începînd de la pistonul de 1 3/4″ (> ca 9% pentru x_i și > ca 4% pentru x_n).

Tabloul nr. 1

CRITERIUL II

Tabloul comparativ al variației procentuale x_i și x_n, pentru combinația 7/8″ cu 3/4″ STAS

Vechiul criteriu

Pistonul	d kg/m³	$x_1 = x_{7/8''}$%	$x_2 = x_{3/4''}$%	Alungirile în m		
				L = 1 000 m	L = 1 500 m	L = 2 000 m
1 1/4″	800	22,2	77,8	0,105	0,274	0,413
	1 000	25,7	74,3	0,129	0,291	0,520
1 3/4″	800	29,4	70,6	0,202	0,434	0,808
	1 000	32	68	0,250	0,564	1,004
2 1/4 ″	800	36	64	0,327	0,736	1,301
	1 000	40	60	0,404	0,912	1,617

Noul criteriu

Pistonul	d kg/m³	CN	La 1 000 m			La 1 500 m			La 2 000 m			Observații
			$x_{1''}$%	$x_{2''}$%	Alungirea m	$x_{1''}$%	$x_{2''}$%	Alungirea m	$x_{1''}$%	$x_{2''}$%	Alungirea m	
1 1/4″	800	10	23	77	0,1012	23,4	76,6	0,232	23,5	76,5	0,412	
		30	22,8	77,2	0,105	23,2	76,8	0,2321	23,2	76,8	0,413	
	1 000	10	28,8	71,2	0,1273	30	70	0,2856	31,6	68,4	0,477	
		30	28,7	71,3	0,1278	29,4	70,6	0,286	30,6	69,4	0,478	
1 3/4″	800	10	31,3	68,7	0,1983	32,4	67,6	0,448	33,6	66,4	0,494	
		30	31	69	0,1986	32	68	0,449	32,8	67,2	0,496	
	1 000	10	39,3	60,7	0,2445	44,4	55,6	0,525	50,9	49,1	0,942	
		30	38	62	0,2445	41,8	58,2	0,536	47	53	0,95	
2 1/4″	800	10	40	60	0,3210	42,2	57,8	0,726	44,9	55,1	1,25	Nu este posibil la 2 000 m
		30	39,3	60,7	0,324	41,7	58,3	0,729	43	57	1,251	
	1 000	10	58,2	41,8	0,379	75,2	24,8	0,811	—	—	—	
		30	54	46	0,384	65,3	34,7	0,836	82,7	17,3	1,394	

Din punct de vedere al alungirilor scurtătoare ale cursei de fund vor trebui comparate expresiile:

$$Al_1 = \frac{d \cdot s_p L^2}{E s_n} \cdot \frac{1 + p_n H - d \cdot s_p (F - H) - DL}{1 + p_n F - DL} \qquad \text{(criteriul } \rho = \text{const)}$$

cu

$$Al_2 = \frac{d \cdot s_p L^2}{E s_n} \cdot \frac{1 + p_n H - d \cdot s_p (F - H)}{1 + p_n F},$$

(tensiuni maxime egale) unde $D = \frac{K_1 A d \cdot s_p}{2 \sigma_w s_n}$.

Tabloul nr. 2

CRITERIUL II

Tabloul comparativ al variației procentuale x_1, x_2 și x_3 pentru combinația 1″ cu 7/8″ cu 3/4″ STAS

Vechiul criteriu

Pistonul	d kg/m³	$x_1 = x_{1''}\%$	$x_2 = x_{7/8''}\%$	$x_3 = x_{3/4''}\%$	Observații
1 1/4″	800	20,2	20,9	58,9	
	1 000	21	22,2	56,8	
1 3/4″	800	23,9	25,4	50,7	
	1 000	25,8	27,9	46,3	
2 1/4″	800	29,3	31	39,7	
	1 000	33	34,8	32,2	
2 3/4″	800	35,9	38	26,1	
	1 000	40,8	43,4	15,8	

Noul criteriu

Pistonul	d kg/m³	CN	$x_{1''}\%$			$x_{7/8''}\%$			$x_{3/4''}\%$		
			1000 m	2000 m	3000 m	1000 m	2000 m	3000 m	1000 m	2000 m	3000 m
1 1/4″	800	10	20,6	21,1	21,6	21,8	22,3	23	57,6	56,6	55,4
	800	30	20,5	20,2	21,3	21,7	22,2	22,5	57,8	56,9	55,2
	1 000	10	22,4	24,8	27,1	24	26,3	28,9	53,6	48,9	44
	1 000	30	22,5	24,1	26,1	23,8	25,5	27,4	53,7	50,4	46,5
1 3/4″	800	10	25,2	26,7	28,4	26,8	28,3	30	48	45	41,6
	800	30	25	26,2	27,5	26,6	27,8	29,2	48,4	46	43,3
	1 000	10	30,8	37,2	47,7	32,6	39,6	50	36,6	23,2	2,3
	1 000	30	30	34,9	42	31,5	36,9	44,2	38,5	28,2	13,8
2 1/4″	800	10	31,9	35,1	39,1	33,9	37,4	41,6	34,2	27,5	19,3
	800	30	31,4	34	37,1	33,4	36,2	39,4	35,2	39,8	23,5
	1 000	10	43,5	—	—	46,2	—	—	10,3	—	—
	1 000	30	41,1	—	—	43,6	—	—	15,3	—	—
2 3/4″	800	10	41,1	47,9	—	43,6	51	—	15,3	1,1	—
	800	30	40,2	45,5	—	42,6	58,4	—	17,2	6,1	—
	1 000	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1 000	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Raportul lor

$$\frac{Al_1}{Al_2} = \frac{1 - \frac{DL}{[1 + p_n H - d \cdot s_p (F - H)]}}{1 - \frac{DL}{1 + p_n F}} < 1$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

arată că în primul rînd egala siguranță la oboseală dă alungiri mai mici favorabile și că acest raport depinde *de adîncimea L, descrescînd pe măsură ce L crește. Acest fapt este foarte important rezultînd o ameliorare a alungirii scurtătoare a cursei de fund pe măsură ce crește adîncimea de extragere mai ales că astăzi este de actualitate problema pompajului la mare adîncime.*

De asemenea, valoarea raportului descrește cu cît crește suprafața pistonului pompei.

Trebuie subliniat că raportul alungirilor descrește cu cît rezistența admisibilă la oboseală σ_w (pentru cicluri simetrice) descrește, cu alte cuvinte, în mediul coroziv criteriul egalei siguranțe la oboseală va trebui neapărat aplicat.

Cu cît s_n este mai mic cu atît descrește raportul alungirilor. Deci este favorabilă utilizarea unui număr cît mai mare de categorii de prăjini.

Criteriul combinării prăjinilor după egală siguranță la oboseală asigură și o solicitare mai uniformă garniturii de pompare tinzînd la cea mai rațională repartizare a solicitărilor și prin aceasta la maximala eliminare a avariilor de fund, care astăzi sînt numeroase și care vor putea fi reduse în mod simțitor.

5. Criteriul al treilea sau criteriul combinării după rezistența limită la oboseală

Acest al treilea criteriu are la bază ideia dimensionării de jos în sus pînă la limita de oboseală astfel:

$$\rho_n = 1 = \rho_{n-1} = \cdots = \rho_2$$

din care vor rezulta valorile x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_2$; lungimea x_1, rezultînd din diferența pînă la L

$$x_1 = L - \sum_2^n x_i .$$

Relația $\rho_n = 1$ înseamnă

$$\sigma_{an} = \sigma_{on}$$

sau

$$(2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right)\frac{p_n x_n + d \cdot s_p L}{s_n} - AK_1 \frac{p_n x_n}{s_n} = 2\sigma_w$$

de unde se deduce valoarea lui x_n

$$x_n = \frac{2\sigma_w s_n - (2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right) d \cdot s_p L}{[p_n]\left|(2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right) - AK_1\right|} .$$

Expresia $\rho_i = 1$ se poate pune sub forma

$$\sum_i^n p_i x_i \left[(2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right) - A K_1\right] = 2\sigma_w s_i - d \cdot s_p L (2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right).$$

În mod asemănător

$$\sum_{i+1}^n p_i x_i \left[(2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right) - AK_1\right] = 2\sigma_w s_{i+1} - d \cdot s_p L (2 - K_1)\left(1 + \frac{CN}{137}\right).$$

Prin scădere obţinem

$$p_i x_i \left[(2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right)-AK_1\right] = 2\sigma_w (s_i - s_{i+1}),$$

din care se deduce valoarea lui x_i

$$i = n-1 \quad i = 2 \qquad x_i = \frac{2\sigma_w s_n}{\left[(2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right)-AK_1\right]} \cdot \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}.$$

Vom calcula $\sum_2^{n-1} x_i$

$$\sum_2^{n-1} x_i = \frac{2\sigma_w s_n}{\left[(2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right)-AK_1\right]} \sum_2^{n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}.$$

Notînd

$$F_1 = \sum_2^{n-1} \frac{s_i - s_{i+1}}{s_n p_i}$$

rezultă

$$\sum_2^{n-1} x_i = \frac{2\sigma_w s_n F_1}{\left[(2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right)-AK_1\right]}.$$

Valoarea lui x_1 va fi

$$x_1 = L - \frac{2\sigma_w s_n F_1}{\left[(2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right)-AK_1\right]} - \frac{2\sigma_w s_n - (2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right) d \cdot s_p L}{p_n \left[(2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right)-AK_1\right]}.$$

Pentru aplicarea acestui criteriu va trebui să cunoaştem secţiunea a n — a cu care se începe combinaţia de jos în sus.

Aceasta va fi determinată prin condiţia $x_n > 0$ ceea ce revine la

$$2\sigma_w s_n \geqslant (2-K_1)\left(1+\frac{CN}{137}\right) d \cdot s_p L.$$

Acest criteriu este un criteriu de limită pe care îl recomandăm numai în cazuri speciale la mare adîncime.

CONCLUZII

Combinarea prăjinilor după criteriile de mai sus în pompajul de adîncime, din industria de petrol, apare deci ca cea mai indicată.

Alcătuirea treptelor prăjinilor combinate după criteriul egalei siguranţe la oboseală şi eventual, în anumite cazuri, după rezistenţele limită la oboseală (criteriul al treilea) se impun în mod categoric la toate adîncimile pentru materialul care lucrează în medii corozive.

De asemenea combinarea aceasta se impune de la adîncimile peste 1 500 m asigurînd o solicitare mai uniformă şi evitînd avariile şi accidentele de fund a căror

rezolvare, pe lîngă faptul că este costisitoare scoate din producţie sonda pe durata de lichidare a acestora.

Subliniem că mai există şi o mică îmbunătăţire a cursei de fund şi deci a randamentelor specifice pompajului în genere de 1 ... 5% care în unele cazuri se poate ridica pînă la 10%.

Primită la redacţie la 22 iulie 1955

О ПОДБОРЕ БУРИЛЬНЫХ ТРУБ ПРИ ГЛУБИННОМ ВЫКАЧИВАНИИ В НЕФТЯНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, ПО КРИТЕРИЯМ ВЫНОСЛИВОСТИ НА УСТАЛОСТЬ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Так как в нефтяной промышленности добыча при помощи выкачивания составляет свыше 50% общей добычи, вопросы выкачивания представляют первостепенный интерес.

В настоящее время при выкачивании применяются бурильные трубы, подобранные по критерию максимальных напряжений, равных в верхнем сечении каждого комплекта комбинированных бурильных труб.

Автором было показано в 1951 г., что это не означает и равномерную напряженность на усталость.

В настоящей работе автором рассматриваются критерии для подбора и комбинирования бурильных труб по выносливости на усталость.

Проблема общего характера рассматривается на основании твердых тел равной допускаемой выносливости на усталость и равной надежности при усталости.

Рассматривается затем определение ступеней на основании трех критериев: 1) равные допускаемые сопротивления усталости, 2) равная надежность при усталости и 3) предельное сопротивление усталости (снизу вверх с коэффициентом прочности $=1$); устанавливаются эти три критерия и даются общие формулы.

Производится сравнение со старым критерием и констатируется следующее:

1. Остаются в силе 2-й и 3-й критерии.

2. Новые критерии дают при расчете разницы свыше 3% от 1500 м и ниже для всех случаев.

3. Новые критерии дают при расчетах очень большие разницы для комплектов, работающих в коррозионной среде.

4. Новые критерии подбора бурильных труб дают в результате несколько больший донный разбег, по сравнению со старым критерием.

В заключение рекомендуется введение и применение новых критериев как в теории, так и в практике глубинного выкачивания в нефтяной промышленности.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Диаграмма сопротивления на усталость.
Рис. 2. — Распределение по ступеням выкачивающих бурильных труб.
Рис. 3. — Твердое тело с одинаковой сопротивляемостью на усталость.

SUR LA FAÇON DE COMBINER LES TIGES POUR LE POMPAGE EN PROFONDEUR, DANS L'INDUSTRIE DU PÉTROLE, SUIVANT DES CRITÉRIUMS DE RÉSISTANCE À LA FATIGUE

(RÉSUMÉ)

L'extraction par pompage, dans l'industrie du pétrole, représentant plus de 50% de la production, les problèmes du pompage sont d'un intérêt primordial.

On utilise actuellement, pour le pompage, des tiges combinées dans la section supérieure de chaque combinaison, suivant le critérium des tensions maxima égales.

Dans son étude: *Determination des dimensions des trains de tiges de pompage en fonction de la fatigue et des vibrations* (Revue ASIT. Pétrole), l'Auteur a indiqué, en 1951, que cela ne correspond pas à une sollicitation uniforme ni à la fatigue.

C'est pour cette raison que l'Auteur présente une étude, dans laquelle il analyse des critériums de combinaison des tiges, suivant la résistance à la fatigue.

Le problème général est étudié à l'aide de sections d'égale résistance admissible à la fatigue et d'égale sécurité, par rapport à la fatigue.

On passe ensuite à l'étude de l'établissement des divers échelons à l'aide des trois critériums: égale résistance admissible à la fatigue, égale sécurité par rapport à la fatigue et résistance limite à la fatigue (de bas en haut avec la sécurité égale à l'unité). On établit les trois critériums (formules générales).

On compare avec l'ancien critérium et l'on constate que:

1. Les 2e et 3e critériums restent valables.

2. Les nouveaux critériums donnent dans les calculs, au delà de 1 500 m de profondeur, des différences dépassant 3% pour tous les cas.

3. Les nouveaux critériums donnent lieu à de très grandes différences dans les calculs pour les trains de tiges travaillant dans un milieu corrosif.

4. Les nouveaux critériums, suivant lesquels on combine les tiges, ont pour effet une course de fond un peu plus grande que dans le cas de l'ancien critérium.

En conclusion, on recommande l'introduction et l'application des nouveaux critériums dans la théorie et la pratique du pompage en profondeur dans l'industrie du pétrole.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Diagramme des résistances à la fatigue.
Fig. 2. — Disposition en escalier des tiges de pompage.
Fig. 3. — Le solide d'égale résistance à la fatigue.

BIBLIOGRAFIE

1. Dan M. Bodnărescu, *« n » categorii prăjini canadiene combinate.* Analele minelor, 1942, nr. 1.
2. — *Dimensionarea la oboseală şi vibraţii a garniturilor de tije de pompare.* ASIT-PETROL şi GAZE, 1951, nr. 9.
3. — *Prăjinile combinate în pompajul de adîncime.* ASIT-PETROL şi GAZE, 1956, nr. 5.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

ASUPRA INFLUENŢEI INERŢIEI SOLULUI LA FUNDAŢII CU PĂTURI ELASTICE INTERMEDIARE

DE

L. HAMBURGER

Într-o altă Comunicare am studiat comportarea unei pături elastice, interpuse între un bloc de fundaţie şi placa de repartiţie de pe sol, în ipoteza că aceasta din urmă poate fi considerată ca perfect rigidă.

De fapt însă solul este elastic şi o parte din el, situată în jurul plăcii de repartiţie suferă deformaţii şi intră în vibraţie datorită forţelor periodice pe care i le transmite fundaţia.

Este dificil să urmărim în detaliu aceste fenomene, de aceea ne vom folosi de convenţia uzuală care înlocuieşte elementele rigide ale fundaţiei prin puncte dotate cu masă şi pe cele elastice prin simple resoarte lipsite de masă.

Vom introduce şi aici frecările interne, de obicei neglijate în asemenea calcule.

În cele ce urmează vom căuta să studiem interacţiunea elementelor fundaţiei tot pe baza unei scheme simplificate, însă cu introducerea frecărilor interne, în baza ipotezei lui S o r o k i n.

Schema corespunzătoare va fi cea din figura 1, în care indicele 1 se referă la placa de repartiţie şi indicele 2 la blocul de fundaţie propriu-zis; k_1 este rigiditatea dinamică a solului; k_2 este aceea a păturii elastice, iar ψ_1, ψ_2 coeficienţii respectivi de disipaţie, după S o r o k i n.

Ecuaţiile mişcării în ipoteza schematizată în figură vor fi

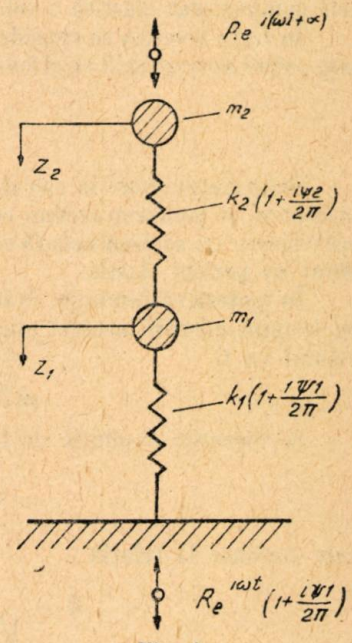


Fig. 1

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + k_1\left(1+\frac{i\psi_1}{2\pi}\right)z_1 + k_2\left(1+\frac{i\psi_2}{2\pi}\right)(z_1-z_2) &= -R\left(1+\frac{i\psi_1}{2\pi}\right)e^{i\omega t}, \\ m_2\ddot{z}_2 + k_2\left(1+\frac{i\psi_2}{2\pi}\right)(z_2-z_1) &= P\cdot e^{i(\omega t+\alpha)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Am presupus aici un decalaj constant între forţa de excitaţie şi reacţiunea solului. Aceasta, ca şi egalitatea frecvenţelor acestor două forţe, constituie numai o primă aproximaţie.

În aceste ecuaţii

$$k_1 = c \cdot S_{pl} \cdot C_z \cdot \eta, \tag{2}$$

unde

S_{pl} — aria bazei plăcii de repartiţie;
C_z — coeficientul de tasare verticală;
c — coeficientul dinamic de amplificare, avînd valoarea 2,5—3,0;
η — un factor de reducere, datorit efectului reacţiei solului.

De asemenea

$$k_2 = \frac{E \cdot S_f}{\delta}, \tag{3}$$

unde

S_f — aria bazei blocului de fundaţie în general egală cu aceea a plăcii de repartiţie;
E — modulul de elasticitate al lui Young corespunzător păturii elastice;
δ — grosimea păturii elastice.

Reacţia solului trebuie abia determinată. În acest scop s-au făcut numeroase propuneri. Vom adopta după B a r k a n, care a studiat sub toate aspectele comportarea elastică a solului, soluţia propusă de Ş e h t e r.

În baza acesteia se consideră că la reacţiunea solului ia parte o porţiune circulară avînd aceeaşi arie ca şi baza fundaţiei, deci o rază

$$r_0 = \sqrt{\frac{S_{pl}}{\pi}}. \tag{4}$$

Deformaţiile puse în calcul de Ş e h t e r sînt mediile aritmetice dintre tasarea la centrul şi periferia acestui cerc, în supoziţia unei încărcări uniforme a acestuia, echivalente cu sarcina cedată solului de către placa de repartiţie, solul fiind considerat ca perfect elastic.

În ipoteza că fundaţia, în întregime, este asemuită unui punct material de masă m, ecuaţia mişcării acestui punct sub acţiunea excitaţiei exterioare şi a reacţiunii solului va fi

$$m\ddot{z} = P \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} - R \cdot e^{i\omega t}. \tag{5}$$

Se încearcă o soluţie de forma

$$z = \frac{R}{Gr_0}(f_1 + if_2)\, e^{i\omega t}, \tag{6}$$

care conduce la relaţia

$$R = \frac{P}{\sqrt{\left(1 + \frac{m\omega^2}{Gr_0} f_1\right)^2 + \left(\frac{m\omega^2}{Gr_0} f_2\right)^2}}. \tag{7}$$

În aceste expresii mărimile f_1 şi f_2 sînt funcţii depinzînd de caracteristicile terenului. După Ş e h t e r, pentru indicele lui Poisson $\mu = 0{,}5$ avem

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -0{,}13 + 0{,}0536\, x^2 - 0{,}0078\, x^4 + \cdots \\ f_2 &= 0{,}0545 \cdot I_1(1{,}047\, x)\,\{1 + I_0(1{,}047\, x) + 0{,}0474\, x - 0{,}0065\, x^3 + \cdots\} \end{aligned}\right| \tag{8}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\pi r_0}{\lambda} && = \text{raportul dintre perimetrul cercului și lungimea de undă a vibrațiilor transversale,} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\omega} v_t && = \text{lungimea undelor transversale prin sol,} \\ v_t &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} && = \text{viteza de propagare a acestor unde.} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Reacția solului a fost introdusă în aceste ecuații ca o forță nedisipativă.

Cea mai simplă corectură ar consta în introducerea factorului de disipație al lui Sorokin sub forma

$$m\ddot{z} = \dot{P} \cdot e^{i(\omega t+\alpha)} - R\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right) e^{i\omega t}. \quad (10)$$

Pentru însumarea calculelor vom pune

$$z = z_1 + z_2, \quad (11)$$

unde z_1 reprezintă soluția ecuației nedisipative, conform relației (6), iar z_2 ascultă de ecuația

$$m\ddot{z}_2 = -R\frac{i\psi}{2\pi} e^{i\omega t} \quad (12)$$

care are soluția

$$z_2 = a + bt + R\frac{i\psi}{2\pi\, m\,\omega^2} e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Termenii $(a + bt)$ reprezintă o deformație permanentă, care nu interesează și una progresivă cu timpul, care este inadmisibilă.

În consecință

$$a = b = 0 \qquad \text{și} \qquad z_2 = R\frac{i\psi}{2\pi\, m\,\omega^2} e^{i\omega t}$$

astfel încît

$$z = -\frac{R}{Gr_0}\left\{f_1 + i\left(f_2 - \frac{\psi}{2\pi}\frac{Gr_0}{m\omega^2}\right)\right\} e^{i\omega t}. \quad (14)$$

Amplitudinea acestei vibrații va fi

$$a = \frac{R}{Gr_0}\sqrt{f_1^2 + \left(f_2 - \frac{\psi}{2\pi}\cdot\frac{Gr_0}{m\,\omega^2}\right)^2}. \quad (15)$$

Se vede că amplitudinea descrește dacă disipația crește. Ea scade de asemenea dacă frecvența scade sau dacă suprafața fundației crește.

Revenind la ecuațiile (1) observăm că introducerea reacțiunii solului în prima ecuație permite neglijarea termenului

$$k_1\left(1+\frac{i\psi_1}{2\pi}\right)z_1,$$

care are un efect similar.

Cu această simplificare, ecuațiile (1) iau forma

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + k_2\left(1+i\frac{\psi_2}{2\pi}\right)(z_1-z_2) &= -R\left(1+\frac{i\psi}{2\pi}\right)e^{i\omega t} \\ m_2\ddot{z}_2 + k_2\left(1+i\frac{\psi_2}{2\pi}\right)(z_1-z_2) &= P\cdot e^{i(\omega t+\alpha)} \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Pentru a da un aspect unitar ecuațiilor vom pune

$$P\cdot e^{i(\omega t+\alpha)} = R\cdot q\left(1+\frac{i\varphi}{2\pi}\right)e^{i\omega t}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} P\cos\alpha &= Rq, \\ P\sin\alpha &= Rq\frac{\varphi}{2\pi}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

astfel încît

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \operatorname{tg}\alpha$$

și în baza relației dintre R și P

$$q^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = \left(1+\frac{m\omega^2}{Gr_0}f_1\right)^2 + \left(\frac{m\omega^2}{Gr_0}f_2\right)^2,$$

în care pentru masa m trebuie pus

$$m = \varepsilon(m_1+m_2),$$

ε fiind un coeficient de amplificare supraunitar.

Cu această substituire (16) trec în

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + k_2\left(1+\frac{i\psi_2}{2\pi}\right)(z_1-z_2) &= -R\left(1+\frac{i\psi_1}{2\pi}\right)e^{i\omega t}, \\ m_2\ddot{z}_2 + k_2\left(1+\frac{i\psi_2}{2\pi}\right)(z_2-z_1) &= Rq\left(1+\frac{i\varphi}{2\pi}\right)e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Încercăm aici soluțiile complexe

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (a_1+ib_1)\,R\,e^{i\omega t}, \\ z_2 &= (a_2+ib_2)\,R\,e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

și obținem ecuațiile algebrice

$$\left.\begin{aligned} -m_1\omega^2(a_1+ib_1)+k_2\left(1+\frac{i\psi_2}{2\pi}\right)[(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)] &= -\left(1+\frac{i\psi_1}{2\pi}\right), \\ -m_2\omega^2(a_2-ib_2)+k_2\left(1+\frac{i\psi_2}{2\pi}\right)[(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)] &= Rq\left(1+\frac{i\varphi}{2\pi}\right)\cdot \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Separînd părțile reale de cele imaginare obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} (-m_1\omega^2+k_2)\,a_1-k_2a_2-\frac{k_2\psi_2}{2\pi}b_1+\frac{k_2\psi_2}{2\pi}b_2 &= -1, \\ \frac{k_2\psi_2}{2\pi}a_1-\frac{k_2\psi_2}{2\pi}a_2+(-m_1\omega_1^2+k_2)\,b_1-k_2b_2 &= -\frac{\psi_1}{2\pi}, \\ -k_2a_1+(-m_2\omega^2+k_2)\,a_2+\frac{k_2\psi_2}{2\pi}b_1-\frac{k_2\psi_2}{2\pi}b_2 &= q, \\ -\frac{k_2\psi_2}{2\pi}a_1+\frac{k_2\psi_2}{2\pi}a_2-k_2b_1+(-m_2\omega^2+k_2)\,b_2 &= q\frac{\varphi}{2\pi}\cdot \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Pentru ușurarea calculelor punem

$$-m_1\omega^2+k_2=A;\ k_2=B;\ \frac{k_2\psi_2}{2\pi}=C;\ -m_2\omega^2+k_2=D$$

și observăm că în raport cu A, B, D, mărimea C este mică. Sistemul (21) se scrie

$$\left.\begin{aligned} A_1a_1-Ba_2-Cb_1+Cb_2 &= -1, \\ Ca_1-Ca_2+Ab_1-Bb_2 &= -\frac{\psi_1}{2\pi}, \\ -Ba_1+Da_2+Cb_1-Cb_2 &= q, \\ -Ca_1+Ca_2-Bb_1+Db_2 &= q\frac{\varphi}{2\pi}\cdot \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

În vederea faptului că C este mic se poate trece la o rezolvare aproximativă rapidă.

Neglijăm pentru o primă aproximație mărimea C în aceste ecuații, care trec în

$$\left.\begin{aligned} Aa_1-Ba_2 &= -1, \\ -Ba_1+Da_2 &= q, \\ AB_1-Bb_2 &= -\frac{\psi_1}{2\pi}, \\ -Bb_1+Db_2 &= q\frac{\varphi}{2\pi}, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

care au soluţiile

$$\left.\begin{aligned} a_{10} &= \frac{-D+Bq}{AD-B^2}, \\ a_{20} &= \frac{-B+Aq}{AD-B^2}, \\ b_{10} &= \frac{-D\frac{\psi_1}{2\pi}+B\frac{q\varphi}{2\pi}}{AD-B^2}, \\ b_{20} &= \frac{-B\frac{\psi_1}{2\pi}+A\frac{q\varphi}{2\pi}}{AD-B^2}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Trecem acum la a doua aproximaţie punînd

$$a_1 = a_{10} + \varepsilon_1; \qquad b_1 = b_{10} + \eta_1;$$
$$a_2 = a_{20} + \varepsilon_2; \qquad b_2 = b_{20} + \eta_2.$$

Dacă neglijăm produsele mărimii mici ψ_2 cu ε_1, ε_2, η_1 şi η_2 căpătăm ecuaţiile auxiliare

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon_1 - B\varepsilon_2 &= C(b_{10}-b_{20}), \\ -B\varepsilon_1 - D\varepsilon_2 &= -C(b_{10}-b_{20}), \\ A\eta_1 - B\eta_2 &= -C(a_{10}-a_{20}), \\ -B\eta_1 + D\eta_2 &= C(a_{10}-a_{20}), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ale căror soluţii sînt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= C\frac{(b_{10}-b_{20})(D-B)}{AD-B^2}, \\ \varepsilon_2 &= C\frac{(b_{10}-b_{20})(B-A)}{AD-B^2}, \\ \eta_1 &= C\frac{(a_{10}-a_{20})(B-D)}{AD-B^2}, \\ \eta_2 &= C\frac{(a_{10}-a_{20})(A-B)}{AD-B^2}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Cu aceste corecturi soluţiile sistemului sînt cu aproximaţia produselor între mărimile mici, şi cu notaţia $AD - B^2 = \Delta$

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a_{10} + \varepsilon_1 &= \frac{R}{\Delta^2}\left\{(-D+Bq)\Delta + C(D-B)(B-A)\frac{q\varphi}{2\pi}\right\}, \\ a_2 = a_{20} + \varepsilon_2 &= \frac{R}{\Delta^2}\left\{(-B+Aq)\Delta + C(B-A)^2\frac{q\varphi}{2\pi}\right\}, \\ b_1 = b_{10} + \eta_1 &= \frac{R}{\Delta^2}\left\{\left(-D\frac{\psi_1}{2\pi}+B\frac{q\varphi}{2\pi}\right)\Delta + C(B-D)^2 + q(B-A)\right\}, \\ b_2 = b_{20} + \eta_2 &= \frac{R}{\Delta^2}\left\{\left(-B\frac{\psi_1}{2\pi}+A\frac{q\varphi}{2\pi}\right)\Delta + C(A-B)(B-D) + q(B-A)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Amplitudinile acestor vibrații iau, cu aproximațiile arătate, valorile

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{(a_{10} + \varepsilon_1)^2 + (b_{10} + \gamma_1)^2} \cong \\ &\cong \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{a_{10}\varepsilon_1 + b_{10}\gamma_1}{a_{10}^2 + b_{10}^2} \right\}, \\ A_2 &\cong \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(a_{20} + \varepsilon_2)^2 + (b_{20} + \gamma_2)^2} \cong \\ &\cong \sqrt{a_{20}^2 + b_{20}^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{a_{20}\varepsilon_2 + b_{20}\gamma_2}{a_{20}^2 + b_{20}^2} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dacă însemnăm cu

$$\omega_1^2 = \frac{k_2}{m_1} \; ; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

putem scrie

$$A = -m_1\omega^2 + k_2 = k_2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right),$$

$$B = -m_2\omega^2 + k_2 = k_2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right).$$

În aceste expresii ω_1 și ω_2 reprezintă frecvențele proprii pe care le-ar avea pe un sol absolut rigid, placa de repartiție și blocul de fundație, dacă între sol și aceste masive de beton ar fi interpusă pătura elastică de rigiditate k_2.

Expresiile de la numărătorul termenilor de corectură sînt

$$a_{10}\varepsilon_1 + b_{10}\gamma_1 = \frac{C}{\Delta}(D - B)\left\{ b_{10}a_{20} - a_{10}b_{20} \right\} =$$

$$= C(D - B)\frac{q}{2\pi}(\varphi - \psi_1) \approx C(D - B)\frac{\varphi q}{2\pi}$$

și în mod analog

$$a_{20}\varepsilon_2 + b_{20}\gamma_2 \approx C(B - A)\frac{\varphi q}{2\pi}.$$

Pe de altă parte

$$\sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} = \frac{R}{\Delta}\left[(-D + Bq)^2 + \left(-\frac{D\psi_1}{2\pi} + B\frac{q\varphi}{2\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{R}{\Delta}\left[D^2 + B^2q^2\left(1 + \frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right) - 2BDq\right]^{\frac{1}{2}}$$

și în consecință

$$A_1 = \frac{R}{\Delta}\left[D^2 + B^2q^2\left(1 + \frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right) - 2BDq\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\Delta \cdot C(D - B)\,\varphi \cdot q/2\pi}{R\left(D^2 - B^2q^2\left(1 + \frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right) - 2BDq\right)}\right] \tag{29}$$

şi în mod analog

$$A_2 = \frac{R}{\Delta}\left[B^2 + A^2q^2\left(1 + \frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right) - 2ABq\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\Delta \cdot C\,(B - A)\,\varphi \cdot q/2\pi}{R\left(B^2 + A^2q^2\left(1 + \frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right) - 2ABq\right)}\right]. \tag{30}$$

În aceste expresii primul factor din membrul al doilea exprimă amplitudinea vibraţiilor neamortizate, iar al doilea corectura adusă pe urma fricţiunii interne a păturii elastice. Se vede din aceste expresii că influenţa fricţiunii solului, care ar fi apărut ca un termen aditiv în $\sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2}$, a fost neglijată faţă de termenii de valori mari ai expresiilor corespunzătoare.

Corecţiile aditive la amplitudinile A_{10} şi A_{20} ale vibraţiilor neamortizate sînt cu

$$A_{10} = \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} \quad ; \quad A_{20} = \sqrt{a_{20}^2 + b_{20}^2}$$

următoarele

$$\left.\begin{aligned} \delta A_1 &= \frac{C\,(D - B)\,\frac{\varphi q}{2\pi}}{A_{10}} \\ \delta A_2 &= \frac{C\,(B - A)\,\frac{\varphi q}{2\pi}}{A_{20}} \end{aligned}\right\}$$

şi cu semnificaţiile mărimilor A, B, C, D de mai sus

$$\left.\begin{aligned} \delta A_1 &= \frac{-\,m_2\omega^2\,\frac{k_2\psi_2}{2\pi}\cdot\frac{\varphi q}{2\pi}}{A_{10}}, \\ \delta A_2 &= \frac{m_1\omega^2\,\frac{k_2\psi_2}{2\pi}\cdot\frac{\varphi q}{2\pi}}{A_{20}}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

De aici rezultă următoarele:

— *fricţiunea internă a solului joacă un rol secundar* şi nu influenţează simţitor mişcarea;

— *fricţiunea internă a păturii elastice micşorează amplitudinea vibraţiilor plăcii de repartiţie* proporţional cu coeficientul de disipaţie al păturii elastice şi cu masa blocului superior al fundaţiei. În acelaşi timp *amplitudinea vibraţiilor blocului superior al fundaţiei este sporită* proporţional cu acelaşi coeficient de disipaţie şi cu masa plăcii de repartiţie.

Aceasta arată avantajul fricţiunii interne a păturii elastice.

Rezonanţa va avea loc în primă aproximaţie cînd discriminantul Δ se anulează

$$\Delta = AD - B^2 = 0,$$

sau explicit

$$(-m_1\omega^2 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k^2 = 0,$$

sau

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1\right) - 1 = 0,$$

care are soluțiile

$$\omega = 0 \quad \text{și} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

dintre care ultima singură interesează. Ea se scrie și sub forma

$$\omega_R \approx \sqrt{k_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}. \tag{32}$$

Dacă nu am fi neglijat cu totul efectul elasticității solului față de reacția acestuia datorită inerției, ci am fi menținut termenul în k_1, introducînd în acest coeficient un factor subunitar η, am fi avut

$$\Delta = (m_1\omega^2 - k_1 - k_2)(m_2\omega^2 - k_2) - k_2^2 = 0,$$

sau explicit

$$m_1 m_2 \omega^4 - [k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2]\omega^2 + k_1 k_2 = 0,$$

care are soluțiile

$$\omega^2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 \pm \sqrt{[k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2]^2 + 4 k_1 k_2 m_1 m_2}}{2 m_1 m_2}$$

sau aproximativ

$$\omega^2 \approx \frac{[k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2]}{2 m_1 m_2}\left\{1 \pm \left(1 + \frac{2 k_1 k_2 m_1 m_2}{[k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2]^2}\right)\right\}.$$

Dintre aceste valori interesează numai valoarea pozitivă a lui ω^2

$$\omega^2 \approx \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\left\{1 + \frac{\frac{k_1}{m_1}\cdot\frac{k_2}{m_2}}{\left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right]^2}\right\}$$

care se scrie în funcție de frecvențele auxiliare

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad ; \quad \omega_3^2 = \frac{k_1}{m_1},$$

sub forma

$$\omega_R^2 \approx (\omega'^2_1 + \omega_2^2)\left(1 + \frac{\omega_3^2\omega_2^2}{[\omega'^2_1 + \omega_2^2]^2}\right).$$

Deosebirea dintre această frecvență de rezonanță și cea de mai sus se datorește efectului elastic al solului, care după cum se vede ridică valoarea acestei frecvențe. Putem scrie aproximativ

$$\omega_R \approx \sqrt{\omega'^2_1 + \omega_2^2} + \frac{\omega_3^2\omega_2^2}{\sqrt{(\omega'^2_1 + \omega_2^2)^3}}, \tag{33}$$

unde se vede că creşterea frecvenţei este direct proporţională cu factorul $\eta \ll 1$ cu care intră în consideraţie efectul elasticităţii solului.

Nu trebuie să mire că în aceste valori nu apare coeficientul de frecare internă al păturii elastice ψ_2 şi nici acela al solului ψ_1, întrucît teoria lui S o r o k i n introduce o amortizare, însă spre deosebire de celelalte metode de calcul nu afectează frecvenţele proprii ale sistemului nedisipativ.

Măsurătorile redate de S o r o k i n în lucrarea citată permit să se vadă că fenomenele reale ascultă mai bine de ecuaţiile acestuia, decît de cele clasice. Acest fapt ne-a determinat să dezvoltăm calculele de faţă pe baza metodei lui S o r o k i n.

În cele de mai sus, s-a arătat că influenţa elasticităţii solului este destul de redusă, dacă se ţine seama de «reacţiunea» solului.

Dăm aici un exemplu simplu pentru a arăta şi numeric acest fapt.

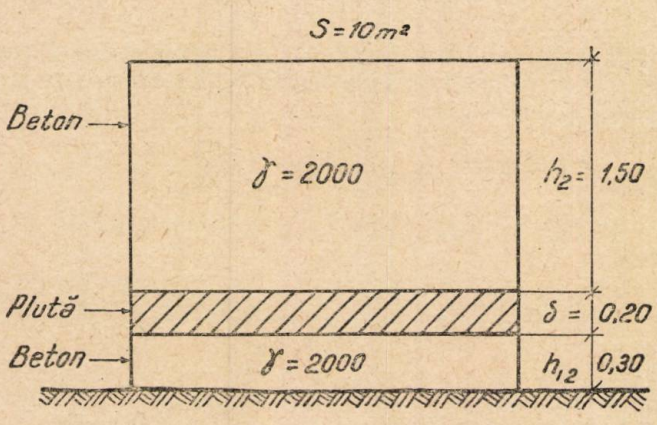


Fig. 2

Considerăm postamentul din schiţă (fig. 2) şi admitem că stratul de plută are

$$E = 250 \text{ kg/cm}^2$$

în terenul

$$C_z = 5 \text{ kg/cm}^3$$

în factorul dinamic

$$c = 2{,}5 \quad \text{şi} \quad \eta = 0{,}1.$$

Cu aceste valori

$$k_1 = c \cdot C_z \cdot S \cdot \eta = 2{,}5 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 1{,}25 \cdot 10^7 \text{ kg/m},$$

$$k_2 = \frac{ES}{\delta} = \frac{250 \cdot 10^4 \cdot 10}{0{,}2} = 1{,}25 \cdot 10^8 \text{ kg/m},$$

$$m_1 = \frac{Sh_1\gamma}{g} = \frac{10 \cdot 0{,}3 \cdot 2\,000}{9{,}81} \cong 600 \text{ kg sec}^2 \cdot \text{m}^{-1},$$

$$m_2' = \frac{Sh_2\gamma}{g} = \frac{10 \cdot 1{,}5 \cdot 2\,000}{9{,}81} \cong 3\,000 \text{ kg sec}^2 \cdot \text{m}^{-1}.$$

Mai considerăm și pentru mașină în greutate de circa 10 000 kg, deci de masă

$$m_2'' = \frac{10\,000}{9{,}81} \cong 1\,000 \text{ kg sec}^2 \cdot \text{m}^{-1},$$

astfel că

$$m_2 = 3\,000 + 1\,000 = 4\,000 \text{ kg sec}^2 \cdot \text{m}^{-1}.$$

În cazul vibrațiilor neamortizate

$$\omega_1^2 = \frac{k_2}{m_1} = \frac{1{,}25 \cdot 10^8}{600} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{1{,}25 \cdot 10^8}{4\,000} \approx 0{,}3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-2}$$

și în consecință

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \approx 480 \text{ sec}^{-1}.$$

Dacă ținem seama și de k_1, avem

$$\omega_1'^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} = \frac{(1{,}25 + 0{,}125)\,10^8}{600} = 2{,}29 \cdot 10^5$$

$$\omega_2^2 = 0{,}3 \cdot 10^5$$

$$\omega_3^2 = \frac{k_1}{m_1} \frac{0{,}125 \cdot 10^8}{600} = 0{,}208 \cdot 10^5$$

și în consecință, fără corecturi

$$\omega = \sqrt{\omega_1'^2 + \omega_2^2} \approx 508 \text{ sec}^{-1},$$

adică cu 5% mai mare.

Corectura, după formula de mai sus, ar fi:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_3^2 \cdot \omega_2^2}{\omega^3} = \frac{0{,}21 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3 \cdot 10^5}{(508)^3} \approx 4{,}85 \text{ sec}^{-1},$$

deci $< 1\%$ și în consecință neglijabilă.

Între formulele (32) sau (33) și cele date de calculele clasice, care se servesc de metoda lui Voigt pentru a introduce amortizarea, există diferențe simțitoare. Ar fi deci interesant să se compare aceste formule cu rezultatele experimentale.

Primită la redacție la 29 iunie 1955.

О ВЛИЯНИИ ИНЕРЦИИ ПОЧВЫ НА ФУНДАМЕНТЫ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УПРУГИМИ ПРОКЛАДКАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор возвращается к вопросу фундаментов с упругими прокладками, обсуждавшемуся в одной из предыдущих работ. Рассматриваемая в этой работе почва, на которую опирается вся система, считается способной деформироваться, а не жесткой, как это считалось в вышеупомянутой работе.

Пользуясь введенной Сорокиным новой формой для диссипативного множителя в уравнении движения, автор вычислил амплитуды и частоты, присущие этой системе.

Оценивается количественно влияние способности почвы деформироваться на присущие системе частоты.

SUR L'INFLUENCE DE L'INERTIE DU SOL SUR LES FONDATIONS À COUCHES ÉLASTIQUES INTERMÉDIAIRES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur reprend, dans cette étude, le problème des fondations à couches élastiques qui a déjà été traité dans une étude précédente. Cette fois-ci, le sol sur lequel s'appuye l'ensemble est considéré déformable et non pas rigide comme il fut admis dans l'ouvrage cité plus haut.

L'Auteur réussit à calculer les amplitudes et les fréquences propres du système, en utilisant une nouvelle forme pour le terme dissipatif dans l'équation du mouvement, introduite par Sorokine.

On évalue quantitativement l'influence de la déformabilité du sol sur les fréquences propres du système.

BIBLIOGRAFIE

1. Barkan D. D., *Rasciot i proektirovanie fundamentov pod maşini s dinamiceskimi podgruzkami.* Stroiizdat, Moscova, 1938.
2. Ramsch E., *Maschinenfundamente und dynamische Bauaufgaben.* Berlin, 1936.
3. Sorokin E. S., *Issledovanie po dinamiki.* Stroiizdat, Moscova, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

STUDIUL METODEI «RÎJKOV» PENTRU ELIMINAREA VIBRAŢIILOR LA STRUNGIRE

DE

V. MARCU şi A. LEZER

Prelucrarea metalelor prin strungire întîmpină uneori dificultăţi prin apariţia de vibraţii datorite strungului, piesei de prelucrat, cuţitului şi regimului de aşchiere.

Pentru remedierea acestui inconvenient, datorit în majoritatea cazurilor unui fenomen de autovibraţii, s-au realizat diverse procedee, printre care şi metoda sovietică « Rîjkov ».

Lucrarea de faţă reprezintă o contribuţie la studiul acestei metode, aplicată cu succes nu numai în U.R.S.S., ci şi în R.P.R., de exemplu la întreprinderea metalurgică « Mao-Tze-Dun ».

ANALIZA VIBRAŢIILOR LA STRUNGIRE DATORITE FORŢEI P_z

Din cercetarea literaturii tehnice sovietice se constată că printre factorii care au un rol dominant în producerea vibraţiilor la strungire este şi cuţitul, cu parametrii săi de vibraţie.

Dacă considerăm cuţitul ca o bară cu un capăt încastrat şi celălalt liber, pe care acţionează componenta verticală P_z a apăsării de aşchiere, cuţitul va fi supus unui regim de vibraţii forţate datorite forţei perturbatoare $P_z \sin \omega t$, a cărei frecvenţă este

$$f_c = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1}$$

în care ω este pulsaţia forţei perturbatoare P_z.

Fie G greutatea cuţitului în consolă, k constanta elastică a cuţitului, iar x deplasarea vîrfului cuţitului.

Ecuaţia diferenţială a mişcării acestui vîrf va fi

$$\frac{G}{g} x'' = kx + P_z \sin \omega t;$$

punînd

$p = \sqrt{\frac{kg}{G}}$ = pulsaţia vibraţiei libere a cuţitului, obţinem pentru amplitudinea vîrfului valoarea

$$A = \frac{P_z}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \tag{2}$$

Pe de altă parte mai constatăm următoarele:

În timpul unei semiperioade de vibraţii a cuţitului, vîrful acestuia parcurge un drum egal cu $2A$ într-un sens, iar în semiperioada următoare acelaşi drum în sens invers.

Durata unei semiperioade fiind $\frac{1}{2f_c}$, rezultă că viteza medie a vîrfului cuţitului, v_c, în timpul vibraţiilor, va fi

$$v_c = \frac{2A}{\frac{1}{2f_c}} = 4Af_c. \tag{3}$$

Înlocuind pe A şi f_c cu valorile din relaţiile (1) şi (2) obţinem

$$v_c = \frac{4\omega}{2\pi} \cdot \frac{P_z}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \cdot \tag{4}$$

Se ştie însă că pulsaţia ω a componentei P_z este mai mică decît pulsaţia p a vibraţiei libere a cuţitului [1], astfel încît putem considera ca neglijabil raportul

$$\frac{\omega^2}{p^2} \cdot$$

Relaţia (4) de mai sus devine în acest caz

$$v_c = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{P_z}{k} \cdot$$

Dacă însemnăm cu E modulul de elasticitate al cuţitului,
I momentul de inerţie al cuţitului,
l lungimea liberă a cuţitului
avem pentru constanta elastică valoarea

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

astfel încît putem scrie

$$v_c = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{P_z l^3}{3EI} \cdot \tag{5}$$

Această valoare se adună şi se scade alternativ la viteza de strungire, v, provocîndu-i oscilaţii.

La o concluzie similară ajunge şi candidatul în ştiinţe tehnice A. E. Kobrinski [2], într-un studiu publicat în 1954.

Considerînd relaţiile de mai sus putem ajunge la următoarele concluzii:

1) Dacă mărim viteza de strungire, v, influenţa factorului v_c va fi procentual din ce în ce mai redusă, deoarece în formula (5) nu există viteza de strungire, iar pulsaţia ω are o influenţă mai redusă decît v.

În consecinţă se poate afirma că strungirea rapidă prezintă şi avantajul de a reduce intensitatea vibraţiilor la strungire, prin reducerea procentuală a factorului v_c.

2) Expresia (5) ne arată că v_c depinde de l şi P_z, ceea ce permite să afirmăm că intensitatea vibraţiilor creşte cu lungimea liberă a cuţitului şi cu P_z.

3) Dacă ţinem seama de relaţia indicată de literatura tehnică [3]

$$P_z = ct^x s^y ,$$

în care

c = coeficient caracteristic depinzînd de natura materialului de prelucrat,
t = adîncimea de strungire, în mm,
s = avansul în mm/rot,
x şi y = exponenţi indicaţi în anumite tabele,

ajungem la concluzia că intensitatea vibraţiilor creşte cu adîncimea de tăiere şi cu avansul.

Această concluzie teoretică este confirmată de experienţele făcute de colectivul prof. A. P. Sokolovski [1], precum şi de lucrările practice executate de autorii acestui articol, după cum se arată mai departe.

Ţinînd seamă de faptul că momentul de inerţie are următoarea valoare:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

numitorul expresiei (5) devine

$$3\pi E \frac{bh^3}{12} ,$$

în care b = lăţimea cuţitului,
h = înălţimea cuţitului.

Constatăm astfel că este mai avantajos, în vederea reducerii vibraţiilor, să lucrăm cu un cuţit avînd $h > b$, adică înălţimea mai mare decît lăţimea, deoarece h intră în formulă la puterea a treia.

De asemenea se constată că un cuţit cu o secţiune mai mare este preferabil pentru reducerea vibraţiilor.

STUDIUL DISPOZITIVULUI « RÎJKOV »

Plecînd de la constatarea experimentală făcută de fruntaşul în producţie sovietic Rîjkov, că rolul important în vibraţiile la strungire îl joacă cuţitul, s-a realizat în U.R.S.S. dispozitivul « Rîjkov » pentru eliminarea vibraţiilor.

În figura 1 se vede o secţiune a dispozitivului care a fost realizat şi în R.P.R. la Uzinele « Mao-Tze-Dun » [4].

Un bulon (1) cu cap hexagonal trece printr-o bucşă (2) cu prag interior, corespunzător unui prag al bulonului. Între bucşă şi bulon, sprijinit cu un cap pe ambele praguri, se află un resort (3) înfăşurat în jurul bulonului. Celălalt capăt al resortului se sprijină pe un capac (4) exterior bucşei, şi prevăzut la partea inferioară cu o gaură prin care trece uşor bulonul.

Bucşa are la partea inferioară un filet exterior care se poate înşuruba în filetul interior al capacului.

Dispozitivul « Rîjkov » se poate fixa, fie direct prin înşurubare, fie printr-o piesă intermediară, cum este cazul în figura 1.

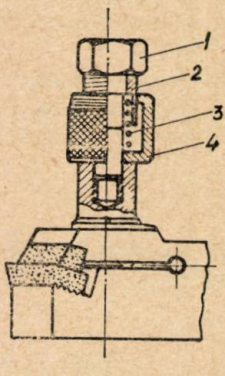


Fig. 1

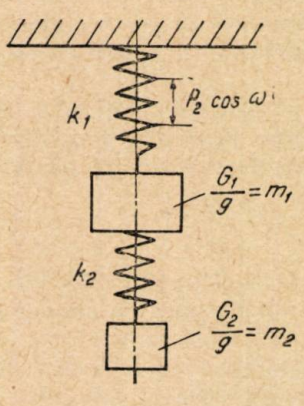


Fig. 2

Funcţionarea dispozitivului se bazează pe o adaptare a teoriei amortizoarelor de vibraţii, după cum se arată mai jos.

Să considerăm (fig. 2) un sistem vibrator principal, în cazul nostru cuţitul, de greutate G_1 şi coeficient de rigiditate k_1, şi amortizorul de vibraţii, avînd greutatea G_2 şi coeficientul de rigiditate k_2.

Să mai admitem următoarele notaţii:

x_1 elongaţia vibraţiei la cuţit,

x_2 elongaţia vibraţiei la amortizor,

ω_c pulsaţia vibraţiei cuţitului,

ω_a pulsaţia vibraţiei amortizorului,

ω pulsaţia forţei perturbatoare,

forţă pe care o considerăm egală cu $P_z - P_m$, P_m fiind valoarea medie a componentei P_z. Notăm de asemenea deformaţia statică a cuţitului cu

$$x_{st} = \frac{P_z - P_m}{k_1}.$$

Ecuaţiile de bază ale sistemului sînt

$$\left.\begin{aligned} \frac{G_1}{g} x_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) - (P_z - P_m) \cos \omega t = 0, \\ \frac{G_2}{g} x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Valorile amplitudinilor se obţin, admiţînd că vibraţiile urmează o lege aproape armonică şi luînd soluţiile ecuaţiilor (6), sub forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 = A_1 \cos \omega t, \\ x_2 = A_2 \cos \omega t. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Introducînd aceste valori în ecuaţiile (6) găsim pentru A_1 şi A_2 relaţiile

$$\left.\begin{aligned}\frac{A_1}{x_{st}} &= \frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)-\frac{k_2}{k_1}},\\ \frac{A_2}{x_{st}} &= \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)-\frac{k_2}{k_1}}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Prima ecuaţie ne arată că amplitudinea vibraţiei cuţitului este nulă şi deci vibraţiile sînt eliminate cînd avem

$$1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}=0, \text{ adică } \omega^2=\omega_a^2=\frac{k_2 g}{G_2}. \tag{9}$$

Cunoscînd frecvenţa forţei perturbatoare, presupusă constantă, putem găsi valoarea deformaţiei statice a dispozitivului « Rîjkov » şi deci un element pentru proiectarea unui astfel de dispozitiv.

Ecuaţia a doua din sistemul (8), în cazul cînd $A_1 = 0$, devine

$$A_2 = -\frac{k_1}{k_2}x_{st} = -\frac{P_z - P_m}{k_2}, \tag{10}$$

iar relaţia a doua din sistemul (7)

$$x_2 = -\frac{P_z - P_m}{k_2}\cos\omega t.$$

Rezultă că dispozitivul de amortizare este animat de o mişcare vibratorie dată de o forţă $-(P_z - P_m)\cos\omega t$ egală şi de sens opus forţei perturbatoare.

Pînă acum ne-am preocupat de o singură frecvenţă a forţei perturbatoare şi anume aceea care satisface ecuaţia (9). Dacă frecvenţa are şi alte valori, greutăţile G_1 şi G_2 vor constitui un sistem vibrator cu două grade de libertate. Printre aceste valori se află şi cele critice, corespunzătoare fenomenului de rezonanţă, care se pot găsi egalînd cu zero numitorul relaţiilor (8), adică scriind expresia:

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)-\frac{k_2}{k_1}=0. \tag{11}$$

Rezolvînd această ecuaţie bipatrată putem afla, în funcţie de ω_a, k_2 şi k_1, frecvenţele de rezonanţă ale forţei perturbatoare $P_z - P_m$.

Un caz particular, care simplifică problema, este acela cînd $\omega_a = \omega_c$, ceea ce conduce la relaţia

$$-\frac{G_2}{G_1}=\frac{k_2}{k_1}. \tag{12}$$

Vom obţine în acest caz următoarele soluţii pentru ecuaţia (11)

$$\omega = \pm \omega_a \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{G_1}\right) \pm \sqrt{\frac{G_2}{G_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2}}.$$

Dacă notăm

$$\varphi = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{G_1}\right) + \sqrt{\frac{G_2}{G_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2}},$$

$$\psi = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{G_1}\right) - \sqrt{\frac{G_2}{G_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2}},$$

obţinem următoarele valori ale frecvenţelor de rezonanţă

$$\omega_1 = \varphi\,\omega_a \qquad \omega_3 = \psi\,\omega_a$$

$$\omega_2 = -\varphi\,\omega_a \qquad \omega_4 = -\psi\,\omega_a .$$

Dacă dăm diferite valori raportului $\frac{G_2}{G_1}$ putem întocmi tabloul nr. 1 cu valori pentru φ şi ψ.

Tabloul nr. 1

$\frac{G_2}{G_1}$	φ		ψ	
3	+2,19	−2,19	+0,45	−0,45
2	+1,93	−1,93	+0,51	−0,51
1,5	+1,78	−1,78	+0,56	−0,56
1	+1,62	−1,62	+0,61	−0,61
0,5	+1,44	−1,44	+0,71	−0,71
0,25	+1,27	−1,27	+0,78	−0,78

Consideraţiile de pînă acum ne permit a proiecta un dispozitiv « Rîjkov », pornind de la alegerea unei valori pentru raportul $\frac{G_2}{G_1}$ între greutatea părţii mobile a dispozitivului de amortizare şi porţiunea în consolă a cuţitului. Alegerea va trebui făcută ţinînd seama de tabloul nr. 1, spre a obţine pentru φ şi ψ valori absolute cît mai depărtate de valoarea 1, care corespunde eliminării vibraţiilor.

După alegerea raportului, cunoscînd pe G_1, putem afla pe G_2, iar din relaţia (12) pe k_2.

Procedeul de mai sus este valabil pentru cazul particular cînd $\omega_c = \omega_a$. În restul cazurilor nu se pot elimina decît parţial vibraţiile, fapt constatat şi experimentat de cercetători sovietici şi de autorii articolului de faţă.

STUDII EXPERIMENTALE

Primele experienţe au fost efectuate la uzinele « Mao-Tze-Dun » pe un strung « Union-Werk » avînd o turaţie maximă de 1 000 rot/min. Ulterior s-a lucrat pe strungul « Victoria » al laboratorului secţiei maşini şi mecanisme. Pentru constatarea intensităţii vibraţiilor s-a folosit vibrograful « Geiger » cu montajul pentru indicarea deformaţiilor, care permite o amplificare de 108 ori. Datorită acestui

fapt şi înregistrării pe bandă continuă a amplitudinilor vibraţiilor, s-au obţinut rezultate acceptabile cu acest aparat, deşi acţiunea lui este mecanică.

Lucrările experimentale s-au executat pentru a determina influenţa diverşilor parametri ai strungirii asupra producerii vibraţiilor.

Materialul prelucrat a fost constituit din bare de oţel OL 38, iar cuţitele au fost echipate cu plăcuţe de metal dur T5K10.

Rezultatele obţinute sînt indicate în tabloul nr. 2, cu menţiunea că acolo unde s-au efectuat probe clasice, s-a limitat numărul punctelor la 3—4, iar pentru probele speciale cu dispozitivul « Rîjkov » s-a mers pînă la opt puncte, cercetarea avînd drept obiectiv principal aceste probe.

1. Probe privind influenţa avansului

S-au executat două probe cu următoarele date:

adîncime de aşchiere ..... $t = 1$ mm,
turaţie ..... $n = 500$ rot/min.

Rezultatele au fost identice şi anume:

Tabloul nr. 2

Avans mm/rot	Amplitudine citită pe bandă mm	Amplitudine reală mm
0,2	1,5	0,0139
0,38	2,5	0,0235
0,6	4	0,0370

Rezultatele au fost reprezentate grafic în figura 3.

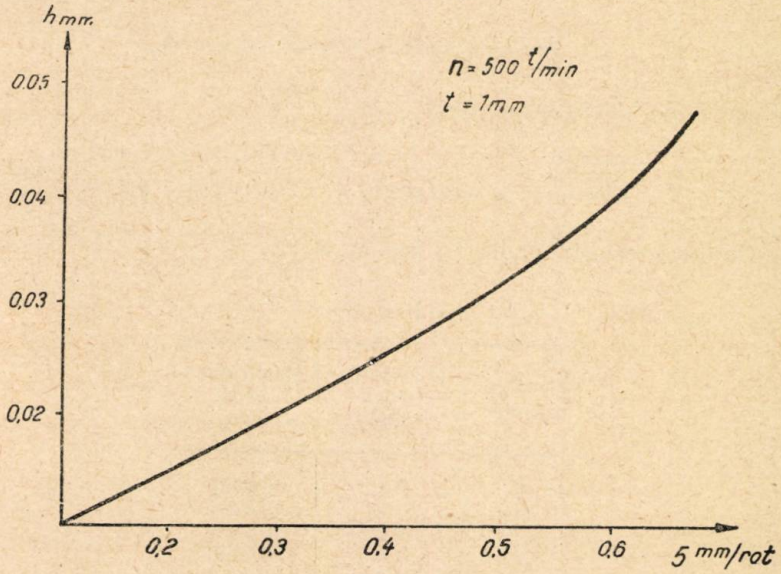


Fig. 3

Concluzia care se poate trage este că mărirea avansului — păstrînd constanţi ceilalţi parametri — antrenează amplificarea vibraţiilor.

2. Probe privind variaţia adîncimii de aşchiere

S-a lucrat cu următoarele date:

avans ..... $s = 0{,}2$ mm/rot,
turaţie..... $n = 1\,000$ rot/min,

obţinîndu-se rezultatele din tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

Adîncime de strungire mm	Amplitudine citită mm	Amplitudine reală mm
0,5	0,2	0,0018
1,0	1,0	0,0093
1,5	2,3	0,0213

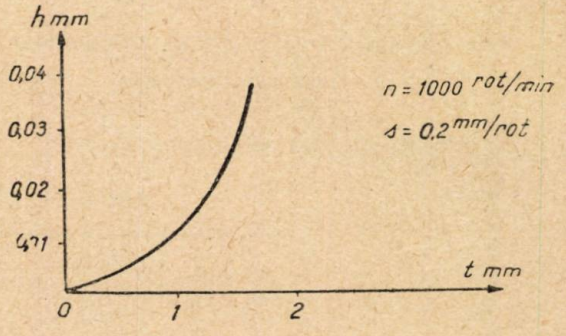


Fig. 4

Rezultatele sînt reprezentate grafic în figura 4, iar concluzia care rezultă este că pe măsură ce creşte adîncimea de strungire se intensifică şi vibraţiile.

3. Probe cu variaţia turaţiei strungului

Parametri de strungire au fost:

avansul ..... $s = 0{,}2$ mm/rot,
adîncimea de strungire ..... $t = 1$ mm.

S-au obţinut rezultatele din tabloul nr. 4.

Tabloul nr. 4

Turaţia rot/min	Amplitudine citită mm	Amplitudine reală mm
20	0,8	0,0073
50	1,2	0,0093
80	0,2	0,0018
160	1	0,0092
300	2,5	0,0232
550	1,5	0,0139

Rezultatele sînt indicate în graficul din figura 5.

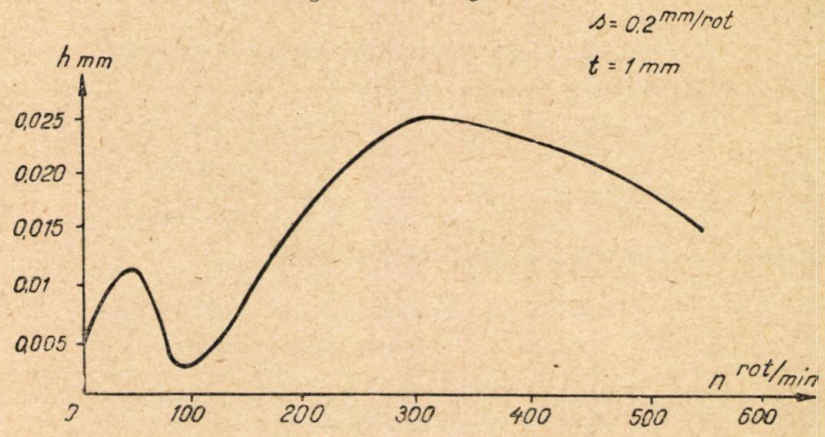


Fig. 5

Se constată existenţa unui minimum de vibraţii la $n = 100$ rot/min şi de maximum la 300 rot/min.

4. Probe variind lungimea liberă a cuţitului

S-a lucrat cu următorii parametri:

turaţie ..... $n = 546$ rot/min,
avans ..... $s = 0{,}2$ mm/rot,
adîncime de tăiere ..... $t = 2$ mm.

S-au obţinut rezultatele din tabloul nr. 5.

Tabloul nr. 5

Lungime liberă mm	Amplitudine citită mm	Amplitudine reală mm
50	0,8	0,0073
60	1,0	0,0092
70	1,4	0,0129
80	3	0,0276

Figura 6 reprezintă grafic rezultatele de mai sus.

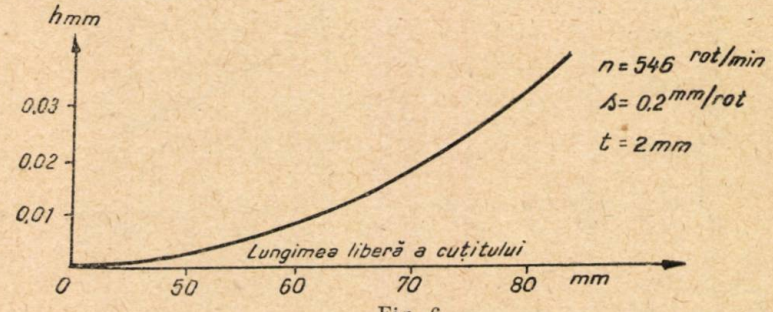


Fig. 6

Se constată că amplitudinea vibraţiilor creşte o dată cu lungimea liberă a cuţitului.

5. Probe cu variaţia unghiului de degajare a cuţitului

S-au efectuat probe cu următoarele date:

diametrul piesei ..... $D = 40$ mm
lungimea liberă a cuţitului .... $l = 50$ mm,
avans ..... $s = 0{,}4$ mm/rot,
adîncime de tăiere ..... $t = 1$ mm,
turaţie ..... $n = 298$ rot/min.

Rezultatele au fost cele indicate în tabloul nr. 6.

Tabloul nr. 6

Unghi de degajare γ°	Amplitudine citită mm	Amplitudine reală mm
+ 10°	0,4	0,0037
+ 6°	0,9	0,0083
+ 2°	1,4	0,0129
0°	1	0,0092

Rezultatele sînt reprezentate grafic în curba din figura 7.

Se constată că intensitatea vibraţiilor creşte cînd unghiul de degajare scade. S-a executat o probă specială cu un cuţit tip « Rîjkov » avînd o faţetă de 0,3 mm lăţime orientată la un unghi de degajare $\gamma = -85°$. Acest cuţit a fost realizat de uzinele « Mao-Tze-Dun » după apariţia în ziarul « Scînteia » *) a articolului întitulat *Victoria unei idei îndrăzneţe*, în care se dădeau indicaţii generale asupra acelui tip de cuţit, o inovaţie a lui Rîjkov, pentru reducerea vibraţiilor. S-a obţinut cu acest tip de cuţit o amplitudine de vibraţie reală de 0,0037 mm, deci foarte redusă.

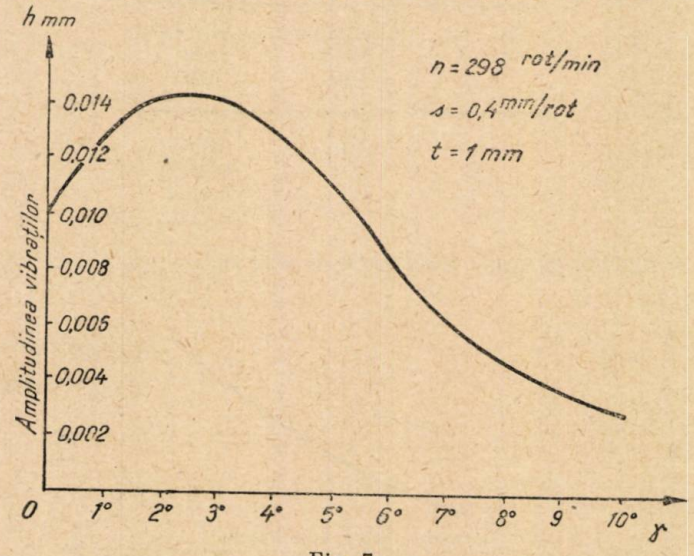


Fig. 7

*) Scînteia, nr. 2948, 16 aprilie 1954.

6. Probe cu variația unghiului de atac

Probele s-au executat pe strungul « Victoria » din laboratorul secției mașini și mecanisme I.M.A. cu următorii parametri:

diametrul barei de OL 38 .... $D = 75$ mm,
lungimea barei ..... $L = 690$ mm,
turația strungului..... $n = 375$ rot/min,
avans ..... $s = 0{,}1$ mm/rot,
adîncime de tăiere ..... $t = 1{,}5$ mm.

Rezultatele obținute sînt date în tabloul nr. 7.

Tabloul nr. 7

Unghi de atac principal χ°	Amplitudine reală mm	Observații
0°	0,06	Suprafața cea mai bună
20°	0,08	Suprafața cea mai rea
40°	0,04	
60°	0,05	
90°	0,02	

Rezultatele sînt indicate în figura 8.

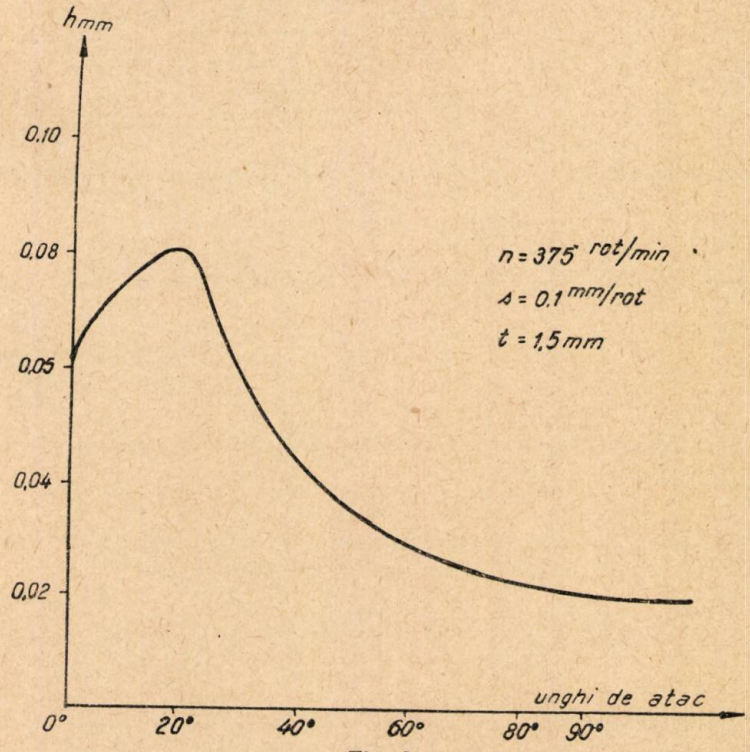


Fig. 8

Se confirmă constatarea din literatura tehnică relativă la scăderea intensităţii vibraţiilor cînd unghiul de atac creşte.

STUDII EXPERIMENTALE CU DISPOZITIVUL «RÎJKOV»

1. Probe efectuate cu un cuţit normal, parametrii de strungire fiind următorii:

Cuţit cu plăcuţă de metal dur T5K10,

Unghi de degajare $\gamma = +10°$; unghi de atac principal $\chi = 45°$,
lungimea liberă a cuţitului ....l = 50 mm,
avans .....s = 0,66 mm/rot,
adîncime de tăiere .....t = 2,5 mm,
diametrul barei de prelucrat ..D = 80 mm,
lungimea barei de prelucrat ..L = 650 mm,
turaţie.....n = 375 rot/min.

Probele s-au executat la strungul «Victoria» din laboratorul secţiei maşini şi mecanisme I.M.A.

Rezultatele obţinute sînt indicate în tabloul nr. 8.

Tabloul nr. 8

Amplitudini reale mm	
Fără Rîjkov	Cu Rîjkov
0,017	0,006
0,018	0,007
0,016	0,007

Diferenţa maximă de amplitudini sau înălţime a vibraţiilor este

$$0{,}018 - 0{,}006 = 0{,}012.$$

Reducerea procentuală de amplitudini datorită dispozitivului «Rîjkov» este deci

$$\frac{0{,}012}{0{,}018} = 0{,}66 \text{ sau } 66\%.$$

Dispozitivul «Rîjkov» utilizat a fost tipul R 3 V din gama celor realizate de uzinele «Mao-Tze-Dun».

2. Probe efectuate cu un cuţit tip «Colesov», avînd secţiunea 30 × 30 mm şi un dispozitiv «Rîjkov» tip R 5 V

lungimea liberă a cuţitului ....l = 70 mm,
avans .....s = 0,5 mm/rot,
adîncime de tăiere .....t = 0,5 mm.

Încercările s-au executat la strungul «Astra» al secţiei maşini şi mecanisme, rezultatele obţinute fiind cele din tablourile nr. 9 (seria I: măsurători de amplitu-

dini cu comparatorul) și nr. 10 (seria II: măsurători de amplitudini după diagrama « Geiger »).

Tabloul nr. 9

Turații rot/min	Diam. piesei mm	Amplitudini reale mm		Diferențe	
		Fără Rîjkov	Cu Rîjkov	mm	%
375	66,5	0,17			
600	64,6	0,28			
375	63,6		0,12 dispoz. lîngă tăiș	0,05	30
600	62,6		0,20	0,08	29
375	61,6		0,14 la 1/2 distanță	0,03	18
600	60,6		0,22	0,06	22
375	59,6		0,15 lîngă suport	0,02	12
600	58,6		0,24	0,04	15

Tabloul nr. 10

Turații rot/min	Diam. piesei mm	Amplitudini în mm		Diferențe	
		Fără Rîjkov	Cu Rîjkov	mm	%
375	58,7	0,15			
600	57,7	0,26			
375	56,7		0,11 lîngă tăiș	0,04	27
600	55,7		0,20	0,06	23
375	54,7		0,08 lîngă suport	0,07	46
600	53,7		0,15	0,11	42
375	52,7		dispozitiv Rîjkov orizontal 0,17	0,02	14
600	51,7		0,19	0,07	28

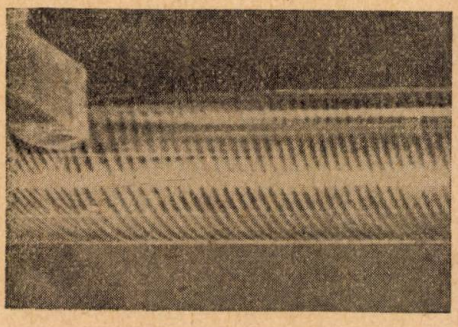


Fig. 9

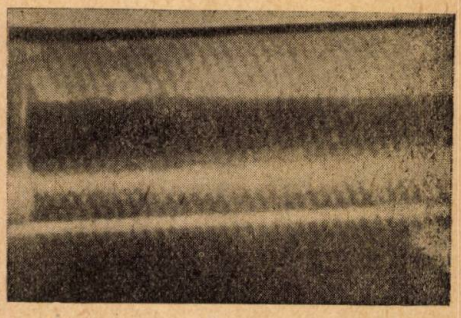


Fig. 10

Piesele strungite în cursul ultimelor două serii de lucrări au rămas cu urme ale vibrațiilor după cum se vede în figura 9 (strungire fără dispozitiv « Rîjkov ») și în figura 10 (strungire cu dispozitiv « Rîjkov »).

Măsurînd cu comparatorul înălţimile urmelor de vibraţii am găsit în primul caz, strungirea fără dispozitiv « Rîjkov », o valoare de 0,1 mm, iar în al doilea caz 0,03 mm, ceea ce corespunde unei reduceri a înălţimii vibraţiilor de circa 70%.

Instalaţia dispozitivului « Rîjkov » s-a făcut cu ajutorul unei bride (fig. 11), datorită căreia s-a putut deplasa punctul de fixare pe cuţit a dispozitivului.

Fig. 11

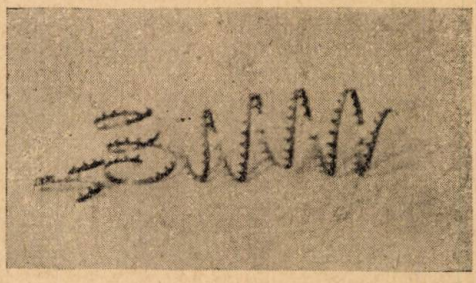


Fig. 12

Aşchia obţinută la strungirea cu vibraţii intense prezintă, după cum se vede în figura 12, o serie de dinţi cu înălţimi variabile, formînd grupe care corespund unor cicluri de vibraţii.

CONCLUZII

În lucrarea de faţă s-au făcut cîteva studii teoretice şi experimentale ale vibraţiilor provocate la strungire de unii parametri ai cuţitului. Unele rezultate teoretice au putut fi verificate şi experimental, iar altele din lipsa de utilaj pentru măsurarea componentei P_z n-au putut face obiectul unor experienţe. Unele probe experimentale, cum este de exemplu influenţa unghiului de degajare şi unghiului de atac, n-au putut face obiectul unui studiu teoretic neexistînd relaţii analitice corespunzătoare.

S-a făcut o analiză teoretică a acţiunii dispozitivului « Rîjkov », indicîndu-se o metodă practică pentru proiectarea unui astfel de dispozitiv.

De asemenea, s-au efectuat probe comparative de strungire cu şi fără dispozitivul Rîjkov, constatîndu-se că acest dispozitiv poate reduce amplitudinile vibraţiilor pînă la 70%. Cercetătorii sovietici găsiseră o reducere de 66% [2].

Pentru a se putea elimina într-o măsură şi mai mare vibraţiile, s-a întocmit, pe baza documentaţiei sovietice [5] la I.M.A. un proiect al unei lunete antivibratoare.

Primită la redacţie la 30 mai 1955

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДА РЫЖКОВА ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ ВИБРАЦИЙ ПРИ ТОЧЕНИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Работа состоит из двух частей.

1. Теоретическое исследование, касающееся вибраций, вызванных при точении в зависимости от параметров резца, и эффекта амортизации этих вибраций благодаря применению аппарата Рыжкова.

2. Изложение результатов опытных исследований, которыми были проверены теоретические констатации в соответствующих случаях, а также описания пробного точения, проведенного как аппаратом Рыжкова, так и без применения такового. При применении этого аппарата было констатировано уменьшение амплитуды вибраций приблизительно на 70%.

ÉTUDE SUR LA MÉTHODE DE RYJKOV POUR L'ÉLIMINATION DES VIBRATIONS LORS DU TOURNAGE

(RÉSUMÉ)

L'article ci-dessus contient:

a) Une étude théorique concernant les vibrations provoquées par l'outil pendant les travaux au tour, ainsi que l'étude de l'amortissement des vibrations, dû au dispositif de Ryjkov.

b) Les résultats obtenus à la suite de certains essais de tournage, qui ont confirmé les conclusions théoriques des cas correspondants, ainsi que les résultats des essais comparatifs exécutés avec et sans dispositif de Ryjkov. L'adaptation de ce dispositif permet une réduction d'environ 70% de l'amplitude des vibrations.

BIBLIOGRAFIE

1. A. P. Sokolovschi şi colectiv, *Precizia prelucrării mecanice şi metodele pentru mărirea ei.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
2. A. E. Kobrinski, *Prinţip deistvia i kratkaia teoria vibrogasitelia konstrukţii D.I. Rîjkova.* Vestnik maşinostroenia, 1954, nr. 9, p. 41.
3. Tr. Mateescu şi colectiv, *Aşchierea rapidă a metalelor.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
4. St. Tîrziu şi D. Caridas, *Experienţa uzinelor «Vulcan» în eliminarea vibraţiilor la strungire. Dispozitivul D. I. Rîjkov.* Metalurgia, 1953, nr. 7, p. 33.
5. V. G. Podporkin, *Liunet vibrogasitel.* Stanki i instrument, 1953, nr. 7, p. 12.
6. V. G. Kelendjeridze, *Vliania mehaniceskih svoistvmetalov na vozniknovenie vibraţii pri tocenii.* Stanki i instrument, 1954, nr. 7, p. 15.
7. M. I. Kliuşin şi D. I. Rîjkov, *Gaşenie vibraţii obrabatîvaemoi detali putem zatociki na rezţe vibrogaseaşcei faski.* Vestnik maşinostroenia, 1954, nr. 9, p. 34.
8. S. Timoshenko, *Théorie des vibrations.* Paris, 1947.
9. P. I. Hartog, *Vibrations et mouvements vibratoires dans l'industrie mécanique moderne.* Paris, 1936.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

CALCULUL VIBRAŢIILOR CADRELOR PRIN APROXIMĂRI SUCCESIVE

DE

SANDU RĂUTU

Prin introducerea în industrie a maşinilor cu viteze mari, calculul dinamic al construcţiilor a devenit o problemă curentă pentru inginerul proiectant.

Metodele de calcul existente pînă în prezent duc în genere la calcule laborioase, ceea ce face ca ele să nu poată fi introduse pe scară largă în proiectare.

Lucrarea de faţă vrea să ofere inginerilor proiectanţi o metodă rapidă şi simplă pentru calculul eforturilor provenite din vibraţiile întreţinute, precum şi pentru calculul primei frecvenţe a vibraţiilor proprii ale cadrelor.

I. CALCULUL DINAMIC AL CADRELOR PRIN METODA DEFORMAŢIILOR

În calculul dinamic al cadrelor, s-a căutat să se utilizeze rezultatele şi metodele de lucru folosite în statică şi în genere în mecanica construcţiilor. Modul cum s-a utilizat în dinamica construcţiilor metoda deformaţiilor, folosită anterior în calculul static, ne arată cît de rodnică poate fi o asemenea metodă de cercetare.

Calculul dinamic prin metoda deformaţiilor a fost utilizat pentru prima oară de cercetătorii sovietici N. I. Bezuhov [1], [2] şi A. A. Belous [3]. În acest domeniu trebuie menţionate de asemenea lucrările lui V. Kolousek [4], [5] şi N. K. Snitko [6], [7].

În prezent metoda aceasta este pusă la punct. Ea nu este utilizată curent în proiectare din cauza dificultăţilor de calcul.

Problema prezintă două aspecte distincte:

a) calculul eforturilor provenite din sarcini dinamice întreţinute;

b) calculul frecvenţei vibraţiilor proprii.

În cazul vibraţiilor întreţinute, se cunoaşte frecvenţa circulară a vibraţiei, egală cu frecvenţa forţelor excitatoare, şi se caută mărimea eforturilor ce iau naştere în construcţie.

Se porneşte de la un sistem de bază, obţinut prin introducerea unor legături suplimentare, care împiedică deplasările unghiulare şi de translaţie ale tuturor nodurilor. În acest mod, construcţia este împărţită în bare drepte, şi calculul se face pornind de la ecuaţia diferenţială a vibraţiei unei bare

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]+\overline{m}\frac{\partial y^2}{\partial t^2}=0. \tag{1.1}$$

Pentru a anula deosebirile de deformaţii între sistemul de bază ales şi cel real, se dau nodurilor asemenea deplasări oscilatorii încît reacţiunile din toate legăturile suplimentare să fie egale cu zero.

Ecuaţiile care reprezintă această condiţie au forma

$$r_{ik} Z_k + r_{ip} = 0 \begin{bmatrix} i = 1,2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Numărul n al ecuaţiilor este egal cu numărul legăturilor suplimentare introduse. Coeficienţii de tipul r_{ik} sînt reacţiunile maxime ce iau naştere în legătura i în urma unei deplasări pulsatorii de frecvenţă θ şi cu amplitudine maximă egală cu unitatea, a legăturii k. Mărimea acestei reacţiuni se obţine prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (1.1). De exemplu, în cazul barei dublu încastrate, reacţiunile au expresia

$$M_A = i_{AB} [\alpha A_{AB}(kl) + \beta B_{AB}(kl) + \gamma C_{AB}(kl)] \tag{1.3}$$

$$M_B = i_{AB} [\alpha B_{AB}(kl) + \beta A_{AB}(kl) + \gamma D_{AB}(kl)] \tag{1.4}$$

$$R_A = \frac{i_{AB}}{l_{AB}} [\alpha C_{AB}(kl) + \beta D_{AB}(kl) + \gamma F_{AB}(kl)] \tag{1.5}$$

$$R_B = \frac{i_{AB}}{l_{AB}} [\alpha D_{AB}(kl) + \beta C_{AB}(kl) + \gamma E_{AB}(kl)] \tag{1.6}$$

unde α, β şi γ sînt deplasările barei (fig. 1).

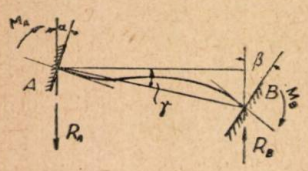


Fig. 1

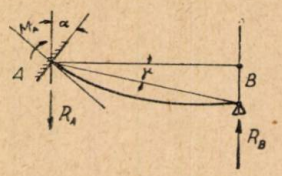


Fig. 2

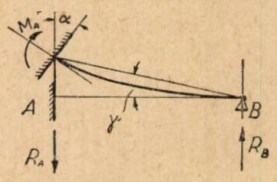


Fig. 3

În cazul barei încastrate la un capăt şi articulate la celălalt (fig. 2 şi 3) se obţine:

$$M_A = i_{AB} [\alpha G_{AB}(kl) + \gamma K_{AB}(kl)] \tag{1.7}$$

$$R_A = \frac{i_{AB}}{l_{AB}} [\alpha H_{AB}(kl) + \gamma M_{AB}(kl)] \tag{1.8}$$

$$R_B = \frac{i_{AB}}{l_{AB}} [\alpha K_{AB}(kl) + \gamma M_{AB}(kl)] \tag{1.9}$$

şi

$$M_A = i_{AB} [\alpha G_{AB}(kl) + \gamma H_{AB}(kl)] \tag{1.10}$$

$$R_A = \frac{i_{AB}}{l_{AB}} [\alpha H_{AB}(kl) + \gamma L_{AB}(kl)] \tag{1.11}$$

$$R_B = \frac{i_{AB}}{l_{AB}} [\alpha K_{AB}(kl) + \gamma M_{AB}(kl)] \tag{1.12}$$

unde $A_{AB}(kl)$, $B_{AB}(kl)$, ... sînt funcţii de $kl = \dfrac{\overline{m}_{AB}\theta^2}{EI_{AB}}$. (1.13)

Expresia acestor funcții și mărimea lor pentru diverse valori ale lui (kl) sînt date în anexele 1, 2 și 3. Valorile acestor funcții se găsesc întabelate în lucrările [5] și [8].

Coeficienții r_{ip} reprezintă mărimea eforturilor din legăturile suplimentare cauzate de solicitările exterioare.

O dată cunoscute valorile lui θ și deci ale lui (kl) toți coeficienții r_{ik} sînt valori constante. Din ecuațiile (1.2) se obțin valorile deplasărilor capetelor barelor și cu ajutorul soluției ecuației (1.1) se pot calcula eforturile dinamice la capetele barelor, precum și în orice punct al barei respective.

În cazul vibrațiilor proprii, frecvența vibrației proprii (ω) nu mai este cunoscută. Ecuațiile canonice ale sistemului au forma

$$r_{ik}Z_k = 0 \begin{bmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ k = 1, 2, 3, \ldots, n \end{bmatrix}, \tag{1.14}$$

iar r_{ik} sînt funcții trigonometrice de ω.

Pentru ca acest sistem de ecuații omogene să admită soluții diferite de zero este necesar ca determinantul

$$| r_{ik} | = 0. \tag{1.15}$$

Această condiție conduce la o ecuație transcendentă în (kl) cu ajutorul căreia se pot determina valorile frecvențelor proprii ω. Metoda nu poate fi aplicată, din cauza dificultăților de calcul, decît la cadre foarte simple.

★

Lucrarea de față își propune ca pornind de la ecuațiile metodei deformațiilor să dea o metodă de calcul prin aproximații succesive, care să permită calcularea eforturilor din sarcini dinamice și găsirea primei frecvențe a vibrațiilor proprii ale cadrelor.

II. CALCULUL PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE AL EFORTURILOR PROVENITE DIN SARCINI DINAMICE

Rezolvarea sistemului de ecuații (1.2) este în genere greoaie și nu poate fi efectuată cu rigla de calcul; ea poate fi făcută ca și în calculele statice prin aproximări succesive.

Fie sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} &Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \ldots + Z_n r_{1n} + r_{1p} = 0, \\ &Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \ldots + Z_n r_{2n} + r_{2p} = 0, \\ &\vdots \\ &Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \ldots + Z_n r_{nn} + r_{np} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dacă $\theta < \omega$ determinantul coeficientului sistemului este diferit de zero, în acest caz, cum se va demonstra ulterior, procesul de iterație este convergent.

Iterația se poate face ca în statică. Presupunînd inițial $Z_2 = Z_3 = \ldots = Z_n = 0$ se obține $Z_1^{(1)} = -\frac{r_{1p}}{r_{11}}$. În a doua etapă se presupune $Z_1 = Z_1^{(1)}$; $Z_3 =$

$= Z_4 = \ldots = Z_n = 0$ și se determină $Z_2^{(1)}$. În acest mod, se obține prin aproximări succesive $Z_i^{(n)}$. Operația este continuată pînă cînd

$$\frac{|Z_i^{(n)} - Z_i^{(n-1)}|}{|Z_i^n|} < \delta, \tag{2.2}$$

δ fiind o cantitate oricît de mică vrem.

Metoda de iterare are și o semnificație fizică. Se consideră că toate forțele exterioare variază după legea $A \sin \theta t$. În prima aproximație se presupune că legăturile i ($i = 2, 3, \ldots, n$) sînt fixe și numai legătura 1 este îndepărtată. Valoarea $Z_1^{(1)}$ reprezintă valoarea amplitudinii maxime a vibrației nodului 1 în această ipoteză. Se presupune apoi că legătura 1 este obligată să se deformeze după legea $Z_1^{(1)} \sin \theta t$, legăturile j ($j = 3, 4, \ldots, n$) sînt fixe și legătura 2 se îndepărtează. Valoarea obținută $Z_2^{(1)}$ reprezintă valoarea maximă a amplitudinii vibrației nodului respectiv, pe direcția legăturii 2 în ipotezele introduse mai sus. În acest fel se obțin prin aproximări succesive valorile finale ale deplasărilor.

*

Se poate demonstra că procesul de iterație este convergent pentru $\theta < \omega$, unde ω este valoarea primei frecvențe a vibrației proprii.

Fie sistemul de ecuații scris sub formă matricială

$$GX + F = 0,$$

unde $G = |r_{ik}|$ este o matriță simetrică.

Procesul de iterație descris mai sus, s-a făcut după metoda lui Zeidel, care pentru calculul lui $Z_i^{(k)}$ (Z_i în aproximația k) folosește valorile lui Z_j ($j = 1, 2, \ldots, (i-1)$) din aproximația k, și valorile lui Z_j ($j = i+1, \ldots, n$) din aproximația $(k-1)$

$$Z_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} Z_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} Z_j^{(k-1)} + f_i .$$

Pentru ca iterația să fie convergentă este suficient ca forma pătratică a matriței să fie pozitiv definită [11] *).

Pentru a putea utiliza iterațiile în calculul dinamic este necesar să demonstrăm că forma pătratică a matriței coeficienților ecuațiilor metodei deformațiilor este pozitiv definită.

Pentru aceasta presupunem cazul particular cînd avem o singură legătură încărcată $r_{ap} \neq 0$ în timp ce $r_{ip} = 0$ pentru $i \neq a$.

Forma pătratică a matriței are valoarea

$$\Phi = r_{ij} Z_i Z_j ,$$

dar

$$r_{ij} Z_i = - r_{jp} ,$$

deci

$$\Phi = - r_{jp} Z_j = - r_{ap} Z_a .$$

*) p. 139.

Pentru valorile $\theta < \omega$, r_{ap} este întotdeauna de semn contrar cu Z_a, deoarece întotdeauna reacțiunea din legătura suplimentară este de sens contrar cu deplasarea reală a cadrului, deci expresia este totdeauna pozitivă.

Am demonstrat astfel convergența iterației în ipoteza încărcării unui singur nod din sistemul de bază. Dacă se încarcă pe rînd toate nodurile, deplasarea totală va fi suma deplasărilor

$$Z_j = \sum Z_j^{(i)}.$$

Convergența este asigurată și în cazul încărcării tuturor nodurilor, deoarece șirul sumă a unor șiruri convergente este tot un șir convergent, avînd ca limită suma limitelor șirurilor.

De remarcat că în demonstrație nu s-a făcut nici un fel de ipoteze asupra tipului de cadru (cu noduri fixe sau deplasabile, cadre plane sau cadre în spațiu) și în consecință convergența iterației este asigurată pentru orice tip de construcții.

În cazul particular cînd $\theta = 0$ se obține cazul cadrelor încărcate static. Demonstrația este valabilă și pentru acest caz.

Pentru frecvențe ale sarcinilor excitatoare mai mari ca prima frecvență a vibrației proprii ($\theta > \omega$) convergența procesului de iterație nu este asigurată și metoda nu mai este aplicabilă.

★

Operația de iterare se poate face, fie asupra deplasărilor, fie asupra eforturilor. În general iterarea deplasărilor se face cu mai puține operații decît cea a eforturilor și din această cauză este mai indicată în cazurile vibrațiilor întreținute.

Se dau mai jos cîteva exemple de calcul cu ambele metode.

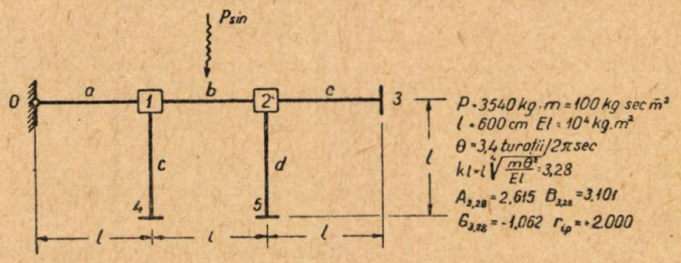


Fig. 4

a. *Cadre cu noduri fixe.* În acest caz, deplasările posibile sînt numai rotiri. Rotirea inițială a nodului i este

$$Z_i^{(0)} = -\frac{r_{ip}}{r_{ii}}.$$

Coeficienții de transmisie a rotirilor sînt

$$t_{ik} = -\frac{r_{ik}}{r_{ii}},$$

$$t_{ki} = -\frac{r_{ik}}{r_{kk}}.$$

Fie cadrul din figura 4.

$$r_{11} = 4{,}168 \qquad Z_1^{(0)} = \frac{2\,000}{4{,}168}, \qquad Z_2^{(0)} = -\frac{2\,000}{7{,}845} = -255$$

$$r_{12} = 7{,}845 \qquad t_{12} = -\frac{3{,}101}{4{,}168} = -0{,}745$$

$$r_{12} = 3{,}101 \qquad t_{21} = -\frac{3{,}101}{7{,}845} = -0{,}391.$$

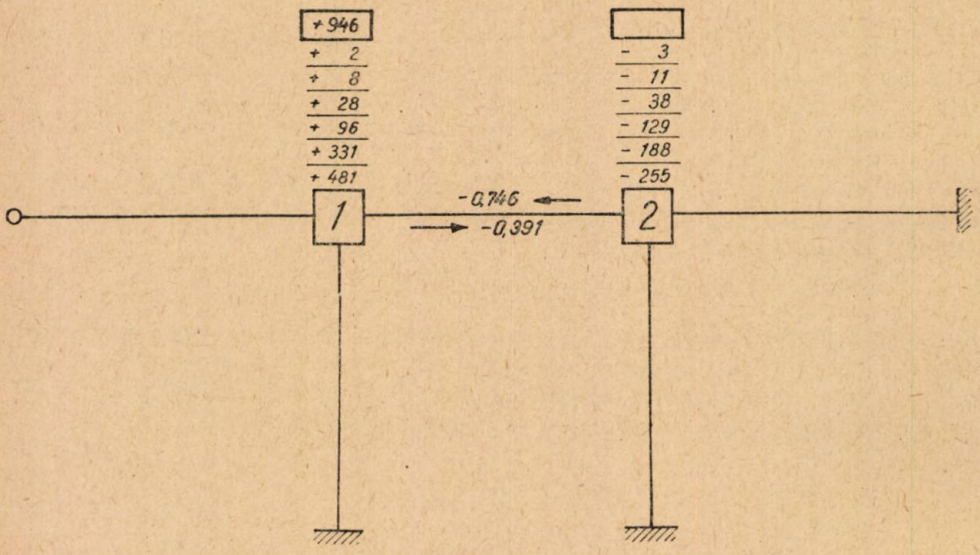


Fig. 5

Calculul s-a făcut direct pe schema de calcul din figura 5.

Cunoscînd deplasările, se pot calcula cu ușurință momentele ce iau naștere în fiecare bară.

Aceeași operație se poate face pornind de la iterarea momentelor. De data aceasta vom avea atît coeficienți de transmisie, cît și coeficienți de repartiție pentru momentul neechilibrat, ce acționează asupra nodului.

În cazul cadrelor cu noduri fixe, coeficienții de repartiție au forma

$$\mu_{ki} = \frac{M_{ki}}{\sum M_{kj}},$$

unde M_{ki} este momentul barei ki, care ia naștere în nodul k în urma rotirii nodului respectiv cu un unghiu unitar. Suma de la numitor se face asupra tuturor barelor ce se intersectează în nodul k. M_{ki} depinde de (kl) al barei respective și de modul ei de rezemare.

Coeficienții de transmisie au forma

$$t_{ji} = \frac{B\,(kl)_{ij}}{A\,(kl)_{ij}}.$$

De exemplu, pentru cadrul din figura 4, coeficienții de repartiție au valoarea

$$\mu_{1a} = \frac{i_{1a} G (kl)_{1a}}{i_{1a} G (kl)_{1a} + i_{1b} A (kl)_{1b} + i_{1c} A (kl)_{1c}},$$

$$\mu_{1b} = \frac{i_{1b} A (kl)_{1b}}{i_{1a} G (kl)_{1a} + i_{1b} A (kl)_{1b} + i_{1c} A (kl)_{1c}},$$

$$\mu_{1c} = \frac{i_{1c} A (kl)_{1c}}{i_{1a} G (kl)_{1a} + i_{1b} A (kl)_{1b} + i_{1c} A (kl)_{1c}},$$

iar coeficienții de transmisie

$$t_{01} = 0,$$

$$t_{21} = \frac{B (kl)_{1b}}{A (kl)_{1b}},$$

$$t_{41} = \frac{B (kl)_{1c}}{A (kl)_{1c}}.$$

Cunoscînd rigiditatea grinzii, masa ei pe unitate de lungime și frecvența vibrației forțelor exterioare, se calculează pentru fiecare bară valoarea kl. Valorile funcțiilor A, B etc., se obțin direct din tabele iar cu ajutorul lor se calculează foarte simplu coeficienții de repartiție și de transmisie.

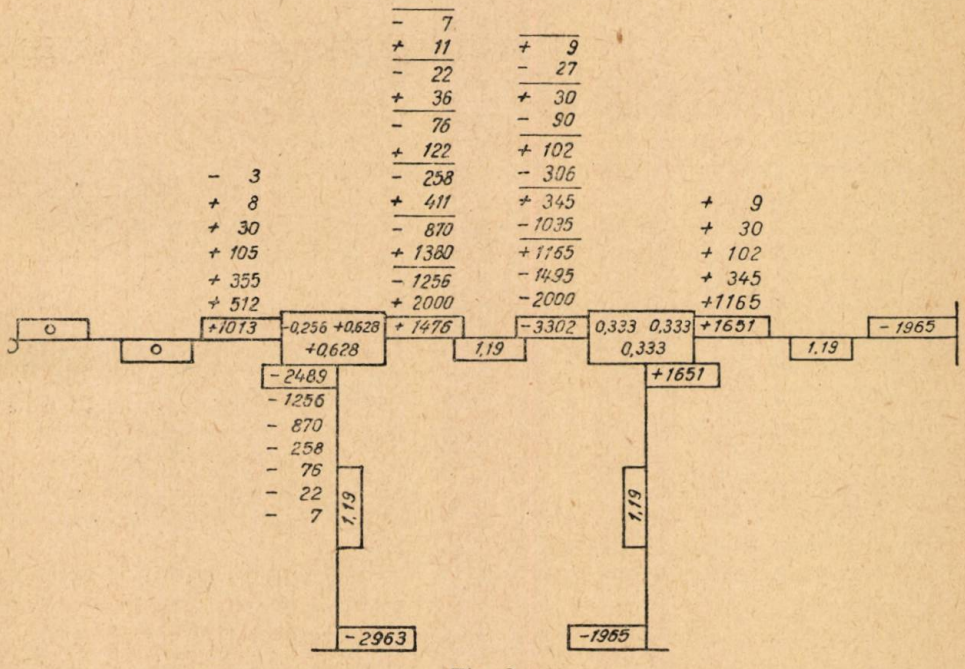


Fig. 6

Calculul se face analog cu cel static.

Calculăm cadrul anterior prin iterarea momentelor încovoietoare (schema de calcul din figura 6).

După cum se vede, convergența seriei este mai slabă decît în calculul static, totuși după patru echilibrări eroarea este sub 3%, deci suficient de mică pentru proiectare.

b. *Calculul cadrelor cu noduri deplasabile.* În această categorie intră toate cadrele pentru care considerînd că barele sînt inextensibile există totuși posibilități de translație a nodurilor.

Ne vom referi numai la cazul particular al cadrelor cu bare perpendiculare, deoarece acest sistem de cadre este cel mai frecvent utilizat în construcții, în acest caz calculele fiind totodată mai simple. Pentru celelalte tipuri de cadre metoda poate fi aplicată, însă necesită un calcul aritmetic mai dezvoltat.

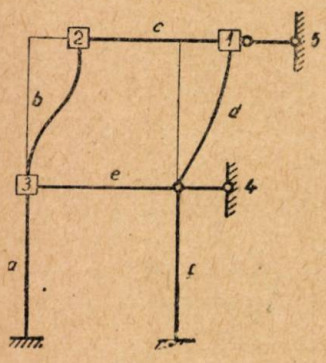


Fig. 7

Calculul coeficienților de transmisie și de repartiție pentru rotirile nodurilor se face analog ca și în cazul cadrelor cu noduri fixe.

Prezintă interes coeficienții de transmisie și de repartiție datorită deplasărilor și translațiilor. De asemenea interesează și valoarea coeficienților de transmisie între deplasările unghiulare și deplasările liniare.

În calcule, se va utiliza metoda iterațiilor mai complet decît se face în mod curent în calculul static. În calculul static curent, calculul se face în două etape. În prima etapă se face un calcul cu noduri fixe, și se calculează apoi eforturile axiale din pendulii de legătură. În etapa a doua, se dă cîte o deplasare unitară pe direcția pendulilor suplimentari și se scriu n ecuații cu n necunoscute (n fiind gradul de libertate de translație a cadrului) care reprezintă condiția ca eforturile din barele suplimentare să fie nule.

În calculul propus se va extinde metoda iterațiilor și asupra legăturilor ce împiedică deplasările de translație. În consecință, în timpul calculului se face eliberarea tuturor barelor pe rînd. Ordinea de eliberare a legăturilor suplimentare (șaibe sau pendul) este indiferentă. Pentru a obține însă o convergență mai rapidă a calculului se eliberează în primul rînd barele mai puternic încărcate. Din exemplele calculate, rezultă că e bine ca numărul de deplasări ale pendulilor să fie cît mai mic.

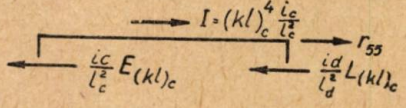


Fig. 8

Luînd de exemplu cadrul din figura 7, să calculăm coeficienții de transmisie și de repartiție cauzați de deplasarea reazemului 5.

Reacțiunile din încastrări se determină din echilibrul pe direcția respectivă.

$$r_{15} = -\frac{i_d}{l_a^2} H\,(kl)_d,$$

$$r_{25} = -\frac{i_b}{l_b^2} C\,(kl)_b, \qquad (2.3)$$

$$r_{35} = -\frac{i_b}{l_b^2} D\,(kl)_b.$$

Reacțiunile din barele 4 și 5 se obțin din echilibrul barei c, respectiv e, ținînd seama și de forțele de inerție ce iau naștere în urma deplasărilor de translație (fig. 8).

$$r_{55} = \frac{i_b}{l_b^2} E(kl)_b + \frac{i_d}{l_d^2} L(kl)_d - m_c l_c \theta^2 \cdot 1$$

$$= \frac{i_b}{l_b^2} E(kl)_b + \frac{i_d}{l_d^2} L(kl)_d - (kl)_c^4 \frac{i_c}{l_c^2}, \tag{2.4}$$

$$r_{45} = \frac{i_b}{l_b^2} F(kl)_b - \frac{i_d}{l_d^2} M(kl)_d.$$

Coeficientul r_{55} este o mărime pozitivă pentru valorile lui $\theta < \omega_1$ (ω este prima frecvență circulară a vibrației proprii). Dacă din calcul rezultă o valoare a lui r_{55} negativă, înseamnă că $\theta > \omega$ și metoda nu mai este aplicabilă, deoarece convergența seriei nu este asigurată, după cum s-a arătat mai sus.

Coeficienții de transmisie au valorile:

$$t_{1d,5} = -\frac{r_{15}}{r_{55}} = \frac{+\frac{i_d}{l_d^2} H(kl)_d}{\frac{i_b}{l_b^2} E(kl)_b + \frac{i_d}{l_d^2} L(kl)_d - (kl)_c^4 \frac{i_c}{l_c^2}},$$

$$t_{3b,5} = -\frac{r_{35}}{r_{55}} = +\frac{\frac{i_b}{l_b^2} C(kl)_b}{r_{55}}, \tag{2.5}$$

$$t_{2b,5} = -\frac{r_{25}}{r_{55}}, \qquad t_{4,5} = -\frac{r_{45}}{r_{55}}.$$

În general, procesul de iterație are o convergentă suficient de rapidă, însă evident că, în acest caz, calculul este mai anevoios, așa cum se întîmplă totdeauna la cadre cu noduri deplasabile.

III. CALCULUL FRECVENȚELOR VIBRAȚIILOR PROPRII CU AJUTORUL APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

Calculul vibrației proprii a unui sistem duce la rezolvarea unui determinant $|r_{ik}| = 0$ în care fiecare termen r_{ik} reprezintă o sumă de funcții trigonometrice. Problema devine greoaie cînd determinantul este de gradul 3,4 și este aproape imposibilă de rezolvat, cînd gradul determinantului este mai mare. Din această cauză se utilizează în mod curent, în construcții, metoda calculului aproximativ, prin concentrarea maselor sistemului în noduri sau la mijlocul grinzilor.

Metoda de calcul prin concentrarea maselor duce la rezolvarea unui determinant, în care termenii sînt de natura unor deplasări elastice, suficient de greu de calculat cînd sistemul este de mai multe ori static nedeterminat.

În lucrarea de față, se dă o metodă de calcul prin aproximări succesive a frecvenței vibrațiilor proprii ale unui cadru, care duce la o rezolvare rapidă, în special în cazul cadrelor cu noduri fixe.

A. Raithel [9] dă o rezolvare acestei probleme pentru cîteva cazuri particulare. El pornește în cazul cadrelor cu noduri fixe de la un sistem simplu

conex, caracterizat prin faptul că prin îndepărtarea unei grinzi, sistemul este descompus în două părți distincte. Se calculează grinda centrală ca o grindă cu reazeme elastice, iar din sistemele laterale se determină cedarea reazemelor grinzii centrale, pornind de la o anumită valoare a lui kl. Prin aproximări succesive se obține valoarea frecvenței proprii.

A. Raithel întrebuințează metoda celor 3 sau 4 momente, în timpul calculului intervenind o serie de ecuații simple.

Metoda aceasta de calcul prezintă avantajul că pornind de la o anumită valoare kl_0 se obține direct o valoare kl_1, în așa fel încît kl este cuprins între aceste două valori, iar convergența seriei este suficient de rapidă. Calculul nu se poate aplica însă decît la cadre simplu conexe.

În cazul cadrelor cu noduri deplasabile, modul de calcul propus de Raithel duce la n ecuații liniare, funcție de numărul de grade de libertate, de translație. În acest caz, calculul devine greoi, deoarece la fiecare aproximare trebuie rezolvat un sistem de ecuații.

Metoda de calcul pe care o propunem pornește de la metoda deformațiilor și nu necesită rezolvarea nici unei ecuații, ci prin încercări se ajunge direct la mărimea primei frecvențe a vibrațiilor proprii.

Dacă asupra unei construcții lucrează o sarcină pulsatorie $P \sin \theta t$ săgeata obținută într-un punct oarecare, $y = P \cdot f(kl)$ este cu atît mai mare cu cît θ este mai aproape de ω, iar în cazul cînd $\theta = \omega$ săgeata pe care o capătă construcția este teoretic infinită (dacă se neglijează amortizarea).

Dacă se dă unui punct al construcției o săgeată de o mărime maximă dată (q_a) este necesară o sarcină pulsatorie

$$P = \frac{q_a}{f(kl)},$$

a cărei valoare maximă este funcție de raportul $\frac{\theta}{\omega}$.

Pentru

$$\frac{\theta}{\omega} < 1 \qquad P > 0,$$

$$\frac{\theta}{\omega} > 1 \qquad P < 0,$$

$$\frac{\theta}{\omega} = 1 \qquad P = 0.$$

Pornind de la această observație, se poate da o metodă simplă pentru determinarea prin încercări a frecvenței proprii.

Se dă uneia din legăturile suplimentare ale sistemului de bază o deplasare pulsatorie, cu o frecvență dată θ. Se calculează prin aproximații succesive valoarea efortului ce ia naștere în legătura respectivă, dacă toate celelalte legături sînt îndepărtate.

În ipoteza că efortul din legătura căreia i s-a dat mișcarea pulsatorie este pozitiv (de același semn cu deplasarea dată), rezultă că $\theta < \omega$. În caz contrar, $\theta > \omega$.

În ipoteza că $\theta = \omega$, mărimea reacției din legătura respectivă este nulă.

Din punct de vedere matematic problema are un aspect simplu. Am presupus că în sistemul de ecuații al vibrațiilor proprii

$$r_{ij} Z_j = 0 \qquad (i = j = 1, 2, \ldots, n),$$

în care valoarea lui Z_n este cunoscută. În acest caz se obține un sistem de n ecuații cu $n - 1$ necunoscute. Se îndepărtează ecuația a n-a care reprezintă condiția ca efortul din legătura suplimentară să fie nul și se rezolvă sistemul de $n - 1$ ecuații. Presupunînd că θ e cunoscut, rezolvarea sistemului respectiv se face prin iterație, după cum s-a arătat în prima parte a lucrării.

Iterația este convergentă pentru valorile lui $\theta < \omega_I$ unde ω_I este valoarea primei frecvențe a vibrațiilor proprii a sistemului avînd o legătură suplimentară pe direcția n.

Se obține $\omega_I > \omega_1$, deoarece prima frecvență proprie a unui sistem cu o legătură suplimentară este mai mare decît a sistemului ce nu are această legătură.

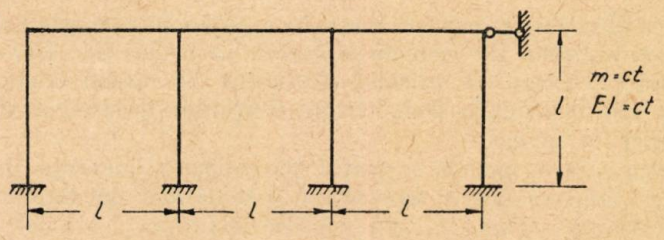


Fig. 9

În consecință procesul de iterație al celor $n - 1$ ecuații este convergent și pentru valori mai mari decît ω_1.

Ecuația a n-a se va folosi ca o ecuație de condiție pentru determinarea frecvenței vibrațiilor proprii a sistemului. În caz că și această ecuație este satis-

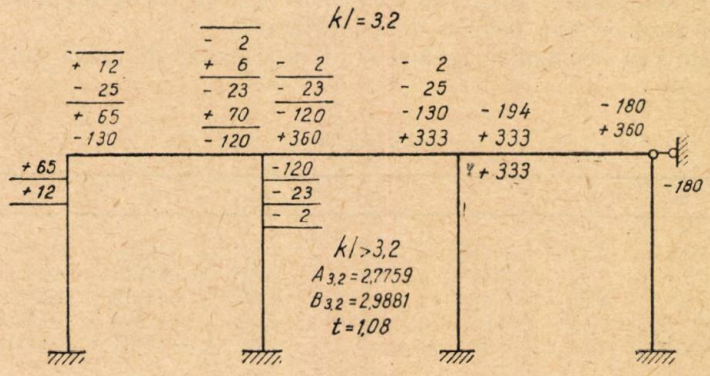


Fig. 10

făcută (ceea ce din punct de vedere static înseamnă că reacția în legătură n este nulă) valoarea lui θ coincide cu valoarea frecvenței vibrației proprii a sistemului dat. Dăm mai jos un exemplu de calcul al vibrațiilor proprii ale unui sistem, prin iterarea momentelor, în cazul unui cadru cu noduri fixe (fig. 9).

Calculul s-a făcut pe schema construcţiei (fig. 10, 11, 12, 13, 14). Rezultă

$$3{,}46 < kl < 3{,}48.$$

Se va lua $kl \simeq 3{,}47$ şi deci

$$\omega_1 = \frac{(3{,}47)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Acest cadru a fost calculat în lucrarea [8] *) şi valoarea primei frecvenţe proprii calculată exact este

$$\omega = \frac{(3{,}473)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Valorile lui kl cu care se pot face încercări se găsesc într-un interval bine definit funcţie de tipul cadrului. De exemplu la cadrele cu noduri fixe $3{,}14 < kl < 4{,}73$.

După cum s-a văzut din calculul eforturilor din sarcini dinamice, iterarea deplasărilor se face mai simplu decît iterarea eforturilor, deoarece se elimină distribuţia eforturilor în noduri.

Vom utiliza această metodă şi pentru determinarea frecvenţei proprii a unui sistem. În acest scop, se alege o frecvenţă θ şi se dă unei din legături k o deplasare Δ_k. Prin iteraţii se poate calcula deplasarea tuturor nodurilor şi deci şi a nodului k.

Dacă deplasarea nodului k obţinută prin iteraţii $\Delta_k^{(i)}$ este mai mică decît deplasarea legăturii k (Δ_k) dată iniţial, înseamnă că în legătură ia naştere o reacţiune pozitivă şi deci conform celor stabilite anterior $\theta < \omega$.

Dacă $\Delta_k^{(i)} > \Delta_k$ frecvenţa dată θ este mai mare decît ω. În cazul cînd $\Delta_k^{(i)} = \Delta_k$ deplasarea nodului este identică cu deplasarea legăturii, deci în legătură respectivă nu vor lua naştere reacţii, iar ca urmare $\theta = \omega$. Ca exemplu de calcul, s-a luat cadrul anterior prin metoda iterării eforturilor.

Calculele s-au efectuat în tabloul nr. 1 în schemele de calcul din figurile 15, 16, 17, 18, 19.

Tabloul nr. 1

Kl	A	B	r_{11}	r_{22}	t_{12}	t_{21}
3,2	2,1759	2,98881	5,65	8,33	−0,537	−0,367
3,4	2,33	3,34	4,66	7,00	−0,718	−0,477
3,5	2,05	3,58	4,10	6,15	−0,872	−0,583
3,46	2,17	3,48	4,34	6,51	−0,802	−0,535
3,48	2,11	3,53	4,22	6,33	−0,837	−0,558

Metoda de calcul poate fi aplicată şi cadrelor cu noduri deplasabile. În acest caz, calculul este mai greoi, deoarece convergenţa este mai slabă. În figura 20 se dă un cadru cu două etaje a cărei primă frecvenţă proprie trebuie calculată. Calculul s-a făcut întîi prin iterarea eforturilor şi apoi prin iterarea deplasărilor. Iteraţiile

*) p. 85.

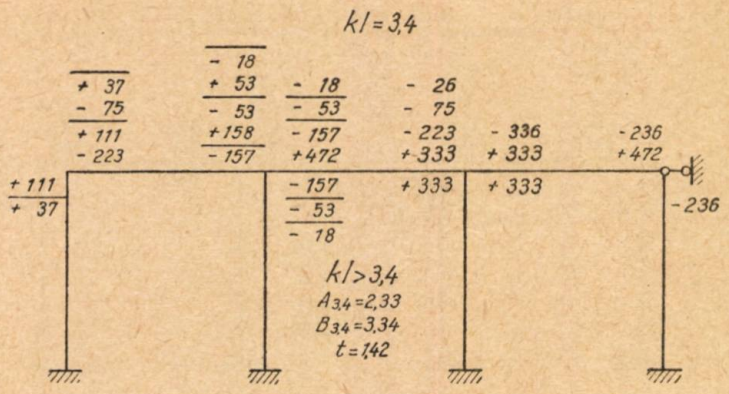


Fig. 11

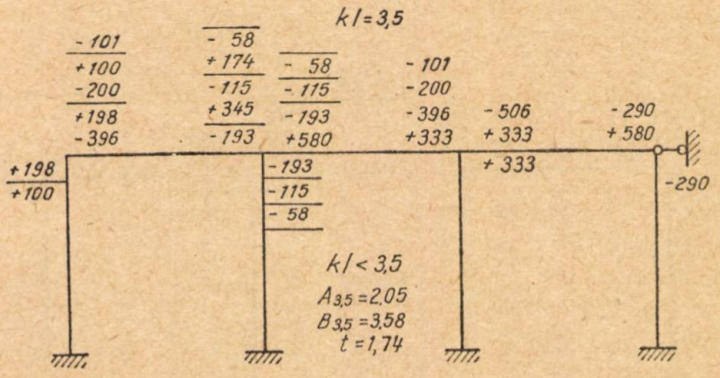


Fig. 12

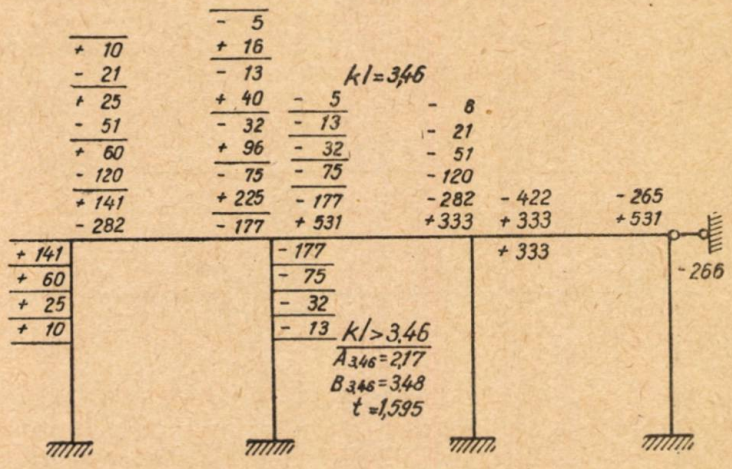


Fig. 13

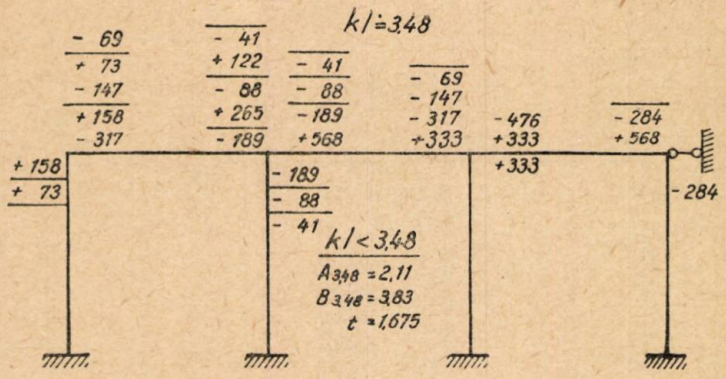


Fig. 14

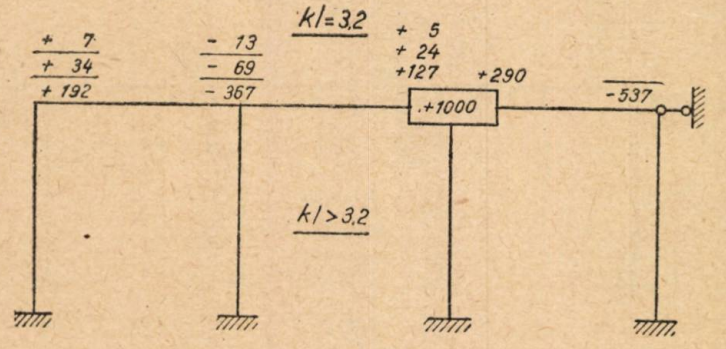


Fig. 15

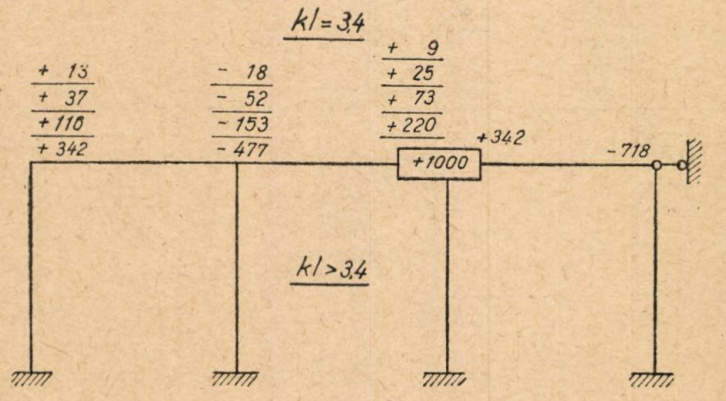


Fig. 16

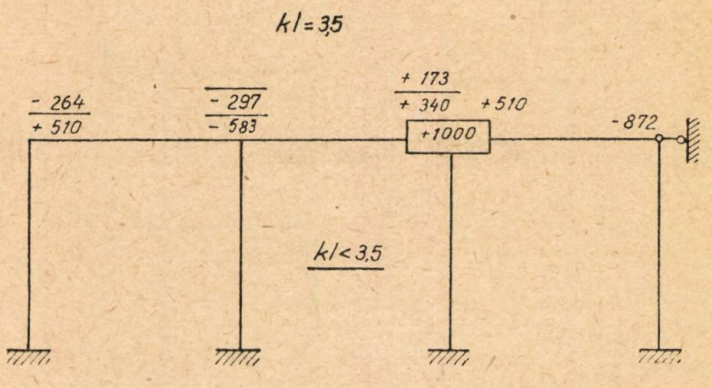


Fig. 17

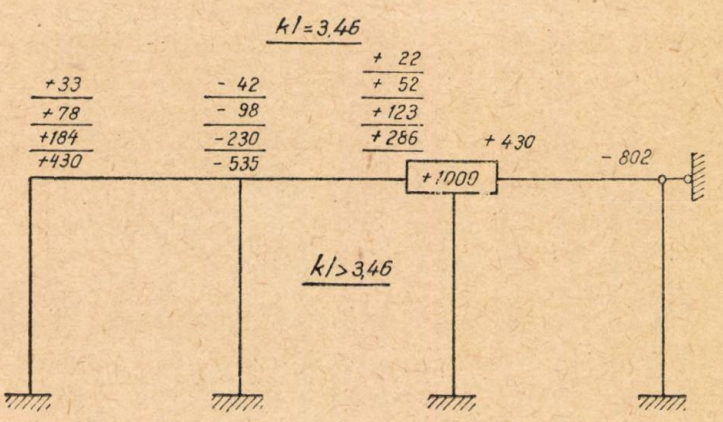


Fig. 18

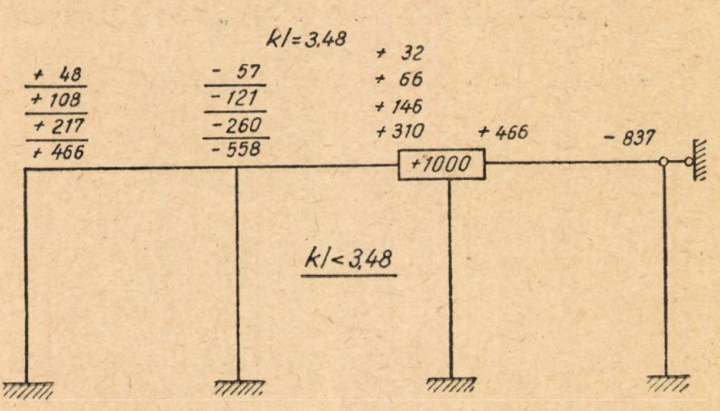


Fig. 19

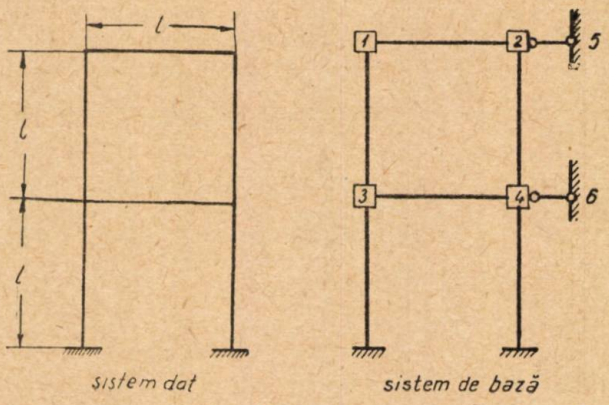

l
l
l
1
2
3
4
5
6
sistem dat
sistem de bază

Fig. 20

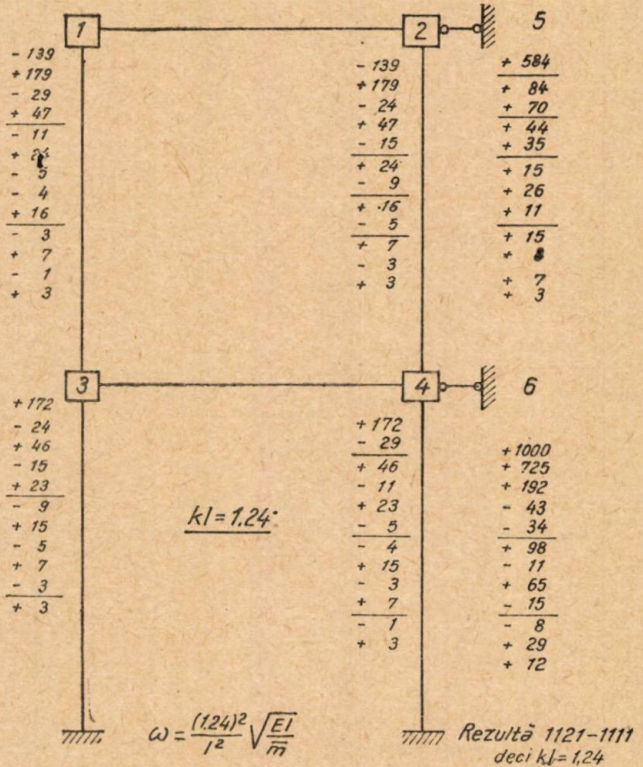

1
2
3
4
5
6
- 139
+ 179
- 29
+ 47
- 11
+ 24
- 9
+ 16
- 3
+ 7
- 1
+ 3
- 139
+ 179
- 24
+ 47
- 15
+ 24
- 9
+ 16
- 5
+ 7
- 3
+ 3
+ 584
+ 84
+ 70
+ 44
+ 35
+ 15
+ 26
+ 11
+ 15
+ 8
+ 7
+ 3
+ 172
- 24
+ 46
- 15
+ 23
- 9
+ 15
- 5
+ 7
- 3
+ 3
kl = 1,24
+ 172
- 29
+ 46
- 11
+ 23
- 5
- 4
+ 15
- 3
+ 7
- 1
+ 3
+ 1000
+ 725
+ 192
- 43
- 34
+ 98
- 11
+ 65
- 15
- 8
+ 29
+ 72
ω = (1,24)² / l² √(EI/m)
Rezultă 1121–1111
deci kl = 1,24

Fig. 21

s-au făcut pentru diverse valori a lui kl, în lucrare dîndu-se numai iterația finală a deplasărilor corespunzătoare primei frecvențe ($kl = 1{,}24$) (fig. 21).

Tabloul nr. 2

r_{11} $2iA\,(kl)$	r_{12} $iB\,(kl)$	r_{13} $iB\,(kl)$	r_{14} 0	r_{15} $-\frac{i}{l}C\,(kl)$	r_{16} $\frac{i}{l}D\,(kl)$
r_{21}	r_{22} $2iA\,(kl)$	r_{23} 0	r_{24} $iB\,(kl)$	r_{25} $-\frac{i}{l}C\,(kl)$	r_{26} $\frac{i}{l}D\,(kl)$
r_{31}	r_{32}	r_{33} $3iA\,(kl)$	r_{34} $iB\,(kl)$	r_{35} $-\frac{i}{l}D\,(kl)$	r_{36} 0
r_{41}	r_{42}	r_{43}	r_{44} $3iA\,(kl)$	r_{45} $-\frac{i}{l}D\,(kl)$	r_{46} 0
r_{51}	r_{52}	r_{55}	r_{54}	r_{55} $l\frac{i}{l}E\,(kl) -$ $-(kl)^4\frac{i}{2}$	r_{56} $-2iF\,(kl)$
r_{61}	r_{62}	r_{63}	r_{64}	r_{65}	r_{66} $4\frac{i}{l}E\,(kl) -$ $-(kl)^4\frac{i}{l}$

Tabloul nr. 3

$t_{21} = -\frac{B(kl)}{A(kl)}$ $-0{,}253$	$t_{12} = t_{21}$ $-0{,}253$	$t_{13} = -\frac{B(kl)}{3A(kl)}$ $-0{,}169$	$t_{14} = 0$ 0	$t_{15} = \frac{C(kl)}{r_{55}}$ $0{,}306$	$t_{16} = -\frac{D(kl)}{r_{66}}$ $-0{,}139$
$t_{31} = -\frac{B(kl)}{2A(kl)}$ $0{,}253$	$t_{32} = 0$ 0	$t_{23} = 0$ 0	$t_{24} = -\frac{B(kl)}{3A(kl)}$ $-0{,}169$	$t_{25} = \frac{C(kl)}{r_{55}}$ $0{,}306$	$t_{26} = -\frac{D(kl)}{r_{66}}$ $-0{,}139$
$t_{41} = 0$ 0	$t_{42} = -\frac{B(kl)}{2A(kl)}$ $-0{,}253$	$t_{43} = -\frac{B(kl)}{3A(kl)}$ $-0{,}169$	$t_{34} = -\frac{B(kl)}{3A(kl)}$ $-0{,}169$	$t_{35} = \frac{D(kl)}{r_{55}}$ $0{,}295$	$t_{36} = 0$ 0
$t_{51} = \frac{C(kl)}{2A(kl)}$ $0{,}761$	$t_{52} = \frac{C(kl)}{2A(kl)}$ $0{,}761$	$t_{53} = \frac{D(kl)}{3A(kl)}$ $0{,}490$	$t_{54} = \frac{D(kl)}{3A(kl)}$ $0{,}490$	$t_{45} = \frac{D(kl)}{r_{55}}$ $0{,}295$	$t_{46} = 0$ 0
$t_{61} = -\frac{D(kl)}{2A(kl)}$ $-0{,}735$	$t_{62} = -\frac{D(kl)}{2A(kl)}$ $-0{,}735$	$t_{63} = 0$ 0	$t_{64} = 0$ 0	$t_{65} = \frac{2F(kl)}{r_{55}}$ $1{,}240$	$t_{56} = \frac{2F(kl)}{r_{66}}$ $0{,}584$

În tabloul nr. 2 s-au arătat coeficienții ecuației metodei deformațiilor, iar în tabloul nr. 3 coeficienții de transmisie ai deplasărilor.

★

Avînd în vedere analogia existentă între calculul de stabilitate şi calculul dinamic al cadrelor, metoda prezentată poate fi aplicată şi în calculul de stabilitate.

În acest caz, se pot calcula prin iteraţie eforturile, ţinînd seama de influenţa forţelor axiale, precum şi sarcina de pierdere a stabilităţii.

CONCLUZII

— Metoda prezentată dă posibilitatea de a calcula prin aproximaţii succesive eforturile provenite din sarcinile dinamice. Ea este aplicabilă atît în cazul cadrelor cu noduri fixe, cît şi în cazul cadrelor cu noduri deplasabile. Convergenţa procesului de iteraţie este mai slabă decît în cazul static, însă suficient de rapidă pentru a da după trei, patru echilibrări aproximaţia suficientă în calculele tehnice.

— Metoda dă posibilitatea de a calcula rapid prima frecvenţă a vibraţiilor proprii. De remarcat că ea permite găsirea primei frecvenţe şi la sisteme mai complexe, pentru care nu se puteau obţine rezultate prin metodele exacte din cauza dificultăţilor de calcul.

— Simplitatea metodei permite ca ea să fie cu uşurinţă însuşită şi folosită de inginerii proiectanţi.

Primită la Redacţie la 20 iunie 1955

ANEXA 1

Tabel de funcţiunile folosite

$$A(kl) = -(kl)\,\frac{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1}$$

$$B(kl) = -(kl)\,\frac{\operatorname{sh} kl - \sin kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1}$$

$$C(kl) = -(kl)^2\,\frac{\operatorname{ch} kl - \cos kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1}$$

$$D(kl) = -(kl)^2\,\frac{\operatorname{sh} kl \sin kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1}$$

$$E(kl) = -(kl)^3\,\frac{\operatorname{ch} kl \sin kl + \operatorname{sh} kl \cos kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1}$$

$$F(kl) = -(kl)^3\,\frac{\operatorname{sh} kl + \sin kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1}$$

$$G(kl) = (kl)\,\frac{2 \operatorname{sh} kl \sin kl}{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}$$

$$H(kl) = (kl)^2\,\frac{\operatorname{ch} kl \sin kl + \operatorname{sh} kl \cos kl}{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}$$

$$K(kl) = (kl)^2 \frac{\operatorname{sh} kl + \sin kl}{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}$$

$$L(kl) = (kl)^3 \frac{2 \operatorname{ch} kl \cos kl}{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}$$

$$M(kl) = (kl)^3 \frac{\operatorname{ch} kl + \cos kl}{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}$$

$$N(kl) = (kl)^3 \frac{\operatorname{ch} kl \cos kl + 1}{\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl}$$

ANEXA 2

kl	A	B	C	D	E	F
0,0	4,000	2,000	6,000	6,000	12,000	12,000
0,1	4,000	2,000	6,000	5,999	11,999	12,000
0,2	3,999	2,000	6,000	5,999	11,999	12,000
0,3	3,999	2,000	6,000	5,999	11,996	12,001
0,4	3,999	2,000	6,000	5,998	11,990	12,003
0,5	3,999	2,000	6,001	5,996	11,976	12,008
0,6	3,998	2,001	6,004	5,993	11,951	12,016
0,7	3,997	2,001	6,007	5,987	11,910	12,031
0,8	3,996	2,003	6,012	5,978	11,847	12,052
0,9	3,993	2,004	6,020	5,965	11,756	12,084
1,0	3,990	2,007	6,031	5,947	11,628	12,128
1,1	3,986	2,010	6,045	5,923	11,455	12,189
1,2	3,980	2,014	6,064	5,891	11,228	12,268
1,3	3,972	2,020	6,089	5,849	10,936	12,369
1,4	3,963	2,027	6,119	5,797	10,567	12,498
1,5	3,951	2,036	6,158	5,732	10,110	12,659
1,6	3,936	2,047	6,205	5,653	9,549	12,856
1,7	3,919	2,060	6,263	5,550	8,871	13,097
1,8	3,898	2,076	6,333	5,441	8,059	13,386
1,9	3,873	2,095	6,415	5,304	7,095	13,733
2,0	3,843	2,118	6,514	5,141	5,960	14,144
2,1	3,808	2,145	6,630	4,951	4,633	14,630
2,2	3,767	2,176	6,766	4,728	3,089	15,201
2,3	3,720	2,212	6,926	4,470	1,304	15,871
2,4	3,664	2,255	7,112	4,171		
2,5	3,601	2,305	7,328	3,827		
2,6	3,527	2,362	7,580	3,430		
2,7	3,442	2,429	7,873	2,974		
2,8	3,344	2,506	8,214	2,451		
2,9	3,231	2,596	8,611	1,850		
3,0	3,101	2,701	9,074	1,160		
3,1	2,950	2,824	9,616	0,365		
3,2	2,775	2,968				
3,3	2,572	3,137				
3,4	2,332	3,338				
3,5	2,050	3,579				
3,6	1,713	3,869				
3,7	1,307	4,225				
3,8	0,810	4,667				

ANEXA 3

kl	G	H	K	L	M	N
0,0	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000
0,1	3,000	2,999	3,000	2,999	3,000	2,999
0,2	2,999	2,999	3,000	2,999	3,000	2,999
0,3	2,999	2,999	3,000	2,996	3,001	2,998
0,4	2,999	2,997	3,001	2,987	3,002	2,993
0,5	2,998	2,994	3,002	2,969	3,008	2,985
0,6	2,997	2,988	3,005	2,937	3,018	2,969
0,7	2,995	2,979	3,009	2,883	3,033	2,943
0,8	2,992	2,964	3,016	2,800	3,057	2,903
0,9	2,987	2,943	3,025	2,680	3,091	2,845
1,0	2,980	2,914	3,039	2,513	3,140	2,763
1,1	2,971	2,873	3,057	2,286	3,205	2,653
1,2	2,960	2,821	3,082	1,987	3,291	2,508
1,3	2,945	2,752	3,113	1,603	3,403	2,322
1,4	2,925	2,666	3,153	1,117	3,546	2,086
1,5	2,901	2,558	3,203	0,511	3,724	1,792
1,6	2,872	2,425	3,265	— 0,233	3,945	1,431
1,7	2,837	2,263	3,341	— 1,138	4,216	0,992
1,8	2,791	2,067	3,434	— 2,228	4,546	0,464
1,9	2,738	1,832	3,545	— 3,532	4,946	—0,167
2,0	2,675	1,550	3,680	— 5,080	5,429	—0,917
2,1	2,600	1,216	3,841	— 6,910	6,010	—1,803
2,2	2,510	0,820	4,034	— 9,063	6,708	—2,846
2,3	2,403	0,350	4,266	—11,591	7,548	—4,068
2,4	2,276					
2,5	2,125					
2,6	1,945					
2,7	1,728					
2,8	1,465					
2,9	1,145					
3,0	0,748					
3,1	0,247					
3,2	—0,397					
3,3	—1,255					
3,4	—2,445					
3,5	—4,197					

РАСЧЕТ ВИБРАЦИЙ РАМ ПО СПОСОБУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части работы показывается расчет путем последовательных приближений усилий, вызванных динамическими нагрузками. Автор исходит из уравнений метода деформаций и доказывает, что итеративный процесс сходится при $0 < \omega$ как для рам с неподвижными узлами, так и для рам с перемещающимися узлами.

Во второй части показывается простой способ расчета путем выбора значения первой частоты собственных вибраций.

LE CALCUL DES VIBRATIONS DES CADRES PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

(RÉSUMÉ)

La première partie du travail traite du calcul par approximations successives des efforts dus à des charges dynamiques. A partir des équations de la méthode des déformations, on démontre que le processus d'itération est convergent pour $0 < \omega$, tant pour les cadres à nœuds fixes que pour les cadres à nœuds déplaçables.

Dans la seconde partie, l'Auteur expose une méthode de calcul, simple, à l'aide du test de la première fréquence des vibrations propres.

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Bezuhov, *Nekotorie obobșcenia metodov stroitelnoi mehaniki v dinamike sooruienii. Issledovania po teorii soorujenii.* Gosstroiizdat, Moscova, 1939, vol. 3.
2. — *Dinamika soorujenii primerov i zadaci.* Stroiizdat, Moscova, 1947.
3. A. A. Belous, *Metod deformații v dinamike ramnih konstrukții. Issledovania po teorii soorujenii.* Gosstroiizdat, Moscova, 1939, vol. 3.
4. V. Kolousek, *Die Lösung der schwingenden Systeme mit der Deformationsmethode.* Technische Rundschau, 1942, p. 327.
5. — *Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1954.
6. N. K. Snitko, *Opredelenie ciastot sobstvennih kolebanii ramnih sistem i arok metodom momentov. Issledovania po teorii soorujenii.* Moscova, 1951, vol. 5.
7. — *Metodi rasciota soorujenii na vibrații i udar.* Leningrad, 1953.
8. I. V. Ananiev, *Spravocinik po rasciotu sobstvennih kolebanii uprughih sistem.* Gostehizdat, Moscova, 1946.
9. A. Raithel, *La dinamica dei sistemi solidali.* Giornale del Genio Civile, noiembrie-decembrie, 1952.
10. R. Agent, *Metoda aproximațiilor succesive și aplicarea ei în problemele de statică și alte probleme similare.* E.S.A.C., București, 1955.
11. B. N. Fadeev, *Vicislitelnie metodi lineinoi alghebri.* Moscova, 1950.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

FLAMBAJUL BARELOR DREPTE PRIN ŞOC AXIAL

DE

AUGUSTIN PETRE

Se presupun valabile legile lui Hooke, ipoteza lui Bernoulli şi principiul lui Saint-Venant.

Se presupune în plus că raportul dintre viteza de lovire şi viteza de propagare a sunetului în bara respectivă este mult mai mic decît raportul dintre deformaţia maximă şi lungimea barei.

Se neglijează efectul masei proprii a piesei lovite. Se consideră o bară de lungime l pe care cade de la o înălţime h o greutate P ca în figura 1.

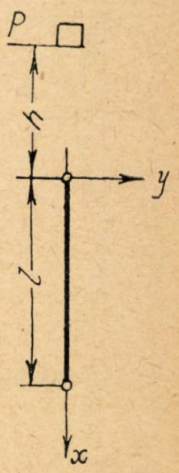


Fig. 1

Se presupune că bara este articulară la ambele capete. Lucrul mecanic exterior ce se aplică barei poate fi preluat de aceasta fie sub forma de lucru mecanic de compresiune fie sub formă de lucru mecanic de compresiune şi încovoiere. Primul caz conduce la calculul clasic de solicitare prin şoc. Al doilea caz este obiectul studiului de faţă.

În momentul şocului, forţa instantanee poate să atingă ca valoare forţa critică de flambaj. Poate începe deci în acest moment o deformaţie la încovoiere care continuă pînă la înmagazinarea prin deformaţie a întreg lucrului mecanic exterior aplicat.

Deoarece fenomenul se consideră pînă la limita de valabilitate a legii lui Hooke, pentru piesele curente, deformaţiile nu sînt atît de mari încît să intervină în expresia curburii termeni de ordin superior.

La sfîrşitul deformaţiei, ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate este de forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \tag{1}$$

iar soluţia este de forma

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Ţinînd seama de condiţiile la limită, soluţia ecuaţiei (1) este

$$y = y_1 \sin \frac{\pi}{l} x. \tag{2}$$

Lucrul mecanic înmagazinat prin încovoiere pe bara astfel deformată este (fig. 2)

$$L_i = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{EI\pi^4 y_1^2}{4l^3}. \tag{3}$$

Vîrful barei coboară din cauza încovoierii cu cantitatea

$$u = \int_0^l \left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right] dx \approx \frac{\pi^2 y_1^2}{4l}. \tag{4}$$

Afară de încovoiere bara este comprimată de forţa dinamică instantanee şi vom nota scurtarea barei sub această forţă cu δ.

Unghiul dintre fibra medie deformată şi între cea nedeformată fiind mic, cosinusul lui este 1, iar lucrul mecanic înmagazinat de bară prin compresiune este

$$L_c = \frac{EA}{2l}\delta. \tag{5}$$

Lucrul mecanic exterior aplicat barei este

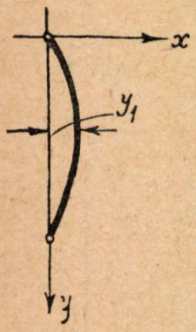


Fig. 2

$$L_e = P\left(h + \delta + \frac{y_1^2\pi^2}{4l}\right). \tag{6}$$

Utilizînd legea conservării energiei se obţine

$$P\left(h + \delta + \frac{y_1^2\pi^2}{4l}\right) = \frac{EI}{4}\frac{y_1^2\pi^4}{l^3} + \frac{EA}{2l}\delta^2, \tag{7}$$

de unde

$$y_1^2 = \frac{\frac{4l}{\pi^2}\left(h + \delta - \frac{EA}{2Pl}\delta^2\right)}{\frac{\pi^2 EI}{Pl^2} - 1}, \tag{8}$$

iar ecuaţia fibrei medii la sfîrşitul deformaţiei este

$$y = \sqrt{\frac{\frac{4l}{\pi^2}\left(h + \delta - \frac{EA}{2Pl}\delta^2\right)}{\frac{\pi^2 EI}{Pl^2} - 1}} \sin\frac{\pi}{l}x. \tag{9}$$

Deoarece forţa dinamică instantanee la sfîrşitul deformaţiei este cea critică de flambaj

$$\delta = \frac{\pi^2 I}{lA}, \tag{10}$$

iar ecuaţia fibrei medii deformate se poate scrie

$$y = \sqrt{\frac{\frac{4lh}{\pi^2} + 4\frac{I}{A} - \frac{2EI^2\pi^2}{Pl^2 A}}{\frac{\pi^2 EI}{Pl^2} - 1}} \sin\frac{\pi}{l}x$$

sau

$$y = \delta_{st} \frac{2l}{\pi^2 i} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}\left[2\alpha - \alpha^2 + \frac{2h}{\delta_{st}}\right]} \sin \frac{\pi}{l} x, \tag{11}$$

unde

$$\alpha = \frac{P_f}{P} \; ; \quad P_f = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \; ; \quad \delta_{st} = \frac{Pl}{EA} \; ; \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \; ;$$

unghiul de rotire al vîrfului barei este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{2\delta_{st}}{\pi i} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}\left[2\alpha - \alpha^2 + \frac{2h}{\delta_{st}}\right]}. \tag{12}$$

Se observă că dacă valoarea greutăţii P ce cade, tinde către sarcina critică de flambaj, deformaţiile tind către infinit şi se ajunge în orice caz la flambajul clasic.

Se observă de asemenea că există o condiţie pentru ca bara să se încovoaie pentru valori ale greutăţii mai mici decît forţa critică de flambaj. Condiţia este

$$\frac{4lh}{\pi^2} + 4\frac{I}{A} - \frac{2EI^2\pi^2}{Pl^2A} \geqslant 0, \tag{13}$$

de unde rezultă fie înălţimea de la care căzînd greutatea, bara începe să se încovoaie

$$h = \frac{\pi^2 I}{2lA}\left(\frac{EI\pi^2}{Pl^2} - 2\right) \tag{14}$$

fie forţa de la care începe să apară această încovoiere

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{\frac{2lAh}{\pi^2 I} + 2}. \tag{15}$$

Se observă că o forţă jumătate din cea critică aplicată dinamic de la înălţimea zero poate produce un început de încovoiere.

Rămîne a se vedea care sînt eforturile unitare maxime ce se produc în cazul considerat.

Deoarece se cunoaşte forma fibrei medii deformate, din ecuaţia diferenţială a acesteia se poate obţine momentul încovoietor maxim

$$M_{max} = EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{max} = EIy\frac{\pi^2}{l^2}, \tag{16}$$

iar efortul unitar corespunzător este

$$\sigma = Eay_1 \frac{\pi^2}{l^2}, \tag{17}$$

unde a este distanţa de la axa neutră pînă la fibra extremă.

Datorită faptului că în bară există și o compresiune, efortul unitar total maxim va fi

$$\sigma = \frac{Ea\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{2\frac{I}{A}\left(2-\frac{\pi^2 EI}{pl^2}+\frac{2lhA}{\pi^2 I}\right)}{\frac{\pi^2 EI}{Pl^2}-1}}+\frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

sau

$$\sigma = \sigma_{st}\left[2\frac{a}{i}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}\left[2\alpha-\alpha^2+\frac{2h}{\delta_{st}}\right]}+\alpha\right], \tag{18}$$

unde

$$\delta_{st} = \frac{P}{A}.$$

Se observă că pentru a se produce și încovoiere (13), este necesar ca

$$2\alpha-\alpha^2+\frac{2h}{\delta_{st}} \geqslant 0$$

de unde la limită considerînd soluția posibilă

$$\alpha = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}. \tag{19}$$

Se observă că această expresie este tocmai multiplicatorul de impact la bare solicitate la șoc axial în ipoteza că acestea nu se încovoaie.

Rezultă de aici că dacă există posibilitatea să se producă și încovoiere prin șoc axial, eforturile unitare ce rezultă sînt în orice caz mai mari decît dacă am considera că bara rămîne dreaptă, poziție care aici este nestabilă și în consecință trebuie să se țină seama în dimensionare de acest fenomen.

În ceea ce privește forma fibrei medii deformate, ecuația ei diferențială admite ca soluții și armonice de ordin superior, însă acestea nu conduc la cazuri critice nici în privința deformațiilor, acestea nedepășind cele ale fundamentalei, nici în privința eforturilor unitare. Un calcul elementar poate arăta că, pentru același efort unitar maxim la încovoiere, lucrul mecanic absorbit este același ca și pentru fundamentală. Încovoierea constituind un caz critic, la o armonică superioară, forța critică de flambaj este mai mare, absoarbe prin compresiune simplă, deci într-un mod avantajos pentru eforturi unitare, mai multă energie și în consecință armonicile superioare sînt mai puțin periculoase.

Dacă prin datele problemei se cunoaște viteza v cu care masa de greutate P atinge vertical vîrful barei, formulele date rămîn valabile înlocuind h prin $\frac{v^2}{2g}$.

Dacă masa ce cade nu este într-un cîmp gravitațional sau lovirea barei se face orizontal, bara fiind așezată tot orizontal, expresia (6) devine

$$L_e = Ph \quad \text{sau} \quad L_e = \frac{Pv^2}{2g}$$

iar ecuația fibrei medii deformate devine

$$y_1 = \sqrt{\frac{2Pv^2l^3}{EIg\pi^2}-\frac{2I}{A}}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{20}$$

Unghiul de rotire al vîrfului barei este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \sqrt{\frac{2Pv^2l}{EIg\pi^2} - \frac{2I\pi^2}{Al^2}}. \tag{21}$$

Se observă că în acest caz nu se produce flambajul clasic.

Flambajul dinamic se poate produce numai dacă

$$\frac{2Pv^2l^3}{EIg\pi^4} - \frac{2I}{A} \geqslant 0 \tag{22}$$

sau la limită $\quad \dfrac{Pv^2}{g} = \dfrac{\pi^4 EI}{Al^3} \quad$ sau $\quad \alpha = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\delta_{st}}}.$

Utilizînd relația (17) eforturile unitare maxime sînt

$$\sigma = \frac{Ea\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{2Pv^2l^3}{EIg\pi^4} - \frac{2I}{A} + \frac{\pi^2 EI}{Al^2}}$$

sau

$$\sigma = \sigma_{st}\left[2\frac{a}{i}\sqrt{\frac{v^2}{2g\,\delta_{st}} - \frac{\alpha^2}{2}} + \alpha\right]. \tag{23}$$

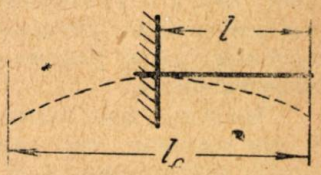


Fig. 3

Pentru alte condiții de rezemare, considerînd de exemplu o bară incastrată la un capăt, figura 3, se observă că relația (7) se poate scrie

$$P\left(h + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\frac{y_1^2\pi^2}{4l_f}\right) = \frac{1}{2}\frac{EI}{4}\frac{y_1^2\pi^4}{l_f^3} + \frac{EA}{2l_f}\delta^2 \tag{24}$$

deoarece se observă că toți termenii reprezentînd energii, cu excepția termenului Ph, au valoare pe jumătate din aceea a barei articulate la ambele capete.

Pentru a se generaliza formulele în toate cazurile de flambaj ale lui Euler se înlocuiește l prin l_f și de asemenea trebuie să se înlocuiască h prin h_f. Relațiile ce determină pe h_f în funcție de h sînt aceleași ca și cele între l_f și l și sînt arătate în figura 4.

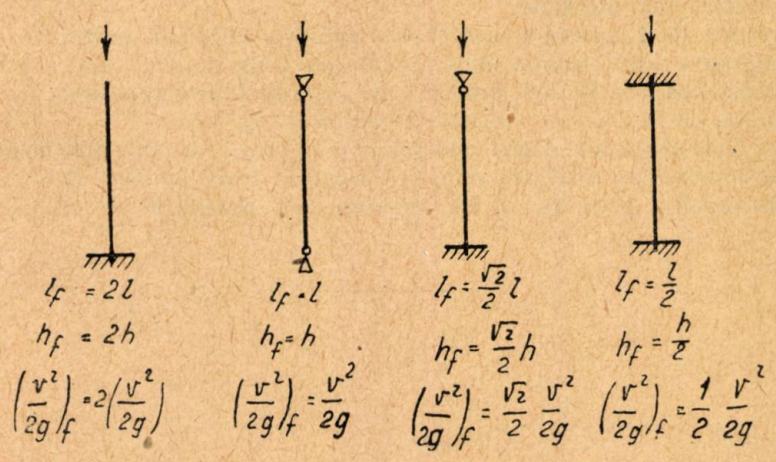


Fig. 4

Dacă se cunoaște viteza de lovire, relațiile rămîn valabile înlocuind pe h_f prin $\left(\dfrac{v^2}{2g}\right)_f$.

Primită la redacție la 29 iunie 1955.

ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ ПОД ВЛИЯНИЕМ ОСЕВОГО УДАРА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пренебрегая массой основания, подвергшегося удару и волновым эффектом автор вычислил форму бруса, деформированного сжатием от удара, а также величину нормальных максимальных унитарных усилий, вызываемых при различных предельных условиях.

Для того чтобы вызвать изгиб ударом, необходимо удовлетворить известное условие.

Из выражения нормальных максимальных унитарных усилий вытекает, что эти унитарные усилия всегда больше, чем те, которые получаются если не учитывать, как это делается при классическом решении проблем удара, усилие на изгиб, которое является результатом неустойчивости бруса.

Поэтому при проектировании необходимо принимать во внимание и это явление, так как вышеуказанные зависимости установлены для самых неблагоприятных случаев унитарных усилий.

FLAMBAGE DES BARRES DROITES PAR CHOC AXIAL

(RÉSUMÉ)

On calcule, en négligeant la masse de la barre frappée et l'effet d'onde, la forme de la barre déformée, dans le cas d'une sollicitation à la compression par choc, et la valeur des efforts unitaires normaux maximums, qui se produisent pour différentes conditions à la limite.

Pour que le flambage par choc puisse se produire, il est nécessaire qu'une certaine condition soit satisfaite.

Il résulte de l'expression des efforts unitaires normaux maximums que ces efforts unitaires sont toujours plus grands que ceux obtenus sans considération de la sollicitation à la flexion, produite par suite de l'instabilité de la barre, ainsi qu'est traité, de la manière classique, le problème du choc.

Il est donc nécessaire, dans l'élaboration d'un projet, de tenir également compte de ce phénomène, les relations indiquées ci-dessus étant établies dans les cas les plus défavorables, pour les efforts unitaires, qui pourraient se produire.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

O METODĂ PENTRU SIMPLIFICAREA CONSOLIDĂRII PODURILOR METALICE

DE

T. REVICI

CONSIDERAŢII GENERALE ASUPRA PROBLEMEI CONSOLIDĂRII PODURILOR

Necesitatea creării posibilităţii de circulaţie a sarcinilor grele pe diferite linii ale reţelei feroviare ridică probleme de deosebită importanţă pentru exploatarea căilor ferate.

Circulaţia locomotivelor puternice şi a vagoanelor grele pe diferite linii este limitată în genere de profilul şinii şi de rezistenţa podurilor.

Introducerea trenurilor de vagoane grele, remorcate de locomotive puternice, impune refacţia liniilor cu şini de profil greu şi înlocuirea sau consolidarea unora din podurile vechi, care nu corespund pentru circulaţia acestor sarcini.

Podurile de pe diferite linii au fost construite la diferite date pentru sarcinile în circulaţie la epoca construirii lor, sarcini cu mult mai mici decît cele actuale şi de multe ori fără acoperire pentru creşterea lor în viitor.

Podurile de zidărie, prin masivitatea lor şi prin marele lor coeficient de siguranţă, sînt mai puţin influenţate de creşterea sarcinilor mobile, influenţa lor, raportată la cea a sarcinilor permanente, fiind mult mai mică decît la podurile metalice.

Proiectarea şi execuţia consolidării podurilor de zidărie ridică numeroase şi grele probleme, făcîndu-le uneori aproape imposibile, astfel că — în multe cazuri — reconstrucţia lor definitivă este o soluţie mai indicată decît consolidarea lor.

În general, programul reconstrucţiei şi consolidării podurilor trebuie să meargă în acelaşi ritm cu refacţia suprastructurii şi chiar să o întreacă, în nici un caz nu trebuie să-i rămînă în urmă.

Avînd în vedere marele număr de poduri metalice, care nu corespund sarcinilor grele prevăzute a circula pe diferitele linii şi costul foarte ridicat al investiţiilor necesare reconstrucţiei lor, precum şi posibilităţile reduse ale industriei noastre metalurgice de a le înlocui, problema păstrării lor în cale şi deci a consolidării lor se impune în mod indiscutabil.

Consolidarea podurilor metalice

O bună consolidare necesită — în general — scoaterea tablierelor de sub circulaţie şi descărcarea lor de efectul sarcinilor permanente, ceea ce impune construirea unor schele puternice pentru susţinerea circulaţiei, sau riparea podurilor

afară din cale, cu construirea unor poduri provizorii în cale sau eventual în variantă, necesitînd — în acest caz — terasamente mai mult sau mai puțin importante.

Un pod consolidat nu este un pod nou, este un pod vechi cu defecte inițiale de concepție și execuție, avînd la bază principii învechite, erori de proiectare, o nesiguranță a calității etc., însă întărit pentru a rezista unor sarcini sporite, ceea ce face ca durata de amortizare a consolidării unui pod vechi să nu fie aceeași ca a unui pod nou, chiar dacă ambele s-ar găsi în aceleași condiții de rezistență.

De asemenea, schelăria necesară, material și manoperă, raportată la unitatea de greutate, este de mai multe ori mai mare raportată la materialul nou ce se adaugă prin consolidare, decît pentru materialul podurilor noi.

Aceste inconveniente serioase ne obligă, în cele mai multe cazuri, să atacăm problema consolidării podurilor, cu menținerea lor sub circulație, fără susținere, pentru a economisi astfel materialul lemnos, necesar schelelor.

Consolidarea sub circulație evită ripări, variante și poduri provizorii, lucrări grele și costisitoare.

În starea de tranziție a economiei noastre naționale, trebuie să ne străduim să păstrăm cît mai mult în cale imensele cantități de material metalic, ce se găsesc în podurile noastre metalice și să stăruim în aplicarea soluțiilor bazate pe consolidarea tablierelor existente.

Consolidarea podurilor, fără descărcarea lor de influența greutății permanente, are inconvenientul de a folosi numai în parte materialul nou de consolidare, care nu poate fi solicitat decît cu o parte a efortului și anume numai cu aceea din influența sarcinilor mobile, parte cu atît mai mică, procentual, cu cît influența sarcinilor permanente este mai mare, adică cu cît deschiderea este mai mare, deoarece materialul nou preia numai — în raportul secțiunilor noi către cele vechi consolidate — o cotă parte din efortul produs de sarcinile utile și accidentale.

Raportul dintre sarcina mobilă, înmulțită cu coeficientul de impact și suma acestui produs cu sarcina permanentă ne indică proporția în care materialul nou se poate încărca față de cel vechi, respectiv procentul din rezistența admisibilă, cu care materialul nou ar putea fi solicitat, în cazul unei solidarizări ideale a elementelor nou adăugate cu cele vechi, în ipoteza că efortul unitar în piesele vechi atinge rezistența admisibilă.

Problema consolidării este cu atît mai grea cu cît secțiunile inițiale sînt mai slabe și cu cît influența sarcinilor permanente introduce un efort unitar mai mare în barele existente.

Menționăm că, la execuția lucrărilor de consolidare care se fac sub circulație, trebuie dată o deosebită atenție ca — la trecerea trenurilor — să nu fie nici o piesă slăbită sau insuficient asigurată la prindere (îmbinare sau înnădire), ceea ce necesită o supraveghere continuă, întreruperi în execuție, măsuri speciale de protecție a vieții lucrătorilor etc., toate sporind costul lucrărilor. Execuția lucrărilor trebuie făcută numai în timpul unor întreruperi de circulație, care durează zilnic mai multe ore, ceea ce stînjenește exploatarea. De aceea trebuie urmărit ca execuția lucrărilor pe șantier să fie cît mai simplă și să dureze un timp cît mai scurt.

Cele mai multe dintre poduri și în special cele mari, vor trebui să fie consolidate sub circulație, fără descărcare de eforturile provocate de sarcinile permanente, fără schele fixe, folosind numai schele ușoare, mobile.

În această situație, consolidările, proiectate a fi executate după metodele clasice, necesită mai mult material decît cele ce se execută cu susținerea tablierelor, de asemenea mai multe nituri, care scumpesc costul total al lucrărilor prin prețul lor ridicat față de al materialului laminat și prin procentul lor mare, rapor-

tat la materialul nou și — mai ales — prin costul foarte ridicat al manoperei, executate în condiții deosebit de grele și anevoioase.

Scoaterea niturilor alterează de multe ori materialul în jurul găurilor.

Metoda pentru simplificarea consolidărilor

S-au executat, în străinătate, numeroase consolidări de poduri, prin introducerea de macaze întinse la talpa inferioară, pe care s-au sprijinit nodurile grinzilor principale.

În alte cazuri, s-au transformat grinzi independente în grinzi continue, susținute de o talpă superioară, urmărind curba momentelor, ori s-au introdus grinzi noi pentru dublarea pereților grinzilor cu zăbrele ale podurilor etc.

Aceste metode au însă inconvenientul de a nu putea fi aplicate la orice fel de grinzi, de a necesita înălțimi mari libere sub pod, de a nu consolida elementele căii, longeroni și antretoaze, de a crea unele probleme deosebit de dificile la capetele macazelor și în special de a modifica esențial aspectul estetic al podurilor mari, monumente naționale, cum sînt viaductele și podurile dunărene, care ne-au preocupat în mod special.

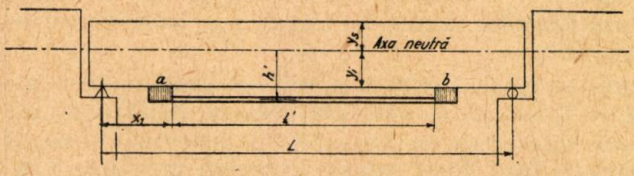


Fig. 1

La podurile cu calea jos, cu înălțime disponibilă limitată între nivelul apelor mari și muchia inferioară a tablierului, introducerea unor tălpi poligonale sub tablier este practic imposibilă.

Adîncind problema consolidării podurilor mari, am urmărit să găsim posibilitatea executării acestor consolidări, cu reducerea manoperei extrem de anevoioase a scoaterii niturilor de solidarizare și a executării pe șantier — în general cu mijloace manuale — a găurilor de nit în materialul nou adăugat, prin găurile existente, ceea ce — de multe ori — a necesitat introduceri de fururi și scoateri de platbande și introduceri de platbande noi între cele existente. De asemenea, am urmărit evitarea înlocuirii niturilor de rezistență la înnădiri și îmbinări.

Toate inconvenientele metodelor arătate mai sus se pot evita folosind metoda simplificată, ce propunem, care — în loc de tălpi curbe sau poligonale — introduce bare drepte, rigide, de secțiune corespunzătoare, care nu trebuie să fie aplicate pe toată lungimea tălpii grinzilor cu zăbrele sau cu inimă plină, ci numai prinse în anumite puncte finale și în punctele de variație a secțiunii și susținute ușor din distanță în distanță, pe porțiunile cu solicitări constante, respectiv folosind și unele prinderi intermediare de transmitere în punctele de variație a secțiunii (fig. 1).

Barele de consolidare pot fi alcătuite cu secțiuni simple, laminate, nituite sau sudate în ateliere și numai montate pe șantier. Aplicarea metodei permite și folosirea de bare alcătuite și solidarizate prin sudură și montate prin nituire sau sudură pe tabliere existente.

Metoda simplificată pe care o propunem permite execuția — aproape integrală în atelier — a elementelor noi de consolidare și introducerea lor în operă,

cu un număr redus de nituri de prindere, fără a modifica soluţia statică şi păstrînd neschimbat aspectul podului.

Aplicarea ei este diferită, atît ca teorie cît şi ca soluţionare practică, pentru grinzile cu inimă plină, unde influenţa excentricităţii barei de consolidare este favorabilă, şi pentru grinzile cu zăbrele, unde această influenţă este defavorabilă şi deci trebuie redusă la minim.

În general, tălpile superioare ale tablierelor vechi n-au nevoie decît de consolidări neînsemnate, în schimb, tălpile inferioare fiind slabe, necesită consolidări importante.

Aceste bare de consolidare ale tălpii inferioare au eforturi axiale, de întindere, din care cauză au fost numite şi tiranţi, iar metoda acestor consolidări simplificate a fost numită şi metoda de consolidare prin tiranţi.

Prinderea acestor bare de consolidare se poate face fie direct, prin intermediul unor fururi, dacă variaţiile de secţie în lungul pieselor şi distanţa ce trebuie lăsată pentru capetele niturilor existente precum şi spaţiul necesar pentru întreţinere şi vopsire nu necesită grosimi prea mari, care ar putea întrece lungimea admisibilă maximă a niturilor, fie indirect, prin intermediul unor tacheţi, console prinse rigid pe tălpile grinzilor existente, de care se prind barele de consolidare.

Secţiunea tacheţilor şi nituirea lor de barele pe care le consolidează, trebuie calculată pe baza efortului maxim în tiranţi şi a momentului de excentricitate produs de acest efort.

Problema este cu totul diferită la grinzile cu inimă plină şi la cele cu zăbrele.

La grinzile cu inimă plină, secţiunea barei de consolidare, care trebuie aplicată — mai ales la grinzile cu cale sus (inclusiv longeronii) — numai la talpa inferioară, cea superioară fiind direct sub circulaţie este greu accesibilă, se va încărca, sub influenţa sarcinilor mobile, cu acelaşi efort unitar ca şi fibra extremă a tălpii inferioare, cu care va avea deformaţii (lungiri) identice. Bara se va prinde în afara zonei în care efortul unitar total întrece rezistenţa admisibilă şi va fi susţinută constructiv în interval.

Pentru grinzile cu zăbrele, unde barele sînt considerate articulate şi deci cu eforturi axiale, se va urmări ca barele de consolidare să introducă excentricităţi cît mai reduse, avînd centrul de greutate cît mai apropiat posibil de cel al barei (talpă sau diagonală), pe care o consolidează.

La tălpi, secţiunea barei de consolidare poate fi constantă sau să varieze în diferite panouri, asigurîndu-se — la nodurile respective — prinderea suplimentului de secţie al barei de consolidare.

Momentele produse de excentricitatea tirantului în grinzi cu zăbrele, trebuie calculate şi repartizate la noduri (printr-o metodă aproximativă — Cross etc.), putîndu-se admite, în acest caz, o rezistenţă corespunzătoare, sporită.

Prinderea, în mijlocul panourilor, a capetelor barei de consolidare micşorează influenţa la nodurile vecine a excentricităţii, necesită însă o verificare la încovoiere şi eventual o consolidare a barei respective.

Prinderea tiranţilor trebuie să fie rigidă în toate direcţiile, asigurînd barele de consolidare, împotriva unei eventuale torsiuni.

Metoda nu trebuie folosită în mod rigid, aplicarea ei permite consolidarea independentă a oricărei bare, precum şi variaţia secţiunii barelor de consolidare în lungul elementelor, pe care le consolidează.

Aplicarea metodei permite folosirea parţială — dacă este mai avantajos — a consolidărilor clasice, prin nituirea continuă a secţiunilor de consolidare, introducere de tălpi intermediare de flambaj, contradiagonale etc.

Aplicarea metodei permite ușor și introducerea unor eforturi inițiale în barele de consolidare, avînd ca efect descărcarea parțială de efort a elementelor existente ale tablierelor, ceea ce poate permite obținerea unor importante economii în cantitățile necesare de material nou de consolidare.

Introducerea unor eforturi inițiale în bara de consolidare se poate face prin diferite metode, în raport cu mărimea secțiunii și mărimea forței axiale: dornuri în găuri puțin decalate (0,5 ... 1 mm), șuruburi cu piuliță manevrate manual cu chei cu mare braț de pîrghie, încălzire parțială, prese hidraulice etc.

La poduri de șosea, influența sarcinilor permanente este mai mare și aplicarea metodei trebuie să țină seamă de aceasta. Ea este cu atît mai indicată, cu cît talpa superioară a longeronilor și antretoazelor este mai greu accesibilă. De asemenea metoda ar putea fi aplicată cu folos la consolidarea construcțiilor metalice civile și industriale.

Nu avem cunoștință dacă această metodă a mai fost vreodată utilizată în altă țară, nici dacă s-a scris ceva în acest sens în literatura tehnică de specialitate.

Credem că metoda are o reală valoare practică, reducînd în mare proporție costul lucrărilor de consolidare a podurilor metalice și în special manopera pe șantier pentru executarea consolidărilor.

În afară de economia de manoperă pe șantier, care este grea, scumpă și greu de controlat și înlocuirea ei printr-o manoperă în uzină, numai pe material nou și deci o importantă reducere de cost, metoda permite o aplicare vastă necesitînd cadre tehnice de monteri specializați, cu mult mai puțin numeroase, datorită timpului redus de execuție pe șantier.

În unele cazuri speciale, aplicarea metodei a constituit o soluție ușoară, rapidă și ieftină.

S-au ivit unele cazuri, în care metodele clasice ar fi impus soluții grele și scumpe și unde consolidarea obișnuită apărea atît de grea, că putea fi socotită practic ca nerealizabilă și unde aplicarea acestei metode a dat soluții ușor realizabile.

Aplicarea metodei, care folosește în mare măsură prefabricate metalice, permite consolidarea rapidă a podurilor mari, care necesită șantiere întinse și numeroase cadre specializate pentru a reduce durata în timp a execuției, mai ales la acele poduri cu intensă circulație, uneori apropiată de limita capacității lor de circulație, unde orice stînjenire provoacă grele probleme exploatării și deci trebuie evitată.

Un alt avantaj îl constituie rapiditatea metodei, care permite—în scurt timp—consolidarea mulțimei de poduri mici și mijlocii, ce sînt pe toate liniile, ceea ce constituie un factor foarte important în problemele direct legate de exploatare.

Metoda a fost aplicată în cîteva cazuri atît la tabliere cu inimă plină cît și la grinzi cu zăbrele.

Execuția—ca și proiectarea—a fost ușoară, rapidă și foarte puțin costisitoare.

Metoda are — ca toate metodele tehnice — anumite limite de aplicare; este însă, fără îndoială, indicată aproape în toate cazurile care admit consolidarea clasică, fiind uneori aproape singura posibilă.

Notăm că rezultatele obținute prin măsurarea eforturilor unitare în elementele grinzilor cît și în barele de consolidare (în tiranți), la încercarea podurilor, după consolidare, au confirmat în totul ipotezele avute în vedere la calculul acestor consolidări, atît la grinzi cu inimă plină, cît și la grinzi cu zăbrele.

Norme speciale de calcul

Problema aplicării metodei de consolidare simplificată a podurilor metalice prezintă două aspecte, cu totul diferite și anume:

a) La grinzile cu inimă plină, numeroase, dar în genere de mici deschideri, solicitate la încovoiere, barele de consolidare introduc momente de încovoiere de sens contrar celor care acționează asupra grinzii sub influența sarcinilor verticale, descărcînd deci grinda.

Consolidarea acționează în raport direct cu mărimea secțiunii de consolidare și cu mărimea excentricității ei. Grinzile cu inimă plină fiind în genere direct încărcate, este important să se poată realiza consolidarea excentric numai la talpa accesibilă, care nu e direct acționată de circulație, adică la talpa inferioară.

b) La grinzile cu zăbrele, care constituie aproape totalitatea podurilor metalice mari și mijlocii și la care barele sînt solicitate la eforturi axiale, trebuie urmărit ca excentricitatea barelor de consolidare să fie cît mai mică. Se va urmări ca secțiunile barelor de consolidare să fie așezate astfel ca să aibă centrul de greutate cît mai apropiat de cel al barei pe care o consolidează.

În cele ce urmează indicăm unele norme speciale de calcul al consolidărilor, pe baza acestei metode.

Grinzi cu inimă plină

Consolidarea tălpilor superioare ale longeronilor și ale grinzilor principale direct încărcate de traverse, precum și ale antretoazelor, nu este posibilă, dacă se folosește metoda clasică, adică desnituirea platbandelor superioare și adăugarea de noi platbande, decît cu repetate și îndelungate întreruperi de circulație și o manoperă considerabilă.

În aceste cazuri recomandăm aplicarea sub talpa inferioară a acestor grinzi — la distanță corespunzătoare — a unor bare de consolidare rigide (tiranți independenți) prinse numai la capete cu ajutorul unor console, relativ joase (tacheți), nituite sau sudate, care să acopere întreaga porțiune $a - b = L'$, în care secțiunea grinzii este insuficientă și deci trebuie consolidată (fig. 1).

Sub influența sarcinilor mobile, se va naște în bara de consolidare o forță axială de întindere, constantă între punctele de prindere și care acționează centric în bară, dacă aceasta este legată centric de tacheții de prindere.

Influența acestei bare de consolidare poate fi înlocuită prin aceea a unei forțe excentrice de compresiune, aplicată în axa acestei bare, care ar corespunde în grindă cu o compresiune axială și un moment de sens contrar momentului încovoietor produs de sarcinile verticale.

Sistemul este static nedeterminat și rezolvarea lui se poate face conform metodelor obișnuite, folosind ecuația minimului lucrului mecanic interior, respectiv anulînd derivata acestei ecuații în raport cu necunoscutele alese.

Notăm cu X forța axială ce se naște în bara de consolidare, pe care o considerăm prinsă articulat de grindă, prin intermediul unor tacheți, la distanța h' de axul grinzii.

Nu s-a ținut seamă de influența forței tăietoare în grindă și nici de cea a susținerilor intermediare, care s-au considerat neglijabile.

Ecuația lucrului mecanic interior este

$$L_i = \frac{1}{2}\int \frac{M_x^2 dx}{EI_x} + \frac{1}{2}\int \frac{N_x^2}{EA_x}\,dx + \frac{1}{2}\,k\int \frac{T_x^2}{GA_x}\,dx,$$

$$\frac{dL_i}{dX} = \int \frac{M_x}{EI_x}\cdot\frac{dM_x}{dX}\,dx + \int \frac{N_x}{EA_x}\cdot\frac{dN_x}{dX}\,dx = 0.$$

În grindă

$$M_x = \psi M_{px} - h'\cdot X,$$

în care:

ψM_{px} este momentul produs într-o secțiune, la distanța x, de sarcinile mobile, înmulțite cu coeficientul de impact;

$$\frac{dM_x}{dX} = -h';$$

$$N_x = -X;$$

$$\frac{dN_x}{dX} = -1.$$

În bara de consolidare

$$M_x = 0,$$

$$N_x = X,$$

$$\frac{dN_x}{dX} = 1,$$

$$\frac{dL_i}{dX} = -h'\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{\psi M_{px} - h'X}{EI_x}\,dx + \int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{X}{EA_x}\,dx + \int_0^{L'} \frac{X}{EA_t}\,dx = 0,$$

în care A_t este secțiunea brută constantă a barei de consolidare

$$\frac{dL_i}{dX} = -h'\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{\psi M_{px}}{I_x}\,dx + h'^2 X\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{dx}{I_x} + X\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{dx}{A_x} + X\int_0^{L'} \frac{dx}{A_t} = 0, \qquad (\alpha)$$

în care I_x și A_x sînt variabile, depinzînd de numărul platbandelor și eventual de înălțimea variabilă a grinzii;

$\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{\psi M_{px}}{I_x}\,dx$ este suprafața momentelor raportate la momentul de inerție brut al secțiunii respective a grinzii pe lungimea consolidării;

$\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{dx}{I_x}$ este suma inversului momentului de inerție brut al grinzii;

$\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{dx}{A_x}$ este suma inversului secțiunii brute a grinzii.

Cu suficientă aproximaţie, notăm

$$\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{\psi M_{px}}{I_x}\,dx = \frac{S_{mp}}{I_m} = \frac{L' \cdot M_{pm}}{I_m},$$

$$\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{dx}{I_x} = \frac{L'}{I_m},$$

$$\int_{x_1}^{x_1+L'} \frac{dx}{A_x} = \frac{L'}{A_m},$$

în care M_{pm}, I_m şi A_m sînt mediile ponderate, pe lungimea L', ale momentului din sarcini mobile (înmulţite cu coeficientul de impact ψ), ale momentului brut de inerţie şi ale secţiunii brute a grinzii.

Introducînd valorile precedente în (α), găsim

$$-h' \frac{M_{pm}}{I_m} + X\left(\frac{h'^2}{I_m} + \frac{1}{A_m} + \frac{1}{A_t}\right) = 0,$$

de unde

$$X = \frac{M_{pm}}{h' + \frac{I_m}{h'}\left(\frac{1}{A_m} + \frac{1}{A_t}\right)}. \tag{1}$$

Se vede că forţa de consolidare X este cu atît mai mare cu cît secţia A_t a barei de consolidare este mai mare.

După consolidare, efortul unitar într-o secţiune oarecare, sub influenţa forţei X aplicată în axul tirantului, care dă o compresiune excentrică în secţiune, este:

în talpa superioară $\sigma_s = -\sigma_{gs} - \psi \cdot \sigma_{ps} - \frac{X}{A} + \frac{X \cdot h'}{W_{sn}}$; (2)

în talpa inferioară $\sigma_i = \sigma_{gi} + \psi \cdot \sigma_{pi} - \frac{X}{A} - \frac{X \cdot h'}{W_{in}}$ (3)

în care

σ_{gs} respectiv σ_{gi}, este efortul unitar produs de sarcinile permanente în fibrele extreme ale tălpii superioare, respectiv inferioare ale secţiei considerate, în grinda iniţială;

σ_{ps} respectiv σ_{pi} este efortul unitar provocat de sarcina mobilă în aceeaşi secţiune;

A este secţiunea brută a grinzii iniţiale în secţiunea considerată;

W_{sn} respectiv W_{in} este modulul de rezistenţă net pentru fibra extremă superioară, respectiv inferioară în secţiunea considerată.

Valorile σ_{gs} şi σ_{gi}; σ_{ps} şi σ_{pi}; W_{sn} şi W_{si} sînt egale pentru secţiuni simetrice şi diferite pentru cele nesimetrice.

Punînd condiţia ca, după consolidare, sub influenţa forţei X din bara de consolidare (tirant), efortul unitar în fibra extremă comprimată şi întinsă să nu întreacă

rezistența admisibilă, care este scopul urmărit prin consolidare, găsim două valori ale forței X și anume:

$$X_s = \frac{[\sigma_{gs} + \psi \cdot \sigma_{ps} - \sigma_a]}{\frac{h'}{W_{sn}} - \frac{1}{A}} \tag{4}$$

și

$$X_i = \frac{[\sigma_{gi} + \psi \cdot \sigma_{pi} - \sigma_a]}{\frac{h'}{W_{in}} + \frac{1}{A}} . \tag{5}$$

Introducînd cea mai mare din aceste valori în formula (1), obținem secțiunea brută minimă a barei de consolidare, care reduce, sub limita rezistenței admisibile, eforturile unitare maxime ce se nasc în grindă

$$A_{t\,\mathrm{nec}} = \frac{1}{\frac{h'}{I_m}\left(\frac{M_{pm}}{X} - h'\right) - \frac{1}{A_m}} . \tag{6}$$

Se alcătuiește secțiunea barei de consolidare cu o secțiune brută corespunzătoare, cel puțin egală cu cea stabilită prin formula (6) și se calculează valoarea forței X cu formula (1) introducînd valoarea efectivă a secțiunii brute a barei de consolidare.

Se verifică efortul unitar maxim, după consolidare, în talpa superioară și inferioară cu formulele (2) și (3) și în bara de consolidare.

Problema proiectării consolidării cu o bară de consolidare la talpa întinsă a grinzilor cu inimă plină are două necunoscute:

h' distanța de la axul grinzii pînă la axul barei de consolidare și

A_t secțiunea acestei bare.

Dacă aceste valori sînt cunoscute, se poate ușor calcula cu formula (1), efortul total efectiv X_{ef}, care se naște în bara de consolidare.

Trebuie verificat că acest efort reduce sub limita admisibilă efortul unitar maxim în grindă sub influența sarcinilor convoiului, pentru care se consolidează și că efortul unitar în bara de consolidare nu întrece rezistența admisibilă.

Trebuie deci îndeplinite următoarele condiții:

$$X_{\mathrm{ef}} \geqslant X_s$$

și

$$X_{\mathrm{ef}} \geqslant X_i$$

valorile X_s și X_i fiind calculate cu formulele (4) și (5), și

$$\sigma_{t\,\mathrm{ef}} = \frac{X_{\mathrm{ef}}}{A_{tn}} \leqslant \sigma_a ,$$

A_{tn} fiind secțiunea netă a barei de consolidare.

Pe baza acestor elemente urmează să se stabilească pentru fiecare caz în parte, valorile h' și A_t, care să satisfacă relațiile de mai sus.

Deoarece h' variază de fapt între limite reduse (10...30 cm) și pentru A_t se pot stabili numai un număr limitat de profile uzuale, se vor putea stabili norme

practice pentru determinarea distanţei h' şi a unor secţiuni economice A_t ale barelor de consolidare.

Dăm un exemplu de calcul al consolidării unei grinzi cu inimă plină cu o bară de consolidare la talpa inferioară (fig. 2 şi 3).

Inima $1\,000 \times 10$; $4\,L\,80 \times 80 \times 10$; cîte 3 platbande 200×10, nituri de 23 mm ∅.

Considerînd slăbiri de nituri numai în jumătatea întinsă, se găseşte:

Secţiunea cu cîte o platbandă, pe toată lungimea grinzii

$$A_{1br} = 200 \text{ cm}^2 \qquad A_{1n} = 183{,}3 \text{ cm}^2 \qquad I_{1b} = 321\,825 \text{ cm}^4$$
$$W_{1sn} = 6\,120 \text{ cm}^3 \qquad W_{1in} = 5\,320 \text{ cm}^3;$$

Secţiunea cu cîte două platbande, pe 6,80 m lungime

$$A_{2br} = 240 \text{ cm}^2 \qquad A_{2n} = 218{,}7 \text{ cm}^2 \qquad I_{2b} = 427\,925 \text{ cm}^4$$
$$W_{2sn} = 7\,985 \text{ cm}^3 \qquad W_{2in} = 6\,830 \text{ cm}^3;$$

Secţiunea cu cîte trei platbande, pe 5,20 m lungime

$$A_{3br} = 280 \text{ cm}^2 \qquad A_{3n} = 254{,}1 \text{ cm}^2 \qquad I_{3b} = 538\,185 \text{ cm}^4$$
$$W_{3sn} = 9\,880 \text{ cm}^3 \qquad W_{3in} = 8\,340 \text{ cm}^3.$$

Se calculează eforturile unitare maxime:

a) În mijlocul grinzii

$$M_g + \psi \cdot M_p = 160 \text{ tm};$$

$$\sigma_{gs} + \psi \cdot \sigma_{ps} = \frac{16\,000}{9\,880} = 1{,}620 \text{ t/cm}^2;$$

$$\sigma_{gi} + \psi \cdot \sigma_{pi} = \frac{16\,000}{8\,340} = 1{,}920 \text{ t/cm}^2.$$

b) La extremitatea platbandei a treia

$$M_g + \psi \cdot M_p = 126{,}96 \text{ tm};$$

$$\sigma_{gs} + \psi \cdot \sigma_{ps} = \frac{12\,696}{7\,985} = 1{,}590 \text{ t/cm}^2;$$

$$\sigma_{gi} + \psi \cdot \sigma_{pi} = \frac{12\,696}{6\,830} = 1{,}858 \text{ t/cm}^2.$$

c) La extremitatea platbandei a doua

$$M_g + \psi \cdot M_p = 95{,}20 \text{ tm};$$

$$\sigma_{gs} + \psi \cdot \sigma_{ps} = \frac{9\,520}{6\,120} = 1{,}557 \text{ t/cm}^2;$$

$$\sigma_{gi} + \psi \cdot \sigma_{pi} = \frac{9\,520}{5\,320} = 1{,}790 \text{ t/cm}^2.$$

Secţiunea cea mai solicitată este în mijlocul grinzii.

Distanţa între centrul de greutate şi axa tirantului este din construcţie

$$h' = 77{,}44 \text{ cm}.$$

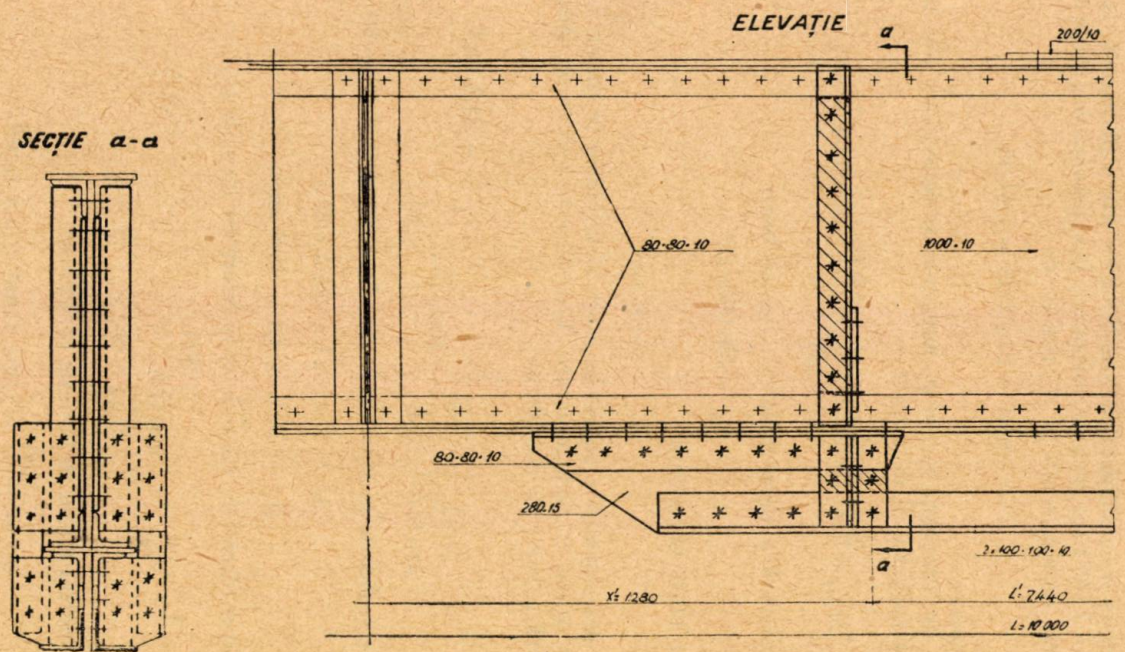

SECȚIE a-a
ELEVAȚIE
a
200/10
80·80·10
1000·10
80·80·10
280.15
2·100·100·10
a
X'=1280
L'=7440
L=10 000

Fig. 2

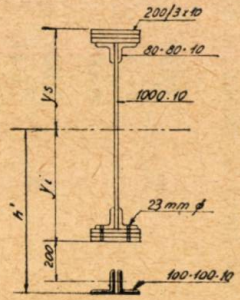

200/3×10
80·80·10
1000·10
23 mm ϕ
100·100·10
200

Fig. 3

Se calculează forţa în tirant cu formulele (4) şi (5) pentru dimensionarea barei:

$$X_s = \frac{1{,}620 - 1{,}500}{\frac{77{,}44}{9\,880} - \frac{1}{280}} = 28{,}1 \text{ t},$$

$$X_i = \frac{1{,}920 - 1{,}500}{\frac{77{,}44}{8\,340} + \frac{1}{280}} = 32{,}6 \text{ t}.$$

Grinda rezistă neconsolidată, în secţiunea cu cîte o platbandă, la un moment de $5\,320 \times 1{,}5 = 7\,980$ t cm, ceea ce corespunde la o distanţă de 1,28 m de la reazem; consolidarea este deci necesară pe o lungime de

$$L' = 10{,}00 - 2 \times 1{,}28 = 7{,}44 \text{ m}.$$

Se calculează:

Momentul de încovoiere mediu pe lungimea de consolidare din sarcini mobile multiplicate cu coeficientul de impact

$$M_{pm} = \frac{\text{Supraf. momentelor } (t \text{ cm}^2)}{744 \text{ (cm)}} = 11\,900 \text{ t cm};$$

Media ponderată a momentelor de inerţie brute

$$I_m = 496\,000 \text{ cm}^4$$

şi a secţiunilor brute ale grinzii

$$A_m = 264{,}8 \text{ cm}^2.$$

Cu aceste date, pentru a obţine un efort de întindere în tirant, corespunzător celei mai mari valori minime necesare $X_i = 32{,}6$ t, trebuie să găsim secţiunea minimă necesară a barei de consolidare:

$$A_t = \frac{1}{\frac{77{,}44}{496\,000}\left(\frac{11\,900}{32{,}6} - 77{,}44\right) - \frac{1}{264{,}8}} = 24{,}3 \text{ cm}^2.$$

Bara de consolidare se alcătuieşte din două corniere de $80 \times 80 \times 10$

$$A_t = 2 \times 15{,}1 = 30{,}2 \text{ cm}^2,$$

$$A_{t_n} = 30{,}2 - 4{,}6 = 25{,}6 \text{ cm}^2;$$

se calculează apoi efortul în bara de consolidare cu formula (1)

$$X_{ef} = \frac{11\,900}{77{,}44 + \frac{496\,000}{77{,}44}\left(\frac{1}{264{,}8} + \frac{1}{30{,}2}\right)} = 38{,}0 \text{ t}.$$

Verificăm efortul unitar în bara de consolidare

$$\sigma_{tn} = \frac{38{,}00}{25{,}6} = 1{,}485 \text{ t/cm}^2 < 1{,}5 \text{ t/cm}^2.$$

Efortul $X = 38{,}0$ t fiind mai mare decît $X_i = 32{,}6$ t și $X_s = 28{,}1$ t, verificarea efortului unitar în grindă nu mai este necesară.

Se calculează prinderea barei de tachet (grosimea inimii 15 mm):

$$n = \frac{38{,}0}{2 \times 3{,}32} = 5{,}73 \sim 6$$ nituri cu secțiune dublă de forfecare și prinderea tachetului de talpa grinzii, cu un număr sporit cu 50 %, adică

$n_1 = 9$ nituri cu dublă secțiune, respectiv 18 nituri cu secțiune simplă de forfecare, ținînd seamă de excentricitatea efortului și de faptul că unele nituri sînt solicitate și la un efort de întindere în tijă.

Acest mod de calcul al prinderii este însă prea aproximativ.

Un calcul mai exact, care ține seamă de solicitarea la forfecare și la întindere în tijă a niturilor de prindere pe talpă a tachetului, este cuprins într-un studiu făcut de ing. A. Pilder *).

*

Notăm că — în cele mai multe cazuri — secțiunea tirantului se determină pe baza efortului unitar în talpa superioară.

Influența barei de consolidare este cu atît mai mare cu cît aceasta este aplicată la o distanță mai mare de talpa inferioară.

Grinzi cu zăbrele

Consolidarea, prin această metodă, constă în introducerea unor secțiuni noi, legate organic la prindere și solidarizate de barele pe care le consolidează, astfel ca să se realizeze o reducere cît mai mare a numărului de nituri care trebuie bătute pe șantier.

Barele de consolidare ale diagonalelor și montanților trebuie prinse la noduri, iar cele ale tălpilor înaintea nodurilor. Barele de consolidare comprimate vor fi verificate la flambaj.

Secțiunile și prinderile barelor de consolidare trebuie dimensionate pentru un efort de întindere sau compresiune, care să reducă la rezistența admisibilă efortul unitar maxim, care se naște în secțiunea inițială a barei, pe care o consolidează.

Barele noi, de consolidare, dacă trec pe mai multe panouri se vor prinde în dreptul nodurilor, corespunzător diferenței de forțe din cele două panouri vecine.

În aceste noduri se pot introduce și variații corespunzătoare ale secțiunii barei de consolidare.

Se va urmări, pe cît posibil, ca secțiunile de consolidare să fie simetrice la barele simetrice și să introducă — în general — excentricități cît mai mici; consolidările ale căror axe corespund cu axele secțiunilor barelor inițiale fiind considerate ca cele mai reușite. Sînt însă cazuri, în care excentricitatea secțiunilor de consolidare prezintă avantaje constructive.

În general, excentricitățile spre exteriorul grinzilor acționează mai favorabil pentru talpa, pe care o consolidează direct, ajutînd și talpa opusă acesteia — însă în foarte mică măsură — în raportul $\frac{e}{h}$ (e fiind excentricitatea și h înălțimea teoretică a grinzii).

*) A. Pilder, *Limitele de aplicare economică a metodei Revici pentru consolidarea grinzilor metalice cu inimă plină*. Probleme feroviare, nr. 5, noiembrie 1955, p. 131 și 132.

Prinderea elementelor noi de consolidare în mijlocul panourilor, înaintea nodurilor unde sporul de secţiune este necesar, reduce influenţa momentelor suplimentare, care se nasc la noduri. Acestea depind de rigiditatea barelor ce se prind la nod.

Momentul suplimentar datorit excentricităţii, M_e, se repartizează la barele ce concură la nodul, unde se prinde bara de consolidare, în proporţia rigidităţii lor: $\frac{I_n}{l_n}$, în care I_n este momentul brut de inerţie în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate al secţiunii şi este normală pe planul grinzii şi l_n lungimea teoretică a barei, respectiv distanţa între centrele niturilor respective pentru diagonale şi montanţi.

Într-o bară n momentul corespunzător este

$$M_n = \frac{\frac{I_n}{l_n}}{\sum \frac{I_i}{l_i}} \cdot M_e \,. \tag{7}$$

Aceste momente se repartizează apoi analog la nodurile vecine, însă influenţa lor se pierde treptat.

Pentru momentul suplimentar datorit excentricităţii, se va verifica secţiunea cea mai redusă, care este şi cea mai solicitată la influenţa momentului încovoietor $N_c.e$, e fiind distanţa între centrul secţiunii barei neconsolidate şi axa barei de consolidare şi N_c efortul total maxim în bara respectivă de consolidare.

Indicăm în cele ce urmează norme pentru calculul consolidării grinzilor cu zăbrele, folosind metoda de simplificare a consolidării podurilor metalice, în două ipoteze:

a) Consolidarea cu bare de secţiune constantă pe panou, introducîndu-se — în cazul barelor pe mai multe panouri, în dreptul punctelor de variaţie a secţiunii — prinderi care să asigure introducerea în bara de consolidare a suplimentului de efort.

b) Consolidarea cu bare de secţiune constantă pe mai multe panouri prinse numai la capete cu efortul total, analog consolidării grinzilor cu inimă plină.

Pentru diagonalele şi montanţii grinzilor se vor folosi numai bare de consolidare cu secţiune constantă, fiind pe un singur panou; pentru tălpi se va putea folosi oricare din cele două soluţii, dacă tălpile sînt rectilinii; în caz contrar numai ipoteza *a)*.

Cea mai simplă execuţie, care este şi cea mai economică, necesitînd cea mai redusă manoperă pe şantier presupune folosirea de bare de secţiune constantă, prinse integral la capete, şi cu secţiuni cu centrul de greutate cît mai apropiat de cel al elementelor barelor de consolidat, pentru reducerea excentricităţilor.

Barele trebuie să fie susţinute elastic (Federgelenk), astfel ca să permită deformaţia lor.

a) *Bare cu secţiune constantă pe panou*

Modul de calcul este următorul:

Însemnînd cu:

N_t, forţa totală maximă în bară pentru ipoteza de calcul considerată şi

N_a, forţa totală maximă admisibilă în bara neconsolidată în aceeaşi ipoteză de calcul, adică forţa axială pe care bara neconsolidată o poate suporta la efortul unitar admisibil σ_a adică:

Diferenţa $N_c = N_t - A.\,\sigma_a$ este forţa pe care trebuie să o preia bara de consolidare.

Efortul unitar σ_c, pe care bara nouă îl poate prelua, în ipoteza unei consolidări perfecte cu bara neconsolidată, este

$$\sigma_c = \sigma_a - \sigma_g,$$

σ_g fiind efortul unitar produs de încărcarea permanentă. Forța N_c și efortul unitar σ_c în elementul de consolidare trebuie calculate separat pentru fiecare bară ce trebuie consolidată.

Împărțind pe N_c prin σ_c găsim secțiunea minimă de consolidare

$$A_c = \frac{N_c}{\sigma_c} = \frac{N_t - A \cdot \sigma_a}{\sigma_a - \sigma_g} \tag{8}$$

în care

A este secțiunea netă a barei neconsolidate solicitate la întindere, respectiv $A = \varphi . A_{br}$ este secțiunea barei neconsolidate solicitate la compresiune. Se calculează astfel cu formula (8);

$A_c = A_{cn}$ secțiunea netă a barei de consolidare pentru bare întinse, respectiv $A_c = \varphi_i . A_{cbr}$ pentru bare supuse la compresiune în care φ_i este coeficientul de flambaj corespunzător coeficientului de subțirime λ_i al barei de consolidare.

Aplicarea pretensionării în această ipoteză este teoretic posibilă, dar se lovește de greutăți practice de realizare.

b) *Bare cu secțiune constantă pe întreaga lungime de mai multe panouri*

Dacă se dă barei de consolidare (tirantului) o secțiune constantă pe toată lungimea l' de consolidare, calculul se face astfel:

Fie X forța totală maximă în tirant.

În fiecare element de talpă va acționa o forță axială

$$I_{gi} + \psi I_{pi} - X.$$

Tirantul trebuie să acționeze cît mai centric în plan.

Dacă bara de consolidare acționează excentric în plan, se introduc în barele ce se consolidează, momente de încovoiere, care trebuie neapărat calculate, neputînd fi neglijate.

Se cere ca — prin consolidare — efortul unitar să fie mai mic decît cel admisibil σ_a, adică

$$\sigma = \frac{I_{gi} + \psi I_{pi} - X}{A_i} \leqslant \sigma_a,$$

de unde

$$X \geqslant I_{gi} + \psi I_{pi} - A_i \cdot \sigma_a$$

în care

I_{gi} este efortul din sarcina permanentă în talpa inferioară a panoului i;

I_{pi} este efortul maxim din sarcina mobilă, în același panou, pentru convoiul de consolidare;

A_i secțiunea netă în panoul considerat, înainte de consolidare.

Se va lua pentru forța X cea mai mare valoare, care satisface inegalitatea de mai sus, pentru toate panourile, adică

$$X = \max (I_{gi} + \psi I_{pi} - A_i \cdot \sigma_a). \tag{9}$$

Din condiția ca deformația tirantului să fie egală cu a tălpii pe lungimea l' ($l' = m\,\lambda$ dacă panourile sînt egale), rezultă:

$$\frac{1}{E}\cdot l'\cdot\frac{X}{A_{tbr}} = \frac{1}{E}\sum\frac{\psi I_{pi} - X}{A_i}\cdot\lambda,$$

$$m\lambda\,\frac{X}{A_{tbr}} = \psi\cdot\lambda\sum\frac{I_{pi}}{A_i} - \lambda\cdot X\sum\frac{1}{A_i},$$

$$\left(\frac{m}{A_{tbr}} + \sum\frac{1}{A_i}\right)X = \psi\sum\frac{I_{pi}}{A_i} = \psi\sum\sigma_{pi},$$

de unde

$$X = \frac{\psi\sum\sigma_{pi}}{\dfrac{m}{A_{tbr}} + \sum\dfrac{1}{A_i}}, \tag{10}$$

în care σ_{pi} este efortul unitar, în fiecare panou, din sarcina mobilă a convoiului de consolidare în poziția fixă, care dă X maxim; sumele $\sum\sigma_{pi}$ și $\sum\frac{1}{A_i}$ referindu-se la toate panourile de pe întreaga lungime de consolidare l'.

Introducînd valoarea lui X în (9), găsim

$$\frac{\psi\sum\sigma_{pi}}{\dfrac{m}{A_{tbr}} + \sum\dfrac{1}{A_i}} = \max\left(I_{gi} + \psi I_{pi} - A_i\,\sigma_a\right),$$

din care rezultă

$$A_{tbr} = \frac{m}{\dfrac{\psi\sum\sigma_{pi}}{\max\left(I_{gi} + \psi I_{pi} - A_i\,\sigma_a\right)} - \sum\dfrac{1}{A_i}}. \tag{11}$$

Aceasta este secțiunea minimă necesară a barei de consolidare, fără pretensionare.

Se dimensionează tirantul și se calculează $A_{tef} \geqslant A_{tbr\,nec.}$

Se calculează cu formula (10) valoarea forței maxime efective în tirant X_{ef} și se verifică

$$\sigma_{tef} = \frac{X_{ef}}{A_{tnef}}.$$

Raportul $C = \dfrac{\sigma_{tef}}{\sigma_a}$ este gradul de folosire al tirantului.

Calculul tirantului de secțiune constantă cu pretensionare

Prin introducerea unui efort axial inițial de pretensionare se poate reduce secțiunea barei de consolidare, aducînd-o pînă la gradul maxim de folosire $C = 1$.

În acest caz $\sigma_{t\,ef} = \sigma_a$ și deci

$$A_{tn} = \frac{X}{\sigma_a} \text{ și aproximativ } A_{t\,br\,nec} = 1{,}15\frac{X}{\sigma_a}.$$

Se dimensionează în această ipoteză tirantul luîndu-se

$$\sigma_{t\,ef} \geqslant A_{t\,br\,nec} = 1{,}15\,\frac{X}{\sigma_a}, \tag{12}$$

X fiind calculat cu formula (9).

Introducînd valoarea $A_{t\,ef}$ în formula (10) găsim

$$X_1 = \frac{\psi \sum \sigma_{pi}}{\dfrac{m}{A_{t\,br\,ef}} + \sum \dfrac{1}{A_i}},$$

care reprezintă forța cu care se va încărca tirantul din convoiul de consolidare.

Forța de pretensionare, care împreună cu forța X_1 realizează forța necesară în tirant pentru ca în toată talpa, după consolidare, să nu fie nici o depășire de efort unitar peste cel admisibil, va fi

$$P_{nec} = X - X_1 = \max\left(I_{gi} + \psi I_{pi} - A_i\,\sigma_a\right) - \frac{\psi \sum \sigma_{pi}}{\dfrac{m}{A_{t\,br\,ef}} + \sum \dfrac{1}{A_i}}. \tag{13}$$

Această forță de pretensionare se poate realiza în diferite moduri:

Prin presa hidraulică, buloane strînse cu chei speciale etc. sau prin încălzire parțială pe o porțiune a tirantului la o diferență de temperatură ce se va calcula, pentru a produce o dilatare egală cu deformația calculată, corespunzînd solicitării efective sub acțiunea unei forțe egale cu P_{nec}, calculat cu formula (13).

Prin pretensionare se poate obține folosirea integrală a materialului nou, deci o reducere a secțiunii barei de consolidare care se execută în atelier.

Prinderile la extremități ale barei de consolidare trebuie proiectate pentru întreaga forță de consolidare

$$X = \max\left(I_{gi} + \psi I_{pi} - A_i \cdot \sigma_a\right).$$

Se atrage atenția asupra faptului că, prin încovoierea barei de consolidare, care urmărește — datorită rigidității verticale a susținerilor — fibra deformată a tălpii, se naște un efort unitar de întindere σ_f în talpa inferioară a barei de consolidare.

Calculul secțiunii minime a tirantului este următorul:

$$A_{tn} = \frac{X}{\sigma_a - \sigma_f} \text{ și aproximativ } A_{tbr} = 1{,}15\,\frac{X}{\sigma_a - \sigma_f}.$$

Se dimensionează în consecință $A_{t\,ef}$, calculul pretensionării efectuîndu-se ca mai sus.

Pentru barele de consolidare ce nu sînt supuse pretensionării, dimensionarea nu este influențată de sporul de efort unitar, datorit încovoierii, barele nefiind solicitate decît de un efort unitar mai mic, care — chiar cu efortul unitar de încovoiere — nu atinge efortul unitar admisibil.

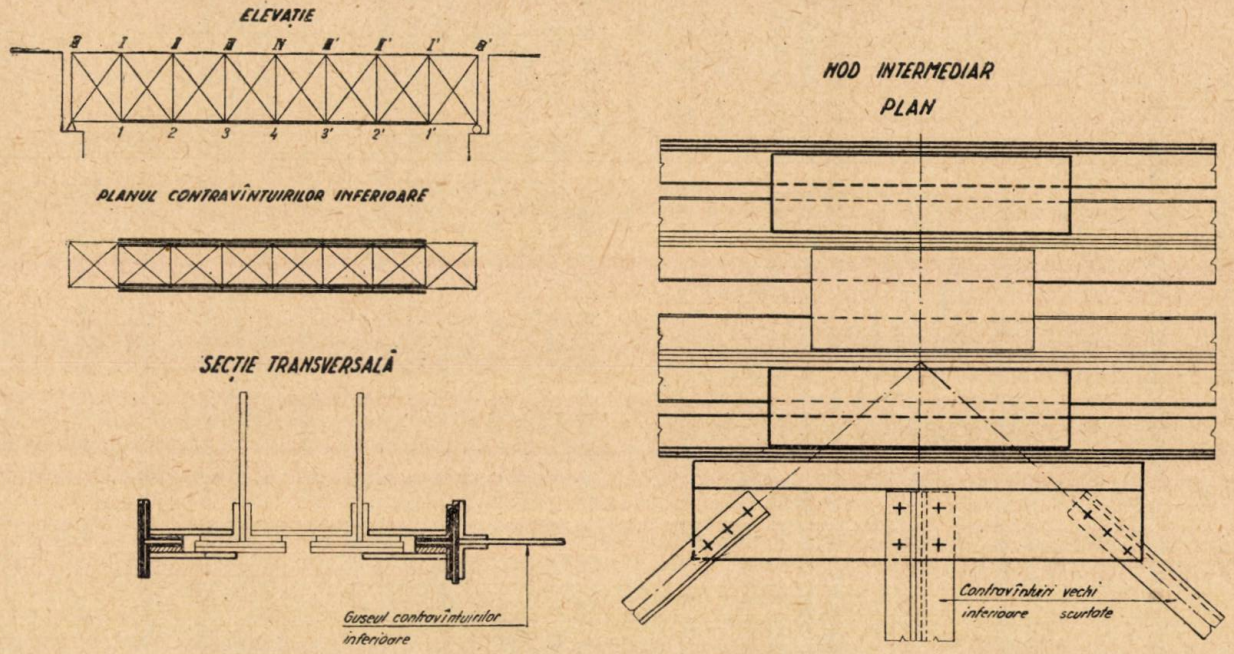

ELEVAȚIE
PLANUL CONTRAVÎNTUIRILOR INFERIOARE
SECȚIE TRANSVERSALĂ
Guseul contravîntuirilor inferioare
NOD INTERMEDIAR
PLAN
Contravînturi vechi inferioare scurtate

Fig. 4

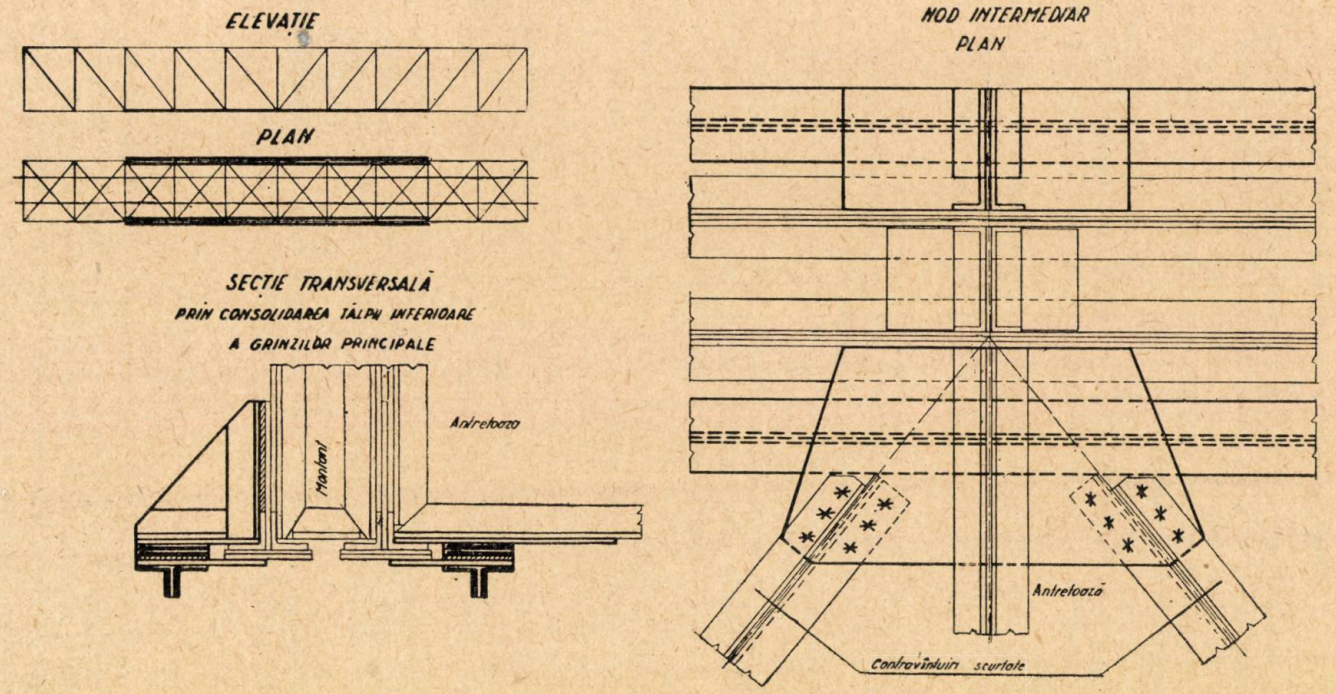

ELEVAȚIE
PLAN
SECȚIE TRANSVERSALĂ
PRIN CONSOLIDAREA TĂLPII INFERIOARE
A GRINZILOR PRINCIPALE
Antretoază
Montant
MOD INTERMEDIAR
PLAN
Antretoază
Contravântuiri scurtate

Fig. 5

Norme speciale de proiectare și execuție

O atenție deosebită este necesară la execuție, pentru ca să se introducă efectiv un efort de întindere în bara de consolidare a tălpii întinse, respectiv de compresiune în bara de consolidare a tălpii comprimate.

Acest efort poate fi stabilit anticipat prin calcul și realizat printr-o deplasare inițială corespunzătoare a găurilor.

La piese cu solicitări mai complicate, la proiectarea consolidărilor trebuie să se țină seamă de jocul forțelor și — în acest caz — numai experiența proiectantului poate ajuta la găsirea soluției celei mai indicate, la fel ca și în cazul consolidărilor clasice.

S-au realizat unele prinderi cu excentricități mai mici ca la consolidările clasice, la unele poduri cu zăbrele cu calea sus, unde barele de consolidare s-au putut axa pe talpa inferioară a barelor, fără să întîlnească antretoaze și contravîntuiri puternice.

În figura 4 s-a indicat sumar o soluție aplicată pentru consolidarea tălpii inferioare a unui tablier de 50 m deschidere. La acest tablier vechi, diagonalele fuseseră construite cu secțiuni foarte elastice. Prin calcul s-a stabilit că talpa inferioară a necesitat o consolidare puternică. S-a încercat mai înainte o soluție în genul celei indicate în figura 3, concentrînd materialul de consolidare în tiranți așezați sub talpă, o soluție relativ simplă din punct de vedere constructiv. În nodul al doilea s-ar fi transmis însă în acest caz un moment de excentricitate atît de puternic, că n-ar fi fost posibil să se găsească o soluție convenabilă pentru consolidarea diagonalelor la cota parte a momentului care le revenea după formula (7). Soluția constructivă indicată în figura 4 a redus excentricitatea la o mărime neglijabilă, dar a fost necesară scurtarea contravîntuirilor inferioare ale podului.

O soluție asemănătoare, însă puțin mai greu de executat, s-a indicat în figura 5 pentru un pod cu grinzi cu zăbrele cu calea la partea inferioară.

Prin încercări asupra podurilor existente, se vor putea stabili norme practice economice pentru aplicarea metodei simplificate, ținînd seamă de influența încastrărilor și de colaborarea elementelor căii și a contravîntuirilor cu tălpile grinzilor principale.

Pînă la precizarea datelor respective se recomandă a se presupune că momentele maximale în panourile finale ale longeronilor corespund cu cele ale unor grinzi liber rezemate, iar în panourile intermediare cu 80% din aceste momente *).

La antretoazele podurilor cu zăbrele se va putea ține seamă de încastrarea lor, în cadrele din care fac parte, însă numai dacă au montanți la podurile cu calea jos, sau la cele cu calea sus, dacă au contravîntuiri transversale.

CONCLUZII

În toate cazurile de aplicare, metoda conduce la o reducere esențială a manoperii grele și costisitoare pe șantier, care se înlocuiește cu o manoperă mecanizată, ușoară, în atelier, se reduc schelele fixe de susținere, se evită desfacerea nodurilor și a înnădirilor precum și înlocuirea tuturor niturilor curente de solidarizare. De asemenea, se reduce numărul niturilor, scumpe ca material și manoperă.

Prin această metodă se reduce simțitor costul și timpul de execuție al consolidărilor.

*) *Op. cit.*, p. 135.

Consolidarea clasică are și inconvenientul că la tăierea cu dalta a capetelor niturilor se ovalizează găurile de nit, din care cauză o consolidare a unui pod care a fost consolidat în trecut este foarte grea; ea poate fi făcută relativ ușor folosind metoda consolidării simplificate.

Aceste avantaje ale metodei sînt comune la grinzile cu zăbrele și la cele cu inimă plină.

La grinzile cu inimă plină direct încărcate sau care nu pot fi consolidate sub circulație, talpa superioară fiind greu accesibilă sau necesitînd pentru consolidare directă mari întreruperi de circulație, se realizează o esențială reducere a efortului unitar prin excentricitatea barei de consolidare care introduce un moment de sens contrar cu cel produs de sarcina mobilă.

Față de consolidarea cu grinzi armate are avantajul de a nu necesita înălțimi mari, de a nu modifica aspectul podurilor și de a permite o prindere ușoară, cu o solicitare a prinderilor din cauza momentelor de excentricitate cu mult mai mică ca la consolidările poligonale, la care prinderea la cap este greu de realizat din punct de vedere constructiv.

Materialul barelor de consolidare este solicitat numai de efortul datorit sarcinilor mobile și accidentale.

Metoda permite introducerea unor eforturi axiale inițiale în barele de consolidare, de natură a descărca elementele vechi ale grinzii neconsolidate, folosind procedee ușoare, ca cele folosite curent la pretensionarea armăturilor din grinzile de beton precomprimat, diferențe de temperatură etc.

În acest mod se reduce cantitatea de material necesar consolidărilor și se crează cele mai bune condiții atît pentru materialul existent al grinzilor cît și pentru materialul nou de consolidare.

Influența sarcinii permanente este foarte mică la elementele căii (longeroni, antretoaze) și în general la grinzile cu inimă plină de mici deschideri, supuse la încovoiere, devine însă cu atît mai importantă cu cît sporește deschiderea, în această sarcină intrînd și materialul adițional de consolidare care încarcă numai secțiunile existente.

Din această cauză, la podurile mari, în vederea economisirii materialului metalic se va urmări perfecționarea metodei prin introducerea unor eforturi inițiale de întindere sau compresiune în barele noi de consolidare, ceea ce va face aplicarea metodei mult mai economică decît cea clasică și în ceea ce privește materialul nou folosit, mai ales acum cînd asemenea procedee au o largă aplicare la construcțiile de beton armat pretensionat.

În acest mod se vor reduce la minimum secțiunile barelor de consolidare adică materialul nou, pe lîngă reducerea esențială de manoperă pe șantier (uneori la o zecime sau chiar mai puțin), reducerea schelelor fixe de susținere și a operațiilor grele de scoatere a tablierelor din cale precum și înlocuirea lor prin poduri provizorii sau susținerea lor sub circulație în timpul consolidării, operații uneori foarte grele care — după această metodă — se pot suprima.

La consolidarea podurilor mari va trebui justificată neapărat, printr-un studiu tehnic-economic soluția propusă, dacă nu se prevede introducerea de eforturi inițiale.

Considerăm că aplicarea metodei este încă în faza de experimentare și că este susceptibilă de simplificări în proiectare și îmbunătățiri și perfecționări în execuție.

În afară de soluția ce s-a indicat mai sus pentru calculul consolidărilor, la grinzi cu inimă plină, problema a fost examinată și sub aspectul distribuției eforturilor ca sistem static nedeterminat, ținînd seamă de momentul de încastrare al tirantului, influența susținerilor intermediare etc.

Rezultatele obținute prin calculul exact diferă foarte puțin de cele obținute prin formule aproximative.

Studiul a fost făcut de ing. Iulian Alexiu și a fost completat cu cercetarea domeniului de aplicare economică, a influenței temperaturii și a sistemului de prindere la grinzi cu inimă plină. De asemenea, s-au cercetat limitele practice ale consolidării podurilor prin această metodă, adîncindu-se și problema solicitării nituirii tacheților, într-un studiu făcut de ing. Alfred Pilder, care a stabilit*), pentru cazurile curente de consolidare a grinzilor cu inimă plină, creșterile de rezistență, ce se pot obține — respectiv creșterile de încărcări ce se pot realiza — folosind diferite înălțimi practice ale tacheților, corespunzînd excentricității barei de consolidare, pe baza limitelor de solicitare pentru 3—4—5 perechi nituri, solicitate la forfecare de forța din bară și la întindere în tijă din momentul excentricității acestei forțe.

Trebuie să insistăm asupra importantei economii de material ce se va putea realiza prin reducerea secțiunii barelor de consolidare, dacă se vor introduce eforturi de pretensionare, în barele de consolidare ale grinzilor cu zăbrele, unde cantitatea de material metalic nou de consolidare este mare și crește cu deschiderea și cu mărimea solicitărilor din sarcini permanente, de asemenea, dacă se va ține seamă de efectul real al colaborării contraîncărcăturilor și elementelor căii cu tălpile grinzilor principale.

Repetăm că problema este susceptibilă a fi încă adîncită; de asemenea, că îmbunătățirea aplicării ei este legată de posibilitatea realizării pretensionării și a prinderii tacheților.

Ținem să precizăm că — aplicînd această metodă — un colectiv din Institutul de proiectări al Ministerului Căilor Ferate, format din inginerii Alfred Pilder, Grigore Andreescu, Mayer Leibovici, Nicolae Donescu și Simion Sfarti, a soluționat, în foarte bune condiții, unele probleme grele de consolidare, în care metodele clasice, uzuale, ar fi condus la soluții extrem de greu de realizat și foarte costisitoare.

Primită la redacție la 1 februarie 1955, completat la 25 noiembrie 1955

МЕТОД УСИЛЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МОСТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Укрепление металлических мостов представляет много трудностей в части, касающейся проектирования, и, в особенности, его выполнения, поскольку оно требует кропотливой работы по замене на монтажной площадке большого числа заклепок в очень тяжелых условиях, в частности, когда работы производятся без прекращения движения по мосту и малейшая небрежность в обеспечении соединений может подвергнуть опасности всю конструкцию и жизнь находящихся на мосту.

Автором представлен оригинальный метод усиления мостов, допускающий существенное сокращение объема работ на строительной площадке. Усиление по этому методу сводится к прикреплению на месте работ усиливающих стержней, изготовленных полностью в цехах, и

*) *Op. cit.*, p. 131.

позволяет выбор места для их прикрепления на участках, где нет необходимости в удалении ответственных заклепок, то есть вне узлов и стыковых соединений.

При использовании предварительно напряженных усиливающих элементов можно достигнуть существенного сокращения количества необходимых материалов в сравнении с классическими методами.

Статья содержит конструктивные нормы и методы вычислений, кроме того приводится численный пример расчета усиления.

Настоящий метод был испытан в широком масштабе при проектировании, причем по этому методу уже было успешно произведено усиление некоторых мостов как со сплошными, так и со сквозными фермами.

Результаты испытаний подтверждают полностью гипотезы, принятые во внимание при вычислении.

MÉTHODE POUR LA SIMPLIFICATION DU RENFORCEMENT DES PONTS MÉTALLIQUES

(RÉSUMÉ)

Le problème du renforcement des ponts métalliques est difficile en ce qui concerne l'établissement du projet et surtout l'exécution, qui exige un travail minutieux de remplacement sur le chantier d'un grand nombre de rivets, dans des conditions très difficiles, en particulier lorsque le renforcement est exécuté sous circulation et que la moindre négligence dans l'exécution des travaux, surtout en ce qui concerne les joints et les nœuds, peut péricliter la construction et — par conséquent — provoquer des accidents.

L'Auteur expose une méthode originale de consolidation, assurant une réduction essentielle de la main d'œuvre sur le chantier, méthode qui se réduit à la fixation de barres entièrement exécutées dans les ateliers et permettant le choix de l'emplacement de fixation des barres de consolidation à des endroits qui évitent le remplacement des rivets de résistance aux joints et aux nœuds.

En utilisant des efforts de précontrainte, on peut également obtenir une réduction essentielle des matériaux nécessaires, par rapport aux méthodes classiques.

Dans cet article, on indique des normes de construction et des méthodes de calcul, ainsi qu'une application numérique.

La méthode a été appliquée sur une large échelle à l'établissement des projets et aussi à l'exécution du renforcement de quelques ponts de chemin de fer; les résultats des essais ont entièrement confirmé les hypothèses adoptées à l'établissement des projets.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

GRINDA CONTINUĂ DIN BETON PRECOMPRIMAT CU MOMENT DE INERŢIE VARIABIL ŞI EFORT DE PREÎNTINDERE CONSTANT PE TOATĂ LUNGIMEA

DE

A. FROIMESCU

Într-o lucrare anterioară [1] s-au arătat o serie de consideraţii tehnico-economice pentru justificarea folosirii continuităţii în betonul precomprimat. S-au arătat de asemenea ipotezele de plecare precum şi elementele de bază ale calculului. Aplicînd cele expuse la proiectarea unui pod de şosea cu trei deschideri — 45 — 60 — 45 m — s-a căutat să se exemplifice marile avantaje ale folosirii acestui tip de construcţii.

În lucrarea de faţă se reia problema căutîndu-se generalizarea necesară pentru a extinde concluziile favorabile şi la grinzile continue de construcţii civile şi industriale cu moment de inerţie variabil, avînd însă acelaşi efort de preîntindere*) pe toată lungimea.

Trimiţînd pe cititor la lucrarea citată [1] pentru ipotezele şi elementele de bază ale calculului, dezvoltarea lucrării de faţă se face în felul următor:

1. Se arată mai întîi cum se calculează rotirile marginale ale deschiderilor sub acţiunea precomprimării şi în continuare cum se obţin din aceste rotiri momentele suplimentare din dreptul reazemelor.

2. Plecînd de la solicitările maxime şi minime din grindă provocate de sarcinile exterioare, se arată cum trebuie alese traseele fasciculelor de armături, se determină traseul real al curbei de presiune a eforturilor interioare (ce nu coincide cu traseul rezultantei fasciculelor de armături) şi se determină efortul de precomprimare necesar.

3. Din compararea diagramei momentelor exterioare maxime şi minime cu aceea a momentelor capabile maxime şi minime din lungul grinzii, se trag concluzii asupra comportării statice în faza elastică **) a tipurilor de grinzi studiate.

4. Comparînd cantitatea de armătură necesară în cazul grinzilor studiate cu aceea necesară unei grinzi simplu rezemate, avînd acelaşi volum de beton, se

*) Cazul grinzilor continue cu moment de inerţie constant şi preîntindere uniformă în lungul grinzii, cu traseu de armătură frînt, precum şi cazul grinzilor cu armături preîntinse suplimentar în dreptul reazemelor, va fi studiat separat, într-o lucrare viitoare.

**) Calculul grinzilor continue din beton precomprimat în stadiul de rupere va face obiectul unei lucrări separate.

trag concluzii în ceea ce privește economiile realizabile prin introducerea continuității în betonul precomprimat.

Ținînd seama că toate rezultatele ce se vor obține sînt în funcție de deschiderea l, considerată variabilă, și că sarcinile utile luate în considerare variază de la $p =$

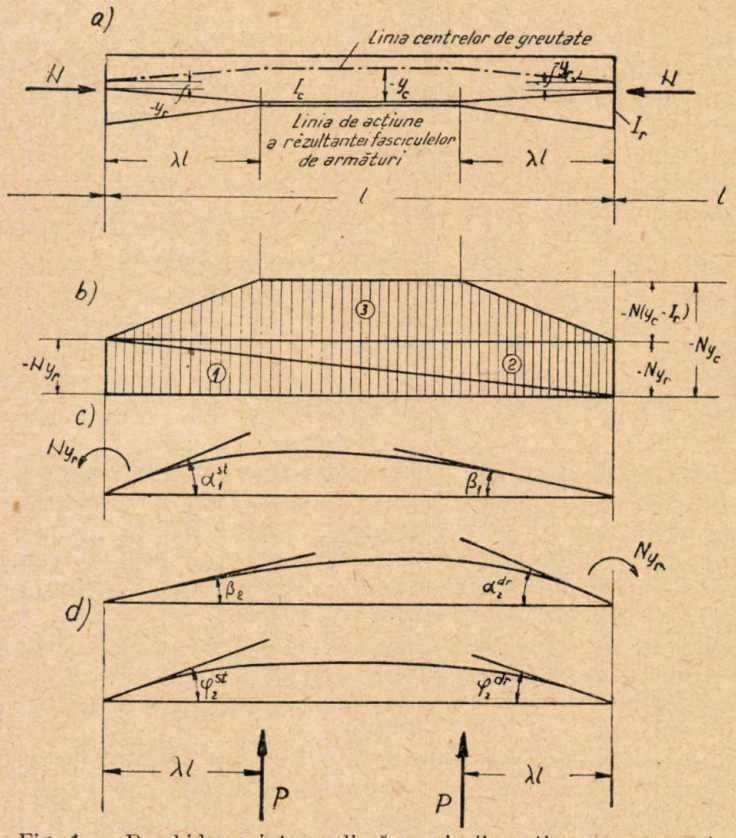


Fig. 1. — Deschiderea intermediară a grinzii continue cu moment de inerție variabil:

a) traseul armăturilor și al centrelor de greutate; *b)* solicitări provocate de precomprimare; *c)* deformațiile provocate axei grinzii prin precomprimare; *d)* variația momentelor de inerție în lungul grinzii.

$= 0{,}5\ g$ pînă la $p = 3\ g$, se poate considera că studiul întocmit are generalizarea teoretică necesară pentru a putea admite concluziile obținute ca fiind valabile pentru întregul cîmp al necesităților practice, la construcțiile civile și industriale.

a. Calculul rotirilor marginale ale unei deschideri intermediare sub acțiunea precomprimării

Așa cum se vede în figura 1, se consideră o deschidere oarecare intermediară a unei grinzi continue cu vute pe reazeme, solicitate de efortul de preîntindere N, constant pe toată lungimea grinzii; pentru a se introduce prin precomprimare solicitări de sens diferit celor provocate de sarcinile exterioare, trebuie ca traseul curbei de presiune a eforturilor interioare să aibă excentricități negative în cîmp și pozitive pe reazem, conform convenției de semne adoptate [1].

Spre deosebire de grinda continuă cu moment de inerţie constant, unde acest lucru se poate realiza numai prin alegerea unui traseu frînt pentru rezultanta fasciculelor de armături, în cazul de faţă traseul poate fi drept, întrucît linia centrelor de greutate are frînturi.

Pentru uşurarea dezvoltării calculelor s-a ales un traseu avînd excentricităţi de acelaşi semn. Obţinerea deformaţiilor şi a solicitărilor necesare se va face introducînd în formulele obţinute excentricităţile armăturii cu semnul respectiv.

Ţinînd seama că deschiderile intermediare au totdeauna vute simetrice, s-a luat în considerare numai cazul în care excentricităţile rezultantei fasciculelor de armături, din dreptul reazemelor, sînt aceleaşi.

Pentru calculul momentelor suplimentare provocate de precomprimare în dreptul reazemelor, sînt necesare rotirile capetelor fiecărei deschideri presupuse simplu rezemate, sub acţiunea preîntinderii fasciculelor de armături.

Referitor la figura 1, ţinînd seama de simetria deschiderii intermediare, unghiurile căutate sînt

$$+ EI_c \varphi_{st} = - EI_c \varphi_{dr} = \int_0^{\lambda l} N \left(y_r + \frac{y_c - y_r}{\lambda l} x \right) \frac{I_c}{I_x} dx + \int_{\lambda l}^{\frac{l}{2}} N y_c dx. \qquad (1)$$

Variaţia momentului de inerţie, considerînd că vuta creşte liniar, este

$$\frac{I_c}{I_x} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \xi \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \right]^3},$$

în care $\xi = \frac{x}{\lambda l}$ şi $n = \frac{I_c}{I_r}$.

Efectuînd toate calculele, valoarea căutată a unghiului devine

$$EI_c \varphi_{st} = - EI_c \varphi_{dr} = N l (a_1 y_r + b_1 y_c), \qquad (2)$$

în care y_r şi y_c trebuie introduşi cu semnele respective conform convenţiei adoptate, iar a_1 şi b_1 sînt nişte coeficienţi ce depind de lungimea vutei şi de raportul momentelor de inerţie $\frac{I_c}{I_r}$.

Pentru cazurile uzuale ce se pot ivi în practică, s-au calculat şi sînt redate în tabloul nr. 2 valorile respective ale lui a_1 şi b_1.

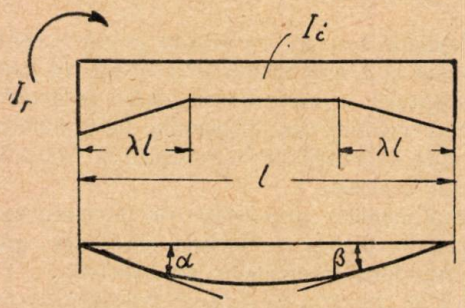
Pentru calculul momentelor suplimentare, provocate de precomprimare în dreptul reazemelor intermediare, sînt necesare — aşa cum se va arăta în continuare — şi rotirile marginale ale deschiderii sub acţiunea unor momente unitare la capete. Pentru ca prezenta lucrare să poată servi la proiectare se reproduc în tabloul nr. 1 aceste valori după G u l d a n.

b. Calculul rotirilor marginale ale unei deschideri de capăt sub acţiunea precomprimării

În cazul deschiderilor marginale, nemaiexistînd momentul încovoietor în dreptul primului sau ultimului reazem, vuta nu îşi mai are justificarea; din această cauză, în cele ce urmează s-a considerat numai cazul cînd deschiderile marginale

Tabloul nr. 1

Unghiuri de rotire marginale provocate de un moment unitar la grinda cu vute drepte simetrice (reproduse după G u l d a n)



$$n = \frac{I_c}{I_r}$$

$$\alpha = \bar{\alpha}\frac{l}{E\,I_c}$$

$$\beta = \bar{\beta}\frac{l}{E\,I_c}$$

$\bar{\alpha}$ = cifra de sus din liniile tabloului

$\bar{\beta}$ = cifra de jos din liniile tabloului

n \ λ	0,50	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20
0,00	0,000 0,000	0,051 0,049	0,077 0,073	0,105 0,095	0,135 0,115	0,168 0,132
0,03	0,056 0,045	0,099 0,083	0,122 0,100	0,145 0,116	0,171 0,130	0,198 0,142
0,05	0,071 0,055	0,112 0,089	0,133 0,105	0,156 0,120	0,180 0,133	0,206 0,144
0,10	0,099 0,071	0,136 0,100	0,155 0,114	0,175 0,127	0,197 0,138	0,220 0,148
0,20	0,140 0,091	0,171 0,115	0,187 0,126	0,204 0,135	0,222 0,144	0,241 0,152
0,50	0,227 0,129	0,244 0,141	0,253 0,146	0,263 0,151	0,273 0,155	0,283 0,159
1,00	0,333 0,167	0,333 0,167	0,333 0,167	0,333 0,167	0,333 0,167	0,333 0,167

au vute unice, situate la reazemele intermediare, așa cum este arătat în figura 2.

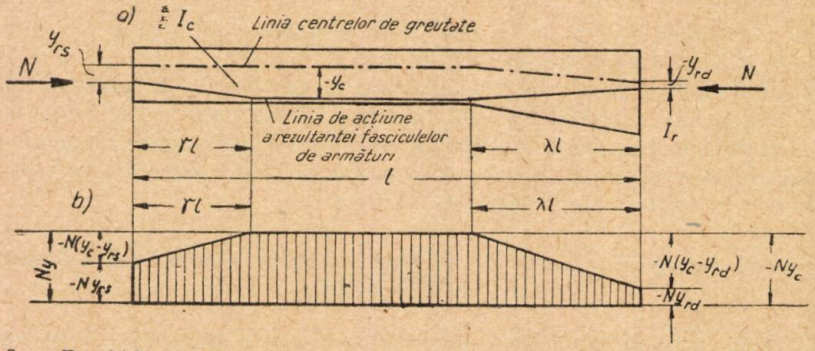
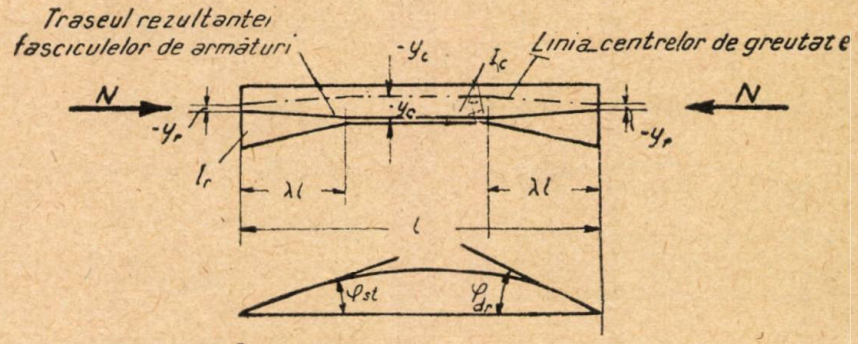


Fig. 2. — Deschiderea marginală a grinzii continue cu moment de inerție variabil: *a)* traseul armăturilor și al centrelor de greutate; *b)* solicitări provocate de precomprimare.

Tabloul nr. 2

Valori a_1 și b_1 pentru calculul rotirilor marginale provocate de precomprimare la grinda cu vute simetrice drepte



$$n = \frac{I_c}{I_r} \qquad EI_c\,\varphi_{st} = -EI_c\,\varphi_{dr} = Nl\,(a_1\,y_r + b_1\,y_c)$$

(I_r și y_c trebuie introdus cu semnele respective) a_1 = cifra de sus din liniile tabloului

b_1 = cifra de jos din liniile tabloului

n \ λ	0,50	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20
0,00	0,000 0,000	0,000 0,100	0,000 0,150	0,000 0,200	0,000 0,250	0,000 0,300
0,03	0,023 0,078	0,021 0,161	0,019 0,203	0,017 0,245	0,015 0,289	0,013 0,330
0,05	0,034 0,092	0,028 0,173	0,026 0,213	0,023 0,253	0,020 0,290	0,017 0,335
0,10	0,054 0,116	0,044 0,192	0,039 0,230	0,035 0,267	0,030 0,308	0,025 0,340
0,20	0,085 0,146	0,070 0,216	0,063 0,250	0,056 0,285	0,049 0,323	0,042 0,352
0,50	0,158 0,198	0,127 0,258	0,112 0,287	0,098 0,316	0,083 0,348	0,068 0,374
1,00	0,250 0,250	0,200 0,300	0,175 0,325	0,150 0,350	0,125 0,375	0,100 0,400

Și în acest caz, pentru obținerea unghiului de rotire, din dreptul reazemului central (cu vută), singurul care interesează, trebuie descompusă diagrama de momente din figura 2 în trei diagrame, așa cum se arată în figura 3, urmînd ca unghiul de rotire total să se obțină prin însumarea rotirilor parțiale

$$\varphi_{total} = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 \,.$$

Valoarea lui φ_1 este dată de relația

$$|\varphi_1| = \left| N\,y_c\,(\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta})\,\frac{l}{EI_c} \right|, \qquad (3)$$

în care valorile $\bar{\alpha}_1$ și $\bar{\beta}$ se pot lua din tabelele Guldan; pentru cazurile cele mai uzuale din practică se dau în continuare valorile lui $(\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta})$ în tabloul nr. 4.

Pentru calculul lui φ_2, neexistînd intabulate în literatură, valori ajutătoare, acestea trebuie determinate special.

Referitor la figura 4, aplicînd teorema lucrului mecanic virtual, deformaţia φ_2 este dată imediat de relaţia

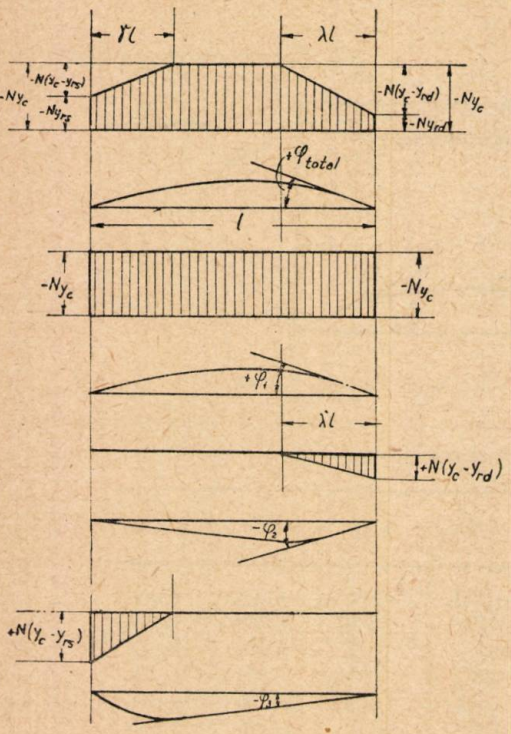


Fig. 3. — Calculul unghiului marginal de rotire la grinda cu vută unică.

$$-EI_c\,\varphi_2 = \int_0^{\lambda l} M_x\,\bar{M}_x\,\frac{I_c}{I_x}\,dx. \qquad (4)$$

Ţinînd seama că

$$M_x = N\,(y_c - y_{rd})\,\frac{\lambda l - x}{\lambda l}$$

şi că

$$\bar{M}_x = \frac{l - x}{l}$$

expresia unghiului căutat devine

$$-EI_c\,\varphi_2 = \int_0^{\lambda l} N\,(y_c - y_{rd})\,\frac{\lambda l - x}{\lambda l}\cdot \frac{l - x}{l}\cdot\frac{I_c}{I_x}\,dx.$$

Considerînd că vuta variază liniar, raportul $\frac{I_c}{I_x}$ este ca mai înainte

$$\frac{I_c}{I_x} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \xi\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^3}$$

în care şi

$$\xi = \frac{x}{\lambda l} \text{ şi } n = \frac{I_c}{I_r}.$$

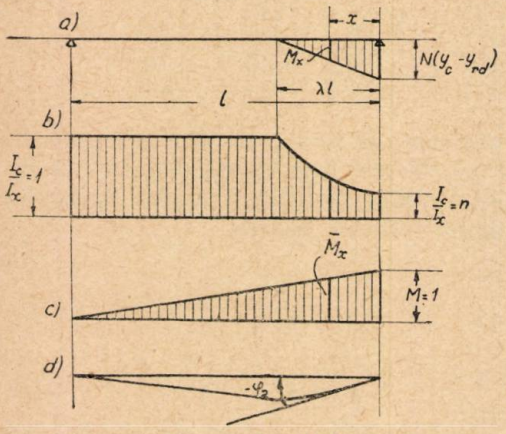


Fig. 4. — Schema de calcul a lui φ_2:
a) diagrama momentelor ce provoacă deformaţia; *b)* variaţia momentelor de inerţie în lungul grinzii; *c)* diagrama momentului virtual; *d)* deformaţia căutată a lui φ_2.

Efectuînd toate calculele pentru diferitele valori n şi λ luate în considerare, se ajunge la o expresie de forma

$$E\,I_c\,\varphi_2 = N\,(y_c - y_{rd})\,l\,a_2, \qquad (5)$$

în care a_2 este funcţie de lungimea vutei λ şi de raportul $\frac{I_c}{I_r} = n$; valorile lui a_2 calculate special sînt date pentru cazurile uzuale din practică în tabloul nr. 4.

Calculul unghiului φ_3 se face la fel ca al unghiului φ_2, cu singura deosebire că expresiile obținute sînt mai simple, variația momentului M_x făcîndu-se în zona în care $\frac{I_c}{I_x} = 1$. Expresia la care se ajunge pentru $E I_c \varphi_3$ este

$$-EI_c \varphi_3 = \int_{l-\gamma l}^{l} N (y_c - y_{rs}) \frac{x - l + \gamma l}{\gamma l} \cdot \frac{l - x}{l} dx. \tag{6}$$

Efectuînd toate calculele, se ajunge la o expresie de forma

$$E I_c \varphi_3 = N (y_c - y_{rs}) l b_2. \tag{7}$$

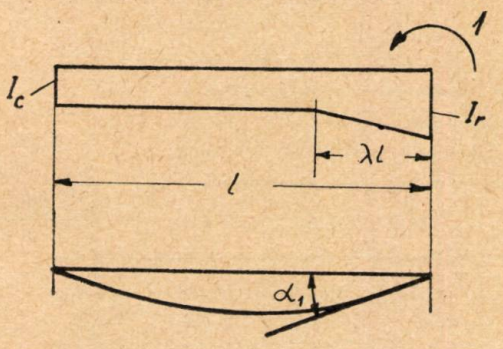
Valorile lui b_2 calculate special, sînt date în tabloul nr. 5.

Ținînd seama de cele arătate mai înainte, unghiul total de rotire, care interesează, devine

$$EI_c \varphi_{\text{total}} = -N l y_c (\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}) + Nl (y_c - y_{rd}) a_2 + Nl (y_c - y_{rs}) b_2 \tag{8}$$

Tabloul nr. 3

Unghiuri de rotire marginale provocate de un moment unitar la grinda cu vută unică dreaptă (reproduse după G u l d a n)



$n = \frac{I_c}{I_r}$; $\alpha_1 = \bar{\alpha} \frac{l}{E I_c}$

$\bar{\alpha}_1$ = cifra din liniile tabloului

n \ λ	0,50	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20
0,00	0,042	0,072	0,092	0,114	0,141	0,171
0,03	0,082	0,112	0,130	0,151	0,174	0,200
0,05	0,094	0,123	0,141	0,161	0,183	0,208
0,10	0,118	0,145	0,161	0,179	0,199	0,222
0,20	0,155	0,178	0,192	0,207	0,223	0,242
0,50	0,234	0,248	0,255	0,264	0,273	0,284
1,00	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333

sau, efectuînd toate calculele,

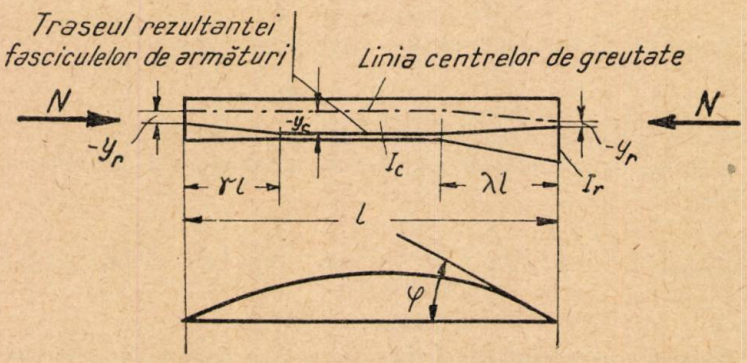
$$EI_c \varphi_{\text{total}} = -Nl [y_c (\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta} - a_2 - b_2) + y_{rs} b_2 + y_{rd} a_2]. \tag{9}$$

Valorile lui $(\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta})$ precum și valorile a_2 sînt date așa cum s-a arătat în tabloul nr. 4. În ceea ce privește valoarea lui b_2, ea depinde numai de γ și este dată în tabloul nr. 5.

În tabloul nr. 3 se dă și valoarea unghiului $\bar{\alpha}_1$ produs de acțiunea unui moment unitar în dreptul reazemului cu vută; acest unghi folosește la calculul momentelor suplimentare provocate de precomprimare în dreptul reazemelor, așa cum se va arăta în cele ce urmează.

Tabloul nr. 4 [1])

Valori a_2 și $(\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta})$ pentru calculul rotirilor marginale de precomprimare la grinda cu vută unică dreaptă



$$n = \frac{I_c}{I_r}$$

$$-E I_c \varphi = Nl\left[y_c\left(\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta} - a_2 - b_2\right) + y_{rs} \cdot b_2 + y_{rd} \cdot a_2\right]$$

(y_c, y_{rs} și y_{rd} fiind de introdus cu semnele respective)

a_2 = cifra de sus din liniile tabloului

$\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}$ = cifra de jos din liniile tabloului

n \ h	0,50	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20
0,00	0,000 0,125	0,000 0,180	0,000 0,212	0,000 0,245	0,000 0,282	0,000 0,320
0,03	0,018 0,188	0,015 0,237	0,014 0,263	0,012 0,302	0,010 0,322	0,009 0,355
0,05	0,026 0,205	0,022 0,251	0,020 0,277	0,018 0,304	0,015 0,331	0,013 0,364
0,10	0,041 0,237	0,035 0,280	0,032 0,301	0,028 0,326	0,024 0,352	0,020 0,379
0,20	0,067 0,283	0,056 0,318	0,051 0,338	0,045 0,358	0,038 0,378	0,031 0,401
0,50	0,128 0,396	0,107 0,402	0,096 0,411	0,084 0,423	0,078 0,435	0,058 0,446
1,00	0,208 0,500	0,173 0,500	0,154 0,500	0,135 0,500	0,114 0,500	0,093 0,500

[1]) Acest tablou a fost calculat de ing. V. Ilie.

Tabloul nr. 5

Valori b_2 pentru calculul rotirilor marginale provocate de precomprimare la grinda cu vută unică dreaptă

γ	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
b_2	0,00	0,00042	0,00167	0,00375	0,00647	0,0104	0,0150	0,0203	0,0267	0,0338	0,0417

c. Scurte considerații asupra alegerii traseului armăturilor

Așa cum s-a arătat mai înainte, la grinzile continue cu moment de inerție variabil, linia centrelor de greutate prezintă frînturi și din această cauză, traseul armăturilor poate fi rectiliniu, înlăturînd astfel importantul dezavantaj al frecărilor pe parcurs. Cum aceste frînturi au loc în punctele unde încep vutele precum și în dreptul reazemelor intermediare, nu există porțiuni de excentricitate constantă, decît în zona în care momentul de inerție este constant.

Pentru a putea trage concluzii cantitative asupra comportării statice a grinzilor studiate, trebuie alese valori determinate pentru λ, pentru raportul înălțimilor secțiunii din cîmp și reazem — sau ceea ce este tot una, pentru raportul momentelor de inerție — precum și pentru poziția rezultantei fasciculelor de armături. La alegerea acestor elemente, trebuie avută în vedere necesitatea ca suprafața cuprinsă între diagrama momentelor maxime și minime, provocate de sarcinile exterioare, să fie cît mai bine conținută în suprafața limitată de momentele maxime și minime, de care sînt capabile diferitele secțiuni; aceste din urmă momente sînt determinate de mărimea forței de preîntindere N, de excentricitatea ei și de forma și mărimea secțiunii de beton a grinzii.

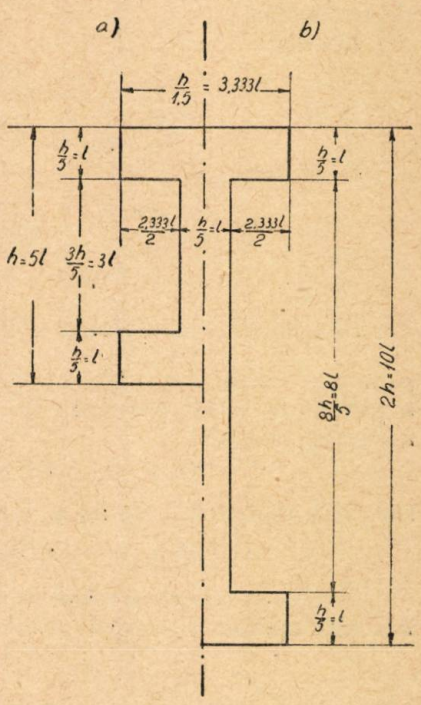


Fig. 5.— Secție transversală prin grindă (dimensiunile sînt în cm, deschiderea grinzii l fiind de introdus în m):
a) secțiunea în cîmp; *b)* secțiunea în dreptul unui reazem ntermediar.

În figurile 5 și 6 sînt arătate secțiunea transversală și schema deschiderii intermediare a unei grinzi continue din beton precomprimat, cu moment de inerție variabil, așa cum poate fi întîlnită de obicei în cazurile practice și care va fi studiată în cele ce urmează.

S-a considerat un traseu rectiliniu pentru rezultanta fasciculelor de armături, deși nu este cel mai avantajos din punct de vedere static, considerînd că duce la importante simplificări constructive și în special la înlăturarea frecărilor în lungul grinzilor. În cazuri concrete trebuie însă analizat, dacă nu cumva, ridicînd ușor armăturile în dreptul reazemelor, avantajele statice obținute depășesc dezavantajele amintite. Studiul de față se mulțumește cu cazul traseului rectiliniu de armături, de recomandat la grinzile cu deschideri multe, la care frecările sînt foarte importante, urmînd a se ține seama că nu se studiază

cazul cel mai favorabil din punct de vedere static. În orice caz, calculul static se face la fel — așa cum se va arăta în continuare — indiferent dacă armăturile sînt rectilinii sau sînt ridicate în spre reazeme.

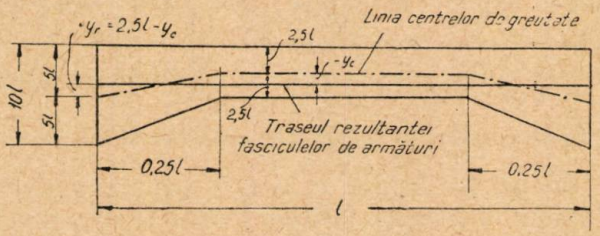


Fig. 6. — Schema unei deschideri intermediare cu traseu rectiliniu pentru armătură (diferite cote pe verticală sînt în cm, deschiderea grinzii l fiind de introdus în m).

Efectuînd toate calculele se obțin următoarele elemente geometrice și elastice ale secțiunilor:

În cîmp:

$$\begin{aligned} A_c &= 9{,}667\ l^2 \text{ în cm}^2 \text{ cu } l \text{ în metri;} \\ I_c &= 29{,}450\ l^4 \text{ în cm}^4 \text{ cu } l \text{ în metri;} \\ W_c &= 11{,}800\ l^3 \text{ în cm}^3 \text{ cu } l \text{ în metri;} \\ k_0 = k_u &= 1{,}220\ l \text{ în cm cu } l \text{ în metri.} \end{aligned}$$

Pe reazeme:

$$\begin{aligned} A_r &= 14{,}667\ l^2 \text{ în cm}^2 \text{ cu } l \text{ în metri;} \\ I &= 178{,}500\ l^4 \text{ în cm}^4 \text{ cu } l \text{ în metri;} \\ W_r &= 35{,}700\ l^3 \text{ în cm}^3 \text{ cu } l \text{ în metri;} \\ k_0 = k_u &= 2{,}435\ l \text{ în cm cu } l \text{ în metri;} \end{aligned}$$

În acest caz, ținînd seama că $n = \dfrac{I_c}{I_r} = \dfrac{29{,}450}{178{,}50} = 0{,}165$ și că din tabloul nr. 2, pentru $\lambda = 0{,}25$ și $n = 0{,}165$ prin interpolare se obține $a = 0{,}0422$ și $b = 0{,}3172$, unghiurile de rotire provocate de precomprimarea deschiderii considerate simplu rezemate, rezultă

$$EI_c \varphi_{st} = -EI_c \varphi_{dr} = Nl\,(4{,}22\ y_r + 31{,}72\ y_c)$$

sau, înlocuind și valorile lui y_r și y_c,

$$EI_c \varphi_{st} = -EI_c \varphi_{dr} = Nl\,(10{,}50\ l + 27{,}50\ y_c).$$

Interesant este să se calculeze momentele de încastrare perfectă, adică momentele care aplicate la capetele deschiderii vor anula deformațiile provocate de precomprimare. Pentru aceleași valori λ și n, rezultă din tabloul nr. 1.

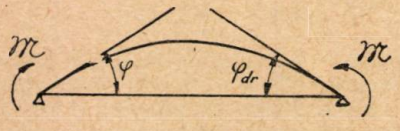


Fig. 7. — Schema de calcul a momentelor de încastrare perfectă.

$$\bar{\alpha} = 0{,}213, \qquad EI_c \alpha = 21{,}30\ l,$$
$$\bar{\beta} = 0{,}142, \qquad EI_c \beta = 14{,}20\ l.$$

Ținînd seama de notațiile din figura 7, rezultă

$$-EI_c \varphi_{st} + EI_c\, \mathfrak{M}\,(\alpha + \beta) = 0,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Nl\,(10{,}50\ l + 27{,}50\ y_c}{(21{,}30 + 14{,}20)\ l} = N\,(0{,}296\ l + 0{,}775\ y_c).$$

Momentul de încastrare perfectă rezultă pozitiv pentru valori $y_c > -0{,}382\,l$, iar pentru valori mai mici el devine negativ.

Dacă se ridică armătura în spre reazeme, cu o pantă continuă de 10% pe toată lungimea vutei, schema unei deschideri intermediare arată ca în figura 8.

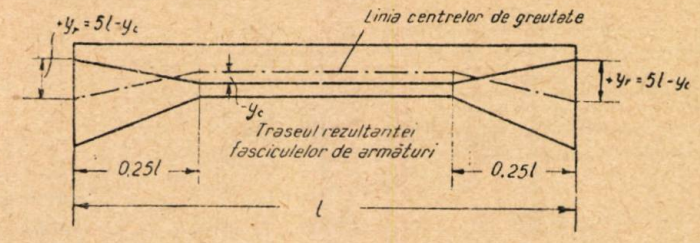


Fig. 8. — Schema unei deschideri intermediare la care armătura este ridicată în spre reazeme (diferitele cote pe verticală sînt în cm, deschiderea grinzii fiind de introdus în m).

În această situaţie, rotirea reazemelor provocată de precomprimare este

$$EI_c\varphi_{st} = -EI_c\varphi_{dr} = Nl\,(21{,}10\,l + 27{,}50\,y_c)$$

iar momentul de încastrare perfectă corespunzător

$$\mathfrak{M} = N\,(0{,}592\,l + 0{,}775\,y_c).$$

Momentul de încastrare perfectă rezultă pozitiv pentru valori $y_c > -0{,}764\,l$, iar pentru valori mai mici rezultă negativ.

Dacă se ţine seama că momentele pe reazeme, datorită sarcinii exterioare, sînt negative, se poate trage următoarea concluzie: printr-o alegere adecvată a distanţei dintre rezultanta fasciculului de armături şi centrul de greutate al secţiunii din cîmp se pot obţine prin precomprimare după necesitate, momente de încastrare perfectă, pozitive sau negative; dacă momentele pozitive trebuie să fie mai mari sau cele negative mai mici în valoare absolută, este bine să se ridice armătura în dreptul reazemelor intermediare. Se poate deci afirma — deocamdată numai calitativ — că precomprimarea grinzilor continue din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil aduce avantaje de ordin static, chiar în comparaţie cu grinda continuă din beton armat obişnuit, căci se pot obţine, după necesitate, momente suplimentare cu semnul dorit.

Pentru alegerea valorii definitive a lui y_c trebuie să se ţină seamă, aşa cum se va arăta în cele ce urmează, şi de solicitările provocate de sarcinile exterioare.

d. Expresiile momentelor suplimentare provocate de precomprimare în dreptul reazemelor intermediare ale grinzii continue ca urmare a nedeterminării statice

Plecînd de la unghiurile de rotire date de formulele (2) şi (9) sau de la momentele de încastrare perfectă obţinute cu ajutorul acestor formule, se pot calcula momentele suplimentare din dreptul reazemelor grinzilor continue din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil, provocate de preîntinderea armăturilor, ca urmare a nedeterminării statice.

Pentru a folosi raţional variaţia momentului de inerţie, deschiderile marginale se iau mai mici decît deschiderile curente, avînd vuta numai în spre reazemul intermediar, secţiile transversale din cîmp şi de pe reazem fiind identice cu cele din

figura 5; schema deschiderii marginale este arătată în figura 9. În ceea ce privește deschiderile intermediare, rămîn valabile secțiunile transversale din figura 5 și schema din figura 6, cu mențiunea că nu se studiază cazul cel mai favorabil din punct de vedere static.

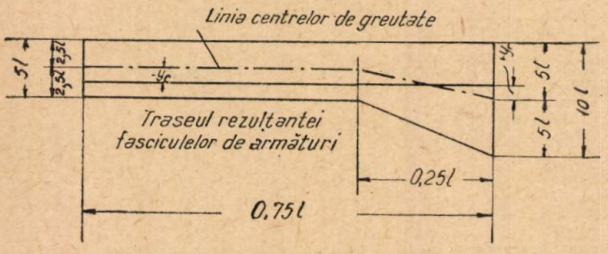


Fig. 9. — Schema unei deschideri marginale (diferitele cote pe verticală sînt în cm, deschiderea grinzii fiind de introdus în m).

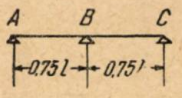


Fig. 10. — Grinda continuă cu două deschideri.

La deschiderea marginală pentru $n = 0{,}165$ și $\lambda = 0{,}333$ după interpolările necesare, se obține, cu ajutorul tablourilor nr. 3, 4 și 5,

$$a = 0{,}0422; \quad (\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}) = 0{,}3323; \quad b = 0 \text{ și } \bar{\alpha}_1 = 0{,}1865.$$

Rezultă imediat, ținînd seama că deschiderea este de numai 0,75 l

$$EI_c \varphi_{dr} = -Nl\,(3{,}16\, y_r + 21{,}80\, y_c),$$

$$EI_c \alpha_1 = 14{,}00\, l.$$

La deschiderile centrale, pentru același n și $\lambda = 0{,}250$ se obține, după efectuarea tuturor calculelor;

$$EI_c \varphi_{st} = -EI_c \varphi_{dr} = Nl\,(4{,}22\, y_r + 31{,}72\, y_c),$$

$$EI_c \alpha = 21{,}33\, l \quad ; \quad EI_c \beta = 14{,}19\, l.$$

Ținînd seama de aceste valori, efectuîndu-se toate calculele necesare, se obțin următoarele expresii ale momentelor suplimentare din dreptul reazemelor intermediare, provocate de precomprimare ca urmare a nedeterminării statice:

La grinda cu două deschideri din figura 10

$$M_B = -N\,(0{,}226\, y_r + 1{,}558\, y_c);$$

pentru grinda cu trei deschideri din figura 11

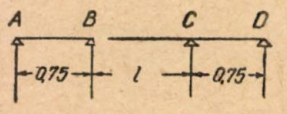


Fig. 11. — Grinda continuă cu trei deschideri.

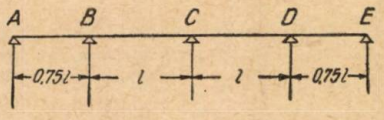


Fig. 12. — Grinda continuă cu patru deschideri.

$$M_B = M_C = -N\,(0{,}149\, y_r + 1{,}082\, y_c);$$

pentru grinda cu patru deschideri din figura 12

$$M_B = M_D = -N\,(0{,}177\, y_r + 1{,}253\, y_c),$$

$$M_C = -N\,(0{,}080\, y_r + 0{,}663\, y_c);$$

pentru grinda cu cinci deschideri din figura 13

$$M_B = M_E = -N\,(0{,}166\,y_r + 1{,}188\,y_c),$$
$$M_C = M_D = -N\,(0{,}108\,y_r + 0{,}820\,y_c);$$

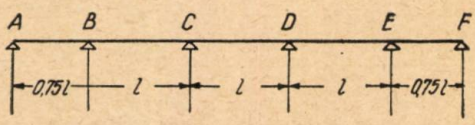


Fig. 13. — Grinda continuă cu cinci deschideri.

pentru grinda continuă cu șase deschideri din figura 14.

$$M_B = M_F = -N\,(0{,}171\,y_r + 1{,}213\,y_c),$$
$$M_C = M_E = -N\,(0{,}096\,y_r + 0{,}757\,y_c),$$
$$M_D = -N\,(0{,}134\,y_r + 0{,}988\,y_c).$$

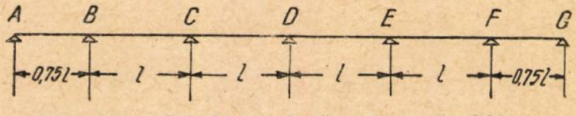


Fig. 14. — Grinda continuă cu șase deschideri.

e. Concretizarea expresiilor momentelor suplimentare provocate de precomprimare în dreptul reazemelor intermediare ale grinzii continue cu moment de inerție variabil

Pentru obținerea unor date cantitative care să permită o apreciere obiectivă asupra comportării statice a grinzilor continue din beton precomprimat cu moment de inerție variabil, studiate în cele precedente, trebuie particularizate pentru cîteva cazuri concrete expresiile stabilite la punctul *c*. În cele ce urmează s-au concretizat valorile momentelor obținute pentru următoarele două cazuri particulare:

Cazul A $y_c = -1{,}25\ l$ de unde rezultă imediat $y_r = 1{,}25\ l$;
Cazul B $y_c = -1{,}00\ l$ de unde rezultă imediat $y_r = 1{,}50\ l$.

Într-un paragraf următor se va arăta și cum trebuie condus calculul pentru a determina valoarea cea mai corespunzătoare pentru y_c.

Efectuînd toate calculele se obțin următoarele valori ale momentelor pe reazeme:

— grinda cu două deschideri:

cazul A $M_B = +1{,}665\ Nl$,
cazul B $M_B = +1{,}219\ Nl$;

— grinda cu trei deschideri:

cazul A $M_B = M_C = +1{,}165\ Nl$,
cazul B $M_B = M_C = +0{,}858\ Nl$;

— grinda cu patru deschideri:

cazul A $\begin{cases} M_B = M_D = +1{,}342\ Nl, \\ M_C = +0{,}730\ Nl, \end{cases}$

cazul B $\begin{cases} M_B = M_D = +0{,}988\ Nl, \\ M_C = +0{,}543\ Nl; \end{cases}$

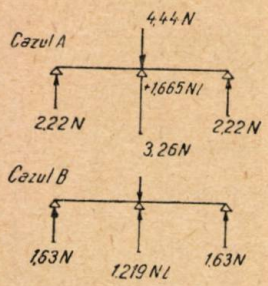


Fig. 15. — Momente static nedeterminate şi reacţiuni din precomprimare la grinda continuă cu moment de inerţie variabil avînd două deschideri.

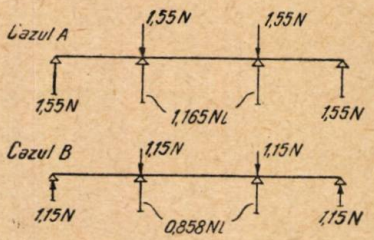


Fig. 16. — Momente static nedeterminate şi reacţiuni din precomprimare la grinda continuă cu moment de inerţie variabil avînd trei deschideri.

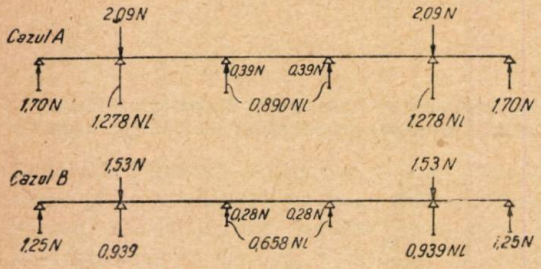


Fig. 17. — Momente static nedeterminate şi reacţiuni din precomprimare la grinda continuă cu moment de inerţie variabil avînd patru deschideri.

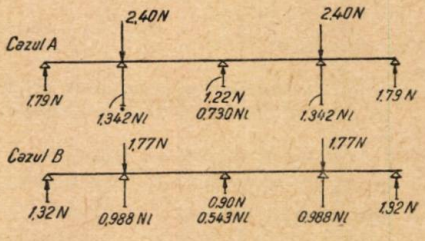


Fig. 18. — Momente static nedeterminate şi reacţiuni din precomprimare la grinda continuă cu moment de inerţie variabil avînd cinci deschideri.

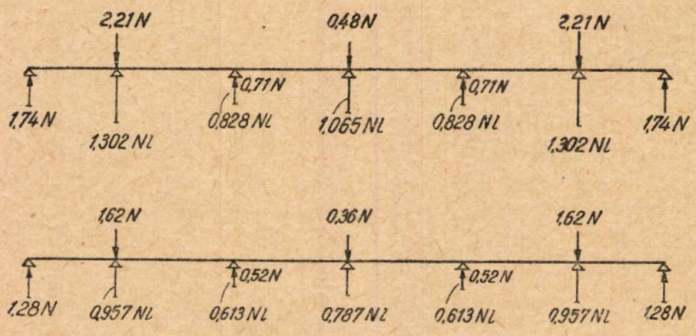


Fig. 19. — Momente static nedeterminate şi reacţiuni din precomprimare la grinda continuă cu moment de inerţie variabil avînd şase deschideri.

— grinda cu cinci deschideri:

$$\text{cazul } A \begin{cases} M_B = M_E = +\,1{,}278\ Nl, \\ M_C = M_D = +\,0{,}890\ Nl, \end{cases}$$

$$\text{cazul } B \begin{cases} M_B = M_E = +\,0{,}939\ Nl, \\ M_C = M_D = +\,0{,}658\ Nl; \end{cases}$$

— grinda cu şase deschideri:

$$\text{cazul } A \begin{cases} M_B = M_F = +\,1{,}302\ Nl, \\ M_C = M_E = +\,0{,}828\ Nl, \\ M_D = +\,1{,}065\ Nl, \end{cases}$$

$$\text{cazul } B \begin{cases} M_B = M_F = +\,0{,}957\ Nl, \\ M_C = M_E = +\,0{,}613\ Nl, \\ M_D = +\,0{,}787\ Nl. \end{cases}$$

Valorile obţinute pentru momentele suplimentare din dreptul reazemelor intermediare şi pentru reacţiunile provocate de acestea sînt trecute în figurile 15, 16, 17, 18 şi 19.

Din examinarea rezultatelor obţinute se vede că momentele încovoietoare mai mari sînt date de fasciculele de armături plasate mai jos (cazul *A*). Cum momente încovoietoare pozitive mai mari înseamnă o ridicare a curbei de presiune a eforturilor interioare, va trebui analizat în continuare dacă nu cumva această ridicare creşte mai repede decît lăsarea armăturii sau cu alte cuvinte dacă nu cumva pentru a obţine excentricităţi pozitive mai mari pe reazeme, va trebui să se mărească (în valoare absolută) excentricitatea negativă din cîmp. Acelaşi lucru (ridicarea curbei de presiune a eforturilor interioare) se poate obţine, aşa cum s-a arătat mai înainte, prin ridicarea în dreptul reazemelor a rezultantei fasciculelor de armături.

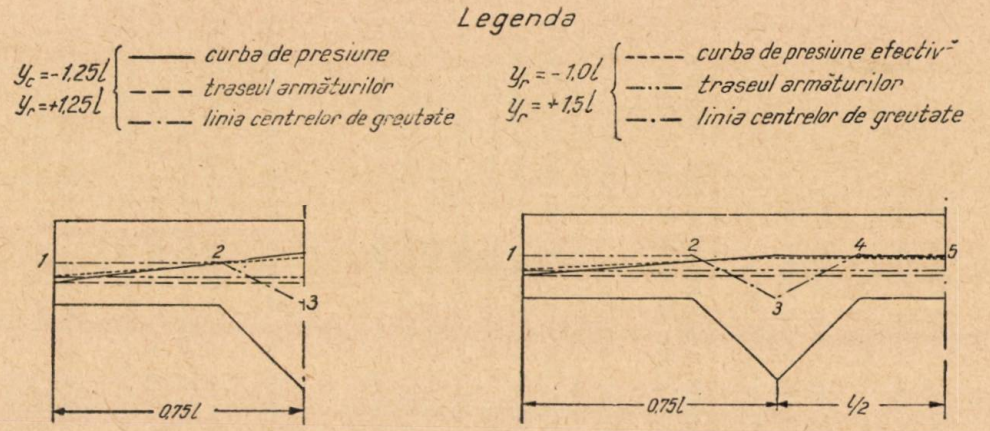
f. Curba de presiune a eforturilor interioare datorite preîntinderii armăturilor

Ca urmare a apariţiei momentelor de pe reazem datorite preîntinderii armăturilor, aşa cum se arată în [1], în faza elastică excentricitatea forţei normale nu coincide cu aceea a rezultantei fasciculului de armături sau cu alte cuvinte, curba de presiune a eforturilor interioare nu coincide cu traseul rezultantei fasciculului de armături.

Pentru a putea aprecia importanţa diferenţelor, în tablourile din figurile 20, 21, 22, 23 şi 24 s-au arătat excentricităţile efective în comparaţie cu excentricităţile rezultantei fasciculului de armături.

În cazul de faţă, ţinînd seama că în dreptul solicitărilor mari sînt secţiuni sporite, trebuie analizat amănunţit în ce măsură mărirea excentricităţii pe reazeme este sau nu avantajoasă.

Se mai remarcă de asemenea că în cazul *A*, curbele de presiune efective sînt de obicei deasupra celor din cazul *B*, cu toate că poziţia relativă a armăturilor este exact contrarie. Rămîne deci de analizat amănunţit alegerea excentricităţii traseului de armături pentru a obţine soluţia cea mai raţională, necesitînd cel mai mic efort de preîntindere.



Ordonatele curbei de presiune (faţă de centrul de greutate al secţiunii)

Punct	Cazul *A*		Cazul *B*	
	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă
1	$-1{,}250\ l$	$-1{,}250\ l$ (100%)	$-1{,}000\ l$	$-1{,}000\ l$ (100%)
2	$-1{,}250\ l$	$-0{,}140\ l$ (11 %)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}190\ l$ (19 %)
3	$+1{,}250\ l$	$+2{,}915\ l$ (235%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}719\ l$ (181%)

Fig. 20. — Traseul armăturilor şi al curbei de presiune la grinda continuă cu moment de inerţie variabil cu două deschideri.

Ordonatele curbei de presiune (faţă de centrul de greutate al secţiunii)

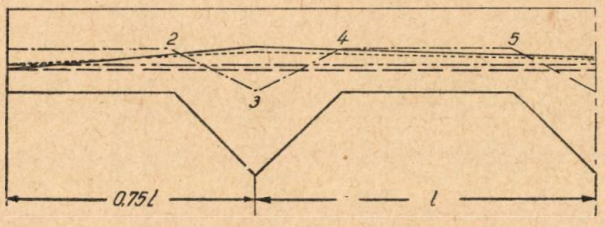
Punct	Cazul *A*		Cazul *B*	
	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă
1	$-1{,}250\ l$	$-1{,}250\ l$ (100%)	$-1{,}000\ l$	$-1{,}000\ l$ (100%)
2	$-1{,}250\ l$	$-0{,}475\ l$ (38 %)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}430\ l$ (43%)
3	$+1{,}250\ l$	$+2{,}415\ l$ (194%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}358\ l$ (157%)
4	$-1{,}250\ l$	$-0{,}085\ l$ (7%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}142\ l$ (14%)

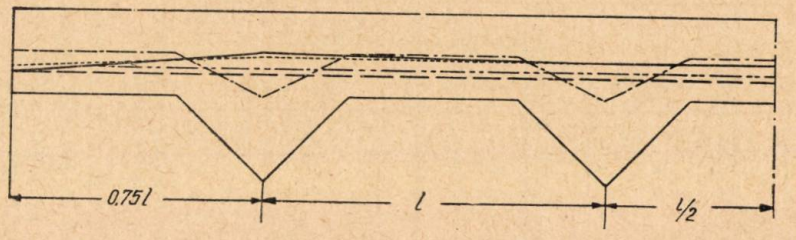
Fig. 21. — Traseul armăturilor şi al curbei de presiune la grinda continuă cu moment de inerţie variabil cu trei deschideri.

Legenda

$y_c = -1{,}25l$ ——— curba de presiune
$y_r = -1{,}25l$ – – – traseul armăturilor
– · – linia centrelor de greutate

$y_r = -1{,}0l$ ····· curba de presiune efectivă
$y_r = +1{,}5l$ – · · – traseul armăturilor
– · – linia centrelor de greutate





Ordonatele curbei de presiune (față de centrul de greutate al secțiunii)

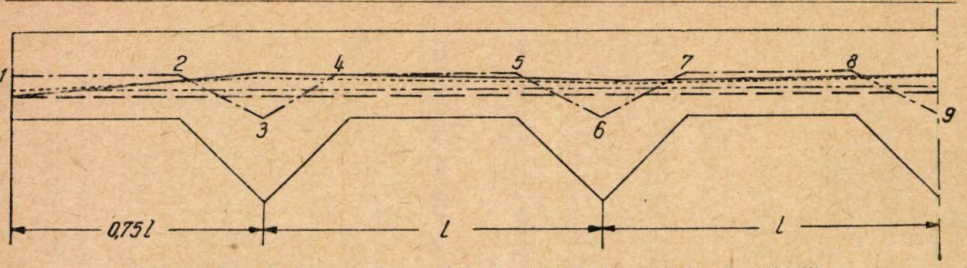
Punct	Cazul *A*		Cazul *B*	
	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă
1	$-1{,}250\ l$	$-1{,}250\ l$ (100%)	$-1{,}000\ l$	$-1{,}000\ l$ (100%)
2	$-1{,}250\ l$	$-0{,}355\ l$ (28%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}340\ l$ (34%)
3	$+1{,}250\ l$	$+2{,}592\ l$ (207%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}488\ l$ (166%)
4	$-1{,}250\ l$	$-0{,}062\ l$ (5%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}124\ l$ (12%)
5	$-1{,}250\ l$	$-0{,}368\ l$ (29%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}347\ l$ (35%)
6	$+1{,}250\ l$	$+1{,}980\ l$ (158%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}043\ l$ (136%)

Fig. 22. — Traseul armăturilor și al curbei de presiune la grinda continuă cu moment de inerție variabil cu patru deschideri.

Ordonatele curbei de presiune (față de centrul de greutate al secțiunii)

Punct	Cazul *A*		Cazul *B*	
	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă
1	$-1{,}250\ l$	$-1{,}250\ l$ (100%)	$-1{,}000\ l$	$-1{,}000\ l$ (100%)
2	$-1{,}250\ l$	$-0{,}400\ l$ (32%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}375\ l$ (38%)
3	$+1{,}250\ l$	$+2{,}528\ l$ (202%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}439\ l$ (163%)
4	$-1{,}250\ l$	$-0{,}059\ l$ (5%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}130\ l$ (13%)
5	$-1{,}250\ l$	$-0{,}262\ l$ (23%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}272\ l$ (27%)
6	$+1{,}250\ l$	$+2{,}140\ l$ (172%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}158\ l$ (144%)
7	$-1{,}250\ l$	$-0{,}360\ l$ (29%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}342\ l$ (34%)

Fig. 23. — Traseul armăturilor și al curbei de presiune la grinda continuă cu moment de inerție variabil cu cinci deschideri.



Ordonatele curbei de presiune (față de centrul de greutate al secțiunii)

Punct	Cazul *A*		Cazul *B*	
	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă
1	$-1{,}250\ l$	$-1{,}250\ l$ (100%)	$-1{,}000\ l$	$-1{,}000\ l$ (100%)
2	$-1{,}250\ l$	$-0{,}380\ l$ (30%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}362\ l$ (36%)
3	$+1{,}250\ l$	$+2{,}550\ l$ (205%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}457\ l$ (164%)
4	$-1{,}250\ l$	$-0{,}066\ l$ (5%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}129\ l$ (13%)
5	$-1{,}250\ l$	$-0{,}305\ l$ (24%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}301\ l$ (30%)
6	$+1{,}250\ l$	$+2{,}078\ l$ (166%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}113\ l$ (141%)
7	$-1{,}250\ l$	$-0{,}364\ l$ (29%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}343\ l$ (34%)
8	$-1{,}250\ l$	$-0{,}241\ l$ (19%)	$-1{,}000\ l$	$-0{,}257\ l$ (26%)
9	$+1{,}250\ l$	$+2{,}315\ l$ (185%)	$+1{,}500\ l$	$+2{,}283\ l$ (153%)

Fig. 24. — Traseul armăturilor și al curbei de presiune la grinda continuă cu moment de inerție variabil cu șase deschideri.

Din examinarea tablourilor din figurile 20...24 cu ordonatele curbelor de presiune, rezultă că excentricitățile efective în cazurile considerate, variază de la 5% pînă la 235%. Se remarcă de asemenea, pentru cazurile studiate mărirea excentricităților de pe reazeme și micșorarea celor din cîmp (în valoare absolută).

g. **Determinarea excentricității optime și a efortului de precomprimare minim necesar**

Ținînd seama că este vorba numai de a arăta modul cum se conduc calculele, nu se vor arăta în amănunt decît cele referitoare la grinda cu trei deschideri. În această situație, momentul suplimentar din dreptul reazemelor intermediare provocat de precomprimare ce urmează determinării statice, este (p. 214)

$$M_B = M_C = -N\,(0{,}149\,y_r + 1{,}082\,y_c).$$

Din figura 6 rezultă că pentru tipul de grindă studiat (înălțimea pe reazem dublă decît în cîmp) există între excentricitatea din dreptul reazemului și aceea din cîmp relația

$$y_r = 2{,}5\,l + y_c\ ^*)$$

în care y_c trebuie introdus cu semnul algebric respectiv.

Înlocuind această valoare în expresia momentului de pe reazem provocat de preîntinderea armăturii se obține

$$M_B = M_C = -N\,(0{,}372\,l + 1{,}231\,y_c).$$

Traseul curbei de presiune a eforturilor interioare ia aspectul din figura 25 (s-a ales pentru y_c o valoare pozitivă pentru a putea fi introdus în formulele obținute cu semnul său efectiv).

*) În cazul cînd rezultanta fasciculelor de armături se ridică înspre reazeme, așa cum s-a arătat în figura 8, aceasta excentricitate devine

$$y_r = 5\,l + y_c.$$

Calculul în continuare se face cu totul analog, ținînd seama de această valoare.

Valoarea cu care se deplasează curba de presiune față de traseul armăturilor în deschiderea centrală este

$$e = \frac{M}{N} = -0{,}372\,l - 1{,}231\,y_c\,.$$

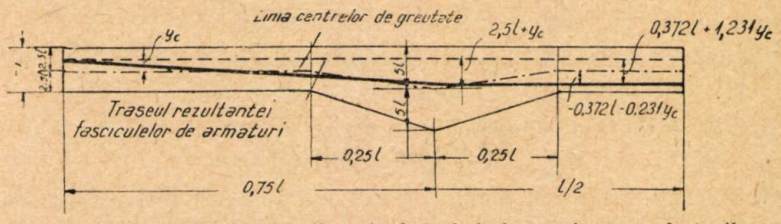


Fig. 25. — Traseul armăturilor și al curbei de presiune a eforturilor interioare în funcție de y_c la grinda continuă cu moment de inerție trei deschideri.

Ținînd seama de această deplasare, excentricitățile efective ale curbei de presiune a eforturilor interioare sînt:

în secțiunea de solicitare maximă din cîmpul marginal (la 0,40 din deschiderea respectivă, adică la o distanță

$$d = 0{,}40 \times 0{,}75\,l = 0{,}30\,l$$

de reazemul marginal)

$$e_1 = y_c - \frac{0{,}30}{0{,}75}(0{,}372\,l + 1{,}231\,y_c) = 0{,}510\,y_c - 0{,}149\,l;$$

pe reazemele centrale

$$e_2 = -1{,}231\,y_c - 0{,}372\,l + 2{,}500\,l + y_c = -0{,}231\,y_c + 2{,}128\,l;$$

în cîmpul central

$$e_3 = -1{,}231\,y_c - 0{,}372\,l + y_c = -0{,}231\,y_c - 0{,}372\,l.$$

Din analiza valorilor obținute pentru excentricitățile curbei de presiune efectivă rezultă următoarele:

1) În cîmpul marginal, pentru a avea excentricități negative și a obține astfel prin precomprimare solicitări de sens invers celor provocate de sarcinile exterioare, este bine să se aleagă valori y_c negative, deci armăturile să fie sub linia centrelor de greutate pe porțiunile în care sînt paralele.

2) În dreptul reazemelor centrale, din aceleași considerații ca la punctul 1), excentricitățile efective trebuie să fie pozitive, lucru ce se obține alegînd în mod analog valori cît mai mici pentru y_c (chiar negative).

3) În cîmpul central, pentru a obține valori negative ale excentricității efective a curbei de presiune, este necesar să se aleagă valori cît mai mari pentru y_c.

Apar deci necesități contradictorii: pentru cîmpul marginal și reazemele centrale este bine ca y_c să fie mai mic, iar pentru cîmpul central, y_c ar trebui să fie mai mare. Soluția optimă va fi deci aceea, pentru care este necesar o aceeași valoare a lui N pentru a satisface în același timp cîmpurile centrale și cele marginale, respectiv cîmpul central și reazemele intermediare, alegînd bineînțeles din aceste perechi de valori ale lui N, pe cea mai mare.

O altă soluție mai favorabilă ar fi alegerea pentru armături a unui traseu cu două frînturi în dreptul reazemelor intermediare, permițînd în felul acesta micșorarea lui y_c în cîmpurile marginale și ridicarea lui în cîmpul central. În cele ce urmează nu s-a procedat în modul acesta, pentru a putea păstra un traseu rectiliniu pentru armături. Condiția pusă pentru determinarea efortului necesar de

precomprimare este ca la solicitarea cea mai favorabilă să nu apară în secţiunea respectivă eforturi unitare de întindere.

În cîmpul marginal, după efectuarea tuturor calculelor, ţinînd seama de variaţia deschiderilor şi a momentelor de inerţie, se obţine o solicitare maximă

$$M_{max} = (0{,}0284\, g + 0{,}0568\, p)\, l^2.$$

Pe reazemul intermediar, solicitarea minimă este cea hotărîtoare.

$$M_{min} = -(0{,}0997\, g - 0{,}1179\, p)\, l^2.$$

În dreptul mijlocului cîmpului central, solicitarea hotărîtoare este

$$M_{max} = (0{,}0253\, g + 0{,}0491\, p)\, l^2.$$

Momentele de inerţie şi secţiunile în cîmp şi pe reazeme sînt cele date la p. 212).

Efortul nul în fibra inferioară a cîmpului marginal se exprimă prin relaţia

$$\frac{N_1}{9{,}667\, l^2} - \frac{N_1 (0{,}510\, y_c - 0{,}149\, l)}{11{,}800\, l^3} - \frac{(0{,}0284\, g + 0{,}0568\, p)\, l^2}{11{,}800\, l^3} = 0,$$

în care N_1 este efortul de precomprimare necesar.

Efortul nul în fibra superioară din dreptul reazemului intermediar este dat de relaţia

$$\frac{N_2}{14{,}667\, l^2} + \frac{N_2 (2{,}128\, l - 0{,}231\, y_c)}{35{,}700\, l^3} - \frac{(0{,}0997\, g + 0{,}1179\, p)\, l^2}{35{,}700\, l^3} = 0,$$

N_2 fiind efortul de precomprimare necesar.

Procedînd analog pentru mijlocul cîmpului central, se obţine

$$\frac{N_3}{9{,}667\, l^2} + \frac{N_3 (0{,}231\, y_c + 0{,}372\, l)}{11{,}800\, l^3} - \frac{(0{,}0253\, g + 0{,}0491\, p)\, l^2}{11{,}800\, l^3} = 0.$$

Efectuînd toate calculele, se ajunge la următoarele expresii pentru eforturile necesare de precomprimare:

$$N_1 = \frac{2{,}84\, g + 5{,}68\, p}{1{,}369\, l - 0{,}510\, y_c}\, l^2, \qquad N_2 = \frac{9{,}97\, g + 11{,}79\, p}{4{,}563\, l - 0{,}231\, y_c}\, l^2, \qquad N_3 = \frac{2{,}53\, g + 4{,}91\, p}{1{,}592\, l + 0{,}231\, y_c}\, l^2.$$

Punînd condiţia $N_1 = N_2$ se obţine

$$y_c = \frac{0{,}65\, g - 9{,}85\, p}{4{,}41\, g + 4{,}68\, p}\, l.$$

Pentru rapoartele dintre sarcină utilă şi cea permanentă care interesează, excentricităţile şi eforturile de precomprimare necesare sînt:

- pentru $p = 0{,}5\, g$, $y_c = -0{,}64\, l$ şi $N_{nec} = 3{,}35\, gl$;
- pentru $p = g$, $y_c = -1{,}01\, l$ şi $N_{nec} = 4{,}55\, gl$;
- pentru $p = 2\, g$, $y_c = -1{,}47\, l$ şi $N_{nec} = 6{,}80\, gl$;
- pentru $p = 3\, g$, $y_c = -1{,}63\, l$ şi $N_{nec} = 9{,}05\, gl$.

Punînd condiţia $N_1 = N_3$ se obţine

$$y_c = -\frac{1{,}06\, g + 2{,}33\, p}{1{,}95\, g + 3{,}81\, p}\, l.$$

Pentru rapoartele dintre sarcina utilă şi cea permanentă care interesează, excentricităţile şi eforturile de precomprimare necesare sînt:

- pentru $p = 0{,}5\, g$, $y_c = -0{,}58\, l$ şi $N_{nec} = 3{,}39\, gl$;
- pentru $p = g$, $y_c = -0{,}59\, l$ şi $N_{nec} = 5{,}08\, gl$;
- pentru $p = 2\, g$, $y_s = -0{,}60\, l$ şi $N_{nec} = 8{,}46\, gl$;
- pentru $p = 3\, g$, $y_c = -0{,}60\, l$ şi $N_{nec} = 11{,}80\, gl$.

Punînd condiția $N_2 = N_3$ se obține

$$y_c = \frac{-4{,}35\,g + 3{,}60\,p}{2{,}89\,g + 3{,}85\,p}\,l.$$

Pentru rapoartele dintre sarcina utilă și cea permanentă care interesează excentricitățile și eforturile de precomprimare necesare sînt:

- pentru $p = 0{,}5\ g$, $y_c = -0{,}53\ l$ și $N_{nec} = 3{,}40\ gl$;
- pentru $p = g$, $y_c = -0{,}11\ l$ și $N_{nec} = 4{,}75\ gl$;
- pentru $p = 2\ g$, $y_c = +0{,}27\ l$ și $N_{nec} = 7{,}50\ gl$;
- pentru $p = 3\ g$, $y_c = +0{,}45\ l$ și $N_{nec} = 10{,}30\ gl$.

Din examinarea valorilor obținute pentru forța de precomprimare necesară, rezultă că ea depinde — după cum era și de așteptat — de raportul dintre sarcina utilă și cea permanentă. Ceea ce trebuie însă remarcat este că și poziția optimă pentru traseul rezultantei fasciculelor de armături variază de la caz la caz și deci ea trebuie determinată așa cum s-a arătat pentru cazul de încărcare considerat.

În continuare pentru uniformizarea calculelor s-a ales pentru excentricitatea armăturilor valoarea

$$y_c = -1{,}25\,l.$$

Plasînd armăturile cît mai jos posibil, ele vor putea fi trecute prin găuri special prevăzute în inima eventualelor grinzi principale, neslăbind secțiunea tălpilor. Rezultatele studiului întreprins nu vor fi deci cele mai economice cu putință; s-a ales însă special aceasta pentru a vedea ce se obține, atunci cînd anumite considerații constructive speciale ar impune soluții ceva mai dezavantajoase din punct de vedere static. Se reamintește că alegerea traseului rectiliniu pentru armături s-a făcut pe baza acelorași considerente.

h. Momentele încovoietoare provocate de sarcinile exterioare și momentele capabile ale grinzilor continue cu moment de inerție variabil

În paragraful f s-au stabilit excentricitățile efective ale curbei de presiune atît pentru traseul de armături cu excentricitatea în cîmp $y_c = -1{,}25\,l$ (cazul A), cît și pentru excentricitatea $y_c = -1{,}00\,l$ (cazul B). Din considerațiile expuse în paragraful precedent, s-a ales pentru continuarea studiului numai cazul A, cu toate că nu reprezintă soluția optimă din punct de vedere economic.

Față de excentricitățile efective ale forței de compresiune, s-au determinat pentru diferitele cazuri considerate, (grinzi continue cu 2, 3, 4, 5 și 6 deschideri și sarcina utilă $p = 0{,}5\ g$, $p = g$, $p = 2\ g$, și $p = 3\ g$), forțele de precomprimare necesare pentru a nu da naștere, în nici o secțiune a piesei sub solicitarea cea mai defavorabilă, la eforturi unitare de întindere.

Ca exemplu, pentru grinda cu trei deschideri, s-au dovedit necesare:

— pentru asigurarea inexistenței întinderilor în cîmpul marginal

pentru $p = 0{,}5\ g$, $N = 2{,}80\ gl$,
pentru $p = g$, $N = 4{,}19\ gl$,
pentru $p = 2\ g$, $N = 6{,}98\ gl$,
pentru $p = 3\ g$, $N = 9{,}77\ gl$;

— pentru asigurarea inexistenței întinderilor în dreptul reazemelor intermediare

pentru $p = 0{,}5\ g$, $N = 3{,}26\ gl$,
pentru $p = g$, $N = 4{,}48\ gl$,
pentru $p = 2\ g$, $N = 6{,}91\ gl$,
pentru $p = 3\ g$, $N = 9{,}34\ gl$;

— pentru asigurarea inexistenței întinderilor în mijlocul cîmpului central

pentru $p = 0{,}5\ g$, $N = 3{,}80\ gl$,
pentru $p = g$, $N = 5{,}69\ gl$,
pentru $p = 2\ g$, $N = 9{,}45\ gl$,
pentru $p = 3\ g$, $N = 13{,}19\ gl$.

Procedînd în felul acesta, s-au obținut valorile preîntinderii necesare în toate cazurile pentru asigurarea inexistenței întinderilor; toate valorile obținute pentru grinzile cu 2, 4, 5 și 6 deschideri și sarcinile $p = 0{,}5\ g$, $p = g$, $p = 2\ g$ și $p = 3\ g$ au fost ceva mai mici decît cele obținute la grinda cu trei deschideri. Pentru uniformizarea calculelor s-au ales următoarele valori (cele maxime) supradimensionînd astfel grinzile în anumite cazuri:

pentru $p = 0{,}5\ g$, $N = 3{,}80\ gl$,
pentru $p = g$, $N = 5{,}70\ gl$,
pentru $p = 2\ g$, $N = 9{,}50\ gl$,
pentru $p = 3\ g$, $N = 13{,}20\ gl$.

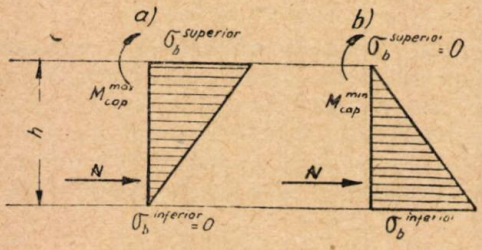


Fig. 26. — Schema eforturilor interioare pentru determinarea momentelor capabile maxime și minime:
a) momentul maxim capabil; *b)* momentul minim capabil.

Plecînd de la aceste eforturi inițiale, s-au calculat diagramele de momente capabile maxime și minime, ale diferitelor grinzi continue, studiate, considerînd drept momente capabile ale unei secțiuni acelea pentru care diagrama eforturilor unitare din secțiune arată ca în figura 26.

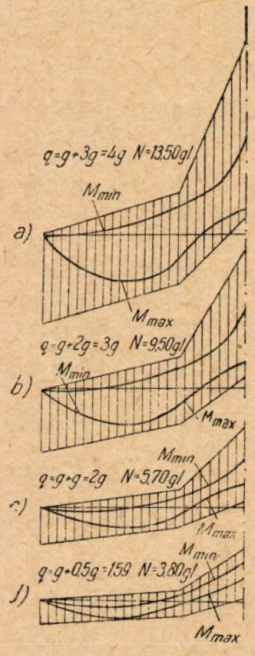


Fig. 27. — Momente maximale și momente capabile la grinda continuă cu moment de inerție variabil cu două deschideri:
a) sarcina utilă $q = 3\ g$; *b)* sarcina utilă $q = 2\ g$; *c)* sarcina utilă $q = g$; *d)* sarcina utilă $q = 0{,}5\ g$.

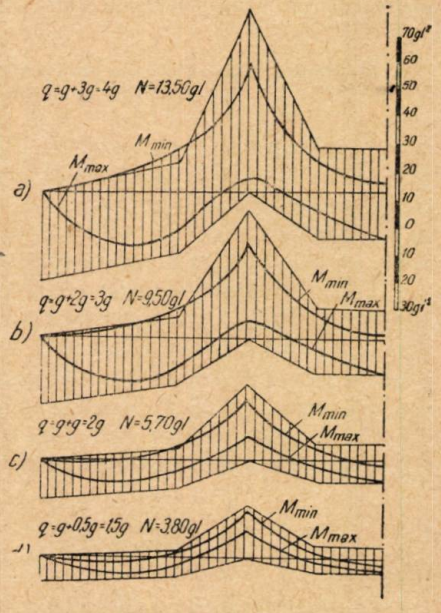


Fig. 28. — Momente maximale și momente capabile la grinda continuă cu moment de inerție variabil cu trei deschideri:
a) sarcina utilă $q = 3\ g$; *b)* sarcina utilă $q = 2\ g$; *c)* sarcina utilă $q = g$; *d)* sarcina utilă $q = 0{,}5\ g$.

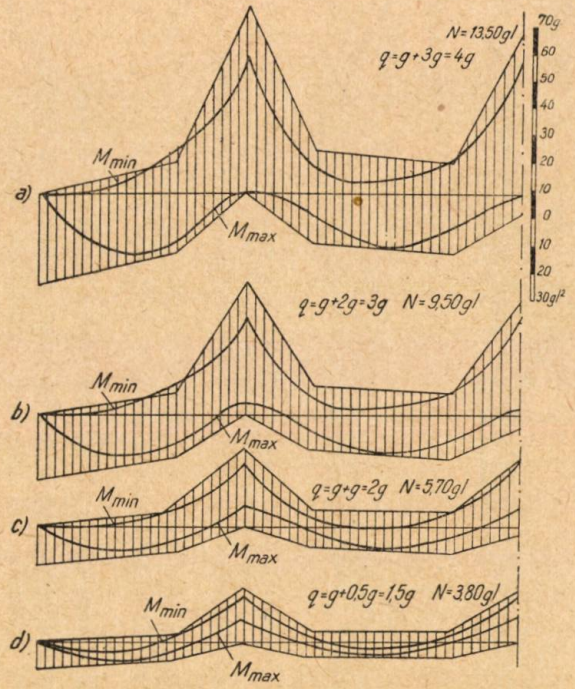


Fig. 29. — Momente maximale şi momente capabile la grinda continuă cu moment de inerţie variabil cu patru deschideri:

a) sarcina utilă $q=3\,g$; *b)* sarcina utilă $q=2\,g$; *c)* sarcina utilă $q=g$; *d)* sarcina utilă $q=0,5\,g$.

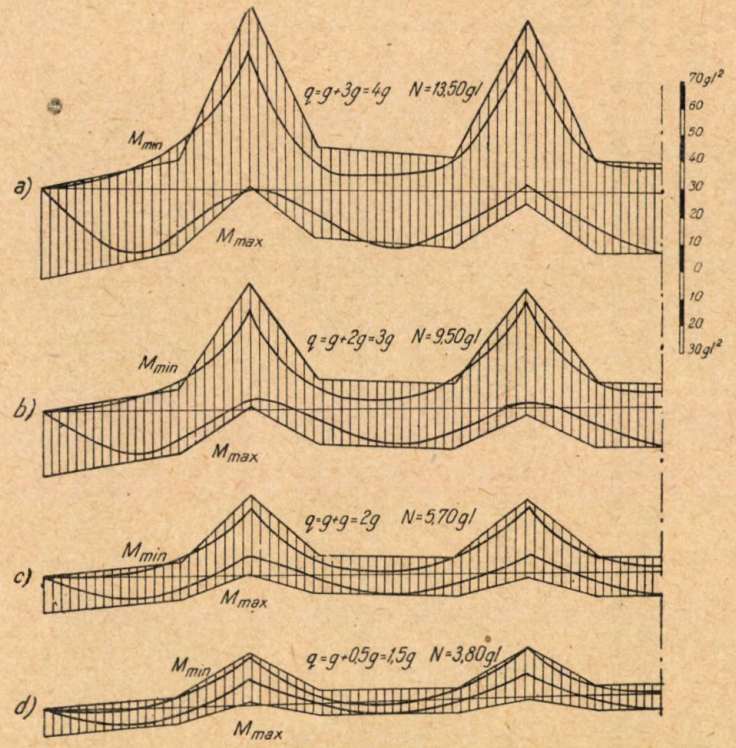


Fig. 30. — Momente maximale şi momente capabile la grinda continuă cu momente de inerţie variabil cu cinci deschideri:

a) sarcina utilă $q=3\,g$; *b)* sarcina utilă $q=2\,g$; *c)* sarcina utilă $q=g$; *d)* sarcina utilă $q=0,5\,g$.

Expresiile momentelor capabile ale unei secţiuni sînt date de următoarele relaţii

$$M_{cap}^{max} = N\left(\frac{W}{A} + e\right), \qquad (10) \qquad M_{cap}^{min} = N\left(e - \frac{W}{A}\right). \qquad (11)$$

În figurile 27, 28, 29, 30 şi 31 sînt reprezentate diagramele momentelor provocate de sarcinile exterioare*) (ţinînd seama de variaţia momentului de inerţie)

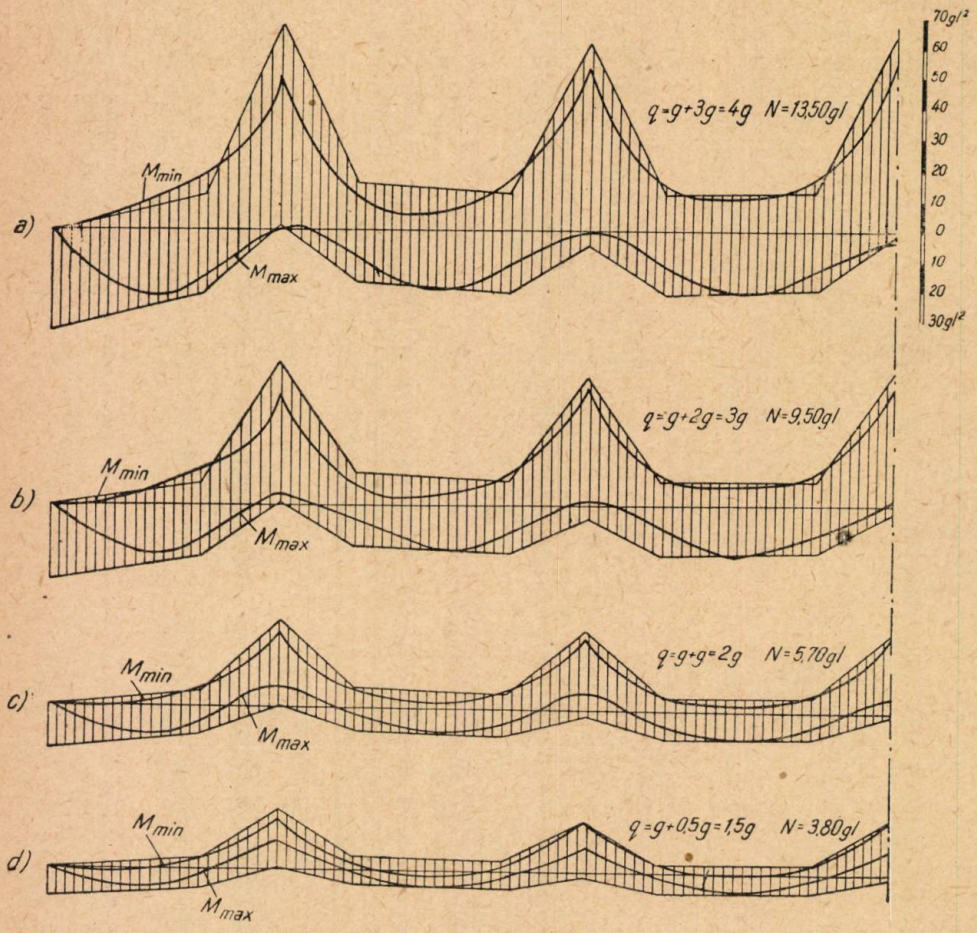


Fig. 31. — Momente maximale şi momente capabile la grinda continuă cu moment de inerţie variabil cu şase deschideri:
a) sarcina utilă $q=3\,g$; *b)* sarcina utilă $q=2\,g$; *c)* sarcina utilă $q=g$; *d)* sarcina utilă $q=0{,}5\,g$.

precum şi ale momentelor capabile pentru grinzile cu 2, 3, 4, 5, 6 deschideri, sarcinile utile luate în considerare fiind $p = 3\,g$, $p = 2\,g$, $p = g$ şi $p = 0{,}5\,g$.

i. Consideraţii asupra comportării statice a grinzilor studiate

Din examinarea diagramelor se poate trage concluzia că sistemele studiate corespund perfect scopului dat, deoarece suprafaţa limitată de momentele

*) Momentele în grinda continuă cu moment de inerţie variabil sub acţiunea sarcinii exterioare au fost calculate de ing. V. Illie.

capabile acoperă în întregime suprafaţa limitată de momentele maxime şi minime. Aceasta înseamnă că sub acţiunea celor mai defavorabile cazuri de solicitare în nici un punct al grinzilor studiate nu vor apare eforturi de întindere.

j. Economii de armătură realizabile prin introducerea continuităţii

Pentru a se putea aprecia din punct de vedere al cantităţii de armătură, economia ce se poate realiza prin introducerea nedeterminării statice la grinzile continue din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil, s-au calculat eforturile de preîntindere necesare grinzii simplu rezemate, avînd acelaşi volum de beton cu cel al unei deschideri intermediare în cazul studiat, avînd un traseu de armături corespunzător.

În tabloul nr. 6 s-au trecut eforturile de preîntindere necesare în cazul grinzii simplu rezemate şi continue, precum şi economiile realizate la armătură, prin folosirea continuităţii grinzilor din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil.

Economiile realizate sînt sensibile, în special în cazurile uzuale de încărcare, cînd sarcina utilă nu depăşeşte sarcina permanentă; în plus trebuie ţinută în seamă şi importanta economie de ancoraje marginale care nu apare aici.

În realitate, aceste economii sînt şi mai mari dacă se alege traseul optim din punct de vedere static pentru armături, aşa cum s-a arătat în paragraful f.

Tabloul nr. 6

Eforturi de preîntindere necesare şi economii realizate la armături

Sarcina considerată	Efort necesar în cazul grinzii continue (valori maxime obţinute la grinda cu 3 deschideri)	Efort necesar în cazul grinzii simplu rezemate	Economie realizată la armătură
$q = g + 3\,g = 4\,g$	13,20 *gl*	13,88	5%
$q = g + 2\,g = 3\,g$	9,50 *gl*	10,30	8%
$q = g + g = 2\,g$	5,70 *gl*	6,90	18%
$q = g + 0{,}5\,g = 1{,}5\,g$	3,80 *gl*	5,20	27%

Dacă se face comparaţia economică pentru grinda cu 3 deschideri, studiată în paragraful g, avînd traseu rectiliniu optim pentru armături şi deci necesitînd eforturile de precomprimare mai mici, economiile de armături realizabile sînt cele din tabloul nr. 7.

Tabloul nr. 7

Eforturi de preîntindere necesare şi economii realizate la armături, grinzile avînd traseul optim pentru armături

Sarcina considerată	Efort necesar în cazul grinzii continue cu traseul optim de armătură	Efort necesar în cazul grinzii simplu rezemate	Economii realizate la armături
$q = g + 3\,g = 4\,g$	11,80 *gl*	13,88 *gl*	15%
$q = g + 2\,g = 3\,g$	8,46 *gl*	10,30 *gl*	18%
$q = g + g = 2\,g$	5,08 *gl*	6,90 *gl*	26%
$q = g + 0{,}5g = 1{,}5\,g$	3,39 *gl*	5,20 *gl*	35%

Economiile realizate sînt mai importante și se menţin chiar în cazul sarcinilor utile mari; ele s-ar putea mări acceptînd și un traseu frînt pentru rezultanta fasciculelor de armături.

Rezultă deci ca fiind necesară — atunci cînd e posibil din punct de vedere constructiv — determinarea traseului optim pentru armături, întrucît el duce la sensibile economii suplimentare de armătură.

k. Studiul unei grinzi continue din beton precomprimat cu trei deschideri, avînd alt raport dintre momentele de inerţie din cîmp și de pe reazem *)

În cele precedente s-au studiat grinzile continue din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil, avînd un anumit raport între momentele de inerţie din cîmp și de pe reazem $\left(n = \frac{I_c}{I_r} = 0{,}165 ; \frac{h_r}{h_c} = 2{,}00\right)$. Este interesant de urmărit cum variază solicitările și eforturile necesare de preîntindere o dată cu mărirea valorii n — sau ceea ce este aproximativ același lucru din punct de vedere calitativ — cu micșorarea lungimii vutei. Pentru aceasta, plecînd de la datele obţinute pentru grinda cu trei deschideri, s-au refăcut toate calculele pentru o grindă avînd înălţimea pe reazem numai cu 50% mai mare decît cea din cîmp. În continuare, se dau rezultatele acestui calcul, valorile din paranteză reprezentînd cele obţinute la grinda cu $\frac{h_r}{h_c} = 2$, pentru a putea vedea concret influenţa micșorării momentului de inerţie din dreptul reazemelor intermediare.

În noul caz considerat, raportul momentelor de inerţie este $n = \frac{29{,}45}{84{,}80} = 0{,}348$ (0,165).

Momentul din dreptul reazemelor intermediare provocat de precomprimare devine

$$M = -N(0{,}222\, y_r + 0{,}977\, y_c)\ ; \qquad [-N(0{,}149\, y_r + 1{,}082\, y_c)].$$

Făcînd calculele pentru determinarea excentricităţii optime și a efortului de precomprimare minim necesar, s-au obţinut următoarele rezultate:

pentru $p = 0{,}5\ g$, $y_c = -0{,}75\ l$, $N_{nec} = 14{,}00\ gl$ (11,80 gl);
pentru $p = g$, $y_c = -0{,}40\ l$, $N_{nec} = 10{,}20\ gl$ (8,46 gl);
pentru $p = 2\ g$, $y_c = -0{,}12\ l$, $N_{nec} = 6{,}55\ gl$ (5,08 gl);
pentru $p = 3\ g$, $y_c = +0{,}01\ l$, $N_{nec} = 4{,}75\ gl$ (3,39 gl).

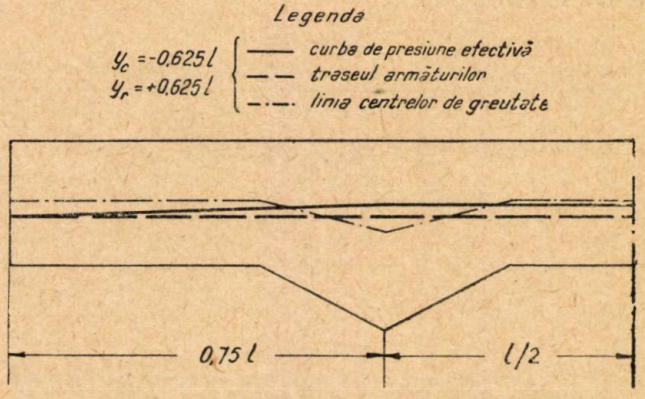
Ca și în celălalt caz, nu s-a ales soluţia optimă din punct de vedere static, care necesită pentru fiecare raport dintre p și g un alt traseu de armături, ci s-a lucrat în continuare cu $y_c = -0{,}625\ l$.

Cu această excentricitate s-au obţinut următoarele momente suplimentare provocate de precomprimare în dreptul reazemelor intermediare:

$$M = +0{,}472\, Nl \begin{pmatrix} +1{,}165\, Nl \text{ pentru cazul } A \\ +0{,}858\, Nl \text{ pentru cazul } B \end{pmatrix}.$$

*) Calculele necesare acestui paragraf au fost făcute de ing. V. Ille.

Ordonatele curbei de presiune față de centrul de greutate al secțiunii sînt date în tabloul de mai jos traseul putîndu-se vedea în figura 32. În tablou s-au trecut comparativ și valorile obținute anterior, atît pentru cazul *A* cît și pentru cazul *B* al traseului de armături.



Ordonatele curbei de presiune față de centrul de greutate al secțiunii

Punct	$n = 0{,}348$		$n = 0{,}165$ cazul *A*		$n = 0{,}165$ cazul *B*	
	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă	Armătura	Curba de presiune efectivă
1	$-0{,}625\,l$	$-0{,}625\,l$ (100%)	$-1{,}250\,l$	$-1{,}250\,l$ (100%)	$-1{,}000\,l$	$-1{,}000\,l$ (100%)
2	$-0{,}625\,l$	$-0{,}310\,l$ (49%)	$-1{,}250\,l$	$-0{,}475\,l$ (38%)	$-1{,}000\,l$	$-0{,}430\,l$ (43%)
3	$+0{,}625\,l$	$+1{,}097\,l$ (175%)	$+1{,}250\,l$	$+2{,}415\,l$ (194%)	$+1{,}500\,l$	$+2{,}358\,l$ (151%)
4	$-0{,}625\,l$	$-0{,}153\,l$ (25%)	$-1{,}250\,l$	$-0{,}085\,l$ (7%)	$-1{,}000\,l$	$-0{,}142\,l$ (14%)

Fig. 32. — Traseul armăturilor și al curbei de presiune la grinda continuă cu moment de inerție variabil cu trei deschideri.

Se vede că se păstrează întocmai caracterele generale, abaterile micșorîndu-se o dată cu micșorarea vutelor, ceea ce era și de așteptat.

Plecînd de la excentricitățile efective și punînd aceleași condiții, s-au stabilit ca necesare următoarele eforturi de precomprimare:

— pentru $p = 3\ g$, $N = 15{,}40\ gl$ ($13{,}20\ gl$);
— pentru $p = 2\ g$. $N = 11{,}12\ gl$ ($9{,}50\ gl$);
— pentru $p = g$, $N = 6{,}84\ gl$ ($5{,}70\ gl$);
— pentru $p = 0{,}5\ g$, $N = 4{,}79\ gl$ ($3{,}80\ gl$).

Analog, pentru a putea vedea economia ce se poate realiza la materialul metalic, s-au făcut calcule ale căror rezultate sînt redate în tabloul nr. 8. Trebuie remarcat că eforturile necesare pentru grinda simplu rezemată sînt ceva mai mari decît cele trecute în tabloul nr. 6. Acest lucru se explică prin faptul că s-a considerat o grindă simplu rezemată avînd un volum de beton egal cu cel al unei deschideri intermediare a grinzii cu moment de inerție variabil; înălțimea mai mică de beton pe reazem duce la un volum total de beton mai mic, deci la o înălțime mai redusă a grinzii echivalente simplu rezemată și, în consecință la un spor de efort necesar *).

*) Comparația s-a făcut variind numai înălțimea vutei, considerînd că înălțimea din cîmp e în general determinată de necesități constructive.

După cum se vede, economiile se păstrează deşi sînt mai reduse decît în cazul grinzii cu un moment de inerţie mai mare pe reazem.

În mod cu totul analog, dacă comparaţia se făcea cu eforturile necesare stabilite în fiecare caz, pentru traseul optim al armăturii, economiile ar fi fost mai mari, aşa cum rezultă din tabloul nr. 9.

Tabloul nr. 8

Eforturi de preîntindere necesare şi economii de armături realizate

Sarcina considerată	Efort necesar în cazul grinzii continue	Efort necesar în cazul grinzii simplu rezemate	Economia realizată la armătură
$q = g + 3\,g = 4\,g$	15,40 *gl*	15,44 *gl*	1% (5%)
$q = g + 2\,g = 3\,g$	11,10 *gl*	11,58 *gl*	5% (84%)
$q = g + g = 2\,g$	6,80 *gl*	7,72 *gl*	12% (18%)
$q = g + 0{,}5g = 1{,}5\,g$	4,80 *gl*	5,79 *gl*	17% (27%)

Tabloul nr. 9

Eforturi de preîntindere necesare şi economii la armătură realizate, la grinda cu trei deschideri avînd traseul optim pentru armături

Sarcina considerată	Efort necesar în cazul grinzii continue cu traseul optim al armăturii	Efort necesar în cazul grinzii simplu rezemate	Economii realizate la armături
$q = g + 3\,g = 4\,g$	14,00 *gl*	15,44 *gl*	10% (15%)
$q = g + 2\,g = 3\,g$	10,20 *gl*	11,58 *gl*	12% (18%)
$q = g + g = 2\,g$	6,55 *gl*	7,72 *gl*	15% (26%)
$q = g + 0{,}5\,g = 1{,}5\,g$	4,75 *gl*	5,79 *gl*	18% (35%)

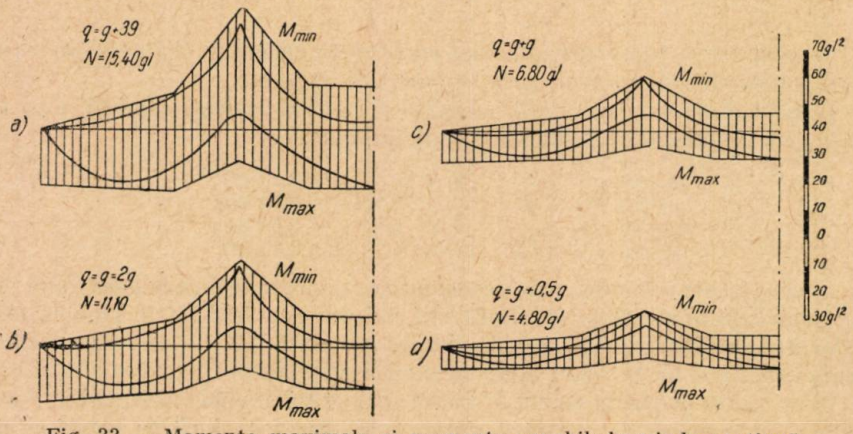


Fig. 33. — Momente maximale şi momente capabile la grinda continuă cu moment de inerţie variabil cu trei deschideri:

a) sarcina utilă $q = 3g$; *b*) sarcina utilă $q = 2g$; *c*) sarcina utilă $q = g$; *d*) sarcina utilă $q = 0{,}5g$.

Economiile sînt mai importante rămînînd totuşi mai mici decît în cazul grinzilor cu înălţimea sporită pe reazemele intermediare.

Pentru a putea face aprecieri asupra comportării statice, plecîndu-se de la excentricităţile efective ale curbei de presiune şi de la eforturile de precomprimare stabilite ca necesare, s-au calculat diagramele de momente capabile maxime şi minime, precum şi diagramele momentelor provocate de sarcinile exterioare. Analizînd aceste diagrame (fig. 33) rezultă clar că şi acest tip de grindă corespunde perfect scopului, neexistînd eforturi de întindere în nici un punct al ei.

În concluzie, avantajele amintite se păstrează chiar dacă se micşorează înălţimea grinzii pe reazemele intermediare, economiile realizate fiind însă ceva mai mici.

Ţinînd seama de toate cele expuse pînă acum, rezultă că tipul de grinzi continue din beton precomprimat cu moment de inerţie variabil, studiat în această lucrare, este foarte raţional şi economic, comportarea sa statică în faza elastică fiind deosebit de satisfăcătoare. El poate fi deci aplicat în construcţii cu mult succes.

Primită la redacţie la 28 februarie 1955

НЕРАЗРЕЗНАЯ БАЛКА ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО СЖАТОГО БЕТОНА С ПЕРЕМЕННЫМ МОМЕНТОМ ИНЕРЦИИ И ПОСТОЯННЫМ ПО ВСЕЙ ДЛИНЕ УСИЛИЕМ НА ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье исследуются неразрезные балки из предварительно сжатого бетона с переменным моментом инерции, имеющие от 2 до 6 пролетов, находящихся под распределенными нагрузками, при которых отношение полезной нагрузки к постоянной находится в пределах 0,5 и 3, а усилие на предварительное растяжение постоянно по всей длине балки.

Из этого исследования вытекают большие преимущества статического порядка, представляемые этими категориями балок.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Промежуточный пролет неразрезной балки с переменным моментом инерции. *a* — линия арматур и центров тяжести; *b* — усилия, вызванные предварительным сжатием; *c* — деформации оси балки, вызванные предварительным сжатием.

Рис. 2. — Крайний пролет неразрезной балки с переменным моментом инерции. *a* — линия арматур и центров тяжести; *b* — усилия, вызванные предварительным сжатием.

Рис. 3. — Расчет крайнего угла вращения балки с одним усиливающим утолщением.

Рис. 4. — Схема расчета φ_2. *a* — диаграмма моментов, вызывающих деформацию; *b* — изменения моментов инерции по длине балки; *c* — диаграмма виртуального момента; *d* — искомая деформация φ_2.

Рис. 5. — Поперечное сечение балки (размеры даны в сантиметрах, пролет балки *l* должен быть введен в метрах). *a* — сечение через середину пролета; *b* — сечение в месте промежуточной опоры.

Рис. 6. — Схема промежуточного пролета с прямолинейной арматурой (различные отметки высоты по вертикальной линии даны в сантиметрах, пролет балки *l* должен быть введен в метрах).

Рис. 7. — Схема расчета моментов полной заделки.

Рис. 8. — Схема промежуточного пролета, в котором арматура поднята в направлении к опорам (различные отметки высоты по вертикальной линии даны в сантиметрах, пролет балки должен быть введен в метрах).

Рис. 9. — Схема крайнего пролета (различные отметки высоты по вертикальной линии даны в сантиметрах, пролет балки должен быть введен в метрах).

Рис. 10. — Неразрезная балка с двумя пролетами.

Рис. 11. — Неразрезная балка с 3 пролетами.

Рис. 12. — Неразрезная балка с 4 пролетами.

Рис. 13. — Неразрезная балка с 5 пролетами.

Рис. 14. — Неразрезная балка с 6 пролетами.

Рис. 15. — Моменты, статически неопределенные и реакции от предварительного сжатия в неразрезной балке с 2 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 16. — Моменты, статически неопределенные и реакции от предварительного сжатия в неразрезной балке с 3 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 17. — Моменты, статически неопределенные и реакции от предварительного сжатия в неразрезной балке с 4 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 18. — Моменты, статически неопределенные и реакции от предварительного сжатия в неразрезной балке с 5 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 19. — Моменты, статически неопределенные и реакции от предварительного сжатия в неразрезной балке с 6 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 20. — Линия арматур и кривая давления в неразрезной балке с 2 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 21. — Линия арматур и кривая давления в неразрезной балке с 3 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 22. — Линия арматур и кривая давления в неразрезной балке с 4 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 23. — Линия арматур и кривая давления в неразрезной балке с 5 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 24. — Линия арматур и кривая давления в неразрезной балке с 6 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 25. — Линия арматур и кривая давления внутренних сил в зависимости от y_c неразрезной балки с 3 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 26. — Схема внутренних усилий для определения наибольших и наименьших предельных моментов. *a* — наибольший предельный момент; *b* — наименьший предельный момент.

Рис. 27. — Наибольшие моменты и предельные моменты неразрезной балки с 2 пролетами и с переменным моментом инерции. *a)* полезная нагрузка $q=3g$; *b)* полезная нагрузка $q=2g$; *c)* полезная нагрузка $q=g$; *d)* полезная нагрузка $q=0{,}5g$.

Рис. 28. — Наибольшие моменты и предельные моменты неразрезной балки с 3 пролетами и с переменным моментом инерции. *a)* полезная нагрузка $q=3g$; *b)* полезная нагрузка $q=2g$; *c)* полезная нагрузка $q=g$; *d)* полезная нагрузка $q=0{,}5g$.

Рис, 29. — Наибольшие моменты и предельные моменты в неразрезной балке с 4 пролетами и с переменным моментом инерции. *a)* полезная нагрузка $q=3g$; *b)* полезная нагрузка $q=2g$; *c)* полезная нагрузка $q=g$; *d)* полезная нагрузка $q=0{,}5g$.

Рис. 30. — Наибольшие моменты и предельные моменты в неразрезной балке с 5 пролетами и с переменным моментом инерции. *a)* полезная нагрузка $q=3g$; *b)* полезная нагрузка $q=2g$; *c)* полезная нагрузка $q=g$; *d)* полезная нагрузка $q=0{,}5g$.

Рис. 31. — Наибольшие моменты и предельные моменты в неразрезной балке с 6 пролетами и с переменным моментом инерции. *a)* полезная нагрузка $q=3g$; *b)* полезная нагрузка $q=2g$; *c)* полезная нагрузка $q=g$; *d)* полезная нагрузка $q=0{,}5g$.

Рис. 32. — Линия арматур и кривая давления в неразрезной балке с 3 пролетами и с переменным моментом инерции.

Рис. 33. — Наибольшие моменты и предельные моменты в неразрезной балке с 3 пролетами и с переменным моментом инерции. *a)* полезная нагрузка $q=3g$; *b)* полезная нагрузка $q=2g$; *c)* полезная нагрузка $q=g$; *d)* полезная нагрузка $q=0{,}5g$.

POUTRE CONTINUE EN BÉTON PRÉCONTRAINT À MOMENT D'INERTIE VARIABLE ET À EFFORT DE PRÉTENSION CONSTANT SUR TOUTE LA LONGUEUR

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, on étudie les poutres continues en béton précontraint à moment d'inertie variable, ayant de 2 à 6 travées, sollicitées par des charges réparties, le rapport entre la charge utile et la charge permanente étant compris entre 0,5 et 3, l'effort de prétension étant constant le long de la poutre.

Les grands avantages d'ordre statique qu'offrent ces catégories de poutres ressortent de cotte étude.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Travée intermédiaire de la poutre continue à moment d'inertie variable. *a)* Tracé des armatures et des centres de gravité. *b)* Sollicitations produites par précontrainte. *c)* Déformations de l'axe de la poutre produites par précontrainte. *d)* Variation des moments d'inertie le long de la poutre.

Fig. 2. — Travée marginale de la poutre continue à moment d'inertie variable. *a)* Tracé des armatures et des centres de gravité. *b)* Sollicitations produites par précontrainte.

Fig. 3. — Calcul de l'angle de rotation marginal de la poutre à voûte unique (renforcement unilatéral).

Fig. 4. — Schéma de calcul pour φ_2: *a)* Diagramme des moments qui provoquent la déformation. *b)* Variation des moments d'inertie le long de la poutre. *c)* Diagramme du moment virtuel. *d)* Déformation recherchée pour φ_2.

Fig. 5. — Section transversale de la poutre (les dimensions sont indiquées en cm, la travée l de la poutre étant en m): *a)* Section entre les appuis. *b)* Section en regard d'un appui intermédiaire.

Fig. 6. — Schéma d'une travée intermédiaire à tracé rectiligne de l'armature (les différentes cotes verticales sont indiquées en cm, la travée l de la poutre étant en m).

Fig. 7. — Schéma de calcul des moments d'encastrement parfait.

Fig. 8. — Schéma d'une travée intermédiaire dont l'armature est relevée vers les appuis (les différentes cotes verticales sont indiquées en cm, la travée l de la poutre étant en m).

Fig. 9. — Schéma d'une travée marginale (lesdifférentes cotes verticales sont indiquées en cm, la travée l de la poutre étant en m).

Fig. 10. — Poutre continue à deux travées.

Fig. 11. — Poutre continue à trois travées.

Fig. 12. — Poutre continue à quatre travées.

Fig. 13. — Poutre continue à cinq travées.

Fig. 14. — Poutre continue à six travées.

Fig. 15. — Moments statiquement indéterminés et réactions par précontrainte dans la poutre continue à deux travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 16. — Moments statiquement indéterminés et réactions par précontrainte dans la poutre continue à trois travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 17. — Moments statiquement indéterminés et réactions par précontrainte dans la poutre continue à quatre travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 18. — Moments statiquement indéterminés et réactions par précontrainte dans la poutre continue à cinq travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 19 — Moments statiquement indéterminés et réactions par précontraine dans la poutre continue, à six travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 20 — Tracé des armatures et de la courbe des pressions pour la poutre continue, à deux travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 21 — Tracé des armatures et de la courbe des pressions pour la poutre continue, à trois travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 22. — Tracé des armatures et de la courbe des pressions pour la poutre continue, à cinq travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 24 — Tracé des armatures et de la courbe des pressions pour la poutre continue, à six travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 25 — Tracé des armatures et de la courbe de pression des efforts intérieurs en fonction de y_c, pour la poutre continue, à trois travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 26 — Schéma des efforts intérieurs pour la détermination des moments capables maximums et minimums: *a)* moment capable maximum *b)* moment capable minimum.

Fig. 27. — Moments capables maximums et minimums pour la poutre continue à deux travées, à moment d'inertie variable:

a) charge utile $q = 3\,g$; *b)* charge utile $q = 2\,g$; *c)* charge utile $q = g$; *d)* charge utile $q = 0{,}5\,g$.

Fig. 28. — Moments capables maximums et minimums pour la poutre continue à trois travées, à moment d'inertie variable:

a) charge utile $q = 3\,g$; *b)* charge utile $q = 2\,g$; *d)* charge utile $q = g$; *d)* charge utile $q = 0{,}5\,g$.

Fig. 29. — Moments capables maximums et minimums pour la poutre continue à quatre travées, à moment d'inertie variable:

a) charge utile $q = 3\,g$; *b)* charge utile $q = 2\,g$; *c)* charge utile $q = 0{,}5\ g$.

Fig. 30. — Moments capables maximums et minimums pour la poutre continue à cinq travées, à moment d'inertie variable:

a) charge utile $q = 3\,g$; *b)* charge utile $q = 2\,g$; *c)* charge utile $q = g$; *d)* charge utile $q = 0{,}5\,g$.

Fig. 31. — Moments capables maximums et minimums pour la poutre continue à six travées, à moment d'inertie variable:

a) charge utile $q = 3\,g$; *b)* charge utile $q = 2\,g$; *c)* charge utile $q = g$; *d)* charge utile $q = 0{,}5\,g$.

Fig. 32. — Tracé des armatures et de la courbe des pressions pour la poutre continue à trois travées, à moment d'inertie variable.

Fig. 33. — Moments capables maximums et minimums pour la poutre continue à trois travées à moment d'inertie variable:

a) charge utile $q = 3\,g$; *b)* charge utile $q = 2\,g$; *c)* charge utile $q = g$; *d)* charge utile $q = 0{,}5\,g$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Froimescu, *Grinzi continue din beton precomprimat şi folosirea lor la realizarea grinzilor principale de poduri.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1955, p. 187.
2. A. Lebelle, *Théorie sommaire des poutres précontraintes par cables.* Cent ans de béton armé, Paris, 1949.
3. Y. Guyon, *Poutres continues en béton précontraint.* Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, Paris, 1948.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE

CONTRIBUŢII LA STUDIUL PENETRABILITĂŢII LEMNULUI DE CĂTRE LICHIDE LA DIFERITE PRESIUNI ŞI TEMPERATURI

DE

GH. I. PANĂ

Cunoaşterea legilor de variaţie a penetrabilităţii lemnului de diferite lichide, în afară de interesul ştiinţific pe care îl prezintă, are o deosebită importanţă practică în unele utilizări ale lemnului (ambalaje, ambarcaţiuni, conducte, vase diverse, unele prelucrări chimice), precum şi la impregnarea lemnului, în vederea protecţiei sau ameliorării lui.

Mărimea penetrabilităţii califică lemnul pentru utilizarea respectivă sau indică capacitatea sa de impregnare.

De asemenea, cunoaşterea legilor de circulaţie a apei în lemn prezintă un deosebit interes pentru conducerea corectă a uscării sale naturale sau artificiale, precum şi pentru studiul fiziologiei arborilor de specii diferite.

Problema penetrabilităţii are două aspecte, după cum se urmăreşte impregnarea cît mai uşoară a lemnului sau utilizarea sa ca izolant pentru lichide.

Literatura este destul de bogată în date cu privire la impregnarea (penetrabilitatea) lemnului cu lichide (antiseptice uleioase, în soluţii apoase, răşini sintetice etc.) prin imersie, sub presiune în autoclave etc., deci în situaţia cînd nu se ţine seama de direcţia de pătrundere a lichidului în raport cu direcţia elementelor anatomice ale lemnului (vase, fibre etc.).

Datele relative la penetrabilitatea lemnului de către apă şi alte lichide la diferite presiuni, exercitate numai pe o parte a suprafeţei pieselor (numai în direcţie transversală pe fibre) şi care reprezintă cazul general ce se produce în utilizările lemnului arătate mai sus, în afară de impregnare, sînt relativ reduse şi au nevoie de multe completări.

Studii asupra influenţei combinate a presiunii şi temperaturii asupra penetrabilităţii lemnului, în acest caz de pătrundere a lichidelor, nu am întîlnit în literatură. Aparatajul şi metodele de lucru utilizate în experimentările cu privire la penetrabilitatea lemnului sînt foarte variate [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Scopul acestei lucrări a fost elaborarea unei metode pentru determinarea penetrabilităţii lemnului de diverse lichide, la diferite temperaturi şi presiuni, precum şi precizarea unor cifre preliminare de penetrabilitate a lemnului cîtorva specii.

Totodată s-a căutat să se stabilească influenţa unor caractere particulare de structură ale lemnului asupra gradului de penetrabilitate.

Rezultatele prezentate în lucrare pun la dispoziția cercetătorilor și producției, în afară de metoda de lucru, o serie de date care pot fi utilizate ca valori de referință.

CAPITOLUL I
METODA DE LUCRU

1. Aparatul utilizat și modul de funcționare

Aparatul construit (fig. 1) pentru efectuarea încercărilor se compune dintr-un tub cilindric din oțel (1), cu diametrul interior de 42 mm, grosimea peretelui de 5 mm și lungimea de 100 mm. La fiecare capăt, are prevăzută cîte o mufă (2) cu un

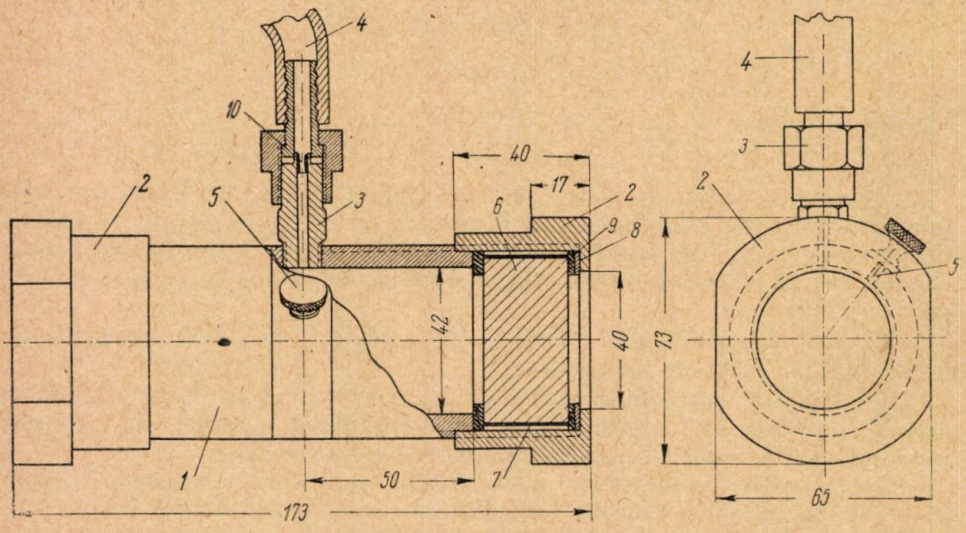


Fig. 1. — Aparat pentru încercarea lemnului la pătrunderea de către lichide sub presiune.

prag inelar pentru strîngerea epruvetei supusă încercării. Lichidul se introduce printr-o conductă (3) terminată cu o țeavă demontabilă, filetată, pentru fixarea tubului de cauciuc (4) prin care se face presiunea cu aer de la un compresor. Cilindrul este prevăzut cu un orificiu (5) pentru ieșirea aerului în timpul introducerii lichidului.

La acest aparat pot fi încercate epruvete cu formă cilindrică (6), cu diametrul de 48 mm și înălțimea pînă la 38 mm. Suprafața lor curbă este acoperită cu un strat izolant (7) (parafină, bitum, rășină etc.) care oprește ieșirea lichidului din lemn. Etanșeizarea epruvetelor pe cilindru și pragul mufei se face prin două rondele de cauciuc (8) pe care se așază o rondelă metalică (9) spre a se evita deformarea sau ruperea cauciucului la strîngerea epruvetei.

În locul tubului de cauciuc branșat la compresor, pentru producerea presiunii se poate utiliza o seringă medicală, pe a cărei tijă a pistonului se așază o greutate de 1—2 kg. În acest fel se obține o presiune de 1—2,5 at, în raport cu mărimea diametrului interior al seringii; în același timp se poate măsura cantitatea de lichid pătrunsă în lemn, după diviziunile seringii.

Conducta (3) este prevăzută cu un orificiu calibrat (10) în care se poate adapta seringa. În seringă, între lichid și capul pistonului, se pune, după caz, un strat de ulei cu viscozitate mare, pentru a se evita scăpările de lichid între corpul seringii și piston.

Pentru presiuni mai mari de 2,5 at (10—15 at) se poate utiliza, în locul seringii, un cilindru metalic cu piston.

Încălzirea epruvetelor și a lichidului la anumite temperaturi se face prin introducerea aparatului echipat într-o etuvă electrică.

Aparatul construit prezintă, față de modelele cunoscute [1], [3], [6], avantajul unei etanșeizări satisfăcătoare a epruvetelor și posibilitatea de a încerca două epruvete simultan, posibilitate de experimentare deosebit de prețioasă pentru cercetările comparative, la care se cere o precizie mare în urmărirea fenomenelor de pătrundere a lichidelor în lemn sau alte materiale. De asemenea, datorită dimensiunilor mici ale aparatului, este posibilă introducerea lui în orice etuvă electrică, încălzirea uniformă, atît a lemnului cît și a lichidului, precum și realizarea presiunilor necesare fără compresor.

2. Materialul utilizat și modul de efectuare a încercărilor

Experimentările s-au făcut asupra lemnului de brad (*Abies alba* Mill.), plop (*Populus serotina* Hartig, *P. marilandica* Bosc. și *P. nigra* L.), fag (*Fagus silvatica* L.) și stejar (*Quercus Robur* L.).

Epruvetele, de formă cilindrică, au avut diametrul de 48 mm și înălțimea de 25 mm. Ele au fost tăiate din probe de lemn (dulapi), cu greutate specifică aparentă medie pentru fiecare specie.

Tăierea epruvetelor s-a făcut astfel ca suprafețele lor plane să aibă o poziție cît mai apropiată de secțiunile radiale sau tangențiale prin lemn (pentru unele experimentări speciale cu lemn de fag).

Aplicarea stratului izolator pe suprafața curbă a epruvetelor s-a făcut prin îmbăierea (rotirea epruvetei cufundată 3—5 mm în jurul axului în poziție orizontală) în parafină sau bitum, la 80—100 °C.

Lichidele utilizate au fost: apa, la majoritatea încercărilor, alcool industrial 80% și ulei mineral*), la unele încercări.

Umiditatea lemnului în momentul încercării a fost de circa 10%.

Încercările au fost făcute la următoarele trepte de presiune pentru lichide și de temperatură pentru lichid și lemn:

— presiune: 2,5 și 10 at,

— temperatură: 0**), 20, 40 și 70 °C.

La fiecare treaptă de temperatură, înainte de montarea epruvetelor, lichidul și aparatul au fost menținute la temperatura respectivă timp de 30 minute, iar epruvetele timp de 10 minute.

Durata menținerii epruvetelor în contact cu lichidul a fost variabilă, de la 2 minute la 240 minute.

Adîncimea de pătrundere a lichidului în lemn, prin care se exprimă penetrabilitatea, s-a măsurat imediat după încercare, pe una din suprafețele rezultate prin secționarea epruvetei după un plan care conține axa sa. Deoarece pătrunderea lichidului nu este uniformă (fig. 5), s-a luat ca valoare pentru adîncimea de pătrun-

*) Ulei de transformator (Tr. 2 004 STAS 811—49), cu viscozitatea 4°E la 20 °C.

**) Temperatura pozitivă apropiată de 0 °C.

dere înălţimea h, a dreptunghiului cu baza b, şi cu suprafaţa echivalentă cu suprafaţa pe care a apărut lichidul pătruns în lemn pe secţiunea epruvetei, după cum se arată în figura 5.

CAPITOLUL II

REZULTATELE CERCETĂRILOR

Penetrabilitatea lemnului de către un anumit lichid depinde de următorii factori: presiunea exercitată de lichid şi direcţia de pătrundere a lichidului în raport cu direcţia fibrelor lemnului, temperatura lichidului şi a lemnului, caracteristicile de structură ale lemnului, umiditatea lemnului, grosimea piesei de lemn, modul de creştere a presiunii etc.

Studiul s-a efectuat asupra influenţei presiunii, temperaturii şi unor caracteristici de structură. Rezultatele încercărilor sînt prezentate în tablourile nr. 1, 2, 3, 4 *) şi în diagramele din figurile 2, 3, 4, 8 şi 9.

Tabloul nr. 1

Adîncimea de pătrundere a apei în lemnul de brad la diferite presiuni şi temperaturi

Presiunea at	Teperatura °C	Adîncimea de pătrundere, în mm, după:						
		2	5	15	30	60	120	240
		minute						
2	0	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0	1,3	1,7
5		0,6	0,8	1,2	1,6	2,0	2,5	3,1
10		1,0	1,3	1,5	2,5	3,4	4,5	6,0
2	20	1,3	1,9	3,1	4,2	5,6	7,2	—
5		2,2	3,5	5,0	6,2	8,0	10,3	—
10		5,5	5,7	6,0	6,6	—	—	—

Tabloul nr. 2

Adîncimea de pătrundere a apei în lemnul de plop la diferite presiuni şi temperaturi

Presiunea at	Temperatura °C	Adîncimea de pătrundere, în mm, după:						
		2	5	10	30	60	120	240
		minute						
2	0	1,3	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
5		3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	13,0	14,3
10		3,5	6,0	9,0	11,0	16,0	20,3	23,3
2	20	3,5	5,5	7,0	8,0	10,2	14,0	—
5		4,5	6,2	9,2	12,0	15,5	19,0	—
10		5,5	10,0	15,0	19,6	25,0	—	—

*) În tablourile 1, 2, 3, 4 se dau valori medii compensate.

Tabloul nr. 3

Adîncimea de pătrundere a apei în lemnul de fag la diferite presiuni şi temperaturi

Presiunea at	Temperatura °C	Adîncimea de pătrundere, în mm, după:						
		2	5	15	30	60	120	240
		minute						
2	0	0,5	0,7	1,0	1,3	1,9	2,7	3,3
5		0,9	1,0	1,7	2,0	2,8	3,6	4,8
10		2,0	2,9	3,6	4,3	5,1	6,3	7,3
2	20	0,9	1,3	1,8	2,5	3,4	4,5	—
5		1,7	2,5	3,5	4,1	5,1	6,7	—
10		3,2	4,5	6,4	7,7	9,3	11,3	—
2	40	1,3	2,3	4,2	7,0	11,0		
5		3,0	5,0	7,0	9,2	12,2		
10		4,3	7,1	9,6	11,9	15,7		

Tabloul nr. 4

Adîncimea de pătrundere a apei în lemnul de stejar la diferite presiuni şi temperaturi

Presiunea at	Temperatura °C	Adîncimea de pătrundere, în mm, după:						
		2	5	15	30	60	120	240
		minute						
2	0	—	—	—	0,1	0,2	0,4	0,6
5		—	—	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
10		—	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1
2	20	—	—	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9
5		—	—	0,2	0,6	0,9	1,2	1,3
10		—	0,3	0,6	0,9	1,1	1,3	1,4

1. Influenţa presiunii lichidului

Adîncimea de pătrundere în lemn a lichidelor creşte o dată cu presiunea *), după cum era de aşteptat, pentru aceeaşi durată de timp.

S-au observat şi unele excepţii, analizate mai departe, la lemnul matur de brad şi la inima roşie a fagului.

Variaţia adîncimii de pătrundere, în funcţie de presiune, reprezentată grafic în figurile 2 şi 9, se exprimă printr-o parabolă de forma $y = ax^2 + bx + c$.

Coeficienţii a, b, c, au fost determinaţi prin rezolvarea a cîte două sisteme de trei ecuaţii, utilizînd cîte trei puncte experimentale mai îndepărtate, adoptîndu-se în final mediile coeficienţilor respectivi ai celor două parabole calculate.

Partea aproape rectilinie a curbei a fost asimilată cu o dreaptă exprimată prin relaţia: $y = ax + b$.

*) Se menţionează că unii autori [2] nu admit creşterea penetrabilităţii în funcţie de variaţia presiunii hidrostatice.

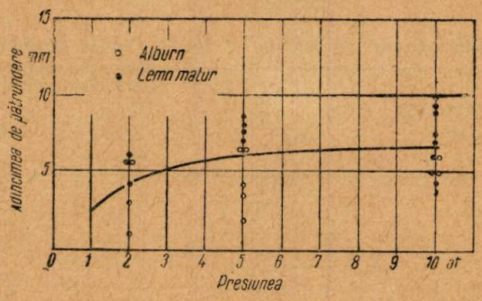


Fig. 2. — Variaţia adîncimii de pătrundere a apei în lemnul de brad în funcţie de presiunea exercitată (30 min, 20 °C).

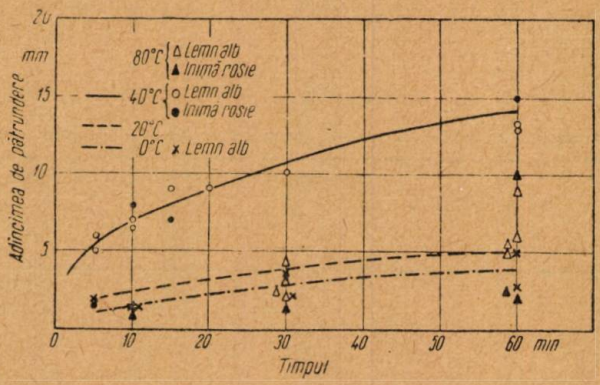


Fig. 3. — Variaţia în timp a adîncimii de pătrundere în lemnul de fag a apei, la diferite temperaturi şi la presiunea de 5 at.

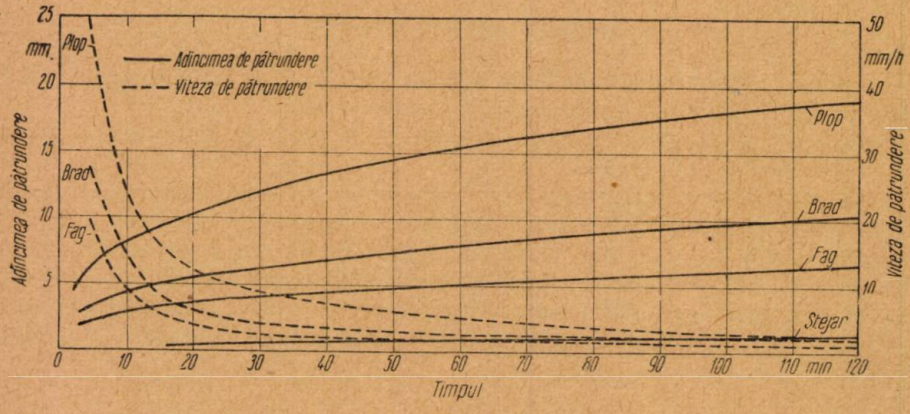


Fig. 4. — Variaţia în timp a adîncimii şi vitezii de pătrundere a apei la temperatura de 20 °C şi presiune de 5 at, în lemnul de plop, brad, fag şi stejar.

În acest mod s-au obținut următoarele relații:

$l = -0{,}2 \quad p^2 + 2{,}1 \quad p + 0{,}5$ pentru lemnul de brad, între 1 și 5 at,
$l = \quad 0{,}066 \quad p + 5{,}84$ pentru lemnul de brad, între 6 și 10 at,
$l = -0{,}0325 \quad p^2 + 0{,}82 \quad p + 0{,}61$ pentru lemnul de fag, între 1 și 10 at,

în care:

l este adîncimea de pătrundere a apei în lemn, la temperatura de 20 °C, după 30 minute, în mm;

p, presiunea exercitată, în at.

2. Influența temperaturii

Adîncimea de pătrundere a lichidelor în lemn este variabilă în raport cu temperatura lemnului și a lichidului (fig. 3). Pînă la 40°C s-a constatat o creștere a adîncimii de pătrundere o dată cu ridicarea temperaturii.

Pentru temperaturi mai ridicate de 40°C, adîncimea de pătrundere scade. De exemplu, adîncimea de pătrundere a apei în lemn la 70 °C este mai mică decît aceea care se produce la 40 °C.

S-ar putea explica acest fenomen printr-o rigidizare a membranelor punctuațiilor din pereții celulari, urmată de o scădere a permeabilității lor, datorită temperaturii mai mari și unei ușoare scăderi de umiditate a lemnului (2...3%).

3. Influența speciei lemnoase și a particularităților de structură ale lemnului

Specia lemnoasă și particularitățile de structură au o influență determinantă asupra penetrabilității lichidelor.

Variația adîncimii de pătrundere a lichidelor la diferite presiuni și temperaturi, în timp, este în general similară pentru lemnul speciilor cercetate, însă nu identică (fig. 4).

Cea mai redusă penetrabilitate o are lemnul de stejar, urmat de lemnul de fag, brad și plop (fig. 4).

Structura diferită a lemnului fiecăreia din aceste specii explică diferențele de penetrabilitate constatate (fig. 5, 6, 7).

După structura lemnului fiecărei specii, lichidul trebuie să străbată printr-un număr și fel deosebit de punctuații și prin pereți celulari diferiți ca grosime și număr.

Lemnul speciilor cu fibre numeroase, cu elemente anatomice, cu pereții groși sau cu un număr redus de punctuații (de ex. lemnul de stejar și fag) este mai greu penetrabil decît lemnul speciilor cu vase numeroase, cu pereți subțiri și cu punctuații frecvente (de ex. lemnul de plop și de brad).

Modul de grupare a celulelor și amplasarea diferită a punctuațiilor în pereții celulelor produc o modificare a vitezei de pătrundere a lichidelor în lemn. Astfel, la speciile rășinoase, (brad) din cauza prezenței numeroaselor punctuații în pereții radiali ai traheidelor, s-a înregistrat o pătrundere mai mare a lichidelor în sens tangențial.

Variația adîncimii de pătrundere și a vitezei de pătrundere (la limita de înaintare a apei) în timp, prezentate în figura 4 au fost exprimate prin relații de forma $y = ax^2 + bx + c$ și $y = ax + b$, respectiv pentru intervalele de timp 10—30 minute și 35—120 minute, după procedeul menționat anterior. Valoarea coeficienților este trecută în tablourile nr. 5 și 6.

De asemenea la pătrunderea lichidului în sens tangențial s-a observat tendința de a urma un traseu paralel cu direcția inelelor anuale ale lemnului, cu diferențe

de pătrundere accentuate (fig. 5), fenomene care indică influența mare a structurii lemnului.

Greutatea specifică aparentă a lemnului, ca un caracter de structură, exprimă indirect distanța efectivă traversată de lichid în drumul său prin substanța lemnoasă.

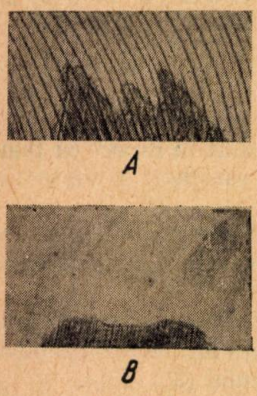


Fig. 5. — Aspectul secțiunii axiale într-o epruvetă pătrunsă de apă sub presiune. *A*. lemn de brad (5 at, 60 min, 20 °C); *B*. lemn de plop (5 at, 5 min, 20 °C).

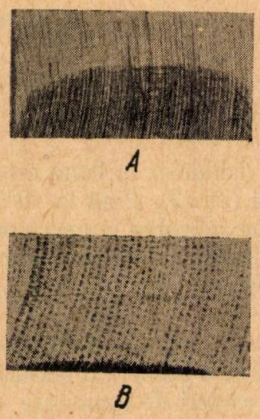


Fig. 6. — Aspectul secțiunii axiale într-o epruvetă pătrunsă de apă sub presiune. *A*. lemn alb de fag (10 at, 120 min, 20°C); *B*. lemn de stejar (10 at, 120 min, 20 °C).

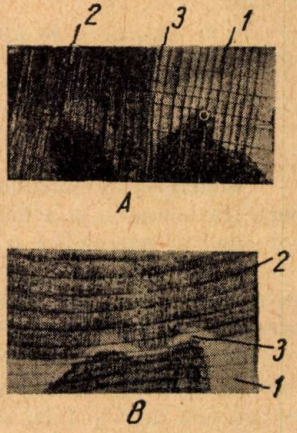


Fig. 7. — Aspectul secțiunii axiale într-o epruvetă de lemn de fag, alb și inimă roșie. *A*. pătrundere tangențială (10 at, 30 min, 20 °C); *B*. pătrundere radială (10 at, 30 min, 20 °C). *1*. lemn alb; *2*. inimă roșie; *3*. zonă greu penetrabilă.

Tabloul nr. 5

Coeficienții relației adîncimea de pătrundere în funcție de timp

Specia lemnoasă	Valoarea coeficienților					
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
	pentru 10—30 min			pentru 35—120 min		
Plop	—0,002	0,28	5,5	— 0,00061	0,168	7,35
Brad	—0,0037	0,227	2,4	0,046	5,1	—
Fag	—0,002	0,13	1,8	0,032	3,05	—
Stejar	0,007	0,4	—	0,007	0,4	—

Tabloul nr. 6

Coeficienții relației viteza de pătrundere în funcție de timp

Specia lemnoasă	Valoarea coeficienților				
	a	*b*	*c*	*a*	*b*
	pentru 10—30 min			pentru 35—120 min	
Plop	0,0205	—1,195	21,8	—0, 032	4,6
Brad	0,015	—0,84	13,8	—0,0117	2,22
Fag	0,009	—0,52	8,7	—0,0083	1,33

Scăderea adîncimii de pătrundere a lichidelor în lemn, o dată cu creșterea greutății specifice, apare deci ca normală (fig. 8). Relațiile stabilite între adîncimea de pătrun-

dere și greutatea specifică a lemnului de fag, la presiuni ale apei de 2 at și 5 at după 30 minute, sînt:

$$l = -6{,}66\ \gamma_{12} + 6{,}79 \qquad \text{(la 2 at)}$$

$$l = -3{,}03\ \gamma_{12} + 5{,}73 \qquad \text{(la 5 at)}$$

în care:

l este adîncimea de pătrundere, în mm;
γ_{12}, greutatea specifică aparentă a lemnului, în g/cm³.

Rezultă o creștere a adîncimii de pătrundere cu 0,67 mm și cu 0,3 mm, respectiv pentru 2 at și 5 at, pentru fiecare scădere a greutății specifice cu 0,1 g/cm³.

Adîncimea de pătrundere a lichidelor în inima roșie a lemnului de fag, în comparație cu aceea în lemnul alb, nu a prezentat diferențe sistematice. Dispersia mai mare a valorilor observate la inima roșie se datorește probabil stadiului diferit de formare (alterare), cantității și dispoziției diferite a tilelor în vase.

Interesant pentru practica impregnării lemnului și a confecționării ambalajelor, este fenomenul observat la zona de demarcație între lemnul alb și inima roșie. Această zonă (fig. 7), cu grosimea variabilă (2...5 mm), este greu penetrabilă de lichide, datorită traversării mai grele a punctuațiilor (probabil din cauza membranelor mai puțin permeabile), a pereților celulari, precum și a unei tiloze mai avansate. De asemenea această traversare se face în sens radial.

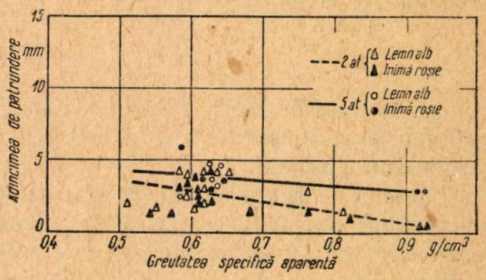


Fig. 8. — Variația adîncimii de pătrundere a apei în lemnul de fag la diferite presiuni (2 at și 5 at) în funcție de greutatea specifică aparentă a lemnului (30 min, 20 °C).

La lemnul de brad s-a observat o diferență a adîncimii de pătrundere în lemnul matur (situat în apropiere de axa arborelui) față de alburn, și anume lemnul matur este mai penetrabil.

Această penetrabilitate diferită s-ar explica prin poziția diferită a membranei punctuațiilor areolate la traheidele lemnului matur și la cele din alburn.

Alburnul cu un conținut mai ridicat de apă ca lemnul matur are membranele punctuațiilor mai elastice și prin uscarea ulterioară se poate produce o obturare mai perfectă de către torusul acestora.

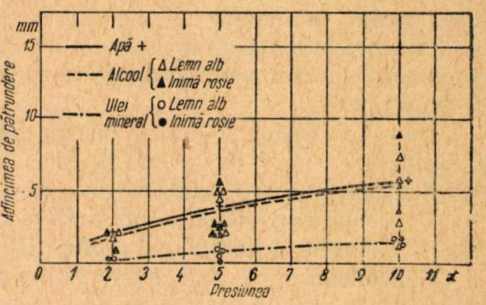


Fig. 9. — Variația adîncimii de pătrundere a diferitelor lichide în lemnul de fag, în funcție de presiunea exercitată (30 min, 20 °C).

Alți cercetători [7], [8] au ajuns însă la rezultate contrare și anume că lemnul matur este mai puțin penetrabil decît alburnul. Explicația ar fi umiditatea diferită a lemnului [5], în cazul experiențelor noastre ($U \simeq 12\%$) și a celor citate din literatură (70...160%).

Penetrabilitatea mai redusă (fig. 3) a lemnului de către apă, la temperaturi mai ridicate (> 40 °C) se datorește probabil unui fenomen de rigidizare (plasticizare) a pereților celulari și a membranelor punctuațiilor, urmată de o scădere a

permeabilității lor, datorită temperaturii ridicate și unei ușoare scăderi a umidității lemnului*) (2...3%).

Viteza de pătrundere (la limita de înaintare) și deci și adîncimea de pătrundere a lichidului în lemn este mult mai mare în primele 20—30 minute de la exercitarea presiunii, scăzînd constant în timp (fig. 4).

Adîncimea și viteza de pătrundere a apei, proporțional mai mare (fig. 4) în primele 5 minute din momentul contactului cu suprafața lemnului, se datorește poziției înclinate (neparalele) a axei vaselor, traheidelor sau fibrelor în raport cu suprafața plană a epruvetei.

4. Diferența de pătrundere după felul lichidelor

Este evident că diferitele lichide pătrund în lemn la diferite adîncimi, chiar în condiții identice, datorită proprietăților lor fizice deosebite.

Experiențele efectuate cu ulei mineral și cu alcool în comparație cu apa (fig. 9), arată că lemnul este mai ușor penetrabil de către apă și mai greu de ulei; alcoolul pătrunde în lemn ca și apa.

CONCLUZII

A. Cercetările întreprinse au condus la elaborarea unei metode de lucru pentru determinarea comparativă a penetrabilității transversale a lemnului de diferite lichide sub presiune.

Metoda pe care o propunem în urma experimentărilor făcute cu varierea diverșilor factori constă în determinarea adîncimii de pătrundere a unui lichid în lemn, în direcție radială sau tangențială, la o presiune anumită (2 și 5 at) și pe o durată anumită (30 și 60 min), la temperatura de $20° \pm 2\,°C$, atît a lemnului cît și a lichidului.

Pentru determinări s-a adoptat epruveta cilindrică cu $d = 48$ mm și $h = 25$ mm.

Valorile obținute pentru diferite materiale lemnoase se compară cu valorile medii găsite, în condiții identice de experimentare, pentru lemnul de brad și de fag (cu greutatea specifică medie și $U = 12...15\%$ sau $U = U_{sf}$**)), considerate ca etalon respectiv pentru speciile de rășinoase și de foioase moi și pentru speciile de foioase tari.

Ca valori etalon provizorii pentru adîncimea de pătrundere în lemnul de brad și fag cu $U = 12...15\%$, pînă la executarea unui număr mai mare de încercări, pot fi utilizate acelea stabilite în această lucrare.

B. Urmărirea influenței presiunii și temperaturii asupra adîncimii de pătrundere a lichidelor în lemn au condus la următoarele constatări:

1. Adîncimea de pătrundere crește o dată cu presiunea exercitată asupra lichidului. La presiuni mai mari de 6—7 at adîncimea de pătrundere are o creștere mai lentă tinzînd către o stabilizare.

Relația între adîncimea de pătrundere și presiune este de forma $y = ax^2 + bx + c$.

2. Temperatura pînă la o anumită limită (40...60 °C) favorizează pătrunderea apei în lemn (fag).

---

*) Lemnul cu un conținut mai mare de apă este mai ușor penetrabil decît acela cu un conținut mai mic [2], [5], [8].

**) U_{sf} = umiditatea la punctul de saturație al fibrei.

3. Speciile lemnoase se comportă diferit la pătrunderea apei. Cel mai puțin penetrabil este lemnul de stejar, urmat de acela de fag, brad și plop.

Viteza de pătrundere (la limita de înaintare a lichidului) este diferită după specia lemnoasă și scade în timp.

Particularitățile de structură ale fiecărei specii au o influență deosebită asupra penetrabilității. Astfel grosimea pereților celulari, numărul și dimensiunile punctuațiilor, poziția și starea membranei (torusului) punctuațiilor etc., conduc la o penetrabilitate diferită și anume:

— o dată cu creșterea greutății specifice aparente a lemnului scade proporțional și adîncimea de pătrundere a apei;

— penetrabilitatea în direcție radială este mai mică ca în direcție tangențială;

— lemnul matur e mai ușor penetrabil decît alburnul (la lemnul de brad uscat cu $U \simeq 12\%$);

— penetrabilitatea este influențată în cea mai mare măsură de poziția torusului (care joacă rolul unei supape) față de orificiul punctuației, decît de prezența tilelor, gomelor, substanțelor de duramenificare etc.

În experimentările făcute nu s-a observat o diferență evidentă între adîncimea de pătrundere a lemnului alb de fag față de inima roșie.

4. În încercările făcute (lemn de fag) cu lichide diferite s-a constatat că apa și alcoolul pătrund egal în lemn, iar uleiul mineral mult mai puțin decît acestea.

★

Aplicarea metodei preconizate în această lucrare poate conduce în mod rapid, pe baza adîncimii de pătrundere a lichidelor, la calificarea lemnului (masiv și stratificat) diferitelor specii pentru diferite utilizări: ambalaje, conducte, vase etc., precum și la stabilirea comportării sale la impregnare.

Considerînd rezultatele obținute, apare ca indicată utilizarea lemnului cu greutate specifică mare și debitat tangențial, acolo unde se cere o penetrabilitate redusă (ambalaje, conducte, vase etc.) și utilizarea lemnului cu greutate specifică mică în cazul cînd urmează a fi impregnat. Tot pentru a micșora penetrabilitatea, la piesele cu grosimi mai mari și în unele utilizări speciale, zona de delimitare dintre lemnul alb și inima roșie, poate fi utilizată în mod rațional ca un perete greu penetrabil. De asemenea, ar trebui extinsă în genere utilizarea lemnului de fag la confecționarea ambalajelor pentru uleiuri, deoarece penetrabilitatea acestuia este redusă față de aceste substanțe.

Primită la redacție la 28 iunie 1955

К ВОПРОСУ О ПРОНИЦАЕМОСТИ ДРЕВЕСИНЫ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Произведенными исследованиями были установлены законы проницаемости древесины различных пород (ель, тополь, бук и дуб) для жидкостей при разных давлениях и температурах.

В основном были получены следующие результаты:

1. Наименее проницаема древесина дуба, за которой следует бук, сосна и тополь.

2. Глубина проницаемости растет одновременно с давлением, а скорость проникновения уменьшается во времени, согласно нижеследующему отношению: $y = ax^2 + bx + c$.

3. Температура до известного предела (40—60) способствует проникновению воды в древесину.

4. Проницаемость уменьшается одновременно с увеличением удельного веса древесины, согласно отношению: $y = ax + b$.

5. У бука не было обнаружено заметной разницы в проницаемости древесины по сравнению с сердцевиной.

На основании произведенных исследований был разработан метод работы для сравнительного определения поперечной проницаемости древесины для воды под давлением, причем были установлены эталонные величины для древесины хвойных пород и для лиственных как мягких, так и твердых пород.

Применение указанного метода может привести к быстрой квалификации древесины, слоистой включительно, для различного потребления и установления поведения ее при пропитывании.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Прибор для испытания древесины на проникновение жидкостей под давлением.

Рис. 2. — Изменения глубины проникновения воды в древесину ели в зависимости от давления (30 мин., 20°).

Рис. 3. — Изменения во времени глубины проникновения воды в древесину бука при различных температурах и давлении в 5 атм.

Рис. 4. — Изменения во времени глубины и скорости проникновения воды в древесину тополя, ели, бука и дуба при температуре 20° и давлении в 5 атм.

Рис. 5. — Вид осевого разреза пробного образца древесины, в которую вода проникла под давлением.А — древесина ели (5 атм., 60 мин., 20°). В — древесина тополя (5 атм., 5 мин., 20°).

Рис. 6. — Вид осевого разреза пробного образца древесины. Вода проникла под давлением. А — белая древесина бука (10 атм., 120 мин., 20°). В — древесина дуба (10 атм., 120 мин., 20°).

Рис. 7. — Вид осевого разреза пробного образца белой древесины и красной сердцевины бука. А — тангенциальное проникновение (10 атм., 30 мин., 20°). В — радиальное проникновение (10 атм., 30 мин., 20°). 1 — белая древесина; 2 — красная сердцевина; 3 — трудно проницаемая зона.

Рис. 8. — Изменения глубины проникновения воды в древесину бука при различных давлениях (2 атм., и 5 атм.) в зависимости от кажущегося удельного веса древесины (30 мин., 20°).

Рис. 9. — Изменения глубин проникновения различных жидкостей в древесину бука в зависимости от давления (30 мин., 20°).

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA PÉNÉTRABILITÉ DU BOIS PAR DES LIQUIDES À DIFFÉRENTES PRESSIONS ET TEMPÉRATURES

(RÉSUMÉ)

Les recherches effectuées ont précisé certaines lois de la pénétrabilité du bois des différentes espèces (sapin, peuplier, hêtre et chêne) par des liquides, à différentes pressions et températures.

On est arrivé aux suivantes constatations principales:

1. Le moins pénétrable est le bois de chêne, puis le hêtre, le sapin et le peuplier.

2. La profondeur de la pénétration augmente en raison de la pression et la vitesse de pénétration diminue en raison du temps, suivant une relation de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

3. La température favorise jusqu'à une certaine limite (40°...60°), la pénétration de l'eau dans le bois (hêtre).

4. La pénétrabilité diminue avec l'augmentation du poids spécifique du bois, suivant une relation de la forme $y = ax + b$.

5. Aucune différence sensible de la pénétrabilité n'a été observée entre le bois blanc du hêtre et celui du cœur rouge.

En vertu des recherches entreprises, on a élaboré une méthode de travail pour la détermination comparative de la pénétrabilité transversale du bois par l'eau sous pression, en établissant les valeurs de référence (étalon) pour le bois des résineux et des feuillus mous et le bois des feuillus durs.

L'application de la méthode proposée peut conduire de façon rapide à la qualification du bois, inclusivement celle du bois stratifié, pour différents emplois: emballages, conduites, récipients, etc., ainsi qu'à l'établissement de son comportement à l'imprégnation.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Appareil servant à éprouver la pénétrabilité du bois par des liquides sous pression.

Fig. 2. — Variation de la profondeur de la pénétration de l'eau dans le bois de sapin en fonction de la pression exercée (30′, 20 °C).

Fig. 3. — Variation, en raison du temps, de la profondeur de la pénétration de l'eau dans le bois de hêtre, à différentes températures et sous une pression de 5 at.

Fig. 4. — Variation, en raison du temps, de la profondeur et de la vitesse de pénétration de l'eau dans le bois de peuplier, sapin, hêtre et chêne, à une température de 20 °C et sous une pression de 5 at.

Fig. 5. — Aspect d'une section axiale dans une éprouvette où l'eau a pénétré sous pression. *A* = bois de sapin (5 at, 60′, 20 °C); *B* = bois de peuplier (5 at, 5′, 20 °C).

Fig. 6. — Aspect d'une section axiale dans une éprouvette où l'eau a pénétré sous pression. *A* = bois blanc de hêtre (10 at, 120′, 20 °C); *B* = bois de chêne (10 at, 120′, 20 °C).

Fig. 7. — Aspect d'une section axiale dans une éprouvette de bois de hêtre, bois blanc et cœur rouge. *A* = pénétration tangentielle (10 at, 30′, 20 °C); *B* = pénétration radiale (10 at, 30′, 20 °C). 1. Bois blanc; 2. cœur rouge; 3. zone difficilement pénétrable.

Fig. 8. — Variation de la profondeur de la pénétration de l'eau dans le bois de hêtre, sous différentes pressions (2 at et 5 at), en raison du poids spécifique apparent du bois (30′, 20 °C).

Fig. 9. — Variation de la profondeur de la pénétration des différents liquides dans le bois de hêtre, en raison de la pression exercée (30′, 20 °C).

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Bajenov, *O proniţaemosti drevesinî jidkostiami*, în *Trudî Instituta Lesa Akademii Nauk SSSR*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova-Leningrad, 1949, t. IV.
2. — *Proniţaemosti drevesinî jidkostiami i ee prakticeskoie znacenie*, în *Trudî Instituta Lesa Akademii Nauk SSSR*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1952.
3. N. Mărghitan, *Permeabilitatea lemnului*. Industria lemnului, celulozei şi hîrtiei, 1953, nr. 11, p. 15.
4. N. V. Arţihovskaia, *Issledovanie vlagoprovodnosti drevesinî*, în *Trudî Instituta Lesa Akademii Nauk SSSR*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova-Leningrad, 1953, t. IX.
5. — *Issledovanie predvijenia vlaghi v drevesine v proţesse visthania*, în *Trudî Instituta Lesa Akademii Nauk SSSR*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova-Leningrad, 1953, t. IX.

6. V. A. Bajenov, *Vodoponijaemosti drevesini*, în *Trudi Instituta Lesa Akademii Nauk SSSR*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova-Leningrad, 1953, t. IX.
7. V. A. Bajenov i V. E. Moskaleva, *O proniţaemosti drevesini zaboloni i iadra sosni jidkostiami i o vozmojnostiah eio regulirovania*, în *Trudi Instituta Lesa Akademii Nauk SSSR*. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova-Leningrad, 1953, t. IX.
8. D. N. Lektorski, *Zaşcitnaia obrabotka drevesini, Tehnologhia propitki lesomaterialov*. Goslesbumizdat, Moscova-Leningrad, 1953, partea I.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

METODE DE CALCUL

REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE PRINTR-O METODĂ DE RECURENŢĂ ŞI O METODĂ DE ITERAŢIE

DE

N. S. PÎRVULESCU

A. TRANSFORMAREA ECUAŢIEI

Integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţii variabili, cu ajutorul seriilor de puteri întregi, ne-au condus, [1], la necesitatea de a rezolva ecuaţii de grade întregi (3, 5 şi chiar 7).

Fie ecuaţia

$$0 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \tag{1}$$

cu coeficienţii a_i reali, n fiind un număr natural oarecare.

Făcînd schimbarea de necunoscută

$$y = \frac{a_1}{a_0} z, \tag{2}$$

în care a_0 şi a_1 sînt diferiţi de zero, ecuaţia precedentă devine

$$\sum_{i=0}^{n} a_{1,i}\, y^i = 0, \tag{3}$$

în care

$$a_{1,2} = 1 = a_{1,1},$$

$$a_{1,2} = \frac{a_0 a_2}{a_1^2}, \quad a_{1,3} = \frac{a_0^2 a_3}{a_1^3}, \ldots, a_{1,n} = \frac{a_0^{n-1} a_n}{a_1^n}. \tag{4}$$

Dacă folosim notaţia

$$b_{i,m}^m = 1/a_{i,m} \tag{5}$$

relaţiile (4) devin

$$b_{1,2}^2 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \; b_{1,3}^3 = \frac{a_1^3}{a_0^2 a_3}, \ldots, b_{1,n}^n = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1} a_n}. \tag{6}$$

Între rădăcinile y_i ale ecuației transformate (3), avem, după cum se știe, următoarele relații:

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = (-1)^n \, a_{1,0}/a_{1,n}, \tag{7}$$

$$\sum \prod_{i=1}^{n-1} y_i = (-1)^{n-1} \, a_{1,1}/a_{1,n}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -a_{1,n-1}/a_{1,n}. \tag{9}$$

Din relațiile (4), (8) și (7) rezultă

$$\frac{\sum \prod_{i=1}^{n-1} y_i}{\prod_{i=1}^{n} y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} = -1. \tag{10}$$

Punînd în evidență rădăcinile complexe, relația (10) se poate pune sub forma

$$-1 = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{A_1 + B_1^i} + \frac{1}{A_1 - B_1^i} + \frac{1}{A_2 + B_2^i} + \ldots \tag{11}$$

în care $A_j + B_j^i$ este expresia celei de-a j^a rădăcină complexă.

Cuplînd rădăcinile conjugate, relația precedentă devine

$$-1 = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{2A_1}{A_1^2 + B_1^2} + \frac{2A_2}{A_2^2 + B_2^2} + \ldots \tag{12}$$

Pentru a pune în evidență importanța simplei schimbări de necunoscută (2), deducem din relațiile (7) ... (12) cîteva proprietăți ale rădăcinilor ecuației transformate (3):

1) Dacă toate rădăcinile sînt reale, din (10) se vede că cel puțin o rădăcină este negativă.

Numim *rădăcină principală*, rădăcina negativă a cărei valoare absolută este cea mai apropiată de 1 și pe care o notăm y_1.

2) Dacă toate rădăcinile sînt egale, rădăcina fiind multiplă de atîtea ori cît este gradul n al ecuației, valoarea ei este $-n$.

Prin urmare, rădăcina principală ia cea mai mare valoare absolută cînd toate rădăcinile sînt egale și deci negative. Într-adevăr, orice creștere*) a modulului uneia din rădăcinile, inițial egale, relația (10), conduce la descreșterea modulului unei alte rădăcini, care devine rădăcină principală.

3) Dacă toate rădăcinile sînt reale și negative, modulul rădăcinii principale este mai mare sau cel puțin egal cu 1.

Într-adevăr, relația (10) devine succesiv:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{-y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|y_i|}$$

$$\frac{1}{|y_1|} = 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{|y_i|} < 1$$

*) Se are în vedere că variind coeficienții $a_{1,i}$ și rădăcinile ecuației (3) variază.

și deci

$$|y_i| > 1.$$

4) În cazul unei ecuații de grad impar și dacă toate celelalte rădăcini sînt pur imaginare, (12), adică pentru $A_j = 0$, rădăcina reală ia valoarea -1, deoarece în acest caz se anulează inversele celorlalte rădăcini.

5) Dacă, toate rădăcinile fiind reale, modulul unei rădăcini negative (care poate fi principală) este mai mic decît 1, suma inverselor celorlalte rădăcini trebuie să fie pozitivă. Prin urmare, cel puțin una din rădăcini trebuie să fie pozitivă.

6) Dacă toate rădăcinile sînt negative, numărătorul $a_{1,n-1}$ are același semn cu numitorul $a_{1,n}$ în (9). Dacă $a_{1,n-1}$ și $a_{1,n}$ au semne contrarii, cel puțin una din rădăcini este pozitivă.

B. DETERMINAREA RĂDĂCINILOR ECUAȚIEI PRIN METODA DE RECURENȚĂ

Din relația (3) se poate explicita y la prima putere sub forma

$$-y = 1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1,i}\, y^i. \tag{13}$$

1. Eliminarea termenului care conține pe y^2

Ridicînd la pătrat expresia (13) și grupînd termenii din membrul al doilea, după ordinea crescătoare a lui y, obținem

$$y^2 = 1 + \sum_{i=2}^{2n} \zeta_{1,i}\, y^i, \tag{14}$$

în care

$$\zeta_{1,2} = 2a_{1,2},\ \zeta_{1,3} = 2a_{1,3},\ \zeta_{1,4} = 2a_{1,4} + a_{1,2}^2,\ \zeta_{1,5} = 2(a_{1,5} + a_{1,2}\, a_{1,3}),$$

$$\zeta_{1,6} = 2(a_{1,6} + a_{1,2}\, a_{1,4}) + a_{1,3}^2,\ \zeta_{1,7} = 2(a_{1,7} + a_{1,2}\, a_{1,5} + a_{1,3}\, a_{1,4}),\ \ldots$$

$$\zeta_{1,2m} = 2a_{1,2m} + 2\sum_{i=2}^{m-1} a_{1,i}\, a_{1,2m-i} + a_{1,m}^2, \tag{15}$$

$$\zeta_{1,2m+1} = 2a_{1,2m+1} + 2\sum_{i=2}^{m} a_{1,i}\, a_{1,2m+1-i}.$$

În relația (14) explicităm pe y^2

$$y^2 = \frac{1}{1-\zeta_{1,2}}\left[1 + \sum_{i=3}^{2n} \zeta_{1,i}\, y^i\right] \tag{16}$$

și înlocuim în (13)

$$-y = 1 + \varkappa_2 + \frac{a_{1,2}}{1-\zeta_{1,2}}(\zeta_{1,3}\, y^3 + \zeta_{1,4}\, y^4 + \ldots + \zeta_{1,2n}\, y^{2n}) + \tag{17}$$

$$+ a_{1,3}\, y^3 + \ldots + a_{1,n}\, y^n,$$

în care

$$\varkappa_2 = a_{1,2}/(1-\zeta_{1,2}). \tag{18}$$

Grupînd termenii după puterile crescătoare ale lui y obţinem

$$-y = S_2 + \sum_{i=3}^{2n} a_{2,i}\, y^i, \tag{19}$$

în care

$$S_2 = 1 + \varkappa_2, \tag{20}$$

iar

$$\begin{aligned} a_{2,3} &= a_{1,3} + \frac{a_{1,2}}{1-\zeta_{1,2}}\,\zeta_{1,3}, \\ a_{2,4} &= a_{1,4} + \frac{a_{1,2}}{1-\zeta_{1,2}}\,\zeta_{1,4}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2,m} &= a_{1,m} + \frac{a_{1,2}}{1-\zeta_{1,2}}\,\zeta_{1,m}. \end{aligned} \tag{21}$$

Astfel, expresia (19) reprezintă ecuaţia (13) în care am eliminat termenul conţinînd pe y^2.

2. Eliminarea termenului care conţine pe y^3

Procedăm în mod analog ca la punctul 1. Înmulţind expresia (16) cu (19) obţinem

$$-y^3 = \frac{S_2}{1-\zeta_{1,2}} + \sum_{i=3}^{4n} \zeta_{2,i}\, y^i, \tag{22}$$

în care

$$\zeta_{2,3} = \frac{S_2}{1-\zeta_{1,2}}\,\zeta_{1,3} + \frac{\varkappa_2}{a_{1,2}}\,a_{2,3},\ \zeta_{2,4} = \frac{S_2}{1-\zeta_{1,2}}\,\zeta_{1,4} + \frac{\varkappa_2}{a_{1,2}}\,a_{2,4}, \ldots$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2,6} &= \frac{S_2\,\zeta_{1,6} + a_{2,3}\,\zeta_{1,3}}{1-\zeta_{1,2}} + \frac{\varkappa_2}{a_{1,2}}\,a_{2,6} \\ \zeta_{2,7} &= \frac{S_2\,\zeta_{1,7} + a_{2,3}\,\zeta_{1,4} + a_{2,4}\,\zeta_{1,3}}{1-\zeta_{1,2}} + \frac{\varkappa_2}{a_{1,2}}\,a_{2,7}, \\ \zeta_{2,m} &= \frac{1}{1-\zeta_{1,2}}\left[S_2\,\zeta_{1,m} + \sum_{i=3}^{m-3} a_{2,i}\,\zeta_{1,m-i}\right] + \frac{\varkappa_2}{a_{1,2}}\,a_{2,m}. \end{aligned} \tag{23}$$

Explicitînd pe y^3 în relaţia (22) se obţine

$$-y^3 = \frac{1}{1+\zeta_{2,3}}\left[S_2\,\frac{\varkappa_2}{a_{1,2}} + \sum_{i=4}^{4n} \zeta_{2,1}\, y^i\right]. \tag{24}$$

Înlocuind pe y^3 din (24) în (22) şi grupînd termenii, obţinem

$$-y = S_3 + \sum_{i=4}^{4n} a_{3,i}\, y^i, \tag{25}$$

în care

$$S_3 = S_2 + \varkappa_3 \quad \text{și} \quad \varkappa_3 = \frac{-S_2\, a_{2,3}}{(1-\zeta_{1,2})(1+\zeta_{2,3})}, \tag{26}$$

iar

$$a_{3,4} = a_{2,4} - \frac{a_{2,3}}{1+\zeta_{2,3}}\zeta_{2,4},\ a_{3,5} = a_{2,5} - \frac{a_{2,3}}{1+\zeta_{2,3}}\zeta_{2,5}, \ldots \tag{27}$$

$$a_{3,m} = a_{2,m} - \frac{a_{2,3}}{1+\zeta_{2,3}}\zeta_{2,m}.$$

3. Eliminarea succesivă a termenilor în y la puteri superioare

În mod analog și mărginindu-ne la un număr t de termeni, se obține

$$-y = S_t + R_t \tag{28}$$

în care S_t este suma celor t termeni care nu conțin pe y și pe care o denumim partea independentă; iar R_t este restul termenilor care conțin pe y.

Suma S_t este dată de relația

$$S_t = S_{t-1} + \varkappa_t = \sum_{i=1}^{t} \varkappa_i, \tag{29}$$

în care

$$\varkappa_t = (-1)^t\, a_{t-1,t} \prod_{i=1}^{t-1} \frac{S_i}{1-(-1)^i\,\zeta_{i,i+1}} \tag{30}$$

pentru $t = 1$, $\varkappa_1 = 1 = S_1$, iar

$$a_{t,m} = a_{t-1,m} + \frac{(-1)^t\, a_{t-1,t}}{1-(-1)^t\,\zeta_{t-1,t}}\zeta_{t-1,m} \tag{31}$$

și

$$\zeta_{t,m} = \frac{1}{1-(-1)^t\,\zeta_{t-1,t}}\left[S_t\,\zeta_{t-1,m} + \sum_{i=t+1}^{m-t-1} a_{t,i}\,\zeta_{t-1,m-i}\right] + \frac{(-1)^t\,\varkappa_t}{a_{t-1,t}}\,a_{t,m}. \tag{32}$$

Restul R_t este dat de relația

$$R_t = \sum_{i=t+1}^{\substack{t-1 \\ 2\ n}} a_{t,i}\, y^i \tag{33}$$

valabilă pentru $t - 1 \geqslant 1$.

Dacă folosim notația (5), relațiile (30) și (33) devin

$$\varkappa_t = \frac{(-1)^t}{b_{t-1,t}^t} \prod_{i=1}^{t-1} \frac{S_i}{1+(-1)^i\,\zeta_{i,i+1}}, \tag{34}$$

$$R_t = \sum_{i=t+1}^{\substack{t-1 \\ 2\ n}} (y/b_{t,i})^i. \tag{35}$$

4. Formule de recurență

Făcînd înlocuirile din aproape în aproape formula de recurență (31) devine

$$a_{2,m} = a_{1,m} + \frac{a_{1,2}}{1 - \zeta_{1,2}} \zeta_{1,m},$$

$$a_{3,m} = a_{1,m} + \frac{a_{1,2}}{1 - \zeta_{1,2}} \zeta_{1,m} - \frac{a_{2,3}}{1 + \zeta_{2,3}} \zeta_{2,m}, \tag{36}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{t,m} = a_{1,m} + \sum_{i=1}^{t-1} \frac{-(-1)^i a_{i,i+1}}{1 + (-1)^i \zeta_{i,i+1}} \zeta_{i,m}$$

în care, conform relației (32)

$$\zeta_{t,m} = \frac{S_t\, \zeta_{t-1,m} + \prod_{i=1}^{t-1} \frac{S_i}{1 + (-1)^i \zeta_{i-1,i}} + \sum_{i=t+1}^{m-t-1} a_{t,i}\, \zeta_{t-1,m-i}}{1 - (-1)^t \zeta_{t-1,t}}. \tag{37}$$

Tot astfel formulele (30) și (29) devin

$$\varkappa_1 = 1, \varkappa_2 = a_{1,2}/(1 - 2a_{1,2}),$$

$$\varkappa_3 = -S_2\, a_{1,3}/[(1 - 2\, a_{1,2})^2 + (3 - 2a_{1,2})\, a_{1,3}] \ldots$$

$$S_1 = 1\ ,\ S_2 = \frac{1 - a_{1,2}}{1 - 2a_{1,2}}, \tag{38}$$

$$S_3 = S_2 \frac{(1 - 2a_{1,2})^2 + 2\,(1 - a_{1,2})\, a_{1,3}}{(1 - 2a_{1,2})^2 + (3 - 2a_{1,2})\, a_{1,3}}, \ldots \tag{39}$$

5. Rădăcina de rest nul

a. Notînd pentru simplificare cu S și R_j limitele seriei independente S_t și a restului R_t cînd $t \to \infty$, relația (28) devine

$$-y_j = S + R_j \tag{40}$$

în care j reprezintă indicele distinctiv al rădăcinilor.

b. Dacă există o rădăcină finită y_j, a cărei valoare introdusă în (40) tinde să anuleze restul R_j, cînd t crește la infinit valoarea acestei rădăcini o denumim de rest nul și este dată de limita S a seriei independente. Dacă această rădăcină este unică, seria trebuie să fie absolut convergentă. În acest caz, celelalte rădăcini diferă de rădăcina de rest nul cu valoarea pe care o capătă la limită restul, cînd substituim în expresia lui (33) pe y prin valoarea rădăcinii respective.

c. Pentru a pune în evidență semnificația seriei S independentă de rădăcină și a rădăcinei principale, dacă ecuația (3) admite o rădăcină de rest nul, să considerăm cîteva cazuri:

1) *Referitor la S. a)* Dacă toate rădăcinile sînt negative și de modul supraunitar, adică în condițiile

$$y_j < 0 \quad \text{și} \quad |y_j| > 1, \tag{41}$$

conform relației (40), rezultă

$$S + R_j > 1 \quad , \quad S > 1 - R_j \tag{42}$$

și deoarece am admis că există o rădăcină de rest nul

$$S > 1. \tag{43}$$

b) S-a arătat la proprietatea 1) a ecuației transformate (3) că dacă toate rădăcinile sînt reale, cel puțin o rădăcină y_k este negativă. Dacă celelalte rădăcini sînt toate pozitive și dacă S este pozitiv, rădăcinile pozitive y_l au resturi negative și de modul mai mare ca S, adică în condițiile

$$S > 0 \quad , \quad y_l > 0. \tag{44}$$

Rezultă

$$|R_l| > S \tag{45}$$

și prin urmare rădăcina de rest nul nu poate fi decît cea negativă, adică

$$y_1 = y_k < 0$$

și conform proprietății 5) a ecuației transformate (3)

$$|y_k| < 1 \tag{46}$$

și deci $S < 1$.

2) *Referitor la rădăcina principală. a)* Dacă toate rădăcinile sînt negative și deci de modul supraunitar să ordonăm indicii j după modulele crescătoare ale rădăcinilor

$$1 < |y_1| < |y_2| < \ldots < |y_n| . \tag{47}$$

Întrucît toate rădăcinile sînt negative, relația (47) devine

$$1 < -y_1 < -y_2 < \ldots < -y_n \tag{48}$$

și ținînd seama de relația (40)

$$1 < S + R_1 < S + R_2 < \ldots < S + R_n$$

de unde

$$1 - S < R_1 < R_2 < \ldots < R_n . \tag{49}$$

Dacă toate resturile sînt pozitive, rădăcina de rest nul este chiar rădăcina principală și $R_1 = 0$.

În acest caz, conform relațiilor (41), (43) și a proprietății 2) a ecuației transformate (3), modulul rădăcinii de rest nul este cuprins între 1 și gradul ecuației, adică

$$-1 > y_1 > -n \quad \text{sau} \quad 1 < S < n. \tag{50}$$

b) În ipoteza că $S > 0$, dacă $n - 1$ rădăcini sînt pozitive, după cum s-a arătat la punctul *b)* din 1), rădăcina negativă, care este de modul subunitar, adică rădăcina principală, este rădăcina de rest nul.

c) Fie cazul cînd avem mai multe rădăcini negative subunitare, celelalte fiind pozitive. Să ordonăm indicii j după valorile crescătoare ale rădăcinilor negative și pozitive

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n \tag{51}$$

adică

$$-y > -y_2 > \ldots > -y_n$$

şi ţinînd seama de relaţia (40)

$$S + R_1 > S + R_2 > \ldots > S + R_n \tag{52}$$

de unde

$$R_1 > R_2 > \ldots > R_n .$$

În ipoteza că $S > 0$ şi dacă toate rădăcinile sînt negative, rădăcina de rest nul este chiar rădăcina principală şi $R_1 = 0$. În acest caz şi în mod analog ca la punctul *a)* din 2) modulul rădăcinii de rest nul este cuprins între 1 şi 0, adică

$$0 > y_1 > -1 \text{ sau } 0 < S < 1 \tag{53}$$

d) Dacă ecuaţia transformată (3) admite o rădăcină de rest nul şi *rădăcini complexe*, acestea din urmă vor diferi de rădăcina de rest nul, prin valoarea pe care o ia restul cînd se substituie y cu valoarea rădăcinii respective.

Dacă ecuaţia este de grad par se poate să nu admită rădăcini reale, adică *toate rădăcinile să fie complexe.*

În acest caz nu poate să mai existe nici o rădăcină de rest nul, căci altfel rădăcina complexă ar trebui să fie egală cu suma S care este reală în cazul admis al coeficienţilor reali.

C. APROXIMAREA RĂDĂCINILOR PRINTR-O METODĂ DE ITERAŢIE

Metoda precedentă nu este totdeauna aplicabilă, dacă seria independentă are o convergenţă lentă, cum este cazul rădăcinilor reale de valori apropiate, deoarece necesită un mare număr de termeni; ceea ce o face laborioasă. În aceste cazuri este uneori preferabil să folosim o metodă de aproximare mai practică.

Metoda constă în a folosi un număr limitat de termeni în seria finită cu restul corespunzător, fără a avea în vedere eliminările succesive ca în metoda precedentă. Putem să folosim chiar expresia (13), înainte de a fi făcut vre-o operaţie de eliminare, dar de multe ori este preferabil să folosim relaţia (19), adică relaţia (28) în care $t = 2$.

Într-un caz oarecare (pentru un anumit t) partea independentă S_t diferă de rădăcina principală cu semn schimbat $-y_1$, cu valoarea pe care o ia restul R_t cînd înlocuim pe y cu y_1. Nu cunoaştem încă valoarea lui y_1 dar cunoaştem valoarea aproximativă S_t pe care o înlocuim în expresia restului. Valoarea restului R_t' astfel obţinută o adăugăm la S_t şi obţinem o nouă valoare S_t', care poate să fie mai apropiată de rădăcina de rest nul cu semn schimbat.

În acest caz introducem pe $-S_t'$ în locul lui y în expresia restului, obţinem o nouă valoare R_t'' a restului care adăugată la S_t ne dă valoarea S_t'' şi mai apropiată de $-y_1$ şi aşa mai departe pînă ce obţinem aproximaţia dorită.

Cu alte cuvinte aplicăm metoda iteraţiei la un număr limitat de termeni ai seriei.

1) *Pentru* $t = 1$ folosim relaţia următoare dedusă din (13):

$$-y = 1 + y^2 (a_{1,2} + a_{1,3}\, y + a_{1,4}\, y^2 + \ldots + a_{1,n}\, y^{n-2}). \tag{54}$$

2) *Pentru* $t = 2$ folosim relația următoare dedusă din (19)

$$-y = \frac{1-a_{1,2}}{1-2a_{1,2}} + \frac{a_{1,2}\,y^3}{1-2a_{1,2}}\left[a_{1,3} + \left(\frac{1-2a_{1,2}}{a_{1,2}}a_{1,4} + a_{1,2}^2\right)y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-2a_{1,2}}{a_{1,2}}a_{1,5} + 2a_{1,2}\,a_{1,3}\right)y^2 + \left(\frac{1-2a_{1,2}}{a_{1,2}}a_{1,6} + a_{1,3}^2\right)y^3 + \ldots\right]. \quad (55)$$

În exemplele care vor urma se poate vedea algoritmul acestei metode.

D. EXEMPLE

Prin exemplele date s-au avut în vedere cele ce urmează:

1) Ecuația de gradul 1 s-a considerat pentru verificarea cazului $n = 1$. Se va putea vedea aspectul particular al valorilor S_1 și R_1.

2) Pentru ecuația de gradul 2 s-a făcut un studiu complet al soluției prin recurență spre a se face comparație cu soluția clasică prin radical (76). Chiar în acest caz, unde extragerea rădăcinii pătrate este simplă, se vede interesul practic de a avea soluția numai cu ajutorul celor patru operații elementare. Se va putea induce accentuarea acestui avantaj pentru grade mai ridicate.

La acest exemplu s-a studiat și convergența seriilor.

Interesul deosebit îl prezintă acest studiu în intervalul rădăcinilor imaginare unde seria S devine divergentă.

3) Pentru ecuațiile de gradul 3 și 5 s-au luat cîteva exemple.

Reamintim că soluțiile clasice cu radicali pentru ecuațiile de gradul 3 sînt practic laborioase pentru calcule precise, din cauza necesității extragerii rădăcinilor cubice.

În ceea ce privește ecuațiile de grad mai mare ca 4, A b e l a demonstrat că nu există soluție prin radical. De aici se vede interesul pentru această metodă.

Metoda prin recurență are avantajul că prezintă soluție literală, unde poate să apară explicit parametri interesanți, spre deosebire de metodele care se aplică expresiilor numerice.

1. Ecuația de gradul 1

În acest caz coeficienții $a_2, a_3, \ldots$ sînt nuli și relația (1) devine

$$a_0 + a_1 z = 0. \quad (56)$$

Conform relațiilor (4) și (38) se anulează și $a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ încît seria independentă degenerează, reducîndu-se la un singur termen $S_1 = 1$ și chiar $R_1 = 0$. Relația (13) devine $y = -1$, ecuația transformată de gradul 1 admite o singură rădăcină, care este dată de gradul ecuației cu semn schimbat.

Rădăcina ecuației inițiale, ținînd seama de relația de transformare (2) este

$$z = a_0/a_1, \quad (57)$$

care se poate deduce imediat din (56).

2. Ecuația de gradul 2

Varianta a) Să aplicăm metoda de recurență.

Anulînd coeficienții $a_3, a_4 \ldots$ expresia generală (13) devine

$$-y = 1 + (y/b_{1,2})^2, \quad (58)$$

unde, conform relațiilor (6) și (36):

$$b_{1,2}^2 = 1/a_{1,2} = a_1^2/a_0 a_2\ ; \qquad 0 = a_{1,3} = a_{1,4} = \ldots$$

$$a_{2,3} = 0; \quad a_{2,4} = a_{1,2}^3/(1-2a_{1,2}); \quad 0 = a_{2,5} = a_{2,6} = \ldots \quad (59)$$

$$a_{3,4} = a_{2,4}\ ; \qquad 0 = a_{3,5} = a_{3,6} = \ldots$$

Din relaţia (30) se deduce

$$\varkappa_1 = 1; \quad \varkappa_2 = a_{1,2}/(1 - 2\,a_{1,2}); \quad \varkappa_3 = 0;$$

$$\varkappa_4 = \frac{(1+\varkappa_2)^2 \varkappa_1^2 a_{1,2}}{1 - (1+3\varkappa_2)(1+\varkappa_2)\varkappa_2 a_{1,2}}. \tag{60}$$

Ţinînd seama de (29) şi (5) rădăcina principală devine

$$-y_1 = 1 + \frac{1}{b_{1,2}^2 - 2} + \frac{(b_{1,2}^2 - 1)^2}{(b_{1,2}^2 - 2)\left[(b_{1,2}^2 - 2)^3 b_{1,2}^2 - (b_{1,2}^4 - 1)\right]} + \ldots \tag{61}$$

Luînd cîteva exemple numerice, obţinem:

pentru $b_{1,2}^2 = 4$

$$-y_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 - 2/9} + \ldots,$$

pentru $b_{1,2}^2 = 5$

$$-y_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7 - 1/16} + \ldots, \tag{62}$$

pentru $b_{1,2}^2 = 6$

$$-y_1 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 14 - 1/25} + \ldots$$

Comparînd relaţiile (62) respectiv cu relaţiile (73), (75), (77) observăm că varianta *a)* prezintă o convergenţă puţin mai pronunţată, care se manifestă de la al treilea termen, primii doi termeni rămînînd neschimbaţi.

Calcularea termenilor următori, care sînt necesari pentru discuţia cazului, fiind laborioasă, preferăm varianta următoare.

Varianta b) Numărul mic de coeficienţi diferiţi de zero ai ecuaţiei de gradul 2 permite o soluţie mai expeditivă, cu care se poate calcula uşor un număr mai mare de termeni.

Avînd în vedere că $a_3 = 0$, din relaţiile (4), (15), (21) se deduce că

$$0 = a_{1,3} = \zeta_{1,3} = a_{2,3}, \tag{63}$$

încît termenul necunoscutei la puterea a treia este nul şi nu mai este nevoie să-l eliminăm Trecem direct la eliminarea termenului necunoscutei la puterea a patra prin ridicare la pătrat a relaţiei (14) ş.a.m.d.

Folosind notaţia (5) obţinem succesiv

$$-y_2 = 1 + \left(\frac{y}{b_{1,2}}\right)^2 = 1 + \frac{1 + (y/b_{1,2})^4}{b_{1,2}^2 - 2}$$

$$-y_3 = 1 + \frac{1}{b_{1,2}^2 - 2} + \frac{1 + (y/b_{1,2})^8}{(b_{1,2}^2 - 2)\left\{(b_{1,2}^2 - 2)^2 - 2\right\}}, \tag{64}$$

$$-y_4 = 1 + \frac{1}{b_{1,2}^2 - 2} + \frac{1}{(b_{1,2}^2 - 2)\left\{(b_{1,2}^2 - 2) - 2\right\}} + \frac{1 + (y_2/b_{1,2})^{16}}{(b_{1,2}^2 - 2)\left\{(b_{1,2}^2 - 2)^2 - 2\right\}\left\{\left\{(b_{1,2}^2 - 2)^2 - 2\right\}^2 - 2\right\}}.$$

Termenii relaţiei (28) devin

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} \Phi_i \quad \text{şi} \quad R_t = (y/b_{1,2})^{2^t} \Phi_t \tag{65}$$

în care

$$\Phi_1 = 1$$

$$\Phi_t = 1 \Big/ \prod_{i=1}^{t-1} \left({}_1^i b_{1,2}^2 - 2 \right)_1^2 - 2 \Big)_2^2 - \ldots - 2 \Big)_i \tag{66}$$

admițînd notația

$$\begin{aligned} \left(b_{1,2}^2 - 2\right) &= \left({}_1^1 b_{1,2}^2 - 2\right)_1 \\ \left\{\left(b_{1,2}^2 - 2\right)^2 - 2\right\} &= \left({}_1^2 b_{1,2}^2 - 2\right)_1^2 - 2\Big)_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{67}$$

Observăm că în acest caz restul se reduce la un singur termen.

Convergența seriei independente. Criteriul de convergență al lui D'Alembert aplicat expresiei (65) devine

$$\Phi_t / \Phi_{t-1} < 1 \tag{68}$$

și ținînd seama de (66) obținem condiția de convergență:

$$\left({}_1^\infty \left(b_{1,2}^2 - 2\right)_1^2 - 2\Big)_2^2 - \ldots - 2\Big)_\infty > 1. \tag{69}$$

a. *Rădăcini reale de modul supraunitar.* 1) Rădăcinile egale, conform proprietății 3) a ecuației transformate (3), sînt

$$-y_1 = -y_2 = 2 \tag{70}$$

ceea ce reprezintă valoarea maximă pentru modulul rădăcinii de rest nul.

Ținînd seama de (5) relația (10) devine

$$b_{1,2}^2 = 4. \tag{71}$$

Pentru această valoare a lui $b_{1,2}^2$ condiția de convergență (69) este asigurată.

Valoarea restului dată de (65) devine

$$R_t = 1/2^{t-1} \tag{72}$$

și tinde către zero, ceea ce înseamnă că ecuația admite o rădăcină dublă de rest nul dată de expresia (65):

$$-y_1 = S_t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^t}. \tag{73}$$

Observăm că seria independentă este o progresie geometrică cu rația $r = 1/2$, a cărei sumă este

$$S_t = \frac{1 - r^{t+1}}{1 - r} = 2\left(1 - 1/2^{t+1}\right) \to 2. \tag{74}$$

Se regăsește astfel rezultatul din (70).

Dînd parametrului $b_{1,2}^2$ valori din ce în ce mai mari, condiția (69) de convergență este asigurată.

2) Fie $b_{1,2}^2 = 5$. Partea independentă din (65) mărginindu-se la patru termeni, devine

$$S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} = 1{,}382. \tag{75}$$

Se știe că expresia rădăcinilor prin radical este

$$-y = \frac{b_{1,2}}{2}\left(b_{1,2} \mp \sqrt{b_{1,2}^2 - 4}\right). \tag{76}$$

Înlocuind în aceasta valoarea lui $b_{1,2}^2$ și mărginindu-ne la trei zecimale, obținem aceeași valoare din (75), ceea ce constituie verificarea.

Renunțînd la ultimul termen, eroarea este aproape o miime.

3) Fie $b_{1,2}^2 = 6$. Partea independentă devine

$$S_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 14} + \frac{1}{4 \cdot 14 \cdot 196} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{10976} = 1{,}2679. \tag{77}$$

Folosindu-ne de relația (76) și mărginindu-ne la patru zecimale obținem aceeași valoare. Renunțînd la ultimul termen eroarea rămîne mai mică de o zecime de miime.

4) Pentru $b_{1,2}^2 \to \infty$ relația (76) în cazul rădăcinii principale devine nedeterminată.

În relația (65) se anulează toți termenii afară de primul și se obține $S = 1$. Se regăsește proprietatea 2) a rădăcinilor de rest nul și rădăcina ecuației de gradul 1 la care se reduce ecuația (40) pentru $a_2 = 0$, adică pentru $b_{1,2} = \infty$.

Observație. Rădăcina de rest nul variază de la -1, cînd se confundă cu rădăcina ecuației de gradul 1, pînă la -2 (dublul acestei valori) cînd rădăcina de rest nul devine dublă (diagramele din fig. 1 și 2).

b. *Rădăcini reale de modul subunitar.* Procedînd în mod analog ca la punctul a. se obțin rezultatele trecute în tabloul nr. 1.

Observație. Restul tinde să se anuleze și rădăcina de rest nul variază de la 0 la -1 (fig. 1 și 2).

c. *Rădăcini complexe.* Ținînd seama de (5) și (11), relațiile (7) și (9) devin

$$2A_1 = -b_{1,2}^2 \quad , \quad A_1^2 + B_1^2 = b_{1,2}^2 \tag{78}$$

de unde rezultă partea imaginară

$$B_1 = \frac{b_{1,2}}{2} \sqrt{4 - b_{1,2}^2}. \tag{79}$$

Pentru ca să avem rădăcini imaginare, B_1 trebuie să fie real și deci $b_{1,2}^2$ trebuie să satisfacă următoarele condiții:

$$0 < b_{1,2}^2 < 4 \tag{80}$$

care sînt aceleași ca și cele cerute de relația (76).

Rădăcinile nu mai tind să se anuleze și ne vom folosi de formula (76).

1) Fie $b_{1,2}^2 = 1$. Rădăcinile conjugate sînt

$$-y = (1 \mp i\sqrt{3})\, 2 \tag{81}$$

care înlocuite în (65) ne dau resturile

$$R_{2m+1} = \left(\frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right)^{2^{2m+1}} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \tag{82}$$

$$R_{2m} = -\left(\frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right)^{2^m} = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}.$$

Înlocuind valoarea lui $b_{1,2}$ în (65) obținem

$$\begin{aligned} S_t &= 1 - 1 + 1 - \dots \\ S_{2m+1} &= 1, \quad S_{2m} = 0. \end{aligned} \tag{83}$$

Rădăcinile imaginare ne dau și rest imaginar, însă seria independentă nu mai este convergentă.

Seria (83) fiind oscilantă, să dăm lui t valorile $2m$ și $2m + 1$, încît relația (28) să devină:

$$-y_{1,2} = S_{2m+1} + R_{2m+1} = S_{2m} + R_{2m}. \tag{84}$$

Înlocuind (81), (82) în (84) se obține

$$\begin{aligned} -y_1 &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 0 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ -y_2 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 0 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{85}$$

ceea ce constituie verificarea.

2) Fie $b_{1,2}^2 = 2$. Înlocuind în (76) se obțin rădăcinile

$$-y_{1,2} = 1 \mp i \tag{86}$$

care înlocuite în (65) ne dau

$$R_t = \left(\frac{1 \mp i}{b_{1,2}}\right)^{2^t} \Big/ \prod_{i=1}^{t-1} \left({}_i\left({}_1\left(b_{1,2}^2 - 2 \right)_1^2 - 2 \right)_2^2 - \ldots - 2 \right)_i . \tag{87}$$

Înlocuind pe $b_{1,2}$ și pentru $t \to \infty$, se obține

$$\left(\frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\right)^{2^\infty} \to 1 \tag{88}$$

și deoarece numitorul relației (87), al cărui semn alternează, se anulează:

$$R_{2m+1} \to -\infty \quad , \quad R_{2m} \to +\infty \tag{89}$$

oricare ar fi rădăcina y_1 sau y_2; iar partea principală

$$S_t = 1 + \infty - \infty + \infty - \ldots \tag{90}$$

Prin urmare, relația (28) rămîne nedeterminată.

3) Fie $b_{1,2}^2 = 3$. Rădăcinile conjugate date de (76) sînt

$$-y_{1,2} = (3 \mp i\sqrt{3})/2 \tag{91}$$

și în mod analog ca pentru 1) se obține

$$\begin{aligned} R_{2m+1} &= -\left(\frac{\sqrt{3} \mp i}{2}\right)^{2^{2m+1}} = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}, \\ R_{2m} &= \left(\frac{\sqrt{3} \mp i}{2}\right)^{2^m} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \tag{92}$$

$$S_t = 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots, \; S_{2m+1} = 1, \; S_{2m} = 2 \tag{93}$$

iar verificarea

$$\begin{aligned} -y_1 &= \frac{3-i\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \\ -y_2 &= \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{94}$$

Observație. La rădăcini complexe corespund serii divergente.

În tabloul nr. 1 și diagramele din figurile 1 și 2 sînt date valorile părții principale S precum și a rădăcinilor y_1 și y_2, în funcție de parametrul $b_{1,2}^2$.

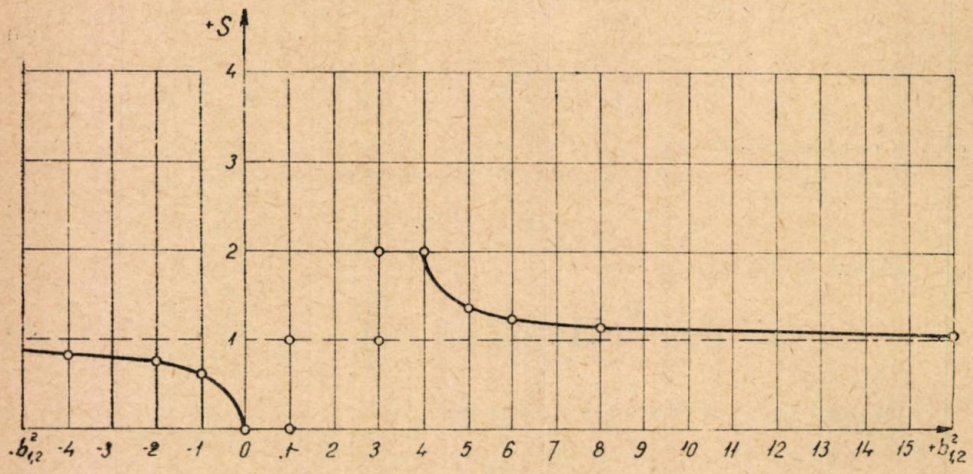


Fig. 1. — Diagrama părții independente S a rădăcinilor.

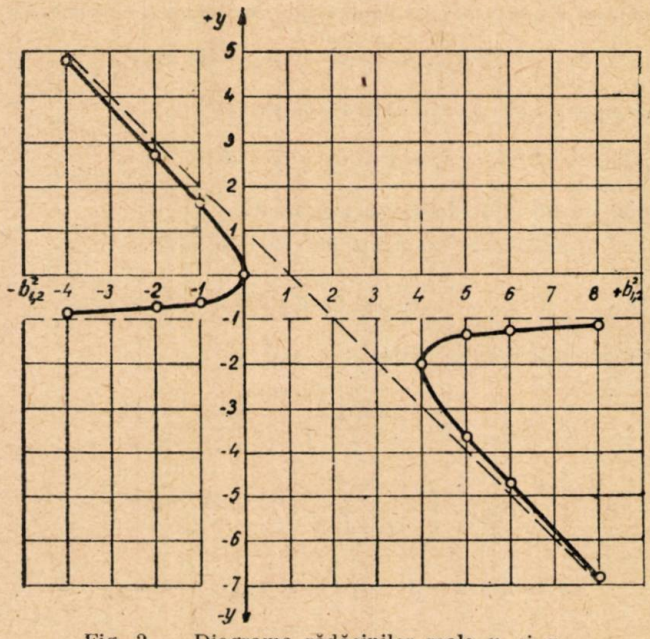


Fig. 2. — Diagrama rădăcinilor reale y_1 și y_2.

3. Ecuații de gradul 3

1) Fie o ecuație cu rădăcini subunitare

$$\left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right) = 0 \tag{95}$$

Tabloul nr. 1

$b_{1,2}^2$	S	y_1	y_2
$-\infty$	1	-1	$+\infty$
-12	0,9284	$-0,9284$	12,9284
-4	0,8284	$-0,8284$	4,8284
-2	0,7321	$-0,7321$	2,7321
-1	0,618	$-0,618$	1,618
0	0	0	0
1	0;1 (t finit)	$\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$
2	$\pm\infty$	$-1+i$	$-1-i$
3	1;2 (t finit)	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
4	2	-2	-2
5	1,382	$-1,382$	$-3,618$
6	1,2679	$-1,2679$	$-4,7321$
8	1,1716	$-1,1716$	$-6,8284$
16	1,0716	$-1,0716$	$-14,9284$
∞	1	-1	$-$

cu rădăcinile aparente, care se poate pune sub forma generală

$$0 = 1 + 3z - 10z^2 - 24z^3, \tag{96}$$

adică $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = -10, \quad a_3 = 24.$

Făcînd schimbarea de necunoscută dată de relația (2), ecuația (95) devine

$$\left(y + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)(y - 1) = 0 \tag{97}$$

cu rădăcinile

$$y_1 = -\frac{3}{4}, \qquad y_2 = -\frac{3}{2}, \qquad y_2 = 1.$$

Ținînd seama de relațiile (4) ecuația (96) devine

$$0 = 1 + y - \frac{10}{9}y^2 - \frac{24}{27}y^3 \tag{98}$$

la care, pentru verificare, se poate ajunge și din (97).

a. *Prin metoda de recurență* folosind relațiile (39) se obține

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 0,6552, \qquad S_3 = 0,7568. \tag{99}$$

Mărginindu-ne la primii trei termeni obținem rădăcina de rest nul $y_1 = -0,7568$ adică cu o aproximație de mai puțin de 1%.

b. *Prin metoda de iterație*, putem folosi chiar ecuația transformată inițială (54):

$$-y = 1 - \frac{y^2}{9}(10 + 8y). \tag{100}$$

Observăm că ecuația admițînd o rădăcină pozitivă, restul este negativ.

În tabloul nr. 2 sînt date operațiunile de iterație.

Tabloul nr. 2

Nr. operațiilor de iterație	$-y_1$	R_1'	δ *)
I	1	−0,222	—
II	0,778	−0,254	−0,032
III	0,746	−0,249	+0,005
IV	0,751	−0,2507	−0,0017
V	0,7493	—	—

*) δ fiind diferența resturilor succesive.

Făcînd media operațiilor IV și V se obține $-y_1 = 0{,}7501$ adică cu o eroare de $0{,}3‰$, aproximație care poate fi îmbunătățită oricît de mult.

Depășirea se vede prin aceea că diferența δ schimbă de semn.

Metoda nu este aplicabilă pentru valoarea negativă a raportului $a_{1,2}/a_{1,3}$.

2) Fie ecuația inițială cu rădăcini supraunitare

$$(z-2)(z-3)(z-4) = 0 = -24 + 26z - 9z^2 + z^3 \tag{101}$$

cu coeficienții $a_0 = -24$, $a_1 = 26$, $a_2 = -9$, $a_3 = 1$.

Făcînd schimbarea de necunoscută (2), rădăcina de rest nul a ecuației transformate este

$$-y_1 = -\frac{26}{24} z_1 = 2{,}1666 \tag{102}$$

iar celelalte rădăcini sînt

$$-y_2 = 3{,}25 \quad \text{și} \quad -y_3 = 4{,}3232.$$

Observăm de la început că, rădăcinile fiind apropiate, convergența seriei independente este foarte lentă, ceea ce reclamă un număr mare de termeni.

Folosind relațiile (4) se obține

$$a_{1,2} = 0{,}3195 \quad , \quad a_{1,3} = 0{,}0328.$$

a. *Metoda de recurență.* Cu ajutorul relațiilor (39) se obține succesiv

$$S_1 = 1 \quad , \quad S_2 = 1{,}885 \quad , \quad S_3 = 1{,}598.$$

Se vede că metoda în acest caz este practic inaplicabilă.

b. *Metoda de iterație.* Pentru $t = 1$ folosind relația (54) avem

$$-y = 1 + y^2 (0{,}3195 + 0{,}0328\, y). \tag{103}$$

În tabloul nr. 3 sînt date operațiile de iterație.

Se constată că operațiile de iterație sînt foarte numeroase.

Pentru $t = 2$ folosind relația (55) avem

$$-y = 1{,}885 + 0{,}885\, y^3 (0{,}0328 + 0{,}3195^2\, y + 2 \cdot 0{,}3195 \cdot 0{,}0328\, y^2 + 0{,}0328^2\, y^3). \tag{104}$$

În tabloul nr. 4 sînt date operațiile de iterație.

Se observă că folosind iterațiile după eliminarea lui y^2, metoda necesită un număr de operații de iterație de cinci ori mai mic decît în primul caz. Se înțelege că operațiile în acest caz sînt mai complicate.

La ambele cazuri (atît pentru $t = 1$ cît și pentru $t = 2$) se poate reduce numărul operațiilor de iterație la jumătate, dacă folosim de fiecare dată valoarea dublă a restului. Reducerea poate fi și mai mare dacă dăm lui $-y_1'$ valori și mai mari.

3) Fie o ecuație cu rădăcini complexe:

$$[z + (1 - i)][z + (1 + i)](z + 2) = 0 = 4 + 6z + 4z^2 + z^3$$

cu coeficienții $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$. (105)

Tabloul nr. 3

Nr. operațiilor de iterație	y_1'	R_1'	δ	Nr. operațiilor de iterație	$-y_1'$	R_1'	δ
I	1	0,29	—	XXI	2,105	1,110	0,005
II	1,29	0,46	0,17	XXII	2,110	1,115	0,005
III	1,46	0,58	0,12	XXIII	2,115	1,120	0,005
IV	1,58	0,67	0,09	XXIV	2,120	1,125	0,005
V	1,67	0,74	0,07	XXV	2,125	1,130	0,005
VI	1,74	0,80	0,06	XXVI	2,130	1,134	0,004
VII	1,80	0,85	0,05	XXVII	2,134	1,138	0,004
VIII	1,85	0,89	0,04	XXVIII	2,138	1,142	0,004
IX	1,89	0,93	0,04	XXIX	2,142	1,146	0,004
X	1,93	0,97	0,04	XXX	2,146	1,150	0,004
XI	1,97	1,00	0,03	XXXI	2,150	1,153	0,003
XII	2,00	1,02	0,02	XXXII	2,153	1,156	0,003
XIII	2,02	1,04	0,02	XXXIII	2,156	1,159	0,003
XIV	2,04	1,05	0,01	XXXIV	2,159	1,162	0,003
XV	2,05	1,06	0,01	XXXV	2,162	1,164	0,002
XVI	2,06	1,07	0,01	XXXVI	2,164	1,165	0,001
XVII	2,07	1,08	0,01	XXXVII	2,165	1,166	0,001
XVIII	2,08	1,09	0,01	XXXVIII	2,166	1,167	0,001
XIX	2,09	1,10	0,01	XXXIX	2,167	1,166	−0,001
XX	2,10	1,105	0,005				

Tabloul nr. 4

Nr. operațiilor de iterație	$-y_2'$	R_2'	δ	Nr. operațiilor de iterație	$-y_2'$	R_2'	δ
I	1,885	0,136		V	2,141	0,269	0,013
II	2,021	2,200	0,064	VI	2,154	0,277	0,008
III	2,085	2,236	0,036	VII	2,162	0,281	0,004
IV	2,121	0,256	0,020	VIII	2,166		

Transformarea necunoscutei și a rădăcinii reale este dată de relația

$$-y_1 = -\frac{3}{2}z_1 = 3. \tag{106}$$

Relațiile (4) devin

$$a_{1,2} = 0{,}444, \qquad a_{1,3} = 0{,}074. \tag{107}$$

a. *Metoda de recurență.* Cu formula (39) se obține

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 5, \qquad S_3 = 2{,}95.$$

b. *Metoda de iterație.* Folosim ecuația

$$-y = 1 + y^2(0{,}444 + 0{,}074\,y). \tag{108}$$

În tabloul nr. 5 sînt date operațiile de iterație.

Tabloul nr. 5

Nr. operațiilor de iterație	$-y_1'$	R_1'
I	1	0,37
II	1,74	0,96
III	3	2

Dublînd restul, operațiile de iterație se reduc la 3.

4. Ecuația de gradul 5

Fie ecuația

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)(z+2)(z+3)(z-3)(z+4) = 0 = 36 + 99z + 54{,}5z^2 - 2z^3 - 6{,}5z^4 - z^5 \tag{109}$$

cu coeficienții $a_0 = 36$, $a_1 = 99$, $a_2 = 54{,}5$, $a_3 = -2$, $a_4 = -6{,}5$, $a_5 = -1$.

Transformarea necunoscutei și a rădăcinilor este

$$y = 2{,}75\ z,$$

$$-y_1 = 1{,}375;\ -y_2 = 5{,}5;\ -y_3 = 8{,}25;\ -y_4 = -8{,}25;\ -y_5 = 11. \tag{110}$$

Relațiile (4) devin

$$a_{1,2} = 0{,}20018;\ a_{1,3} = -0{,}00267;\ a_{1,4} = -0{,}00316;\ a_{1,5} = -0{,}0001766.$$

a. *Metoda de recurență.* Cu formula (39) se obține

$$S_1 = 1\ ,\quad S_2 = 1{,}334\ ,\quad S_3 = 1{,}344.$$

Calcularea termenilor superiori devine laborioasă, încît preferăm să continuăm aproximarea cu metoda următoare.

b. *Metoda de iterație.* Folosim ecuația

$$-y = 1 + (0{,}20018 - 0{,}00267\,y - 0{,}00316\,y^2 - 0{,}0001766\,y^3)\,y^2. \tag{111}$$

În tabloul nr. 6 sînt date operațiile de iterație.

Tabloul nr. 6

Nr. operațiilor de iterație	$-y_1'$	R_1'	δ
I	1,344	0,358	0,014
II	1,372	0,375	0,0013
III	1,3746	0,37476	0,00016
IV	1,3749	0,3749	—

Dublînd restul, operațiile de iterație se reduc la 4, ceea ce devine mai expeditiv decît dacă am continua cu prima metodă.

CONCLUZII

În primul rînd s-a transformat ecuația generală (1) într-o ecuație (3) în care coeficienții $a_{1,0}$ și $a_{1,1}$ sînt egali cu unitatea, ceea ce face ca ecuația transformată să prezinte o serie de proprietăți, care sînt folosite ulterior.

În al doilea rînd s-au eliminat progresiv termenii în y^2 și puteri mai mari, mărind cu un $\varkappa$ partea independentă a rădăcinii de fiecare operație de eliminare; ceea ce conduce la o serie S_t pentru partea independentă și un rest R_t care conține rădăcina.

Valoarea rădăcinii de rest nul este chiar partea independentă cînd $t \to \infty$ de care diferă celelalte rădăcini prin valoarea restului în care s-a substituit y prin rădăcina respectivă.

Observăm că dacă există o rădăcină de rest nul, seria independentă care o reprezintă este convergentă. Dacă ecuația nu admite o rădăcină reală seria devine divergentă, după cum se poate urmări în exemplul dat cu ecuația de gradul 2.

Dacă seria independentă este prea lent convergentă, ceea ce ar reclama calcularea unui număr mare de termeni, este preferabil să folosim metoda de iterație aplicată asupra uneia din seriile finite, care poate fi chiar ecuația (13). Pentru ecuațiile cu convergență lentă, în acest fel ar necesita un mare număr de operații de iterație. Este uneori mai expeditiv să se aplice această metodă, după ce ecuația a suferit o operație de eliminare, ceea ce reduce considerabil numărul operațiilor de iterație.

În exemplele date s-au folosit independent amîndouă metodele.

În exemplul ecuației de gradul 5, s-au folosit ambele metode combinate, împingînd aproximația mai departe cu a doua metodă, de unde a fost adusă prin prima.

Ambele metode prezintă avantajul că se calculează rădăcinile ecuației numai cu ajutorul celor patru operații elementare.

În general coeficienții ecuațiilor date de probleme conțin parametri variabili. Metoda de recurență prezintă un interes deosebit în aceste cazuri, deoarece rădăcina de rest nul a ecuației, care reprezintă în general soluția problemei, este exprimată explicit în funcție de parametri, fără să se opereze de la început asupra valorilor numerice.

Aceste metode se bazează pe schimbarea de necunoscută (2) condiționată de existența coeficienților a_0 și a_1 diferiți de zero. Aceste condiții sînt restricții numai aparente. Dacă $a_0 = 0$ una din rădăcini este zero și împărțind cu z se reduce gradul ecuației (1); iar dacă $a_1 = 0$, se poate face o schimbare de necunoscută ca să obținem o ecuație cu acest coeficient diferit de zero.

Primită la redacție la 24 mai 1955

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РЕКУРРЕНТНЫМ СПОСОБОМ И СПОСОБОМ ИТЕРАЦИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В поисках практического способа решения уравнений любой целой степени, автор использовал выражение решений с помощью бесконечных рядов в первом рекуррентном способе B и приближением корней при помощи итерации, оперируя конечным числом членов, во втором способе C.

Предварительно автор производит замену неизвестной (2), так что общее уравнение (1) преобразовывается в (3), в котором коэффициенты $a_{1,m}$ даются соотношением (4).

Из того, как была произведена замена неизвестной, имеем $a_{1,0}=1=a_{1,m}$; при помощи известных соотношений (7), (8), (9) между корнями и коэффициентами, устанавливаются соотношения (10), (11), (12), позволяющие установить ряд свойств преобразованного уравнения, упомянутых в пунктах 1) ...7), которые используются в дальнейшем.

Для определения корней уравнения рекуррентным способом преобразованное уравнение выражают соотношением (13), выражая y из члена первой степени и исключая последовательно члены с y^2, y^3 и т. д., и увеличая всякий раз степень уравнения, введением членов с высшими степенями y.

Таким образом в соотношении (19) член с y^2 исключен, в соотношении (25) исключен и член с y^3 так, что в соотношении (28) все члены до y^t исключены и следовательно y остается выраженным рядом S_t, независимым от корня, причем S_t дается соотношением (29), а остаток R_t, заключает в себе корень.

Корень уравнения, который, будучи введен вместо y в выражение (33), заставляет остаток стремиться к нулю, когда $t \to \infty$ называется корнем с нулевым остатком и выражается суммой независимого ряда.

В § 4 даются обычные рекуррентные формулы для первых членов ряда в общем виде.

Как следствие свойств преобразованного уравнения, указываются в § 5 свойства корня с нулевым остатком. В случае действительных корней, если существует корень с нулевым остатком, то независимый ряд, который его представляет, является сходящимся. Если уравнение не допускает действительного корня, независимый ряд становится расходящимся, как это можно проследить на примере, данном для уравнения второй степени.

Если ряд является очень медленно сходящимся, что требует вычисления большого числа членов, удобнее воспользоваться способом итерации, описанным в пункте C. Этот способ применяется к одному из конечных рядов, которым может быть даже уравнение (13).

Для уравнений с медленной сходимостью нужно было бы произвести в таком случае большое число операций итерации. Иногда лучше и скорее применить этот способ, после того как уравнение подверглось операции исключения, что значительно сократит число операций по итерации.

Алгорифм этого метода можно проследить в приведенных примерах, где были использованы, независимо один от другого, оба способа. Производится полное исследование уравнения второй степени. В примере уравнения пятой степени были использованы совместно оба метода, причем применялись далее приближения по второму методу, от того места, до которого они были доведены первым методом.

Рекуррентный метод представляет особый интерес тем, что он выражает корень с нулевым остатком уравнения в зависимости от коэффициентов, которые могут содержать в себе интересные параметры; при этом сначала не оперируют с их численными значениями.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Диаграмма независимой части S корней.
Рис. 2. — Диаграмма действительных корней y_1 и y_2.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES PAR UNE MÉTHODE DE RÉCURRENCE ET UNE MÉTHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

(RÉSUMÉ)

En cherchant une méthode pratique pour résoudre les équations de degré entier quelconque, l'Auteur a utilisé les séries infinies, pour une première méthode de récurrence B, et les approximations successives sur un nombre fini de termes, pour une seconde méthode C.

L'Auteur fait préalablement un changement d'inconnue (2) pour transformer l'équation (1) en (3), où les coefficients $a_{1,m}$ sont exprimés par la relation (4).

Par le changement de l'inconnue, on a $a_{1,0} = 1 = a_{1,m}$ et, compte tenu des relations (7), (8), (9), on obtient les relations (10), (11) et (12), permettant d'établir une série de propriétés de l'équation transformée, numérotées de 1 à 7, qui sont utilisées plus loin.

On détermine les racines au moyen de la méthode de récurrence en exprimant l'équation transformée (13) d'une manière explicite pour y au premier degré, en éliminant successivement les termes en y^2, y^3 et ainsi de suite et en augmentant chaque fois le degré de l'équation en introduisant les termes en y de degrés augmentés.

Le terme en y^2 est éliminé de la relation (19), celui en y^3, de la relation (25), et tous les termes jusqu'à y^t sont éliminés de la relation (28), de sorte que y demeure exprimé par une série S_t, indépendante de la racine, et un reste R_t qui contient la racine de l'équation.

La racine introduite dans l'expression (33) au lieu de y tend à annuler le reste, pour $t \to \infty$, est dénommée racine de reste nul et est exprimée par la somme de la série indépendante.

Les formules récurrentes pour les premiers termes sont exprimées d'une façon générale dans le paragraphe 4.

Par suite des propriétés de l'équation transformée, on déduit, dans le paragraphe 5, les propriétés des racines de reste nul. Dans le cas des racines réelles, s'il y a une racine de reste nul, la série qui la représente est convergente. Si l'équation n'admet pas de racine réelle, la série indépendante devient divergente, ainsi qu'il ressort de l'exemple de l'équation du premier degré.

Si la série est lentement convergente, ce qui nécessite un grand nombre de termes, il est préférable d'utiliser la méthode des approximations successives.

Cette méthode est applicable à l'une des expressions finies du développement et peut même être l'équation (13). Les séries lentement convergentes nécessitent un grand nombre d'itérations. Il est souvent plus expéditif d'appliquer cette méthode après une première opération d'élimination, ce qui conduit à un nombre d'itérations bien plus réduit.

L'algorithme de la méthode peut être suivi dans les exemples où l'on a utilisé les deux méthodes indépendamment. On a fait une étude complète sur l'équation du deuxième degré. Dans l'exemple de l'équation du 5e degré, on a utilisé les deux méthodes combinées.

Pour ces méthodes, on utilise uniquement les quatre opérations élémentaires.

La méthode de récurrence présente l'avantage de pouvoir exprimer la racine de reste nul, en fonction des paramètres intéressants, sans obliger à opérer dès le commencement sur les valeurs numériques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Diagramme de la partie indépendante S des racines.
Fig. 2. — Diagramme des racines réelles y_1 et y_2.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, *Despre integrarea ecuației liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele și svelte.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. III, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1952, p. 53.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

În această rubrică se publică lucrările de nivel ştiinţific superior, în care se expun :
— studiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se totodată aspectul nou :
— generalizări asupra dezvoltărilor matematice în probleme de cercetări de mecanică aplicată :
— descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

CERCETĂRI CU RADIOIZOTOPI ÎN DOMENIUL MECANICII APLICATE

DE

DAN PAVELESCU

Folosirea energiei nucleare în cercetările din domeniul mecanicii aplicate, apare în primul rînd sub forma utilizării izotopilor radioactivi şi în al doilea rînd sub forma energiei de propulsie.

În literatura de specialitate izotopii radioactivi sînt întîlniţi adesea sub diferite denumiri ca: atomi marcaţi, radioizotopi, trasori sau indicatori radioactivi, radioelementi etc. Atît în industrie, cît şi în cercetarea ştiinţifică, radioizotopii sînt folosiţi fie sub formă de « atomi marcaţi », fie sub cea de generatori de radiaţii penetrante.

Asemenea elementelor radioactive naturale, radioizotopii au o activitate descrescătoare bine stabilită. Ei prezintă în special două caractere principale, care condiţionează alegerea lor în diferite cercetări. Este vorba de timpul de jumătate de viaţă T şi apoi de caracteristicile radiaţiilor emise. Spre exemplu, cobaltul 60 — un radioizotop bine cunoscut — are timpul de jumătate de viaţă 5,3 ani, emite raze γ de circa 1,3 MeV*) cu o putere apreciabilă de pătrundere în plăcile metalice. Din cauza activităţii sale de lungă durată şi mai ales a energiei penetrante, Co^{60} este folosit în măsurători de grosimi, în radiometalografia γ etc.

Este necesar să prezentăm în afară de acest aspect, principalele proprietăţi ale izotopilor radioactivi care determină de asemenea folosirea lor în cercetările mecanicii aplicate.

1. Radioizotopii sînt folosiţi ca atomi marcaţi sau trasori, în prezenţa elementelor stabile de acelaşi nume, din cauza proprietăţilor de a putea suferi transformări fizice, chimice sau mecanice, fără să piardă facultatea de radiaţie.

2. Radiaţiile emise de ei pot fi detectate cu plăci fotografice, asemenea razelor luminoase sau X.

3. Radiaţiile α, β, sau γ, produse de radioizotopi, au proprietatea de a ioniza gazele ce le traversează în diferite proporţii.

4. Asemenea razelor X, emisiile radioactive pot traversa materia, puterea de pătrundere depinzînd de felul radiaţiei şi fiind asemănătoare legii descreşterii

*) Se defineşte electron voltul (eV), energia ce o capătă electronul cînd trece printr-un cîmp electric cu o diferenţă de potenţial de 1 Volt ($1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ ergi).

radioactivității. Astfel, un foton γ funcție de energia sa, traversează mai mulți centimetri de plumb sau oțel, în timp ce o particulă α poate străbate doar cîțiva centimetri de aer, fiind însă oprită de un ecran subțire de aluminiu.

Caracteristicile arătate mai sus prezintă o importanță deosebită, atît în ceea ce privește metodologia cercetării, cît și în alegerea aparaturii de măsură și stabilirea normelor de protecția muncii.

Pentru aplicațiile practice și în cercetarea științifică, aparatele de măsură folosite se bazează în primul rînd pe proprietatea radiațiilor de a ioniza mediul gazos. Astfel, intensitatea radiațiilor poate fi măsurată cu camere de ionizare, contori Geiger-Müller, sau cu contori de scintilație. Metoda de măsurare prin ionizare, spre deosebire de metoda fotografică, este simplă, corectă și exactă.

Precizăm că atît contorii, cît și camerele de ionizare, trebuie să fie considerate doar antenele unei aparaturi electronice mai complexe, care în principiu detectează, amplifică, înregistrează sau numără impulsurile produse de radiațiile izotopilor radioactivi.

În lucrările cu radioizotopi se remarcă un pericol real, mai ales în radiometalografia γ. Acțiunea dăunătoare se datorește celulelor vii iradiate care își modifică structura moleculară. În U.R.S.S., după cum s-a remarcat și la Conferința de la Geneva, s-a acordat cea mai mare atenție protecției muncii în acest domeniu. În Uniunea Sovietică se lucrează încă din septembrie 1950 pe baza unor norme precise.

Prezentarea pe care o facem avînd un cadru limitat, nu putem decît enunța aparatura de măsură, și mai ales importanța securității personalului în cazul folosirii elementelor radioactive în cercetarea științifică, în industrie, cît și în laborator.

Comunicările, materialele și exponatele prezentate la Conferința pentru folosirea pașnică a energiei atomice, ținută la Geneva în 1955, au arătat că U.R.S.S., S.U.A., Canada, Anglia și Franța sînt principalele țări care au aplicat radioizotopi în cercetarea științifică din domeniul mecanicii. Cu această ocazie Uniunea Sovietică s-a remarcat în mod deosebit prin importantele ei realizări de folosire pașnică a energiei atomice. După cum rezultă din comunicarea prof. A. M. Samarin, făcută cu această ocazie, în U.R.S.S., folosirea radioizotopilor a căpătat în ultimii ani o largă răspîndire în cercetarea științifică și în industrie, fapt demonstrat de altfel și de apariția a peste 200 de lucrări în acest domeniu.

În cele ce urmează vom arăta prin mai multe exemple aplicarea radioizotopilor în diferite domenii de activitate ce aparțin mecanicii.

1. Controlul defectelor la piesele metalice și organe de mașini

Prin înlocuirea razelor X cu raze γ (care sînt mai pătrunzătoare, dacă sînt dotate și cu o energie mare), s-a putut face un serios progres tehnic și științific, la controlul pieselor și organelor de mașini, prin faptul că nu mai necesită instalații scumpe, ancombrante, instalații de forță și locuri obligate de cercetare. Spre exemplu, cu raze X, lucrînd cu o tensiune de 200 kV, nu se pot studia piese de oțel cu o gosime mai mare ca circa. 6 cm, examinarea putîndu-se face numai la locul instalației.

În prezent U.R.S.S. și țările care dispun de reactori nucleari — deci de posibilitatea de a produce izotopi radioactivi — au dat o largă răspîndire radiometalografiei γ, căci trebuie spus cu această ocazie, că dezvoltarea radiometalografiei este strîns legată de dezvoltarea reactorilor atomici. Drept consecință a acestui fapt, Franța a importat din Anglia Co^{60}, pila de la Fort-Chatillon neavînd energie suficientă pentru producerea acestui radioizotop.

În U.R.S.S., defectoscopia cu razele γ a fost mult studiată, astfel că există publicații începînd din anul 1938 (sînt cunoscuți mai ales cercetătorii: S. T. Nazarov, I. I. Gurevici, A. P. Jdanov, I. K. Roșin, V. S. Sokolov, I. G. Fadikov, L. K. Tatocenko, G. M. Frank etc.).

Principiul radiometalografiei γ este extrem de simplu. Se folosesc două metode: metoda fotografică și metoda ionizării.

Așezînd de o parte a piesei ce urmează a fi cercetată, o sursă de radiații γ de o anumită energie, iar de cealaltă parte o placă fotografică (protejată contra luminii), după un anumit timp, obținem prin developare, radiografia piesei (sufluri-le, fisurile, crăpăturile, diferențele de grosime, contur, densitate etc., apar pe negativ).

Izotopul Co^{60} este cel mai des folosit în acest scop. El emite raze γ cu energii mari de diferite intensități. Se folosește de asemenea în anumite situații tantalul 182*), cu o viață mai scurtă (4 luni), dar cu aceeași putere de pătrundere. Iridium 192, cu o perioadă de 2,5 luni, are și o putere de pătrundere mai mică. El este folosit la radiografierea pieselor mai subțiri, la, care razele γ ale Co^{60} ar voala clișeul.

Ca orientare în folosirea izotopilor în gammagrafie, arătăm:

a) pentru piese subțiri se recomandă tuliul (Tm^{170}), cu E_γ de 0,083 MeV ($T = 127$ zile);

b) pentru piese pînă la 6 cm grosime se recomandă iridiul (Ir^{192}) cu E_γ de 0,6 MeV $T = 70$ zile;

c) pentru piese pînă la 30 cm se recomandă cobalt (Co^{60}) cu E_γ de 1,3 MeV.

Pentru astfel de măsurători este folosit un recipient basculant de plumb masiv, montat pe un suport cu roți, ce poartă și deplasează izotopul radioactiv; acesta este plasat într-o *cavitate astupată* cu un capac de plumb. Ridicînd capacul, emisia particulelor poate fi folosită ca sursă la radiografiere sau la măsurătorile cu contoare de ionizare.

S-au folosit plăci foto flexibile în casete de cauciuc, pentru a se putea mula pe diferite forme curbe. Se poate radiografia în plină zi suprafețele plane, cu plăci introduse în casete de aluminiu, ce nu constituie ecrane pentru razele γ.

Radiografiile necesare în anumite puncte ale țevilor, se fac plasînd sursa în interior la capătul unui tub de circa 2 m, iar la exterior, aplicînd caseta de cauciuc.

Institutul de cercetări siderurgice din Franța a făcut și studii de autoradiografie, introducînd în piesa de analizat un izotop radioactiv (radiofosfor sub formă de fero-fosfor) și aplicînd apoi de cîte ori a fost nevoie, plăci foto pe piesă.

În locul plăcii fotografice se mai poate folosi, după cum am arătat, și contorul Geiger. În cazul în care în metal există o fisură, un gol, sau o neomogenitate etc., contorul va marca o intensitate mai mare a radiației ce străbate piesa. Cu această metodă s-a ajuns să se examineze sudurile construcțiilor făcute pe plăci de 6 cm grosime, într-un ritm de 1 m de sudură în maximum 3—4 minute.

De asemenea se verifică prin ambele metode, conducte de presiune, cazane de locomotivă, mantalele sudate ale furnalelor etc., folosindu-se de asemenea tuliul 170**) și iridiul 192.

La metoda ionizării contorul se plasează în general, de o parte, iar sursa de raze γ de cealaltă parte a piesei, trimițînd un fascicul de circa 1 cm^2.

În cazul controlului grosimii unor piese accesibile dintr-o singură parte, se utilizează aceeași metodă, însă se va măsura în acest caz radiația difuzată. Se poate

*) Ta^{182} — 117 zile, $E_\beta = 1$ MeV; $E_\gamma = 1{,}22$ MeV.

**) Tm^{170} — 127 zile, $E_\beta = 0{,}98$ MeV; $E_\gamma = 0{,}083$ MeV.

determina ușor și adîncimea la care se află defectul, prin pozarea a două fascicule de raze trimise în același punct.

Uneori fisurile de călire a îmbinărilor sudate nu pot fi detectate cu radiografia γ, avînd dimensiuni ce depășesc limitele de sensibilitate a metodei. Trebuie să se folosească în acest caz în paralel și metoda magnetică sau alte metode.

O altă posibilitate interesantă este aceea de radiografiere panoramatică, putîndu-se examina piese circulare, sau mai multe piese de serie, plasînd sursa în centru și filmul foto pe circumferință, fără a se pierde mai mult timp decît cel necesar pentru radiografierea unui sector circular.

În timp ce suflurile apar vizibile prin radiografiere, crăpăturile nu sînt adesea vizibile decît în cazul cînd planul lor este perpendicular pe cel al filmului.

Uzura s-a urmărit și în alte domenii. Astfel, o comunicare făcută recent la Geneva de U. Beer și E. Saeland, arată că în Norvegia a fost studiată, cu izotopi radioactivi, uzura turbinelor Francis; aceasta este datorită coroziunii efectelor de cavitație, ce apare în special la roțile cu palete ale turbinelor, depinzînd în primul rînd de sarcină.

Pentru a se reduce efectele perioadelor întreruperilor este de mare importanță să se determine sarcina maximă. S-a vopsit de mai multe ori cu vopsea, conținînd o mică cantitate de arsenic radioactiv, paletele care sînt mai mult expuse coroziunii. S-a stabilit astfel gradul de coroziune în funcție de sarcină, putîndu-se evita coroziunile exagerate.

2. Măsurarea grosimilor și controlul suprafețelor

În U.R.S.S., s-au ocupat de această metodă cercetătorii P. E. Diacenko și N. N. Tolceacev. Studiile ce s-au făcut în trecut au arătat că metodele de măsurare mecanică, magnetică, electrică, prin ultrasunet sau raze X, sînt dificile, mai ales dacă este vorba de a măsura sau controla piesele în timpul exploatării. Metodele moderne arată, ca și în cazul precedent, că pereții metalici sub 1,25 mm pot fi măsurați cu izotopi ce emit raze β, iar cei mai groși — pînă la 30 cm — cu raze γ. Academia de Științe a U.R.S.S., a folosit în această privință trei metode:

a) metoda reflexiei prin măsurarea intensității dispersiei reflectată, funcție de variația grosimii pereților pînă la 20 mm;

b) metoda măsurării prin pătrundere, ce se bazează pe variația intensității radiației la trecerea printr-un strat metalic;

c) metoda autoradiografiei.

Astfel, cu ajutorul izotopilor radioactivi, se face curent controlul grosimilor diferitelor piese în procesul fabricării lor, sau măsurarea organelor de mașini în funcționare.

Folosirea energiei nucleare și construcția diferitelor aparate de măsură și introducerea acestora în uzine, face ca să se întrevadă mari posibilități în automatizarea proceselor tehnologice.

Spre exemplu, în prezent, în multe locuri din industria grea și ușoară sovietică, se controlează producția laminoarelor, a hîrtiei, a pînzeturilor, cu ajutorul izotopilor ce reglează automat grosimea stratului străbătut sau semnalizează eventualele abateri (A. M. Bogacev, B. I. Verhovski și A. N. Makarov*)).

Este interesantă o aplicație folosită în Anglia, privind inspectarea suprafețelor mici curbe. Un contor mic în formă de inel colimator este plimbat pe piesa sau tubul

*) *Măsurarea grosimii și a densității cu ajutorul izotopilor radioactivi*, Comunicare ținută la Sesiunea din 1955 a Academiei de Științe a U.R.S.S.

de 10 mm diametru, în timp ce rolul de sursă îl joacă un gaz radioactiv (Kripton 85).

De asemenea arătăm controlul unor suprafeţe mari, efectuat sub apă. Astfel, la Port Alfred-Quebec (Canada) s-au radiografiat la 12 m sub apă, plăcile de oţel ale cheiului, folosindu-se iridiu 192 (s-au făcut 50 de expuneri în 8 ore).

3. Unele cercetări întreprinse privind studiul uzurii la organele de maşini

În ultimii ani s-au elaborat, atît în U.R.S.S. cît şi în cîteva ţări din Occident, metode radioactive pentru studierea uzurii pieselor de maşini şi a sculelor tăietoare. Aceste metode permit să se cerceteze mult mai repede, mai ieftin şi mai exact procesele de uzură la diferite viteze, presiuni, temperaturi, cu diferiţi lubrifianţi şi adaosuri. Se poate atinge o sensibilitate chiar pînă la 10^{-20} g.

Principiul folosit este numărarea de către un contor, a impulsurilor provocate de particulele radioactive ce trec prin uzare în lubrifiant. Impulsurile pot fi înregistrate cu un oscilograf.

Introducerea izotopilor radioactivi în suprafeţele de frecare, se face printr-una din diferitele metode ca:

a) introducerea în şarjă în cazul pieselor mici;

b) iradierea în pilă sau în ciclotron a pieselor mici;

c) acoperirea electrolitică a piesei cu metal radioactiv;

d) introducerea mecanică a metalului radioactiv;

e) prelucrarea cu scîntei electrice folosind un electrod iradiat.

O deosebită importanţă asupra uzurii unui motor, o prezintă influenţa combustibilului şi lubrifianţilor. Cercetările ce s-au întreprins pînă în ultimii ani, nu au dus la concluzii satisfăcătoare, deoarece metodele folosite erau neprecise, încete, greoaie şi totodată costisitoare.

Astfel, pentru determinarea uzurii cămăşilor cilindrilor şi segmenţilor pistonului respectiv funcţie de material, combustibil sau lubrifiant, se asambla motorul cu piese noi sau curăţate, măsurate şi cîntărite în prealabil cu grijă. Pentru a se obţine precizia dorită în timpul unei funcţionări de minimum 50 — 100 ore, se demonta şi monta motorul de mai multe ori, pentru diferitele măsurători şi cîntăriri.

Se remarcă imediat pe lîngă alte dezavantaje şi faptul că nu se pot studia fenomenele tranzitorii în funcţionare şi că prin demontări repetate, rezultatele pot fi eronate.

De curînd a început să se introducă pe scară largă metoda izotopilor radioactivi. Astfel în U.R.S.S., în industria de autovehicule şi tractoare şi în S.U.A., în determinările făcute în 1949, de «California Research Corporation», s-a ajuns la concluzia că numai folosind trasorii radioactivi, problema poate fi soluţionată riguros, exact şi cu cheltuieli minime.

Astfel, primul segment de compresie, a fost iradiat într-un reactor cu uraniu. În segment iau naştere prin bombardarea fierului cu neutroni lenţi, o mică cantitate de izotopi radioactivi (Fe^{59})*).

Luîndu-se repetate probe de ulei, prezenţa fierului radioactiv este detectată de un contor Geiger-Müller (chiar în proporţie de o parte fier 59, la 10 milioane părţi ulei).

Pe baza sporirii cantităţii de izotopi în ulei, se poate urmări variaţia uzurii, căci din măsurarea radioactivităţii uleiului rezultă uşor cantitatea de metal uzat în miligrame/oră.

*) Fe^{59} — 45 zile, $E_\beta = 0{,}46$; MeV $E_\gamma = 1{,}3$ MeV.

S-au stabilit astfel curbele de uzură la mai multe motoare din aceeași serie și la motoare cu diferite procente de sulf în benzină. S-a constatat spre exemplu, că după 2—6 ore, uzura devine constantă; de asemenea, în probele făcute cu alte motoare, s-a constatat că o creștere a conținutului de sulf de la 0,05 la 1%, face ca viteza uzurii să se dubleze.

Cu aceeași metodă s-a urmărit uzura cămășii cilindrului cromîndu-se aceasta cu crom radioactiv (Pinotti, Hull și Mc Laughlin).

Metoda este în general interesantă mai ales prin aceea că poate, într-un timp scurt, diferenția și urmări uzura unei părți dintr-un mecanism în funcțiune. Precizia a fost demonstrată experimental. Astfel, după 12 ore de funcțiune, un segment a pierdut în ulei 24,6 mg, în timp ce prin cîntărire a rezultat o pierdere totală de greutate de 25 mg. După 55 ore, rezultatele sînt: 37,2 mg față de 38 mg.

Cercetătorul englez J. T. Burwell, pentru a studia schimburile de metal ce se produc între două corpuri prin frecare, a folosit epruvete de bronz iradiate, de care apoi a frecat sfere din diferite metale. Metalul reținut pe sferă este ușor reperat și determinat datorită radioactivității acestuia.

Împreună cu Strong, a studiat de asemenea comportarea straturilor metalice superficiale dintre doi cilindri, dintre care cel fix a fost în prealabil iradiat. Se măsoară radioactivitatea cilindrului mobil transmisă prin particulele uzate. Se poate de asemenea obține pe o peliculă fotografică imaginea zonelor și a metalului deplasat de pe un cilindru, pe altul.

S-a studiat de asemenea influența durității asupra microsudurilor ce se produc între suprafețele de contact. S-au folosit suprafețe dure: cilindri cromați dur radioactiv în contact cu diferiți cilindri nitrurați.

Cercetătorul sovietic V. E. Veinstein, studiind cu ajutorul atomilor marcați, uzura componentelor structurale ale bronzului la aliajele de antifricțiune, ajunge la cîteva concluzii interesante.

Astfel, folosind ca radioizotopi Zn^{65} și Tl^{204}*), introduși numai în una din componentele aliajului, s-a constatat că bronzul se uzează neuniform, cositorul uzîndu-se de circa 4—5 ori mai repede. Se conchide că uzura cositorului este grăbită și de prezența prafului în lubrifiant, praful avînd o acțiune favorabilă numai în timpul rodajului (îl grăbește) și dăunătoare după terminarea rodajului.

4. Studiul uzurii sculelor de așchiere

Metodele micrometrice folosite pentru studierea uzurii sculelor de așchiere, nu dau rezultate suficient de exacte și complete. Și în acest domeniu, în ultimii ani, a început să se folosească izotopii radioactivi. Sînt interesante mai ales studiile făcute în U.R.S.S. de E. P. Nadeinskaia și N. F. Kazakov și în S.U.A. de Merchant și Krabacher. Principiul folosit este același ca și la alte studii de uzură. Se iradiază scula sau numai plăcuța de metal dur.

Studiile au arătat că 90% din particulele uzurii sculei trec în așchie, iar restul de 10%, în aer sau în piesa prelucrată. Izotopii folosiți sînt W^{185}**), Ta^{182} și Co^{60}. Se preferă să se lucreze cu primul care emite numai raze β cu energie de 0,428 MeV și are 1/2 viață mai scurtă (— 73,2 zile), cu Co^{60} se lucrează numai în cazul unor încercări mai de durată cu o singură sculă sau în situația în care experimentatorul lucrează la distanțe mari de pila de iradiere.

---

*) Zn^{65} — 250 zile, $E_\beta = 0{,}32$ MeV; $E_\gamma = 1{,}1$ MeV; Tl^{204} —2,7 ani, $E_\beta = 0{,}8$ MeV.

**) W^{185} — 74 zile, $E_\beta = 0{,}43$ MeV.

Plăcile foto-flexibile ne dau posibilitatea să observăm repartiția bucăților de sculă încrustate pe piesă. Se poate observa cu aceeași metodă și fenomenul invers. Astfel, Burwell și Strong au studiat depunerile de metal pe sculă, făcînd de această dată metalul radioactiv și realizînd o autoradiografie ce permite a se vedea imaginea depozitului de metal, lucru pe care microscopul ordinar nu ni-l poate arăta.

Cercetările ce s-au făcut, au condus la stabilirea unei ecuații liniare, între uzură și timpul de prelucrare. Prin metodele clasice obișnuite, s-a obținut o curbă mai puțin regulată din cauza erorilor de citire.

Numărul de impulsuri ce rămîne după scăderea eventualelor influențe radioactive exterioare, împărțit la greutatea așchiei în grame, determină direct valoarea uzurii. Cantitatea de așchie necesară determinării uzurii este mică (circa 50—60 g). La fel de scurt este și timpul de așchiere (2—20 secunde), fapt care permite zeci de experiențe cu un cuțit.

Întreaga determinare (timpul de așchiere, măsurarea gradului de activitate, cîntărirea și determinarea cu o precizie de 2—3%), necesită doar 2—5 minute.

În general, vom scoate în relief cîteva avantaje mai importante ale metodei folosite. Indicatorii radioactivi permit să se stabilească caracterul uzurii sculei în perioada inițială, ceea ce nu se poate obține pe cale micrometrică. Urmărirea procesului se poate face continuu (fără a întrerupe așchierea), în orice moment putîndu-se stabili cantitatea de metal uzat și aspectul calitativ al uzurii. Se permite reducerea duratei cercetărilor în mod considerabil.

5. Cercetări în lubrificație

Fenomenele de lubrificație sînt strîns legate de cele de uzură. Din această cauză cercetările se fac de multe ori cu metode analoge. Pentru a studia uzura propriu-zisă, am văzut că variem metodele, forțele și timpul. Pentru studiul lubrificației, se variază uleiurile, pe care le vom clasifica apoi după ordinul de uzură.

Și în cercetările de lubrificație s-au folosit de asemenea, pentru a obține rezultate optime, izotopii radioactivi.

Prin introducerea în lubrifiant a unui corp marcat (spre exemplu C^{14})*), se dă posibilitatea să se observe precis suprafețele ce au putut să vie în contact cu uleiul. Cu o peliculă fotografică se poate prinde imaginea zonelor atinse în acest caz, sau a zonelor și felului de distribuție a metalului uzat, provenit de la segmentul iradiat, în cazul arătat mai înainte (privind uzura).

Cu această metodă, Burwell și Strong au studiat modul de funcționare a organelor de alunecare în mașini și deplasarea ce rezultă a metalelor, iar Harris, Kamp și Yanko au studiat suprafețele în contact cu uleiul.

La laboratorul național din OAK-Ridge al Comisiei de energie atomică americană, Pinotti, Hull și Lanshlin au cercetat de asemenea și influența temperaturii uleiului asupra lubrificației.

În ceea ce privește uzura cuzineților în funcție de diferite sortări de ulei, în U.R.S.S., s-au făcut studii introducîndu-se fosfor radioactiv în cuzinetul de bronz. Prin uzarea cuzinetului cu turionul său, se va obține transfer de material de la cuzinet la turion — transfer constatat printr-o autoradiografie. Se determină transferul de material pe turion și în ulei (prin măsurarea radioactivității) și se compară rezultatele folosind mai multe categorii de uleiuri.

---

*) C^{14} — 5 700 ani, $E_\beta = 0{,}156$ MeV.

La fel s-a studiat atacarea metalelor de către lubrifianți. Influențarea chimică a uleiurilor comportă cercetări de lungă durată, dacă nu folosim trasorii radioactivi. Bowden și Moore au demonstrat că uleiurile au o acțiune chimică asupra metalelor, antrenînd totodată particule de metal de pe suprafața cu care sînt în contact. Dacă stratul metalic este iradiat, se poate lesne determina acțiunea corosivă a uleiului și calitățile diferitelor adaosuri de anticoroziune (Iu. S. Zaslavski *)).

6. Aplicații în mecanica construcțiilor și mecanica generală

În ceea ce privește studiile relative la îmbunătățirea betonului și betonului armat, oamenii de știință din U.R.S.S. au folosit calciu radioactiv, Ca^{45} **), pentru cercetarea mărimii suprafeței totale a particulelor de ciment cînd acestea reacționează cu apa, permițînd să se studieze procesul de întărire al cimentului.

Cercetătorul sovietic E. Rurcihn studiază cu ajutorul atomilor marcați, permeabilitatea betonului asfaltic, care, după cum se cunoaște, depinde de proprietățile pietrișului și al lianților.

Pînă în prezent nu au existat metode perfecte pentru a aprecia caracterul aderenței și a acțiunii reciproce a pietrișului și lianților, la betonul asfaltic. La Institutul de construcții «V. V. Kuibîșev», din Moscova, s-au făcut diferite experiențe pentru determinarea unei metode exacte de constatare a pătrunderii apei în funcție de calitățile pietrișurilor. Se introduc în apă atomi marcați și apoi se determină, radioactiv, caracterul diferitelor mostre ce conțin pietriș cu bitum și pietrișuri cu diferite granulozități și stări de umezeală. Izotopul folosit a fost Sr^{89} ***), dintr-o soluție apoasă de azotat de stronțiu. De asemenea în alte probe s-a folosit o soluție ce conținea fosfor 32 ****).

În mod similar, cercetătorii sovietici G. L. Logghinov, T. Iu. Liubimova și M. A. Siskovskaia au folosit izotopii pentru studierea variațiilor ce au loc în structura pietrei de ciment, în cazul înghețării periodice a ei, pentru a crea betoane de mare durabilitate.

Ca izotop s-a folosit de asemenea stronțiu 89, care se aseamănă în ceea ce privește proprietățile fizico-chimice, cu calciul (soluție de 2% nitrat de stronțiu). S-au făcut experiențe pe cuburi de 2 și 3 cm^3, de ciment cu 3% gips și cu raportul A/c = = 0,21, urmărindu-se influența variației cantității relative a apei asupra mărimii și caracterului porozității pietrei de ciment și a amestecurilor.

O mare atenție s-a acordat în U.R.S.S., efectelor produse asupra caracteristicilor materialelor, prin deplasarea atomilor sau privind efectele ce produc această deplasare. S-a constatat că o serie de proprietăți cum sînt: densitatea, compresibilitatea etc., sînt puțin sensibile la aceste deplasări, în timp ce duritatea, termoconductibilitatea și electroconductibilitatea, sînt deosebit de sensibile din punct de vedere structural, deplasările atomice influențînd asupra acestor proprietăți.

Sub acțiunea radiațiilor apar deplasări structurale, atît asemănătoare cît și diferite, de cele produse de prelucrarea la rece a metalelor.

Din cercetările întreprinse pînă în prezent, a rezultat că numai radiațiile datorită neutronilor și particulelor grele acționează în mod remarcabil asupra metalelor și semiconductorilor. Celelalte radiații, ca fotonii razelor γ și electronii, produc o slabă acțiune, cu excepția izolatorilor și a compușilor chimici.

*) *Cercetarea proprietăților de uzură ale uleiurilor și ale combustibililor cu ajutorul izotopilor radioactivi*, Comunicare ținută la Sesiunea din 1955 a Academiei de Științe a U.R.S.S.

**) Ca^{45} — 180 zile, E_β = 0,26 MeV.

***) Sr^{89} — 55 zile, E_β = 1,55 MeV.

****) P^{32} — 14,3 zile, E_β = 1,7 MeV.

Un fenomen invers este dat de cercetătorul englez O. H a h n, care a studiat deformaţia solidelor (metale şi aliaje), cu un conţinut de radiu. S-a constatat că degajarea gazului radon va fi mai mare sau mai mică, în funcţie de structura materialului, care, supus la diferite deformaţii mecanice, îşi modifică spaţiile intercristaline şi deci puterea emanatoare.

Metoda izotopilor înlesneşte de asemenea studiul experimental al stării de deformare, în cazul unei deformări plastice, ce se făcea dificil prin metoda reţelei de coordonate, făcută pe cale mecanică.

În Uniunea Sovietică, s-a folosit o nouă metodă. Se introduc în model ştifturi a căror suprafaţă se acoperă în prealabil cu izotopi radioactivi. Sarcinile la care este supus modelul fac ca în cazul deformaţiei plastice imaginile circulare să devină elipse care-şi schimbă direcţiile sau locul. Radiografiile secţiilor plane ne dau direcţiile principale de deformaţie şi diferitele stadii de deformare.

7. Aplicaţii în hidrotehnică

Pentru cercetarea scurgerilor turbulente din conducte cu diametru mare, a fost folosit cu succes sodiul 24*), izotopul radioactiv dizolvat, fiind injectat, în cantităţi mici, în lichid.

Mişcările de aluviuni şi nămol au fost urmărite folosind scandiul 46**). Cercetările s-au făcut în 1954, în estuarul Tamisei (I. L. P u t m a n şi S. J e f f e r s o n). S-a folosit ca trasor sticla opacă cu radio-scandiu 46. După injectare, în patul nămolului, mişcarea acestora este urmărită cu contoare G—M, coborîte pe nămol.

S-au făcut cercetări similare la studiul eroziunilor malurilor.

Pentru determinarea spărturilor în conducte, I. L. P u t m a n, a folosit ca izotop sodiu 24 în soluţie, pentru că emite raze γ penetrante, se prepară uşor şi are o viaţă scurtă.

S-au făcut determinări şi semnalizări privind nivelul lichidelor din rezervoare închise. În această privinţă U.R.S.S. a construit şi foloseşte aparatura de serie adecvată.

Viscozitatea lichidelor opace nu se putea măsura prin metoda clasică a determinării timpului scurs la trecerea unei bile prin lichid între două repere. S-a înlocuit bila obişnuită cu o altă bilă de Co^{60} de 4 — 8 mili Curie. Timpul şi deci viscozitatea se determină de două contoare plasate la cele două repere.

8. Despre posibilitatea de aplicare a energiei nucleare în aeromecanică

Publicaţiile de specialitate arată că în acest domeniu, energia nucleară poate fi folosită atît sub forma trasorilor radioactivi, cît mai ales sub cea energetică, necesară acţionării instalaţiilor de putere termică pentru propulsie.

Un exemplu de utilizare cu succes a izotopilor radioactivi, drept « trasori », îl constituie cercetarea ce a trebuit să fie întreprinsă în Anglia, după accidentul avionului de tip « Comet », pentru a se putea stabili precis dacă accidentul se datoreşte scurgerilor de combustibili. În acest scop, combustibilul (kerosina) a fost marcat într-un caz cu paladiu 109 acetilacetonat şi în alt caz, cu acelaşi trasor dietil diticarbonat. Cu ajutorul detectoarelor s-a constatat, după probele experimentale de zbor, că posibilitatea de explozie din cauza scurgerilor de combustibil este exclusă.

*) Na^{24} — 14,8 ore, $E_\beta = 1{,}4$ MeV; $E_\gamma = 2{,}8$ MeV.
**) Sc^{46} — 85 zile, $E_\beta = 0{,}60$ MeV.

În mod similar, folosind o soluție de radio-fosfor, ca substanță trasoare, Compania de aviație din Havilland (Anglia) a controlat elicele avioanelor, detectînd din timp cele mai mici fisuri.

În laboratoarele din Paulsbor (New Jersey) s-a folosit Co^{60}, pentru a studia scurgerea unui amestec de ulei, apă și gaz prin terenuri permeabile: elementul trasor s-a introdus în ulei, iar fenomenul s-a urmărit cu contorul Geiger. În mod similar în U.R.S.S. s-au făcut cercetări în industria petroliferă*).

S-a încercat permeabilitatea filtrelor lăsînd să fie traversate de curenți de aer cu pulbere radioactivă ce se detectează la ieșire. Aceeași metodă s-a folosit și la studiul permeabilității betoanelor față de gaze.

În Franța, Voice a măsurat (cu radon) timpul de scurgere a unui curent de aer prin furnalul înalt.

De asemenea s-au studiat scurgerile prin medii poroase a petrolului și a apei, sau scurgerile gazelor prin betoane.

Anumite aspecte fac ca utilizarea energiei atomice la propulsia aeronavelor să fie întîrziată și să rămînă pînă în prezent în stare de proiect sau folosită experimental la rachete.

Faptul că în unele publicații din Occident, se arată că amenajările de protecție (ce cîntăresc între 50 și 100 tone), vor înlocui în fond încărcătura maximă de combustibil (circa 75 tone), nu soluționează problema.

Am putea grupa greutăților ce intervin în trei grupe mai mari cu interdependență între ele:

a) alegerea tipului de instalație de putere termică și de protecție;

b) problema materialului de construcție;

c) problemele de echilibrare și structură.

În ceea ce privește mecanismul de propulsie și reactorul, cercetătorii s-au oprit asupra a patru tipuri generale de astfel de instalații (turbină, turboreactor, statoreactor și rachetă).

Turbinele de vapori și gaze, din punctul de vedere al metalurgiei actuale, pot fi considerate în prezent singurele instalații practice pentru aplicarea energiei atomice, ele trebuind să transforme energia calorică de răcire din pilă, în energie mecanică.

De asemenea trebuie avut în vedere faptul că materialele de construcție și instalații ale aeronavei, trebuie să suporte efectele combinate ale temperaturii mari, coroziunii lichidelor de răcire, tensiunilor termice și avariilor iradierii continue. Sînt foarte serioase mai ales dificultățile legate de schimbarea de calitate a materialelor, efect ce duce la descărcarea conductibilității termice, micșorarea rezistenței la rupere, creșterea fragilității, micșorarea calităților izolante a materialului electric etc.

Existența pe bord a unor mari greutăți (reactorul și dispozitivele de protecție) în anumite locuri obligate, fac mari greutăți unei proiectări adecvate, în ceea ce privește structura și echilibrarea și apoi demararea și aterizarea (E. Balabanov).

*

Subliniem că, în general, lărgirea cercetării științifice prin folosirea radioizotopilor depinde în mare măsură și de inventivitatea cercetătorului, realizările ce se găsesc în literatura de specialitate, folosind doar ca îndrumare.

*) Comunicările lui A. I. Holin, N. K. Kuharenko și Iu. S. Simelevici, ținute la Sesiunea din 1955 a Academiei de Științe a U.R.S.S., indică folosirea neutronilor.

Hotărîrea din ianuarie 1955 a Guvernului U.R.S.S. de a acorda ţării noastre ajutor multilateral, privind folosirea energiei nucleare în scopuri paşnice, cît şi rezultatele remarcabile ale Conferinţei de specialitate din iunie de la Geneva, au creat dintr-o dată cercetării ştiinţifice din domeniul mecanicii aplicate, noi posibilităţi de dezvoltare.

Primită la redacţie la 7 decembrie 1955

ИССЛЕДОВАНИЕ В ОБЛАСТИ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОМОЩИ РАДИОАКТИВНЫХ ИЗОТОПОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

На основании данных, почерпнутых в специальной литературе, опубликованной в СССР и в некоторых других странах, автор настоящей работы предлагает несколько способов использования радиоактивных изотопов для исследований и измерений и делает в то же время краткий обзор аппаратуры и норм охраны труда.

Приводятся примеры использования радиоактивных изотопов при исследовании износа и смазки, а также при дефектоскопии и проверке и измерении машинных частей и деталей.

Равным образом указываются способы и вытекающие из них выводы, относящиеся к исследованиям в строительной механике гидротехнических и аэромеханических строительных материалов.

В кратких чертах описываются возможности применения атомной энергии в воздухоплавании.

RECHERCHES À L'AIDE DES ISOTOPES RADIO-ACTIFS DANS LE DOMAINE DE LA MÉCANIQUE APPLIQUÉE

(RÉSUMÉ)

L'Auteur a consulté la littérature de spécialité publiée dans ce domaine en U.R.S.S. et ailleurs et expose, dans cet article, quelques méthodes d'application des isotopes radio-actifs aux recherches expérimentales et aux mesurages et donne un aperçu des appareils nécessaires et des normes de protection du travail.

Il donne quelques exemples d'application des isotopes radio-actifs à des recherches portant sur différents sujets: usure, lubrification, défectoscopie, contrôle et mesures des pièces et organes des machines.

L'Auteur expose également certaines méthodes et conclusions auxquelles on a abouti en ce qui concerne la Mécanique des constructions, les matériaux de construction ainsi que l'hydrotechnique et l'aéromécanique.

L'article s'achève par un exposé sommaire de l'application de l'énergie nucléaire à la propulsion des aéronefs.

BIBLIOGRAFIE

1. P. E. Diacenko, D. Voskoboinik, *K voprosu primenenia radioaktivnîh izotopov dlia izucenia iznosa detalei maşin.* Vestnik maşinostroenia, 1954, nr. 9, p. 9.
2. M. B. Neiman, *Primenenie radioaktivnîh izotopov v maşinostroenii.* Vestnik maşinostroenia, 1954, nr. 4, p. 34.
3. E. P. Nadeinskaia, *Issledovanie iznosa rejuşcego instrumenta s pomoşciu mecenîh atomov.* Vestnik maşinostroenia, 1954, nr. 4, p. 40.
4. J. Slater, *Deistvie izlucenia na materiali.* Uspehi Fiziceskih Nauk, 1952, vol. XLVII, nr. 1, p. 51.
5. I. N. Steinbock, *Osnovnîe voprosî primenenia radioaktivnîh izlucenii v izmeritelnoi tehniche.* Uspehi Fiziceskih Nauk, 1954, vol. LIV, nr. 2, p. 231.
6. I. L. Putman, *Applications of Radio-isotopes to Leakage and Hydraulic Problems.* International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, iunie 1955.
7. E. Balabanov, *Atomnaia energhia i vozmojnosti eio primenenia v aviaţii.* Grajdanskaia Aviaţiia, 1955, nr. 4, p. 36.
8. A. Sanielevici, *Izotopii radioactivi în tehnică.* Contemporanul, 1955, nr. 25.
9. H. Hulubei, *Energia atomică în slujba păcii.* Contemporanul, 1954, nr. 28.
10. D. O. Lesser, *How Atomic Radiation Affects Engineering Materials.* Materials and Methods, iulie 1952, p. 75.
11. G. Monnot, *Les isotopes radio-actifs dans la recherche appliquée et dans l'industrie.* Revue de l'Institut Français du Pétrole, 1953, nr. 2, p. 68.
12. M. Ezran, *L'utilisation des isotopes radio-actifs dans les études sur l'usure et la lubrification.* Revue Générale de Mécanique, 1953, nr. 49, p. 22.
13. — *La radio-métallographie gamma.* Revue Générale de Mécanique, 1953, nr. 52, p. 119.
14. *** *Aplicaţiile paşnice ale energiei atomice.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955.
15. G. I. Loghinov, T. I. Liubimova i M. A. Şişkovskaia, *Primenenie radioactivnîh izotopov k issledovaniu izemenii v structure ţementnogo kamnia pri ego periadicéskom zamorajivanii* — DAN, XCVII, nr. 2, 1954.
16. R. E. Lapp i H. L. Andrews, *Fizica iadernigo izlucenia.* Obaranghiz, 1056.
17. Pl. Pinotti, D. E. Hull şi E. I. Mc Laughlin, *Radioactive Tracers Used in Research on Engine Wear*, Petroleum Engineers, Iune 1949, vol. XXI, nr. 6, p. 5.
18. I. I. Iliklitsch Ir., *Aircraft nlear propulsion* Mechanicol Engineering, Ianuary 1952, p. 20.
19. *** *Nuclear Energy*, FOR AIRCRAFT — The Engineer, April 19—1955, vol. CXCIII, nr. 5021, p. 536.
20. *** *Isotopes in industry* — Engineering, September 2—1955, vol. 180, nr. 4675, p. 292.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 1, 1956

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

TUBUL DE ȘOC ȘI APLICAȚIILE SALE

DE

L. DUMITRESCU

Introducere

Studierea propagării undelor de șoc și a undelor de combustie în tuburi datează de mult timp, fiind inițiată de dezvoltarea balisticii. La început, experiențele s-au făcut prin arderea unei cantități de explozibil, însă în anul 1899, V i e i l l e a folosit pentru prima oară procedeul spargerii unei diafragme pentru producerea unei unde de șoc în condiții ușor de reprodus. Mai tîrziu, P a y m a n n, S c h m i d t și apoi în urmă un număr tot mai mare de cercetători au dezvoltat acest dispozitiv experimental, aplicîndu-l la probleme din cele mai diferite domenii. Astăzi, funcționează în cele mai multe laboratoare aerodinamice, tuburi de șoc cu dimensiuni destul de mari, iar tehnicele experimentale sînt dezvoltate într-un grad înalt.

În mod schematic un tub de șoc se prezintă ca în figura 1, sub forma unui rezervor prismatic sau cilindric lung, despărțit în două compartimente (de lungimi de obicei inegale), printr-o diafragmă.

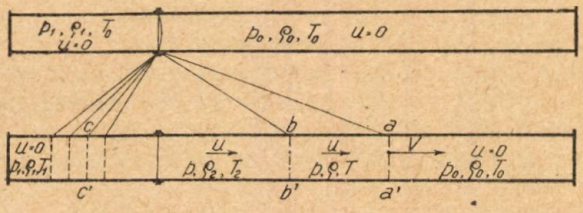


Fig. 1

$a = a'$: unda de șoc,
$b = b'$: suprafața de discontinuitate,
$c = c'$: unda de rarefiere.

Între fețele diafragmei se creează o diferență de presiuni; eventual se pot folosi două gaze diferite. Dacă printr-un dispozitiv oarecare, se distruge diafragma, gazul din camera cu presiune înaltă se destinde. Se naște astfel o undă de șoc, urmată de o zonă în care viteza gazului este constantă. În gazul care inițial era la presiune ridicată se propagă o undă de rarefiere. Frontul de separație între gazul din camera de presiune și cel din camera de vid se propagă în același sens ca unda de șoc, el

devenind o suprafață de discontinuitate pentru temperaturi. În fazele ulterioare ale procesului undele se reflectă la capetele tubului și interferă între ele, fenomenul devenind mai complicat. În figura 2 este reprezentată schematic succesiunea evenimentelor dintr-un tub de șoc, după amorsare.

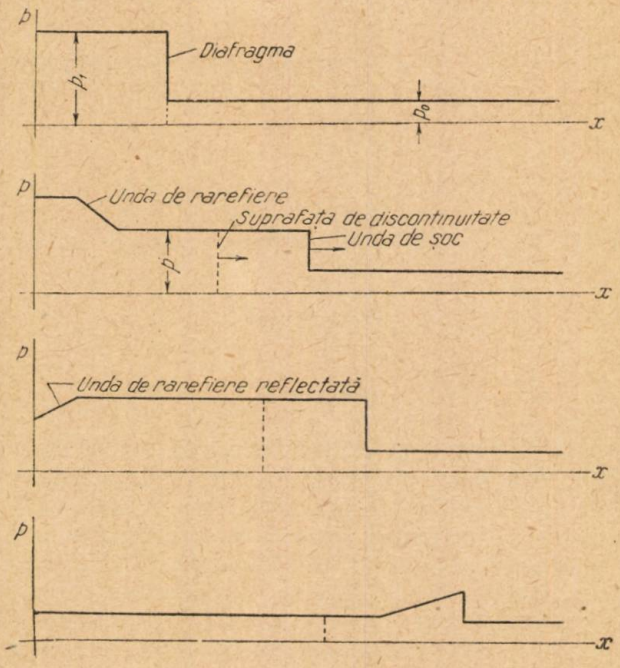


Fig. 2

Aplicațiile tubului de șoc

Acest instrument este susceptibil de o gamă extrem de mare de aplicații, ceea ce, de altfel, s-a și făcut. Vom cita cîteva din acestea:

— studierea fenomenelor de balistică interioară,

— studiul experimental al detonațiilor și al problemelor de chimie cinetică,

— studiul propagării și reflexiei undelor în mișcare unidimensională; în general, studiul mișcării unidimensionale a gazelor compresibile,

— studiul interacțiunilor dintre unde de rarefiere, unde de șoc, suprafețe libere etc.,

— studiul inelelor de vîrtej care apar la extremitatea unui tub deschis, în urma unei explozii etc.,

— cercetarea dinamică a fenomenelor de condensare a vaporilor de apă prin unde de rarefiere,

— studii pentru ameliorarea motoarelor termice bazate pe propagarea de unde (de ex. pulsoreactoare),

— calibrarea indicatorilor de presiune cu cristale de cuarț etc.,

— obținerea, cu ajutorul undelor de șoc convergente, a presiunilor și temperaturilor foarte mari (circa 20 000 °C),

— folosirea ca tunel aerodinamic pentru viteze subsonice, transonice, supersonice și hipersonice, în regim nepermanent și permanent.

Bazele teoretice ale tubului de șoc

Problema scurgerii într-un tub de șoc a fost pusă și studiată pentru prima oară de Riemann (1849) și-i poartă numele. Vom prezenta aici, fără demonstrații, rezultatele și formulele care guvernează fenomenele într-un asemenea aparat.

Ne referim la notațiile din figura 3 și presupunem că în cele două compartimente ale tubului se găseau inițial, gaze diferite (cu coeficienți adiabatici $\varkappa$ și $\varkappa_1$).

Să considerăm că într-un fluid se deplasează cu viteza V o undă de șoc, și că parametrii curentului de o parte și de alta a undei sînt p', ρ', T', E', u', v' și p'', ρ'', T'', E'', u'', v'', unde u, v sînt componentele vitezei gazului, iar E energia internă. Relațiile lui Hugoniot-Rankine se scriu atunci

$$\rho'(u' - V) = \rho''(u'' - V) = m, \tag{1}$$

(conservarea masei)

$$p'' - p' = m(u' - u''), \tag{2}$$

$$v' = v'',$$

(teorema impulsului)

$$p'' u'' - p' u' = \frac{m}{2}(u'^2 - u''^2) + m(E' - E'') \tag{3}$$

(teorema energiei)

În aceste ecuații m este debitul masic ce traversează unda de șoc.

În tubul de șoc, $u' = 0$, $v' = v'' = 0$, și se cunosc p_0, ρ_0, T_0.

Considerînd gazul perfect, avem

$$\frac{p}{\rho} = RT. \tag{4}$$

Dacă se notează cu ξ raportul

$$\xi = \frac{p_0}{p} \tag{5}$$

și cu c_0 viteza sunetului în mediul neperturbat, se poate deduce relația dintre viteza de propagare a undei de șoc și saltul de presiune:

$$\frac{V^2}{c_0^2} = \frac{1}{2\varkappa}\left[(\varkappa - 1) + \frac{\varkappa + 1}{\xi}\right]. \tag{6}$$

Rezultă apoi

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\varkappa + 1 + \xi(\varkappa - 1)}{(\varkappa + 1)\xi + \varkappa - 1}. \tag{7}$$

Numărul Mach al scurgerii permanente din spatele undei de șoc este

$$M^2 = \left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{2(1 - \xi)^2}{\varkappa[\varkappa - 1 + \xi(\varkappa + 1)]}. \tag{8}$$

Din cele de mai sus se constată următoarele:

— viteza de propagare a undei de șoc este constantă de-a lungul tubului, dacă nu apar reflexii;

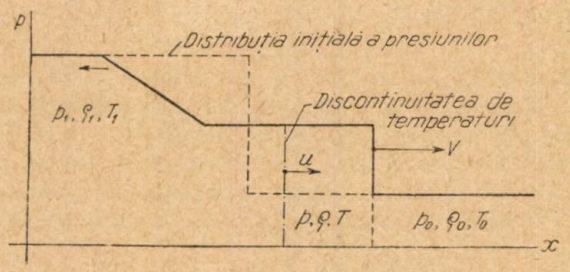


Fig. 3

— în spatele undei se naște o zonă în care viteza de scurgere este constantă. Pe această observație se bazează folosirea tubului de șoc ca suflerie aerodinamică. Parametrii curentului nu se schimbă deeît la trecerea liniei de separație între gazele care erau inițial despărțite prin diafragmă.

În camera de presiune se propagă o undă de rarefiere. Mișcarea fiind izentropică, ea se poate studia cu ajutorul teoriei caracteristicilor pentru scurgeri unidimensionale nepermanente, obținîndu-se următoarele rezultate:

Viteza în spatele undei de rarefiere — care trebuie să fie egală cu u din motive de continuitate — raportată la viteza sunetului în mediul comprimat, este

$$\frac{u}{c_1} = \frac{2}{\varkappa_1 - 1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa_1 - 1}{2\varkappa_1}}\right]. \tag{9}$$

Aici, $\varkappa_1$ este coeficientul adiabatic al mediului comprimat (dacă se utilizează două gaze diferite).

Dacă c_2 este viteza sunetului locală după trecerea undei de rarefiere, atunci

$$c_1 = c_2\left(\frac{p}{p_1}\right)^{-\frac{\varkappa_1 - 1}{2\varkappa_1}} \tag{10}$$

și rezultă, în această zonă

$$M_2 = \frac{u}{c_2} = \frac{2}{\varkappa_1 - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa_1 - 1}{2\varkappa_1}} - 1\right]. \tag{11}$$

Se poate elimina acum u între ecuațiile (8) și (9), găsindu-se o relație între raportul de presiuni ce se realizează inițial pe cele două fețe ale diafragmei, și saltul de presiune în unda de șoc, ξ:

$$\frac{p_0}{p_1} = \xi\left[1 - \frac{c_0(\varkappa_1 - 1)(1 - \xi)}{c_1[2\varkappa\xi((\varkappa - 1)\xi + \varkappa + 1)]^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 - 1}}. \tag{12}$$

Pentru cazul cînd se folosește aer în ambele camere, $c_0 = c_1$ și $\varkappa_1 = \varkappa = \frac{7}{5}$;

în figura 4 s-a reprezentat grafic relația care rezultă

$$\frac{p_0}{p_1} = \xi\left[1 - \frac{1-\xi}{[7\xi(\xi+6)]^{\frac{1}{2}}}\right]^7. \quad (13)$$

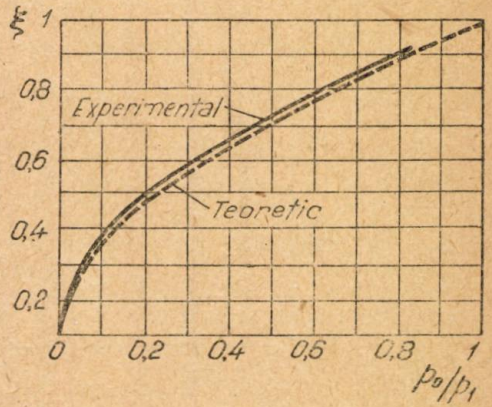


Fig. 4

Din formulele prezentate se poate vedea că, atunci cînd raportul presiunilor în tubul de șoc devine din ce în ce mai mare, numărul Mach în spatele undei de șoc tinde către o valoare limită, care depinde de natura gazului ($\varkappa$). Pentru aer, această limită este circa 1,89; dacă se lucrează cu gaze avînd $\varkappa$ mai mic, ea se poate mări; pentru tetraclorură de carbon se obține $M = 4{,}5$.

Pe de altă parte, în zona dintre suprafața de discontinuitate și spatele undei de rarefiere numărul Mach crește nelimitat cu creșterea raportului de presiuni.

Fenomenele din tubul de șoc capătă o reprezentare grafică foarte sugestivă, dacă se utilizează diagrama $x - t$ (fig. 5). Se constată, din această diagramă că poziția $x = x_1$ pentru care durata scurgerii permanente în spatele undei de șoc, înainte de apariția unei alte perturbații, este maximă, este aceea în care suprafața de discontinuitate este ajunsă de unda de rarefiere reflectată (punctul A în fig. 5).

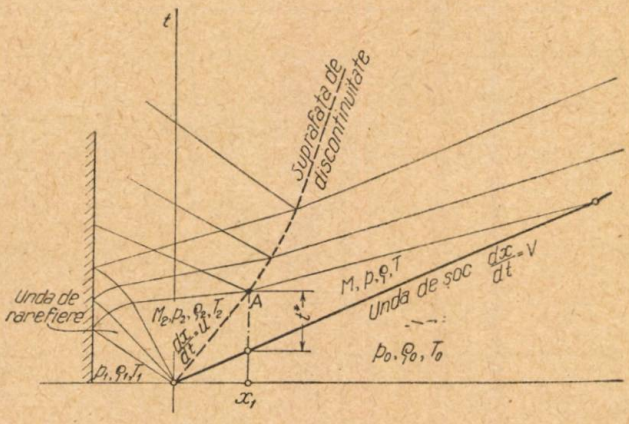


Fig. 5

Se poate calcula, pe baza teoriei mișcărilor unidimensionale, lungimea tubului de șoc necesară pentru a obține un timp de funcționare t^* dat. În mod analog se poate calcula lungimea necesară pentru a avea un timp de funcționare dat, în zona cu viteza M_2.

Aplicarea tubului de şoc la scurgeri hipersonice

A. Hertzberg a arătat că este posibil să se depăşească numărul Mach limită ce se obţine într-un tub de şoc, prin realizarea unei porţiuni evazate, înainte de zona experimentală. Dacă scurgerea este supersonică în spatele undei de şoc,

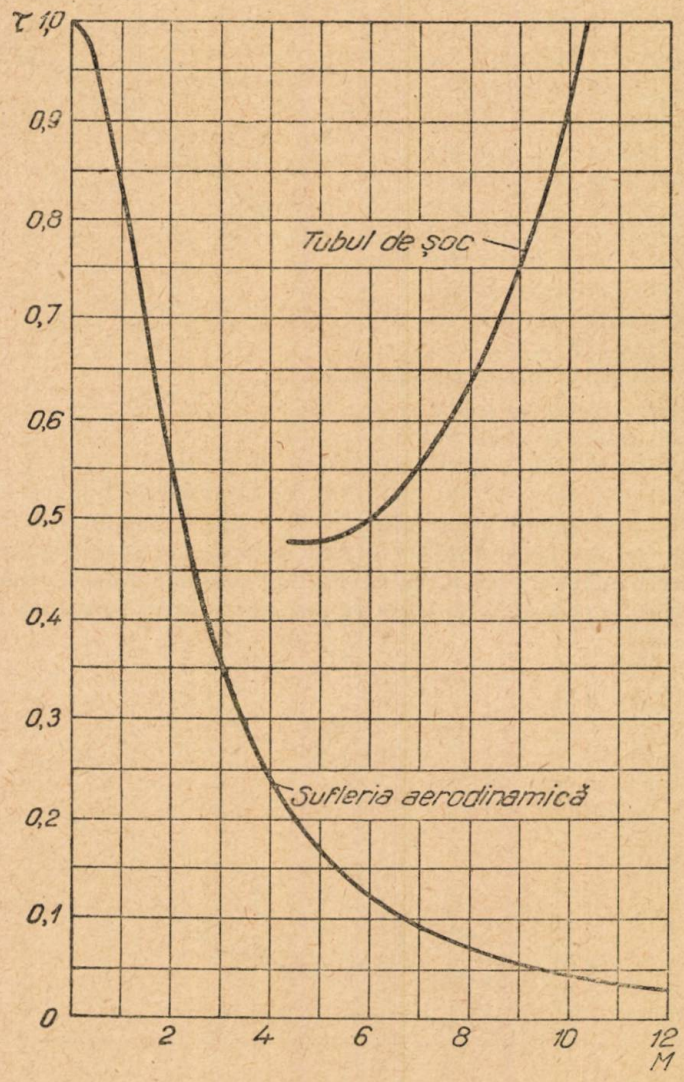


Fig. 6

aceasta, la trecerea prin porţiunea divergentă, dă naştere unor unde de reflexie care se concentrează într-o undă de şoc secundară. După trecerea acestor unde, rămîne o scurgere permanentă, cu un număr Mach determinat de raportul de secţiuni între camera de joasă presiune a tubului de şoc şi camera de experienţă,

precum şi de numărul Mach al scurgerii iniţiale. Se pot realiza viteze foarte mari, de ordinul $M = 20$.

Marele avantaj al acestui mod de generare a scurgerii supersonice, faţă de o suflerie cu funcţionare continuă, rezidă în faptul că aerul este încălzit prin trecerea undei de şoc, înainte de a fi accelerat. De aceea, temperatura scurgerii este apropiată de temperatura de impact, şi nu apar lichefieri ale aerului. Diagrama din figura 6 — după H e r t z b e r g — arată raportul temperaturilor între impact şi scurgerea cu un număr Mach dat, comparînd acest raport obţinut în tubul de şoc şi în sufleria continuă.

Se constată că, pentru $M = 8$, şi temperatura de impact de 300 °K (27 °C), temperatura în tubul de şoc este de 192 °K (— 81 °C), iar în suflerie 21 °K (— 252 °C). De aceea, în tubul de şoc nu mai este necesară preîncălzirea aerului, operaţie dificilă şi chiar imposibilă la numerele Mach mari.

În articolul lui H e r t z b e r g sînt prezentate şi fotografii de scurgeri supersonice obţinute într-un astfel de tub de şoc.

Dispozitivele experimentale şi instrumentaţia tuburilor de şoc

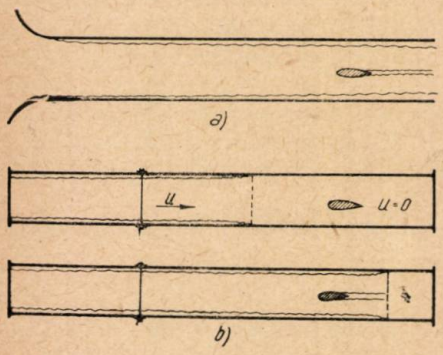
Dezavantajul principal la utilizarea tubului de şoc ca suflerie aerodinamică este durata foarte scurtă (de ordinul milisecundelor) a scurgerii permanente. De aceea sînt necesare dispozitive automate pentru încercări. Vom descrie mai jos unele dintre ele, precum şi celelalte probleme tehnice legate de construcţia şi folosirea unui tub de şoc.

Un tub de şoc, este compus din două camere unite între ele cu flanşe. De cele mai multe ori secţiunea tubului este dreptunghiulară, dar s-au construit şi unele cu secţiune circulară. Dimensiunile utilizate variază mult, de la cîţiva centimetri pînă la 40 cm latura, iar lungimea pînă la 10 m. Pereţii sînt realizaţi din tablă groasă frezată plan — s-a constatat că nu este necesară rectificarea. Pentru varierea lungimii camerei de compresie şi a celei de vid, tubul este constituit din mai multe porţiuni, de diverse lungimi.

Cele două camere sînt separate printr-o diafragmă de acetat de celuloză (celofan), avînd o grosime suficientă pentru a rezista presiunii, însă în apropiere de ruperea spontană. La momentul dorit, diafragma este înţepată de un ac comandat electric şi se sparge; urmează apoi fenomenul unidimensional care trebuie studiat.

La o distanţă convenabilă, se află zona de experienţe, prevăzută cu ferestre de observaţie. Pentru vizualizarea fenomenului este necesară o sursă de lumină — o scînteie — declanşată la momentul potrivit. Mai trebuie în plus să se poată varia timpul ce se scurge între amorsarea tubului şi fotografiere, pentru a se putea prinde unda de şoc şi fenomenul ulterior în diferite poziţii de-a lungul tubului. În acest scop s-au realizat relee electronice cu întîrziere. Însă un dispozitiv simplu şi eficace este următorul: în apropierea diafragmei, un orificiu practicat în peretele tubului de şoc conduce la o ţeavă metalică prevăzută cu o culisă — astfel încît se realizează un tub de lungime variabilă. Acest tub (de circa 1 cm diametru) este închis la capăt cu o membrană metalică, ce joacă rol de contact electric. Cînd se amorsează tubul de şoc, trecerea undei prin dreptul orificiului dă naştere unei unde de presiune ce se propagă în tubul auxiliar cu o viteză puţin mai mare decît aceea a sunetului şi declanşează scînteia la momentul dorit prin închiderea contactului electric de la capătul tubului. Declanşarea scînteii se face prin intermediul unui thyratron. Variaţia lungimii tubului cu culisă permite comanda momentului aprinderii cu multă precizie.

Măsurarea vitezei de propagare a undei de şoc s-a realizat cu ajutorul unei *bariere optice*, formată din două raze de lumină în montaj Schlieren, care comandă două celule fotoelectrice. Trecerea undei de şoc deviază lumina, ceea ce este înregistrat de celulele fotoelectrice; semnalele sînt introduse într-un cronometru electronic format dintr-un generator de impulsiuni şi un oscilograf catodic. Cunoaşterea numărului de impulsiuni înregistrate între cele două semnale produse de trecerea undei de şoc, împreună cu distanţa dintre cele două sisteme optice, permite aflarea vitezei de propagare a undei. Însă este mult mai simplu (şi tot atît de precis) să se lipească pe unul din pereţii tubului de şoc, o bandă de pînză gumată; perturbaţia produsă dă naştere unei linii Mach, a cărei înclinare — ce se poate măsura pe o fotografie — măsoară viteza curentului.



Fi . 7 *a)* Scurgerea într-o suflerie
b) Scurgere într-un tub de şoc.

Instalaţiile de vizualizare utilizate sînt fie de tipul Schlieren, fie interferometre Mach-Zender. Fotografiile reproduse în articolele publicate arată că se pot obţine unde de şoc cu o planeitate perfectă, şi că se pot efectua încercări aerodinamice în cele mai bune condiţii. Este demn de remarcat în această privinţă, încă un avantaj al tubului de şoc, şi anume lipsa unui strat limită dezvoltat, cu energia mult degradată, pe pereţi; acest lucru se datoreşte faptului că aerul nu începe să se deplaseze prin secţiunea care interesează decît în momentul trecerii undei de şoc (fig. 7).

CONCLUZII

Din cele expuse mai sus, se constată că, printre instrumentele de cercetare din dinamica gazelor, tubul de şoc şi-a cîştigat un rol meritat atît prin posibilităţile sale, cît şi prin uşurinţa de realizare practică.

Pentru studierea scurgerilor la numere Mach foarte mari (6...20), care încep astăzi să intereseze aviaţia şi mai ales astronautica, tubul de şoc tinde să capete exclusivitatea.

Interesul crescînd al cercurilor tehnice şi ştiinţifice se concretizează într-o abundentă bibliografie, din care se dă mai jos o parte.

Primită la redacţie la 22 iulie 1955,

УДАРНАЯ ТРУБА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе описывается ударная труба как прибор для исследования в области динамики газов и в других областях.

После описания явлений, происходящих в этой трубе, приводятся основные теоретические результаты, рассматривается применение этого прибора при сверхзвуковых течениях, описываются опытные приспособления, а также обсуждаются технические вопросы, связанные с использованием ударных труб.

LE TUBE À CHOCS ET SES APPLICATIONS

(RÉSUMÉ)

On présente dans cette étude le tube à chocs comme instrument de recherche dans la dynamique des gaz et dans d'autres domaines.

Après avoir décrit les phénomènes qui ont lieu dans le tube à chocs et présenté les résultats théoriques essentiels, on étudie son application aux écoulements hypersoniques et l'on présente les divers dispositifs expérimentaux ainsi que les problèmes techniques rattachés à l'utilisation des tubes à chocs.

BIBLIOGRAFIE

1. Bleakney, Fletcher a. Weimer, *The Shock Tube: a Facility for Investigations in Fluid Dynamics*. Rev. Sci. Instr., New York, noiembrie 1949.
2. R. Courant a. K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience Publishers, New York, 1948.
3. Elder a. de Haas, *Experimental Study of the Formation of Vortex Rings at the Open End of a Cylindrical Shock Tube*. Journ. Appl. Phys., octombrie 1952.
4. R. Graindorge, *Utilisation d'une « barrière optique » pour la mesure de la vitesse de propagation d'une onde de choc dans un tube à chocs*. La Recherche Aéronautique, Paris, 1954, nr. 41.
5. A. Hertzberg, *A Shock Tube Method of Generating Hypersonic Flows*. J.A.S., 1951, nr. 12.
6. A. Hertzberg a. A. Kantrowitz, *Studies With an Aerodynamically Instrumented Shock Tube*. Journ. Appl. Phys., New York, 1950, nr. 9.
7. W. Paymann a. W. C. F. Shepherd, *Explosion Waves and Shock Waves. The Disturbances Produced by Bursting Diaphragms With Compressed Air*. Proc. Roy. Soc. London, A. 186, 1946.
8. Resler, Lin i Kantrowitz, *Polucenie gazov visokoi temperaturi v udarnih trubah*. Mehanika, Moscova, 1952, nr. 5 (21).

RECENZII

E. CARAFOLI și T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1955, vol. I și II, 686 pag.

De curînd a apărut în Editura Academiei R.P.R. volumul al doilea al lucrării *Mecanica fluidelor* de acad. E. Carafoli și T. Oroveanu.

În primele două volume apărute sînt tratate problemele mecanicii fluidelor perfecte incompresibile.

Astfel, în primul volum, după un scurt istoric al dezvoltării mecanicii fluidelor, sînt redate succint formulele fundamentale ale calculului vectorial, necesare în decursul dezvoltării ulterioare după care, în capitolele următoare, sînt expuse: ecuațiile fundamentale ale mișcării fluidelor perfecte, hidroaerostatica cu cele mai importante aplicații în problemele navigației aeriene și maritime, teoremele principale ale hidrodinamicii, noțiuni din teoria vîrtejurilor. În ultimele două capitole este studiată detaliat mișcarea irotațională în spațiu cu aplicații la mișcarea corpurilor de revoluție.

În volumul al doilea este studiată mișcarea plană a fluidelor perfecte incompresibile. Sînt expuse cele mai importante aplicații: mișcarea într-un rezervor paralelipipedic cu orificiu de scurgere, scurgerea în jurul rețelelor, teoria profilelor aerodinamice, teoria aripilor de anvergură finită, mișcarea de rotație aplicată la teoria roților hidraulice etc. De asemenea este cuprinsă și teoria suprafețelor de discontinuitate și a vinelor cu suprafață liberă, precum și explicația rezistenței la înaintare prin vîrtejurile alternate. În ultimul capitol sînt prezentate elementele principale din teoria valurilor plane și tridimensionale.

Ansamblul lucrării este armonios conceput și tratat, reușind să prindă toate aspectele importante ale mecanicii fluidelor, legate de tematica celor două volume. Din acest punct de vedere autorii au meritul deosebit de a pune la îndemîna cititorilor o prezentare completă nu numai prin modul de tratare al subiectelor, dar și prin înmănuncherea tuturor problemelor din diferitele domenii ale acestei discipline într-un studiu clar, concis și de un nivel științific ridicat. Astfel, cele două volume constituie o lucrare de bază pentru acei care urmăresc asemenea probleme și fac în multe cazuri aproape inutilă consultarea altor cărți. Din acest punct de vedere se aduce un ajutor prețios cercetătorilor și tuturor celor ce studiază mecanica fluidelor, cărora li se pune în față o imagine cuprinzătoare, totuși lipsită de balastul unor studii de detaliu fără aplicații practice.

Este necesar să se remarce apoi că volumul al doilea, ca și primul, conține demonstrații noi, în multe cazuri mai simple sau mai generale, pentru o serie de rezultate cunoscute. Astfel sînt capitolele referitoare la echilibrul hidrostatic și la echilibrul relativ sau utilizarea variabilei complexe în studiul mișcărilor axial simetrice (vol. I); de asemenea, prezentarea capitolelor referitoare la rețele, roți hidraulice și valuri (vol. II).

În alte capitole se relevă contribuția autorilor prin prezentarea de soluții și rezultate noi. Aceste capitole, de importanță practică mare, constituie un element deosebit de valoros al lucrării. Se citează în acest sens: teoria profilelor aerodinamice, teoria aripilor de anvergură finită, studiul aripilor monoplane cu contur dat, rotația unui contur în jurul unui punct (vol. II) sau studiul coeficienților de contracție (vol. I).

Apare astfel pentru întreaga lucrare o accentuată notă de originalitate care se adaugă la elementele pozitive ce au fost subliniate. Dozarea materialului în diferitele capitole este corectă, cu rare excepții: astfel ar fi fost util ca în capitolul tratînd despre rețele, să se examineze pe lîngă acelea formate din plăci plane și rețelele de profile, a căror teorie a fost pusă la punct în ultimul timp și care sînt de o mare importanță pentru studiul grătarelor și al turbomașinilor.

Mecanica fluidelor de acad. E. Carafoli și T. Oroveanu poate fi utilizată cu un deosebit folos de cercetători științifici, ingineri, matematicieni sau studenți ai institutelor de învățămînt superior. Ea constituie astfel o lucrare de o remarcabilă valoare științifică și practică în ansamblul literaturii științifice de specialitate.

N. Tipei

V. S. POLIAKOV, V. I. KUDRIAVȚEV, M. P. ZUBANOV, A. S. ANOSOV, I. D. BARBAȘ, V. D. MIAGKOV, *Detali mașin* (Organe de mașini). Mașghiz, Moscova, 1954, 720 pag.

Lucrarea colectivului de autori de sub redacția lui P. I. Kolcin *Detali mașin* (Organe de mașini), unește o serie de date privitoare la calculul diferitelor piese, indicînd soluții constructive, precum și rezultate ale cercetătorilor asupra diferitelor organe de mașini.

În prima parte a lucrării, autorii se preocupă de principiile de bază ale construcției mașinilor moderne, mașini care trebuie să facă față anumitor cerințe: viteze mari, durată de viață mare, utilizarea rațională a materialelor de construcție, precizie în execuție etc.

Deoarece o problemă importantă în construcția diferitelor organe de mașini o constituie materialele de construcție, chiar de la începutul lucrării, autorii se preocupă pe larg de indicarea diferitelor materiale cu caracteristicele lor fizico-mecanice. Sînt indicate tabelele oțelurilor după GOST, dîndu-se compozițiile chimice, rezistențele și alungirile pentru diferite tipuri de oțeluri.

În vederea efectuării unui calcul rațional a diferitelor organe de mașini, se dau în lucrare cîteva noțiuni privind teoria elasticității, condițiile de rupere ale materialelor în diferitele ipoteze ale teoriilor de rupere, problema solicitărilor variabile la care foarte adesea sînt supuse organele de mașini, precum și problema efectelor de crestături, indicîndu-se și curbe pentru diferite cazuri.

Un capitol important, peste care adesea lucrările de organe de mașini trec fără a-l trata, este capitolul preciziei și toleranțelor în prelucrare. Este adevărat că după mulți autori acest capitol intră în competența lucrărilor de tehnologie mecanică și tocmai pentru acest motiv el se întîmplă să nu fie tratat nici în cursurile de organe de mașini, dar nici în cursurile de tehnologia mecanică. De aceea publicarea unui asemenea capitol într-o lucrare de organe de mașini este binevenită. Proiectantul găsește în această lucrare modul de calcul al toleranțelor, expus clar pentru diferite cazuri.

Partea a doua a cărții tratează problema elementelor de îmbinare. Pentru început se tratează diferitele categorii de pene, dîndu-se numeroase soluții constructive, precum și metoda de prelucrare a canalelor de pană. Se cercetează problema solicitărilor care se nasc datorită șanțurilor de pană. Apoi autorii tratează problema îmbinărilor prin șuruburi, indicînd criterii pentru alegerea unghiurilor de filet. Nu este neglijat aspectul constructiv al șuruburilor și piulițelor, indicîndu-se și calculele șuruburilor, ținîndu-se seama de efectele de elasticitate care apar în șurub, datorită forțelor de prestrîngere și din exploatare. Cazurile montajelor defectuoase ale șuruburilor, cu urmările pe care le au în ceea ce privește solicitările din ele, sînt tratate amănunțit. Un capitol important al celei de a doua părți a cărții îl formează îmbinările prin nituire și sudură. Trebuie de menționat că și în acest caz, autorii s-au preocupat de redarea completă a îmbinărilor prin nituire cît și a diferitelor posibilități de îmbinări prin sudură. La îmbinările prin sudură autorii indică avantajele și dezavantajele diferitelor moduri de sudură, dînd recomandații.

O atenție deosebită o acordă autorii calculului și construcției axelor, precum și diferitelor feluri de lagăre. Se dezvoltă în lucrare teoria lui I. P. Petrov, cu privire la ungerea hidrodinamică, analizîndu-se condițiile de funcționare a lagărelor din punctul de vedere al acestei teorii, indicîndu-se relații uzuale pentru calculul grosimii minime a peliculei de ulei, a coeficientului de frecare, a cantității de căldură ce rezultă ca urmare a funcționării la o anumită viteză și sub o anumită solicitare a lagărului; în lumina acestei teorii se dau exemple practice de calcul a unor lagăre și numeroase soluții constructive. Lagărele cu rulmenți fac obiectul unui alt capitol din lucrare, indicîndu-se, ca și în cazul precedent, metode de calcul, soluțiile constructive pentru diferite tipuri și situații de montaj a lagărelor cu rulmenți.

Capitolele următoare tratează problemele ambreiajelor și cuplajelor. Metodele de calcul, expuse sînt clare și ușor accesibile oricui. Se indică numeroase soluții constructive de ambreiaje și cuplaje.

Ultima parte a cărții tratează elementele de transmisii prin: fricțiune, cu curele și roți dințate. Sînt prezentate metodele moderne de calcul a roților de fricțiune cît și a roților cu curele. De asemenea capitolul roți dințate este foarte larg tratat. Se insistă puțin în lucrare asupra particularităților diferitelor categorii de roți dințate; sînt date relațiile necesare în

special proiectării. În această parte a cărții se indică ca de altfel și în restul ei, numeroase soluții constructive pentru transmisiile prin roțile cu fricțiune, roțile dințate, transmisiile cu curele și lanț, metodele tehnologice de prelucrare a diferitelor categorii de roți, materiale utilizabile.

Privită în ansamblu lucrarea *Detali mașin* constituie un documentar prețios atît pentru constructorii de mașini cît și pentru cei care se preocupă de cercetarea diferitelor organe de mașini.

A. Lezer

MIHAIL D. HANGAN, *Betonul armat. Introducere în alcătuirea și calculul structurilor statice.* E.S.A.C., București, 1955, vol. 1, 384 pag., 324 fig.

Lucrări de sinteză, în domeniul științei aplicate, sînt rare în ceea ce privește o concepție proprie: ele presupun o personalitate cu multă practică și experiență didactică, care să poată reliefa problemele mai importante ale tehnicii, orientîndu-le către o soluționare justă și în același timp să le prezinte sugestiv cititorului, pentru a-l face să intuiască miezul fizic al problemei puse.

Prof. Mihail Hangan a reușit să întocmească o carte originală prin aceea că, părăsindu-se linia consacrată a tratatelor lui Morsch sau Saliger, problemele tehnicii betonului armat se prezintă oarecum la importanța cu care ele intervin la noi; în plus, aproape fiecare paragraf este însoțit de observații prețioase pentru orientarea în cîmpul atît de vast al construcțiilor de beton armat.

Cartea cuprinde: o privire generală asupra alcătuirii și utilizării betonului armat, ocupîndu-se apoi de materiale în general, elementele de construcție ale structurilor de beton armat, alcătuirea și clasificarea grinzilor, grinzi static nedeterminate, încastrări și momente de inerție variabile, grinzi continue, rigiditatea reazemelor grinzilor continue, torsiunea în elemente de planșee, grinzi curbe, grinzi cu zăbrele, grinzi pereți, plăci, planșee, construcții în cadre.

Trebuie subliniată frumoasa sinteză din introducere în care, în numai 18 pagini, se dau definițiile, arătîndu-se pe scurt avantajele și dezavantajele precum și căile de dezvoltare ale betonului simplu, betonului armat și precomprimat.

Capitolul *materiale* este foarte util pentru că rezumă prevederile STAS-urilor în vigoare, privind materialele care intră în alcătuirea betonului armat (ar fi trebuit adăugate și prevederile STAS 1 500—50 și R 3 011—52).

Partea de calcul a secțiunilor este de asemenea concis prezentată; aici după părerea noastră, eleganța expunerii a depășit uneori utilul, astfel: asigurarea grinzilor la eforturi principale este atît de succint prezentată, încît aproape nu poate servi pentru aplicații, formulele de la compresiune excentrică cer preciziuni suplimentare; nu s-a indicat nimic în privința dimensionării la torsiune și la solicitări compuse, cînd planul încărcării nu coincide cu una din axele principale ale secțiunii.

Capitolele următoare, privind statica elementelor de beton armat, sînt în schimb suficient dezvoltate, încît pentru un proiectant cu vechime sau un începător, problemele expuse clar și completate cu numeroase tabele pot servi în aplicații.

Această parte cuprinde numeroase probleme complet noi în literatura noastră tehnică, de exemplu: *Alcătuirea și clasificarea cadrelor și calculul structurilor în domeniul plastic.*

Mircea Mihailescu

RECTIFICARE

La articolul *Analogiile electrice ale vibrațiilor mecanice* de E. Procopovici și C. Tanasiciuc, apărut în numărul precedent al revistei, s-au strecurat unele erori, pe care le corectăm, și anume:

pag.	rîndul	în loc de:	se va citi:
475	13	sisteme cu circuite	sisteme de circuite
482	16 de jos	modelul unei bare	modelarea unei bare
483	9—10 de jos	basculele cuadripolului	bornele cuadripolului
487	1	conectat pentru capacitate	conectat printr-o capacitate
488	1	voltmetru electronic (v)	voltmetru electronic (V)
489	1	circuit rezonabil	circuit rezonant
489	14 de jos	диполях и квадриполях	двуполюсниках и четырехполюсниках

De asemenea, articolul *Studiul stării de eforturi în plăcile curbe subțiri în formă de suprafețe cu două parabole directoare și plan director, în teoria de membrană* de M. Soare din același număr a apărut cu o serie de greșeli pe care le corectăm mai jos:

pag.	rîndul	în loc de:	se va citi:
526	9 de jos	$\lim_{y \to 0} \ldots$	$\lim_{y \to \infty} \ldots$
529	3	$\ldots = \dfrac{\ldots + 192y^3 \ldots}{\ldots}$	$\ldots = \dfrac{\ldots + 192y^2 \ldots}{\ldots}$
530	1	$x = l = 9$ m	$x = l = 12$ m
531	anexa nr. 1	$k_{2g} = 0{,}0224$	$k_{2g} = 0{,}0260$
532	anexa nr. 2	$z = \ldots$	$Z = \ldots$

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL VII

APRILIE — IUNIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician E. CARAFOLI – redactor responsabil; Academician N. PROFIRI; A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.; C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. Bărglăzan, membru corespondent al Academiei R.P.R.; R. Bogdan; N. Tipei; M. Arcan.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

A DUPLUMCSERE-AKCIÓ
KERETÉBEN ÁTENGEDTE
A MTA; KÖZP. KÖNYVTÁRA

2

ANUL VII

APRILIE — IUNIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene, etc.).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor).

— Metrologie (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice, precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă şi franceză. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză, germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, Str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VII, nr. 2 Aprilie-iunie 1956

SUMAR

AEROMECANICĂ Pag.

E. CARAFOLI şi BEATRICE HOROVITZ, Asupra aripii unghiulare avînd discuri axiale cu incidenţa antisimetrică 307

V. N. CONSTANTINESCU, Asupra extinderii problemei Tsien-Scurlock la mişcări axial-simetrice 323

LUCIAN DUMITRESCU, Calculul lungimii elementelor componente ale unui tub de şoc pentru o durată de funcţionare dată 337

HIDRODINAMICĂ

D. CODREANU şi N. CRISTEA, O nouă metodă de prevedere a comportării zăcămintelor de ţiţei cu împingere parţială de apă 355

I. VLADIMIRESCU, Un caz particular de mişcare ascensională a pînzei freatice 375

T. OROVEANU şi H. PASCAL, Scurgerea staţionară plan-radială a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros 387

TEORIA MECANISMELOR

E. BUGAIEVSKI, R. BOGDAN, D. PAVELESCU, C. PELECUDI şi A. LEZER, Consideraţii asupra posibilităţilor de mărire a vitezei de lucru la maşinile circulare automate de tricotat 393

REZISTENŢA MATERIALELOR – ELASTICITATE

A. PÂRVU, Problema plană a elasticităţii pentru o coroană circulară în cazul celei de-a doua probleme fundamentale la limită 415

MIRCEA MIHAILESCU, Teoria de încovoiere la paraboloizii hiperbolici.... 421

VIOREL VISARION, Învelitori subţiri în formă de paraboloid hiperbolic..... 443

V. MARCU, N. ZELINGHER şi P. FREUND, Studii asupra unor caracteristici ale straturilor obţinute prin electrometalizare 465

EDUARD NICOLAU, Contribuţii la utilizarea analogiei cu membrană în cercetarea tensiunilor la torsiune 485

UNGERE – FRECARE – UZURĂ Pag.

GH. VASILCA, Asupra utilității caracteristicii $p = f(V)$ la lagărele circulare de alunecare 499

VIBRAȚII

AUGUSTIN PETRE, Aplicarea analogiilor electrice la studiul vibrațiilor mediilor elastice 505

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

M. WEISSENBERG și S. CIUNGU, Variația aderenței dintre beton și armătură în funcție de lungimea de ancoraj 527

I. DUMITRESCU, Considerații asupra calculului grinzilor continue din beton precomprimat 545

TEHNICA PRELUCRĂRII MATERIALELOR

M. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU, Studiul presiunilor specifice pe suprafața de contact în procesul de laminare 557

RECENZII 569

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— *Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

— *Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра и пр.).*

— *Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей).*

— *Метрологию (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).*

— *Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).*

— *Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения ценных работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, написанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском, русском и французском языках. Резюме должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VII, № 2 Апрель — июнь 1956

СОДЕРЖАНИЕ

АЭРОМЕХАНИКА Стр.

Е. КАРАФОЛИ и Б. ХОРОВИЦ, Об угловом крыле с осевыми дисками с противосимметрическим наклоном 307

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О распространении задачи Циена — Скурлока на аксиально-симметричные движения 323

Л. ДУМИТРЕСКУ, Расчет длины составных элементов ударной трубы для заданного времени действия 337

ГИДРОМЕХАНИКА

Д. КОДРЯНУ и Н. КРИСТЯ, Новый метод прогноза поведения нефтяных месторождений с неполным водонапорным режимом 357

И. ВЛАДИМИРЕСКУ, Частный случай восходящего движения уровня грунтовых вод 375

Т.ОРОВЯНУ и Х. ПАСКАЛ, Стационарное плоско-радиальное протекание смеси жидкости и газа сквозь пористую среду 387

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Е. БУГАЕВСКИ, Р. БОГДАН, Д. ПАВЕЛЕСКУ, К. ПЕЛЕКУДИ и А. ЛЕЗЕР, О возможности увеличения рабочей скорости для автоматических круговязальных машин 393

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

А. ПЫРВУ, Плоская задача упругости для круглого кольца в случае второй основной краевой задачи 415

М. МИХАЙЛЕСКУ, Теория изгиба гиперболических параболоидов 421

В. ВИСАРИОН, Тонкие оболочки в виде гиперболического параболоида .. 443

В. МАРКУ, Н. ЗЕЛИНГЕР и П. ФРЕЙНД, О некоторых характеристиках покрытий, полученных методом металлизации. 465

Э. НИКОЛАУ, К вопросу использования аналогии с мембраной при исследовании напряжений при кручении 485

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС Стр.

Г. ВАСИЛКА, О полезности характеристики $p = f(V)$ для кольцевых подшипников скольжения 499

ВИБРАЦИИ

А. ПЕТРЕ, Применение элекрических аналогий к исследованию вибраций упругих сред 505

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. ВЕЙССЕНБЕРГ и С. ЧУНГУ, Изменение сцепления бетона с арматурой в зависимости от длины анкеровки 527

И. ДУМИТРЕСКУ, К расчету неразрезных балок из предварительно напряженного бетона 545

ТЕХНИКА ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧИУ, Исследование удельных давлений на поверхности соприкосновения в процессе прокатки 557

РЕЦЕНЗИИ 569

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.,
ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE,
comprend des études de mécanique appliquée, notamment:

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne, etc.).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces).

— Métrologie (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation de l'ultrason et des isotopes radio-actifs dans la technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique du sol, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VII, n° 2 Avril-juin 1956

SOMMAIRE

AÉROMÉCANIQUE Page

E. CARAFOLI et BEATRICE HOROVITZ, Sur l'aile angulaire aux disques axiaux à incidence antisymétrique 307

V. N. CONSTANTINESCU, Sur l'extension du problème de Tsien-Scurlock aux mouvements axial-symétriques 323

LUCIAN DUMITRESCU, Calcul de la longueur des éléments composants d'un tube de choc pour une durée de fonctionnement donnée 337

HYDROMÉCANIQUE

D. CODREANU et N. CRISTEA, Une nouvelle méthode d'étude du comportement des gisements de pétrole en régime hydraulique partiel..... 357

I. VLADIMIRESCU, Un cas particulier de mouvement ascensionnnel de la nappe phréatique 375

T. OROVEANU et H. PASCAL, L'écoulement stationnaire plan-radial d'un mélange de liquide et de gaz à travers un milieu poreux 387

THÉORIE DES MÉCANISMES

E. BUGAIEVSKI, R. BOGDAN, D. PAVELESCU, C. PELECUDI et A. LEZER, Considérations sur les possibilités d'accroître la vitesse de travail des machines circulaires automatiques à tricoter 393

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX – ÉLASTICITÉ

A. PÎRVU, Le problème plan de l'élasticité pour une couronne circulaire dans le cas du deuxième problème fondamental à la limite..... 415

MIRCEA MIHAILESCU, La théorie de la flexion appliquée aux paraboloïdes hyperboliques 421

VIOREL VISARION, Couvertures minces en forme de paraboloïde hyperbolique 443

V. MARCU, N. ZELINGHER et P. FREUND, Études de certaines caractéristiques des couches obtenues par l'électrométallisation..... 465

Page

EDUARD NICOLAU, Contribution à l'application de l'analogie à membrane à l'étude des tensions à la torsion 485

LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE

GH. VASILCA, Sur l'utilité de la caractéristique $p = f(V)$ pour les paliers circulaires de glissement 499

VIBRATIONS

AUGUSTIN PETRE, Application des analogies électriques à l'étude des vibrations des milieux élastiques 505

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

M. WEISSENBERG et S. CIUNGU, Variation de l'adhérence du béton à l'armature en fonction de la longueur d'ancrage 527

I. DUMITRESCU, Considérations sur le calcul des poutres continues en béton précontraint 545

TECHNIQUE DE L'USINAGE DES MATÉRIAUX

M. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Étude des pressions spécifiques sur la surface de contact au cours du processus de laminage 557

COMPTES RENDUS 569

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

AEROMECANICĂ

ASUPRA ARIPII UNGHIULARE AVÎND DISCURI AXIALE CU INCIDENŢĂ ANTISIMETRICĂ

DE

E. CARAFOLI şi BEATRICE HOROVITZ

În lucrările noastre anterioare [1] și [2] ne-am ocupat de scurgerea în jurul aripilor unghiulare conice, prevăzute cu disc axial sau marginal, acesta din urmă avînd incidență constantă pe toată înălțimea.

Sistemul aripă-disc a fost considerat în diferite situații față de conul Mach, și anume: aripa avînd bordurile de atac subsonice, aripa cu un bord de atac subsonic și celălalt supersonic și aripa cu ambele borduri de atac supersonice; în ceea ce privește discul, s-a considerat în toate cazurile că bordurile de atac sînt subsonice. Incidența sistemului aripă-disc a fost presupusă variabilă pe aripă și constantă pe disc. În cele ce urmează vom studia influența distribuției antisimetrice a incidenței pe disc asupra scurgerii în jurul sistemului aripă-disc, după care vom da cîteva aplicații practice ale rezultatelor obținute.

Problema constă, ca și în lucrările anterioare, în determinarea componentei axiale u a vitezei de perturbație, din care se deduce apoi coeficientul de presiune.

După cum se știe din teoria mișcărilor conice, se utilizează transformarea geometrică a lui Busemann

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}),$$

unde r este raza vectoare în planul perpendicular pe axa conului Mach la distanța 1 de vîrful acestuia, iar ρ raza vectoare într-un plan auxiliar obținut prin transformarea de mai sus, considerînd că argumentele punctelor corespunzătoare sînt egale.

În acest nou plan, problema revine la determinarea funcției olomorfe $f = u + iu'$, a cărei parte reală reprezintă tocmai componenta u a vitezei de perturbație.

Pentru a găsi expresia funcției $u + iu'$ se aplică unele transformări conforme, după care se utilizează metoda analogiei hidrodinamice, expusă într-o lucrare anterioară [3].

În continuare, pentru determinarea constantelor ce intervin în expresia funcției $f = u + iu'$, se ține seama de condițiile la limită ale problemei, utilizînd

relaţiile de compatibilitate cunoscute din studiul mişcărilor conice, relaţii între componentele u, v, w ale vitezei de perturbaţie

$$d(v + iv') = -\frac{B}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) d(u + iu'),$$
$$d(w + iw') = \frac{iB}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) d(u + iu'). \tag{1}$$

Considerînd acum că discul are o incidenţă constantă oarecare γ_1 spre extrados şi γ_2 spre intrados, putem studia separat atît în cazul aripii subţiri, cît şi în cazul aripii groase simetrice, efectul incidenţei antisimetrice, $+\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$ spre extrados şi $-\gamma = -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$ spre intrados şi efectul incidenţei constante $\gamma' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ pe tot discul, efect studiat anterior.

Aripa subţire. Să considerăm cazul cînd discul are incidenţa $+\gamma$ spre extrados şi $-\gamma$ spre intrados; funcţia $f = u + iu'$ îşi păstrează expresia găsită anterior, în cazul $\gamma = 0$, însă constantele capătă alte valori. Pentru a determina aceste constante, condiţia $v = 0$ pe tot discul se înlocuieşte cu $v = -\gamma U_\infty$ pe disc spre extrados, obţinîndu-se următoarea relaţie

$$\gamma U_\infty = -\frac{B}{2} Re \int_{\text{disc}}^{\text{cercul } M} \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) d(u + iu'). \tag{2}$$

Se poate arăta uşor acum că pe disc spre intrados este satisfăcută în mod automat condiţia $v = +\gamma U_\infty$. Astfel, observînd că expresiile $f = u + iu'$ determinate anterior [1] şi [2] satisfac egalitatea

$$f(\chi) = -\overline{f(\chi)}, \tag{3}$$

aplicînd relaţia de compatibilitate dintre componentele u şi v (1) sub forma

$$dv = -\frac{B}{2}\left[\left(\eta + \frac{\eta}{\eta^2 + \zeta^2}\right) du - \left(\zeta - \frac{\zeta}{\eta^2 + \zeta^2}\right) du'\right], \tag{4}$$

rezultă

$$dv(\eta, \zeta) = -dv(\eta, -\zeta); \tag{5}$$

de aici, ţinînd seama şi de faptul că $v = 0$ pe cercul Mach, obţinem

$$v(\eta, \zeta) = -v(\eta, -\zeta). \tag{6}$$

Aripa de grosime simetrică. Presupunînd că discul are incidenţa $+\gamma$ spre extrados şi incidenţa $-\gamma$ spre intrados, se adaugă expresiilor $f(\chi)$, găsite în lucrările anterioare pentru $\gamma = 0$, un potenţial aditiv f_1, care reprezintă tocmai influenţa acestei incidenţe antisimetrice a discului. Acest potenţial f_1 este obţinut luînd în consideraţie o aripă subţire de incidenţă nulă, avînd aceeaşi urmă ca şi aripa groasă considerată, iar discul avînd incidenţa antisimetrică.

Într-adevăr totul se petrece ca și cum aripa groasă simetrică s-ar reduce la urma sa, iar mișcarea cauzată de discul antisimetric înconjură vîrfurile corespunzătoare bordurilor de atac subsonice sau se comportă ca la aripa subțire cu bordurile supersonice. Soluțiile se pot deduce din rezultatele obținute în cazurile similare studiate anterior.

Aplicație la aripa dreptunghiulară prevăzută cu discuri marginale

Vom considera o aripă plană dreptunghiulară (fig. 1) de anvergură $2b$ și de profunzime egală cu unitatea, prevăzută cu discuri marginale avînd aceeași

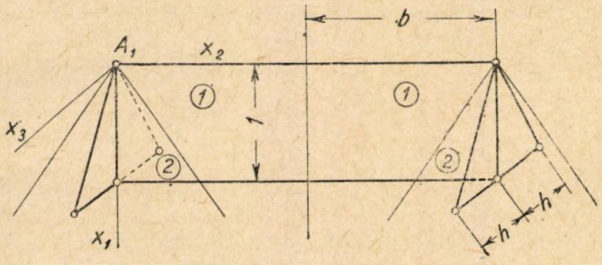


Fig. 1

profunzime și de înălțime $2h$. Fie α incidența aripii și γ incidența discului spre extrados și $-\gamma$ spre intrados.

Pentru a determina portanța, rezistența și momentele sistemului aripă-discuri, trebuie să cunoaștem componenta axială u a vitezei de perturbație. Pe aripă, în afara conurilor Mach care au vîrfurile în A_1 și B_1 (regiunea 1), scurgerea este plană și viteza u are următoarea expresie

$$u_1 = \frac{\alpha U_\infty}{B}. \qquad (7)$$

În interiorul conurilor Mach (regiunea 2), scurgerea este conică.

În sistemul de axe $A_1\, x_1\, x_2\, x_3$, în planul $x_1 = 1$ raportat la sistemul de axe Oyz avem configurația din figura 2.

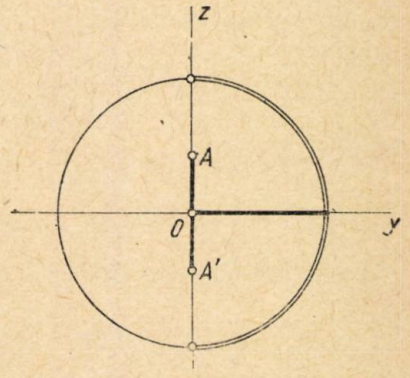


Fig. 2

Ținînd seama de cele expuse în lucrările amintite mai sus, după efectuarea transformării lui Busemann și a transformărilor conforme,

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2},\quad X^2 = x^2 + h_1^2,\quad X = \frac{h_1 + 1/B_1}{4}\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) - \frac{h_1 - 1/B_1}{2}, \qquad (8)$$

unde

$$h_1^2 = \frac{h^2}{1 - B^2 h^2},\quad \frac{1}{B_1^2} = \frac{1}{B^2(1 - B^2 h^2)}, \qquad (9)$$

putem scrie în planul χ expresia potenţialului f, şi anume

$$u + iu' = f(\chi) = i\frac{\alpha U_\infty}{\pi B}\ln\chi + iM\left(\frac{e^{i\theta_A}}{\chi - e^{i\theta_A}} + \frac{e^{-i\theta_A}}{\chi - e^{-i\theta_A}}\right) + \frac{\alpha U_\infty}{B}; \quad (10)$$

punctul $\chi = e^{i\theta_A}$ corespunde bordului de atac al discului ($y = o$, $z = h$) prin următoarea relaţie

$$\cos\theta_A = \frac{hB - 1}{hB + 1}. \quad (11)$$

Constanta M va fi determinată utilizînd condiţia $v = -\gamma U_\infty$ pe urma discului spre extrados. Trebuie să reamintim că astfel vom avea $v = +\gamma U_\infty$ pe disc spre intrados (6). Utilizînd relaţia de compatibilitate între componentele u şi v (1) şi observînd că $v = 0$, pe conul Mach obţinem

$$\gamma U_\infty = -\frac{B}{2} Re\int_{\text{disc}}^{\text{cercul } M}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)df. \quad (12)$$

Ţinînd seama de transformările (8), formula precedentă devine

$$\gamma U_\infty = -Re\int_{h_1}^{1/B_1}\left[\frac{i\alpha U_\infty}{\pi B} - i\frac{M}{2}\frac{(h_1 - 1/B_1)X - 2h_1/B_1}{X^2}\right]\frac{dX}{(X + h_1)\sqrt{(X - h_1)(X - 1/B_1)}}, \quad (13)$$

sau încă, deoarece pe axa reală $X = Y$, obţinem

$$\gamma U_\infty = -\int_{h_1}^{1/B_1}\left[\frac{\alpha U_\infty}{\pi B} - \frac{M}{2}\frac{(h_1 - 1/B_1)Y - 2h_1/B_1}{Y^2}\right]\frac{dY}{(Y + h_1)\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y - h_1)}}. \quad (14)$$

Efectuînd calculele, rezultă în cele din urmă următoarea expresie a coeficientului M

$$M = -\frac{2U_\infty}{\pi}\left(\gamma + \frac{\alpha}{B}\right)\frac{hB}{1 + hB}. \quad (15)$$

Calculul portanţei. Coeficientul de presiune este dat, după cum se ştie din teoria perturbaţiilor mici, de formula

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_{\infty/2} U_\infty} \approx -\frac{2u}{U_\infty}; \quad (16)$$

indicînd mai departe prin C_{ps} şi C_{pi} coeficienţii de presiune corespunzători, respectiv, extradosului şi intradosului aripii ($C_{ps} = -C_{pi}$) şi prin $S_2 = \frac{1}{2B}$

suprafața regiunii 2, se poate scrie pentru coeficientul de portanță C_{z2} al acestei regiuni

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \int_{S_2} (C_{pi} - C_{ps})\, d\sigma = -2 \int_{S_2} C_{ps}\, d\sigma = \frac{4}{U_\infty} \int_{S_2} u\, d\sigma, \tag{17}$$

unde u este viteza de față superioară a aripii, exprimată prin partea reală a funcției (10), luată în punctele de pe extradosul aripii.

Înlocuind $d\sigma$ prin $\frac{dy}{2}$ (fig. 3), vom avea

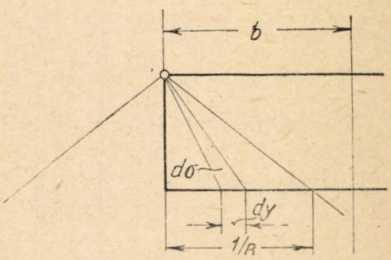


Fig. 3

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{4}{U_\infty} \int_{S_2} u\, d\sigma = \frac{2}{U_\infty} \int_0^{1/B} u\, dy, \tag{18}$$

care devine succesiv, ținînd seama de formulele (8) și de condiția $du' = 0$ pe aripă

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{2}{U_\infty} \int_0^{1/B} u\, dy = \frac{2}{U_\infty} \left[yu \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{B}} - \int_{x=0}^{x=\frac{1}{B}} x\, df \right] = \frac{2}{U_\infty} \left[\frac{\alpha U_\infty}{B^2} - \int_{x=0}^{x=\frac{1}{B}} x\, df \right]; \tag{19}$$

pentru a calcula integrala din ultimul membru, vom avea mai departe

$$\int_{x=0}^{x=\frac{1}{B}} x\, df = \int_{y=h_1}^{y=1/B_1} \left[\frac{\alpha U_\infty}{B} + \frac{\gamma U_\infty + \frac{\alpha U_\infty}{B}}{\pi} \frac{h_1}{h_1 + 1/B_1} \left(\frac{h_1 - 1/B_1}{Y} - \frac{2h_1/B_1}{Y^2} \right) \right] \times$$
$$\times \frac{(Y - h_1)\, dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y - h_1)}} = \frac{\alpha U_\infty}{2B} \frac{(1 - h_1 B_1)^2}{B_1 (1 + h_1 B_1)} - \gamma U_\infty \frac{h_1 (1 - h_1 B_1)}{1 + h_1 B_1}, \tag{20}$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{2}{U_\infty} \left[\frac{\alpha U_\infty}{B^2} - \frac{\alpha U_\infty}{2B} \frac{(1 - h_1 B_1)^2}{B_1 (1 + h_1 B_1)} - \frac{\gamma U_\infty h_1 (h_1 B_1 - 1)}{1 + h_1 B_1} \right]. \tag{21}$$

Ținînd seama acum și de relațiile (9)

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2 B^2}}, \quad \frac{1}{B_1} = \frac{1}{B\sqrt{1 - h^2 B^2}},$$

se obține în cele din urmă

$$\frac{1}{2B} C_{z2} = 2 \left[\frac{\alpha}{B^2} - \frac{\alpha}{2B^2} \left(\frac{1 - hB}{1 + hB} \right)^{3/2} + \frac{\gamma h}{1 + hB} \left(\frac{1 - hB}{1 + hB} \right)^{1/2} \right]. \tag{22}$$

În regiunea 1, a cărei suprafaţă S_1 este dată de egalitatea

$$S_1 = b - \frac{1}{2B}, \tag{23}$$

vom avea pentru coeficientul de portanţă C_{z1}

$$\left(b - \frac{1}{2B}\right) C_{z1} = \frac{4\alpha}{B}\left(b - \frac{}{2B}\right). \tag{24}$$

Coeficientul de portanţă totală C_z, referitor la aripa întreagă, este dat de relaţia

$$b\,C_z = \left(b - \frac{1}{2B}\right) C_{z1} + \frac{1}{2B} C_{z2} = \frac{4\alpha b}{B} - \frac{\alpha}{B^2}\left(\frac{1 - hB}{1 + hB}\right)^{3/2} + \\ + \frac{2\gamma h}{1 + hB}\left(\frac{1 - hB}{1 + hB}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Incidenţa γ a discului este considerată pozitivă sau negativă, după cum se arată în figura 4, *a* şi *b*.

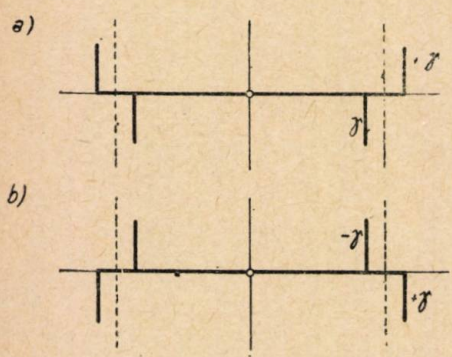


Fig. 4

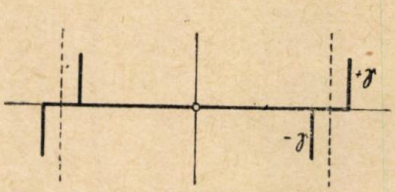


Fig. 5

Liniile punctate indică poziţia discurilor la incidenţă nulă. În cazul din figura 5, influenţa incidenţei γ se anulează reciproc şi avem

$$bC_z + \frac{4\alpha b}{B} - \frac{\alpha}{B^2}\left(\frac{1 - hB}{1 + hB}\right)^{3/2}, \tag{26}$$

ca şi în cazurile discurilor cu incidenţă nulă.

Calculul rezistenţei. Observînd că $2S_d = h$ reprezintă suprafaţa unui disc şi notînd cu C_y coeficientul respectiv al forţei laterale şi prin C_z coeficientul total de portanţă al aripii, se poate scrie pentru coeficientul de rezistenţă al sistemului aripă-discuri, pe care-l vom nota cu C_x

$$bC_x = \alpha b C_z + h\gamma C_y. \tag{27}$$

Indicînd mai de parte cu C_{pd} și C'_{pd} coeficienții de presiune pe fața interioară și exterioară a discului (fig. 6), vom putea scrie succesiv

$$\frac{1}{2} h C_y = \int_{S_d} (C'_{pd} - C_{pd})\, d\sigma = \int_0^h (C'_{pd} - C_{pd}) \frac{dz}{2} = \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^h C'_{pd}\, dz - \int_0^h C_{pd}\, dz\right] = -\frac{1}{U_\infty} \int_{\overline{OAO'}} u\, dz;$$

expresia lui u este dată de partea reală a funcției (10). Ținînd seama de transformarea geometrică a lui Busemann, se obține

$$\int_{\overline{OAO'}} u\, dz = \int_{\overline{OAO'}} ud \frac{\zeta}{\sqrt{1 + B^2\zeta^2}} = -i \int_{\overline{OAO'}} fd \frac{x}{\sqrt{1 - B^2x^2}}. \tag{29}$$

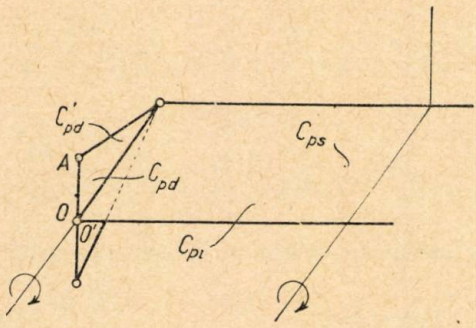


Fig. 6

Utilizînd în continuare transformările (8), obținem din expresia precedentă integrale de forma

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{\sqrt{(Y + {}^1/_{B_1})(h_1 - Y)}}, \quad \int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y - {}^1/_{B_1})\sqrt{(Y + {}^1/_{B_1})(h_1 - Y)}}, \tag{30}$$

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y + {}^1/_{B_1})\sqrt{(Y + {}^1/_{B_1})(h_1 - Y)}}.$$

După efectuarea calculelor, obținem în cele din urmă

$$\frac{1}{2} hC_y = \frac{2\alpha}{\pi B^2}\left[\arccos \sqrt{\frac{1 - hB}{1 + hB}} + (1 - hB)\sqrt{2(1 - hB)} \arccos \frac{1 - hB}{1 + hB} + \right. \tag{31}$$

$$\left. + \frac{hB\sqrt{2hB(1 - hB)}}{1 + hB}\right] + \frac{2\gamma h}{\pi} \sqrt{2(1 - hB)}\left[\frac{\sqrt{hB}}{1 + hB} - \arccos \frac{1 - hB}{1 + hB}\right].$$

Introducînd — mai departe — C_z şi C_y în formula (27), obţinem expresia rezistenţei sistemului aripă-discuri.

Calculul momentului de ruliu. Vom păstra aceleaşi notaţii ca în cele precedente şi vom introduce următoarele:

C_l pentru coeficientul momentului de ruliu al sistemului aripă-discuri;
C_d pentru coeficientul momentul de ruliu al discului în jurul axei sale;
C_{l_2} pentru coeficientul momentului regiunii 2 în jurul axei discului;
b_1 distanţa de la centrul de greutate al regiunii 1 pînă la axa aripii.

Pentru a determina expresia momentului de ruliu al unei jumătăţi de disc, vom scrie

$$\frac{h}{2} hC_{ld} = \frac{2}{3}\int_0^h (C'_{pd} - C_{pd})\, z\, \frac{dz}{2} = -\frac{2}{3U_\infty}\int_{\overline{OAO'}} uzdz = \frac{1}{3U_\infty}\int_{\overline{OAO'}} fd\,\frac{x^2}{1-B^2x^2}\cdot \tag{32}$$

Utilizînd transformările (8), calculul integralei din ultima egalitate de mai sus se reduce la acela al următoarelor integrale:

$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)\,(Y+h_1)}},\quad \int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y-1/B_1)\sqrt{(1/B_1 - Y)\,(Y+h_1)}},$$
$$\int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y+1/B_1)\,\sqrt{(1/B_1 - Y)\,(Y+h_1)}},\quad \int_{-h_1}^{+h_1} \frac{dY}{(Y+1/B_1)^2\sqrt{(1/B_1 - Y)\,(Y+h_1)}}. \tag{33}$$

După efectuarea calculelor, obţinem în cele din urmă

$$\frac{h}{2} hC_{ld} = \frac{\alpha}{3\pi B^3}\left[2\arccos\sqrt{\frac{1-hB}{1+hB}} - \frac{1-3h^2B^2}{1+hB}\sqrt{2hB(1-hB)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(1-hB)(1+3hB)\sqrt{2(1-hB)}}{2}\arccos\frac{1-hB}{1+hB}\right] + \tag{34}$$
$$+ \frac{\gamma}{3\pi B^2}\frac{hB}{1+hB}\left[(1+3hB)\sqrt{2hB(1-hB)} - \right.$$
$$\left. - (1+hB)(1-3hB)\sqrt{2(1-hB)}\arccos\frac{1-hB}{1+hB}\right].$$

Vom determina acum momentul de ruliu al regiunii 2 în jurul axei discului.

Vom avea, utilizînd aceleaşi transformări ca mai sus,

$$-\frac{1}{2B}\cdot\frac{1}{B}C_{l_2} = \frac{2}{3}\int_0^{1/B}(C_{pi} - C_{ps})\, y\,\frac{dy}{2} = -\frac{2}{3}\int_0^{1/B} C_{ps}\, y\, dy =$$
$$= \frac{4}{3U_\infty}\int_0^{1/B} yu\, dy = \frac{2}{3U_\infty}\int_{x=0}^{x=1/B} f\, dx^2 + \frac{iM}{B^2}\frac{2}{3U_\infty}. \tag{35}$$

Dezvoltînd mai departe calculele, expresia precedentă se reduce la o sumă de integrale de forma

$$\int_{h_1}^{1/B_1} \frac{dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y - h_1)}}, \quad \int_{h_1}^{1/B_1} \frac{Y^2\, dY}{\sqrt{(1/B_1 - Y)(Y + h_1)}}, \quad \int_{h_1}^{1/B_1} \sqrt{(1/B_1 - Y)(Y + h_1)}\, dY, \tag{36}$$

care conduc, după efectuarea lor, la expresia finală

$$\frac{1}{2B^2} C_{l_2} = \frac{\alpha}{6\pi B^3} \left\{ \left[2 + \left(\frac{1 - 3hB}{1 + hB} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{2hB}{1 - hB}} + 3 \frac{1 - 3hB}{1 - hB} \arcsin \sqrt{\frac{1 - hB}{1 + hB}} + \right.$$

$$\left. + 4\pi \right\} - \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\pi B^2} \frac{hB}{1 + hB} \left[\frac{1 - 3hB}{1 + hB} \sqrt{\frac{2hB}{1 - hB}} + \right. \tag{37}$$

$$\left. + \frac{1 + hB}{1 - hB} \arcsin \sqrt{\frac{1 - hB}{1 + hB}} \right]$$

Pentru cazul $h = \frac{1}{B}$, prin trecerea la limită în expresia (37) obținem următoarea formulă

$$\frac{1}{2B^2} C_{l_2} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{B^3}. \tag{38}$$

Momentul de ruliu în jurul axei transversale referitor la o jumătate de aripă va fi dat de relația

$$b \cdot b\, C_l = 2 \frac{h}{2} h\, C_{ld} + \frac{1}{2B} \cdot \frac{1}{B} C_{l_2} + \frac{1}{2B} b C_{z_2} + \left(b - \frac{1}{2B} \right) b_1 C_{z_1} \tag{39}$$

unde C_{ld}, C_{l2}, C_{z2}, C_{z_1} sînt date respectiv de formulele (34), (37), (22), (24).

Dacă discurile au incidență constantă pe toată înălțimea, numai rezistența sistemului aripă-discuri este mărită față de aceea obținută în cazul discurilor cu incidență nulă. Portanța și momentele nu variază cu această incidență.

Aripa în cruce cu incidență antisimetrică. Vom considera o aripă unghiulară simetrică prevăzută cu un disc axial; presupunem că aripa are incidența $+\alpha$ pe porțiunea din dreapta discului și $-\alpha$ pe porțiunea din stînga discului, iar acesta din urmă are incidența $+\gamma$ spre extrados și $-\gamma$ spre intrados.

În planul real Oyz avem configurația din figura 7. Vom utiliza un șir de transformări conforme

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad X^2 = x^2 + h_1^2, \quad X = \frac{L}{2} \left(\chi + \frac{1}{\chi} \right), \tag{40}$$

unde, dacă $2h$ reprezintă înălțimea urmei discului, iar $2l$ lungimea urmei aripii, avem

$$h_1^2 = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2 h^2}}, \quad L^2 = l^2 + h_1^2. \tag{41}$$

Astfel problema este adusă în planul χ. Potențialul complex dedus în acest plan prin analogie hidrodinamică este cel datorit unui sistem de dublete repartizate după cum se arată în figura 8, și anume

$$u + iu' = f(\chi) = iM\left(\frac{1}{\chi - 1} - \frac{1}{\chi + 1}\right) + N\left(\frac{1}{\chi - i} - \frac{1}{\chi + i}\right); \tag{42}$$

sau încă, revenind în planul x definit de prima transformare (8)

$$u + iu' = f = i\frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}}. \tag{43}$$

Pentru determinarea constantelor a și b utilizăm următoarele relații

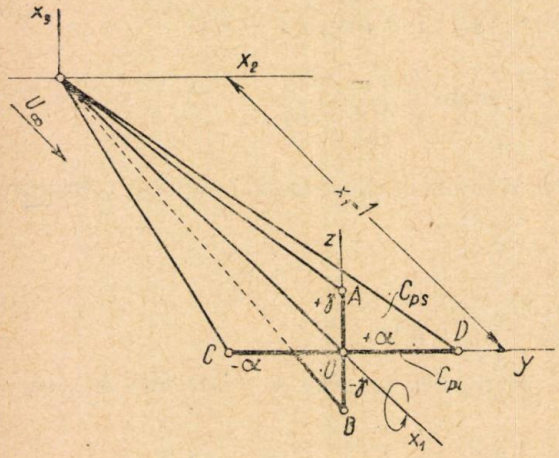


Fig. 7

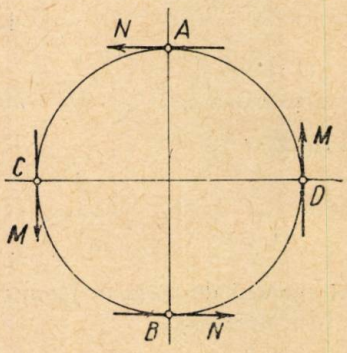


Fig. 8

$$\alpha U_\infty = \frac{B}{2} Re \int_{\substack{\text{cercul } M \\ \text{aripă } (o,l)}} i\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) df, \quad \gamma U_\infty = -\frac{B}{2} Re \int_{\substack{\text{cercul } M \\ \text{disc } (o,ih)}} \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) df, \tag{44}$$

pe care le-am obținut punînd condițiile $w = -\alpha U_\infty$ pe aripă, pe porțiunea din dreapta discului, și $v = -\gamma U_\infty$ pe disc, spre extrados. Se poate arăta ușor că determinînd astfel constantele, se obține în mod automat $w = \alpha U_\infty$ pe aripă pe porțiunea din stînga discului și $v = \gamma U_\infty$ pe disc spre intrados.

Pentru aceasta vom demonstra relațiile următoare, analoge cu (6)

$$w(\eta, \zeta) = -w(-\eta, \zeta), v(\eta, \zeta) = -v(\eta, -\zeta). \tag{45}$$

Observînd expresia (42), putem scrie următoarele egalități

$$f(x) = -\overline{f(\chi)}, \; f(\chi) = f(-\chi); \tag{46}$$

pe de altă parte, luînd partea reală a primei egalități (1), se poate scrie

$$dw = -\frac{B}{2}\left[\eta\left(1 - \frac{1}{\eta^2 + \zeta^2}\right)du' + \zeta\left(1 + \frac{1}{\eta^2 + \zeta^2}\right)du\right], \tag{47}$$

de unde se deduce

$$dw(\eta, \zeta) = -dw(-\eta, \zeta). \tag{48}$$

Integrînd și ținînd seama de condiția $w = 0$ pe conul Mach, rezultă

$$w(\eta, \zeta) = -w(-\eta, \zeta). \tag{49}$$

De asemenea, din formulele (46) și (1), știind că $v=0$ pe conul Mach, obținem

$$v(\eta, \zeta) = -v(\eta, -\zeta). \tag{50}$$

Pentru a determina constantele a și b, vom efectua integralele (44).

Astfel, prima din formulele (44) poate fi scrisă succesiv precum urmează:

$$\alpha U_\infty = Re \int_{\substack{\text{aripă } (0,l)}}^{\text{cercul } M} \frac{iB}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) df = Re\left[\frac{iB}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) f \Big|_{\substack{\text{aripă } (0,l)}}^{\text{cercul } M} - \right.$$
$$\left. - \frac{iB}{2} \int_{\substack{\text{aripă } (0,l)}}^{\text{cercul } M} f d\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right]. \tag{51}$$

Primul termen din ultima egalitate este nul, deoarece pe cercul Mach ($\xi = e^{i\theta}$) avem

$$Re \frac{iB}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) f = Re \frac{iB}{2} iu' \, 2i \sin\theta = 0, \tag{52}$$

iar pe aripă ($\zeta = 0$)

$$Re \frac{iB}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) f = Re \frac{iB}{2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) u = 0. \tag{53}$$

Utilizînd expresia (43) și prima din transformările (40) se poate scrie (fig. 9)

$$\alpha U_\infty = -Re \frac{iB}{2} \int_{\substack{\text{aripă } (0,l)}}^{\text{cercul } M} f d\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) = Re \int_{PcP'} \frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - B^2 x^2}} =$$
$$= Re \int_{Pc'P'} \frac{(ax^2 + b)\, dx}{x^2 \sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)(1 - B^2 x^2)}} \tag{54}$$

Ținînd seama de faptul că punctele $x = l$ și $x = \frac{1}{B}$ situate pe conturul $Pc'P'$ constituie singularități integrabile pentru expresia precedentă și că integralele luate de-a lungul porțiunilor de aripă și de pe cercul Mach sînt pur imaginare, vom putea scrie

$$\alpha U_\infty = \frac{1}{B} \int^{1/B} \frac{(ay^2 + b)\, dy}{y^2 \sqrt{(y^2 - l^2)(y^2 - h_1^2)(1/B^2 - y^2)}}. \tag{55}$$

Utilizînd mai departe transformarea

$$y^2 = \frac{l^2}{1 - (1 - B^2 l^2)\sin^2\varphi} \tag{56}$$

şi efectuînd calculele, se obţine o primă relaţie între constantele a şi b

$$\alpha U_\infty = \frac{a}{\sqrt{l^2 + h_1^2}} K_1 + \frac{b}{h_1^2}\left[\frac{\sqrt{l^2 + h_1^2}}{l^2} E_1 - \frac{K_1}{\sqrt{l^2 + h_1^2}}\right], \tag{57}$$

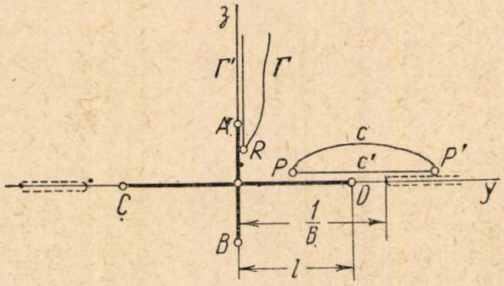


Fig. 9

unde K_1 şi E_1 sînt integralele eliptice de prima şi de-a doua speţă, avînd modulul k_1 definit de relaţia

$$k_1^2 = \frac{h_1^2(1 - B^2 l^2)}{l^2 + h_1^2} = \frac{h^2(1 - B^2 l^2)}{l^2 + h^2(1 - B^2 l^2)} . \tag{58}$$

A doua formulă (44) poate fi scrisă succesiv

$$\gamma U_\infty = -\frac{B}{2} R_e \int_{\text{disc } (0,ih)}^{\text{cercul } M} \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) df = -R_e \int_{\text{disc } (0,ih)}^{\text{cercul } M} \frac{df}{x} = -R_e \left[\left.\frac{f}{x}\right|_{\text{disc } (0,ih)}^{\text{cercul } M} + \left.\int \frac{f dx}{x^2}\right|_{\text{disc } (0,ih)}^{\text{cercul } M}\right]. \tag{59}$$

Observînd că avem

$$R_e \left.\frac{f}{x}\right|_{\text{disc } (0,ih)}^{\text{cercul } M} = 0, \tag{60}$$

se obţine

$$\gamma U_\infty = R_e \int_{\text{disc } (0,ih)}^{\text{cercul } M} \frac{f\,dx}{x^2} = -R_e \int_{R\Gamma_\infty} i \frac{ax^2 + b}{\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}} \frac{dx}{x^2}, \tag{61}$$

sau încă, efectuînd integrala pe axa ordonatelor

$$\gamma U_\infty = -R_e \int_{R\Gamma_\infty} i \frac{ax^2+b}{\sqrt{(x^2-l^2)(x^2+h_1^2)}} \frac{dx}{x^2} = \int_{h_1}^{\infty} \frac{az^2-b}{\sqrt{(z^2+l^2)(z^2-h_1^2)}} \frac{dz}{z^2}. \tag{62}$$

Utilizînd mai departe transformarea

$$z^2 = \frac{h_1^2}{\cos^2\varphi} = \frac{h^2}{(1-B^2h^2)\cos^2\varphi}, \tag{63}$$

și efectuînd toate calculele, rezultă în cele din urmă cea de-a doua relație între constantele a și b:

$$\gamma U_\infty = \frac{a}{\sqrt{l^2+h_1^2}} K_2 - \frac{b}{l^2}\left[\frac{\sqrt{h_1^2+l^2}}{h_1^2} E_2 - \frac{K^2}{\sqrt{h_1^2+l^2}}\right], \tag{64}$$

unde K_2 și E_2 sînt integralele eliptice de prima și a doua speță, avînd modulul k_2 definit de relația

$$k_2^2 = \frac{l^2}{h_1^2+l^2} = \frac{l^2(1-B^2h^2)}{h^2+l^2(1-B^2h^2)}. \tag{65}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (57), (64), obținem următoarele valori pentru a și b în funcție de incidențele α, γ și de lungimile h, l:

$$\frac{a(\alpha,\gamma,h,l)}{U_\infty} = \frac{\gamma[(h_1^2+l^2)E_1 - l^2K_1] + \alpha[(h_1^2+l^2)E_2 - h_1^2K_2]}{\sqrt{h_1^2+l^2}(K_1E_2+K_2E_1-K_1K_2)}, \tag{66}$$

$$\frac{b(\alpha,\gamma,h,l)}{U_\infty} = \frac{h_1^2l^2(\alpha K_2 - \gamma K_1)}{\sqrt{h_1^2+l^2}(K_1E_2+K_2E_1-K_1K_2)}. \tag{67}$$

Calculul momentului de ruliu. Vom introduce următoarele notații: C_{la} și C_{ld} respectiv pentru coeficientul momentului de ruliu al aripii și al discului. Determinăm mai întîi expresiile lui C_{la}, și anume:

$$\frac{l}{2} lC_{la} = \frac{2}{3}\int_0^{y=l} (C_{pi}-C_{ps})\, y \frac{dy}{2} = \frac{2}{3U_\infty}\int_{y=0}^{y=l} u\,dy^2 = \frac{2}{3U_\infty}\int_{y=0}^{y=l} \frac{(ay^2+b)\,dy^2}{\sqrt{(l^2-y^2)(y^2+h_1^2)}}, \tag{68}$$

unde prin u înțelegem valoarea vitezei de perturbație u pe partea superioară a aripii.

Efectuînd calculele necesare, se obține în cele din urmă

$$\begin{aligned}\frac{l^2}{2} C_{la} &= \frac{2}{3U_\infty}\left[alh_1 + \left(a\frac{l^2-h_1^2}{2} + b\right)\arccos\frac{h_1^2-l^2}{h_1^2+l^2}\right] = \\ &= \frac{2}{3U_\infty}\left\{\frac{a(\alpha,\gamma,h,l)\,lh}{\sqrt{1-h^2B^2}} + \left[a(\alpha,\gamma,h,l)\frac{l^2-h^2-l^2h^2B^2}{2(1-h^2B^2)} + \right.\right. \\ &\left.\left. + b(\alpha,\gamma,h,l)\right]\arccos\frac{h^2-l^2+l^2h^2B^2}{h^2+l^2-l^2h^2B^2}\right\},\end{aligned} \tag{69}$$

unde constantele a şi b sînt date de relaţiile (66) şi (67). Schimbînd în expresia (69) α cu γ, l cu h, obţinem expresia momentului de ruliu al discului

$$\frac{h^2}{2} C_{ld} = \frac{2}{3U_\infty} \left\{ \frac{a(\gamma, \alpha, l, h)\, hl}{\sqrt{1 - l^2B^2}} + \left[a(\gamma, \alpha, l, h) \frac{h^2 - l^2 - l^2h^2B^2}{2(1 - l^2B^2)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b(\gamma, \alpha, l, h) \arccos \frac{l^2 - h^2 + l^2h^2B^2}{h^2 + l^2 - l^2h^2B^2} \right] \right\}. \tag{70}$$

În cazul cînd $l = h$, $\alpha = \gamma$, vom avea

$$\frac{l^2}{2} C_l = \frac{2\alpha}{3U_\infty} \frac{l^3\sqrt{2 - l^2B^2}}{K\left[\frac{1 - l^2B^2}{2 - l^2B^2}\right]} \left(\frac{1}{1 - l^2B^2} - \frac{l^2B^2}{2(1 - l^2B^2)^{4/2}} \cdot \arccos \frac{l^2B^2}{2 - l^2B^2} \right). \tag{71}$$

Primite la redacţie la 5 martie 1956.

ОБ УГЛОВОМ КРЫЛЕ С ОСЕВЫМИ ДИСКАМИ С ПРОТИВОСИММЕТРИЧЕСКИМ НАКЛОНОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье определяется выражение функции $f = u + iu'$, где u осевая составляющая скорости возмущения при угловом крыле с диском, имеющим противосимметрический наклон.

Далее указываются несколько практических применений, а именно: рассчитываются подъемная сила, сопротивление и момент боковой качки для угловых крыльев с дисками на краях, имеющими противосимметрический наклон, а также момент боковой качки крестообразного крыла с противосимметрическим наклоном, полностью охватываемым конусом Маха.

SUR L'AILE ANGULAIRE AUX DISQUES AXIAUX À INCIDENCE ANTISYMÉTRIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on détermine l'expression de la fonction $f = u + iu'$ où u est la composante de la vitesse de perturbation dans le cas d'une aile angulaire pourvue d'un disque, ce dernier ayant une incidence antisymétrique.

On donne ensuite quelques applications pratiques; on calcule la portance, la résistance, le moment de roulis, pour le cas d'une aile rectangulaire aux disques marginaux à incidence antisymétrique, ainsi que le moment de roulis de l'aile en croix, à incidence antisymétrique, entièrement comprise dans le cône Mach.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli şi Beatrice Horovitz, *Mişcarea supersonică în jurul aripii triunghiulare cu discuri marginale.* Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 11—12, noiembrie-decembrie 1953, p. 395.
2. — *Influența discurilor axiale asupra mişcării supersonice în jurul aripilor unghiulare conice groase şi cu incidență variabilă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 5—6, mai-iunie 1954, p. 261.
3. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mişcările conice, aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 9—10, septembrie-octombrie 1952, p. 629.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

AEROMECANICĂ

ASUPRA EXTINDERII PROBLEMEI TSIEN-SCURLOCK LA MIŞCĂRI AXIAL-SIMETRICE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Problema arderii unui amestec omogen de gaz, care se mişcă cu o viteză uniformă u_∞ într-un canal, arderea fiind amorsată de un arzător plasat în axa canalului, a fost pusă pentru prima oară de S c u r l o ç k în 1948, citat în [1] şi rezolvată aproximativ pentru o problemă bidimensională (canal de înălţime constantă şi de lăţime infinită). Aceeaşi problemă a fost reluată ulterior de H. S. T s i e n [1], care a rezolvat-o pe o cale mai simplă, introducînd şi efectul

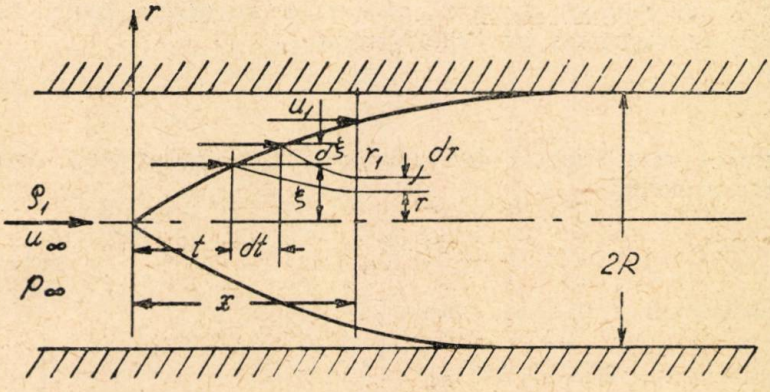


Fig. 1

compresibilităţii amestecului gazos near s. Recent problema a fost discutată şi de K á r m á n [2].

În cele ce urmează vom extinde această problemă la o scurgere axial-simetrică şi pentru început la arderea unui amestec omogen de gaz, care se scurge într-o cameră de ardere de secţiune circulară constantă. Arderea este provocată de un arzător teoretic punctiform, plasat pe axa camerei (fig. 1). Această situaţie se apropie mai mult de cazurile reale, care prezintă în general o simetrie axială.

Pentru rezolvarea problemei se presupune ca și în problema bidimensională enunțată mai sus, că sînt îndeplinite următoarele ipoteze simplificatoare: se consideră atît amestecul nears, cît și cel ars ca gaze perfecte, omogene și cu structură chimică stabilă (nu se produce disociație). Căldurile specifice ale gazului se consideră constante. De asemenea, se consideră fluidul perfect și se neglijează atît conductibilitatea lui termică, cît și difuziunea.

Să considerăm mai întîiu că atît amestecul omogen nears, cît și gazul ars sînt incompresibile; cu alte cuvinte scurgerea în camera de ardere se face la un număr Mach

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty} \tag{1}$$

foarte redus.

În cele ce urmează vom folosi ecuațiile frontului flăcării pentru o mișcare unidimensională, care se aplică în mod aproximativ pe o direcție normală la frontul flăcării. Dacă se notează cu indice 1 mărimile dinaintea frontului flăcării, cu indice 2 mărimile imediat după aceasta, și se consideră că frontul flăcării este staționar și că gazul nears se mișcă către el cu o viteză normală w_1 și îl părăsește cu o viteză w_2, atunci ecuația de continuitate, ecuația impulsului și ecuația energiei au respectiv forma

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 \\ &p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2 \\ &\frac{w_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{w_2^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2}\right], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

în care p, ρ, $\varkappa$ sînt respectiv presiunea, densitatea și raportul căldurilor specifice, iar λ este raportul dintre temperatura de stagnare a gazului ars T_0' și temperatura de stagnare a amestecului nears T_0

$$\lambda = \frac{T_0'}{T_0}. \tag{3}$$

Coeficientul λ caracterizează deci combustia. Considerînd drept necunoscute p_2, ρ_2, w_2, și notînd

$$M_1 = \frac{w_1}{a_1} \tag{4}$$

atunci din sistemul (2) se deduc relațiile [1]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \lambda + \frac{\varkappa+1}{2}\lambda(\lambda-1)M_1^2 + \frac{\varkappa+1}{2}\lambda(\lambda-1)[1 + \\ &\qquad (\varkappa+1)(\lambda-1)]M_1^4 + \ldots \\ &\frac{p_2}{p_1} = 1 - \varkappa(\lambda-1)M_1^2 - \frac{\varkappa+1}{2}\varkappa\lambda(\lambda-1)M_1^4 - \frac{\varkappa+1}{2}\varkappa\lambda(\lambda-1) \\ &\qquad [1 + (\varkappa+1)(\lambda-1)]M_1^6 + \ldots \\ &\frac{T_2}{T_1} = \lambda - \frac{\varkappa-1}{2}\lambda(\lambda-1)M_1^2 - \frac{\varkappa^2-1}{2}\lambda^2(\lambda-1)M_1^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Deoarece în general M_1 este foarte mic ($M_1 \sim 10^{-3}$ [1]) în sistemul (5) pot fi neglijați termenii care conțin ca factor numărul M_1. În acest caz se obțin relațiile simple

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} = \lambda \\ p_2 = p_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

care caracterizează variația parametrilor scurgerii la trecerea prin frontul flăcării.

Deoarece scurgerea este uniformă înaintea frontului flăcării, se va considera că într-o secțiune oarecare x (fig. 1) viteza este constantă în toată regiunea inelară nearsă, având valoarea $u_1(x)$. În aceste condiții, pentru o scurgere incompresibilă, se poate găsi variația vitezei u într-o secțiune, ca și raza r_1 a frontului flăcării, urmărind raționamentul lui S c u r l o c k pentru mișcări plane [1]. Astfel, fie creșterea lățimii flăcărilor de la ξ la $\xi + d\xi$, cînd x variază de la o valoare t la $t + dt$ (fig. 1). Debitul masic al gazului nears este $\rho_1 \pi (R^2 + \xi^2) v$, în care R este raza camerei de ardere, iar v este viteza gazului nears u_1 în secțiunea t. Creșterea debitului de gaz ars între secțiunile t și $t + dt$ este egală cu scăderea debitului de gaz nears, adică

$$dm = -\rho_1 d[\pi (R^2 + \xi^2) v]. \tag{7}$$

Cum pe de altă parte, cînd gazul ars a ajuns în secțiunea x, această creștere dm este, ținînd seama de relațiile (6)

$$dm = \rho_2 2\pi r u dr = \frac{2\pi\rho_1}{\lambda} r u dr \tag{8}$$

Egalînd relațiile (7) și (8), rezultă

$$2r dr = -\lambda \frac{d[(R^2 - \xi^2) v]}{u}. \tag{9}$$

Aplicînd ecuația lui Bernoulli între secțiunea t și secțiunea x pe tubul de curent corespunzător, se găsește că între vitezele u și v există relația

$$u = \sqrt{\lambda} \sqrt{u_1^2 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v^2}, \tag{10}$$

care introdusă în relația (9) dă

$$2r dr = -\sqrt{\lambda} \frac{d[(R^2 - \xi^2) v]}{\sqrt{u_1^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v^2}}. \tag{11}$$

Trecînd acum la variabilele adimensionale

$$\frac{r}{R} = \eta\ ;\ \frac{r_1}{R} = \eta_1\ ;\ \frac{u_1}{u_\infty} = U\ ;\ \frac{v}{u_\infty} = V\ ; \tag{12}$$

relația (11) se poate scrie

$$d(\eta^2) = -\sqrt{\lambda}\,\frac{d\left[(1-\eta^2(V))\,V\right]}{\sqrt{U^2-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)V^2}} \tag{13}$$

care determină repartiția de viteze într-o secțiune oarecare, cît și raza r_1 a frontului flăcării.

Pentru a găsi raza r_1 a frontului flăcării, vom integra ecuația (13) de la 0 la η_1, respectiv de la 1 la U. Se obține astfel

$$\eta_1^2\,U = -\sqrt{\lambda}\int_1^U \frac{d\left[(1-\eta^2(v))\,V\right]}{\sqrt{U^2-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)V^2}}, \tag{14}$$

de unde, operînd asupra elementului diferențial și integrînd o dată prin părți, se obține ecuația integrală

$$\eta_1^2(U) = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^{3/2}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - \arcsin\frac{1}{U}\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_1^U \frac{V^2}{\left[U^2-\frac{\lambda-1}{\lambda}V^2\right]^{3/2}}\,\eta_1^2(V)\,dV, \tag{15}$$

care determină raza r_1 a frontului flăcării în funcție de viteza u_1 a gazului nears în secțiunea respectivă. Rezolvarea acestei ecuații, care se poate efectua de exemplu prin aproximații succesive, este destul de laborioasă. Comparînd însă ecuația (15) cu ecuația integrală a lățimii flăcării y_1 în ipoteza unei mișcări plane [1]

$$\eta_1(U) = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^{3/2}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - \arcsin\frac{1}{U}\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_1^U \frac{V^2}{\left[U^2-\frac{\lambda-1}{\lambda}V^2\right]^{3/2}}\,\eta_1(V)\,dV \tag{16}$$

se constată că soluția ecuației (16) va da pe $\eta_1^2(U)$ determinat de ecuația (15) Se poate deci utiliza calculele efectuate de Scurlock, care a rezolvat ecuația (16) printr-o metodă numerică. Astfel în figura 2 s-au trasat variațiile mărimii η în funcție de U pentru diverse valori ale lui λ și pentru diverse valori ale parametrului f, care reprezintă fracțiunea arsă din debitul de gaz, adică

$$f = 1 - \frac{\rho_1\,\pi\,(R^2-r_1^2)\,u_1}{\rho_1\,\pi\,R^2\,u_\infty} = 1 - U(1-\eta^2) \tag{17}$$

Curbele punctate reprezintă variația lățimii η_1 a frontului flăcării în funcție de U.

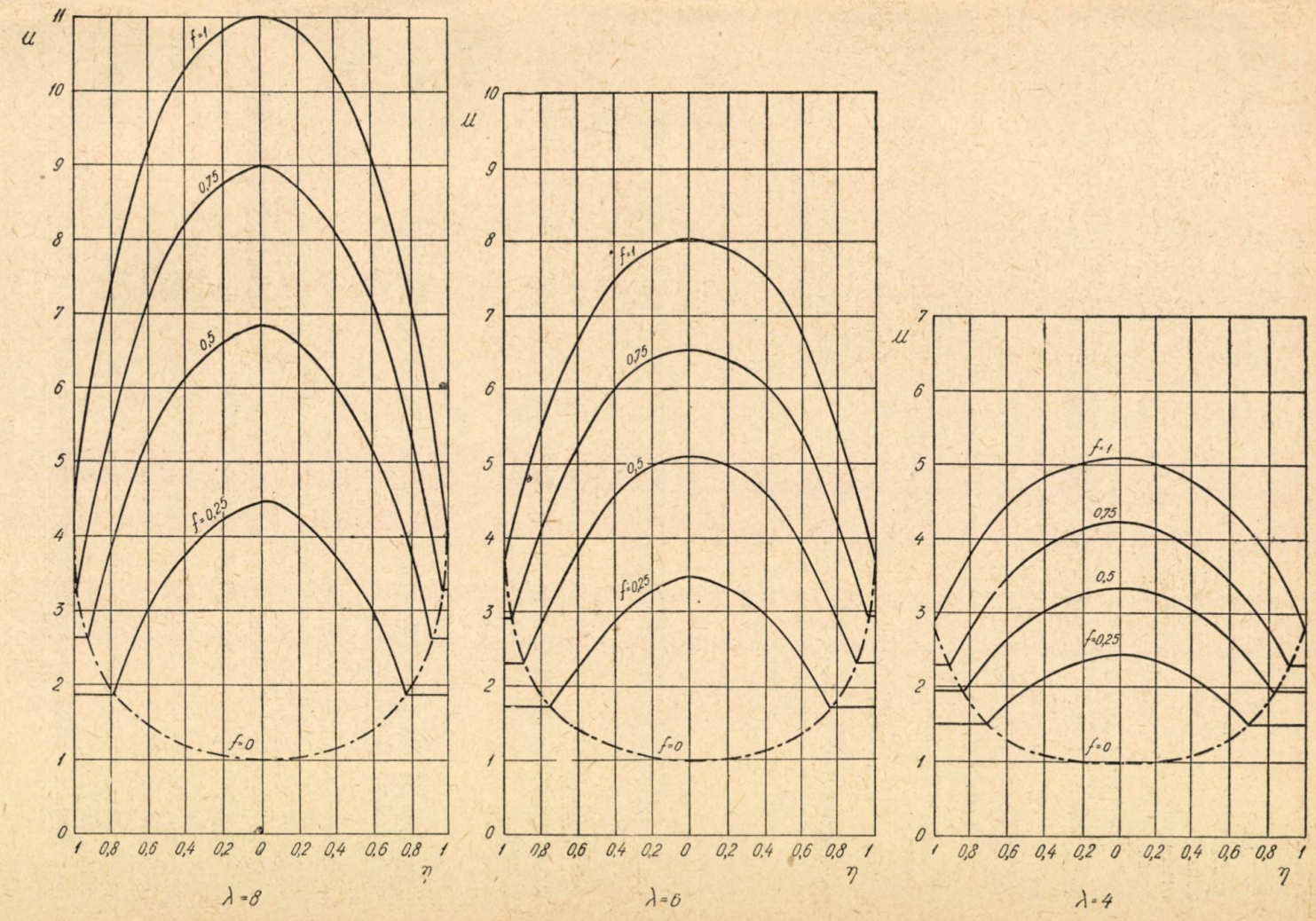


Fig. 2

Metoda lui S c u r l o c k de mai sus este destul de laborioasă și nu se pretează la discuții mai detaliate. De aceea, urmînd ideea lui T s i e n pentru scurgerea bidimensională într-o cameră de combustie dreptunghiulară [1], vom presupune că viteza în zona arsă variază de data aceasta parabolic cu r (fig. 3), crescînd de la valoarea u_1, în dreptul frontului flăcării, pînă la o valoare u^* în axa camerei.

Legătura între u_1 și u^* poate fi găsită ușor cu ajutorul ecuației lui Bernoulli. Într-adevăr, scriind ecuația lui Bernoulli într-un punct din amontele arzătorului

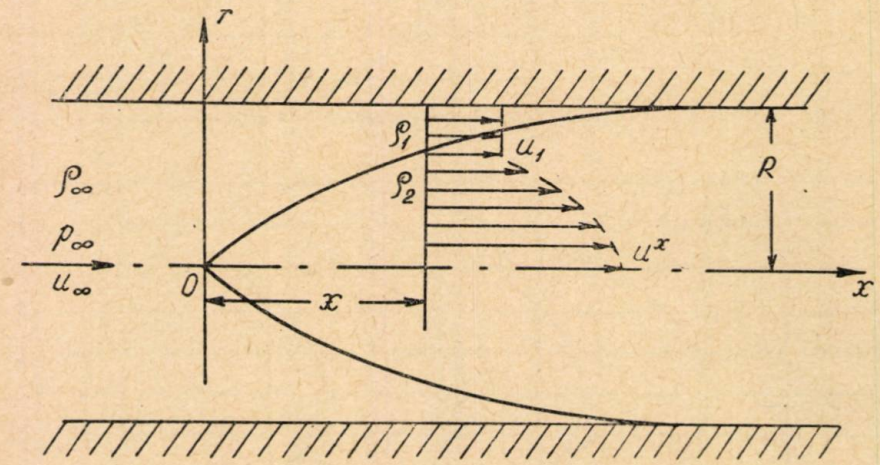


Fig. 3

și un punct din secțiunea x în zona nearsă, rezultă, notînd cu p presiunea în secțiunea x, și scurgerea fiind incompresibilă $\rho_1 = \rho_\infty$.

$$\frac{\rho_1}{2}(u_1^2 - u_\infty^2) = p_\infty - p. \tag{18}$$

Scriind acum ecuația lui Bernoulli pe axa Ox, într-un punct imediat după arzătorul O și secțiunea x

$$\frac{\rho_2}{2}(u^{*2} - u_\infty^2) = p_\infty - p, \tag{19}$$

deoarece, arderea fiind la presiune constantă (6), presiunea într-un punct imediat în spatele arzătorului este tot p_∞. Atunci din ecuațiile (18) și (19) și ținînd seama de ecuațiile (6) se obține relația

$$\frac{u^*}{u_\infty} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_\infty^2} - 1\right)}, \tag{20}$$

de unde se vede că întotdeauna u^* este mai mare decît u_1 deoarece λ este mai mare decît 1.

Atunci variația aproximativă a vitezei u cu raza va fi de forma

$$u = u^* - \frac{u^* - u_1}{r_1^2} r^2 \tag{21}$$

sau, împărțind cu u_∞ și ținînd seama de relația (20)

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{u^*}{u_\infty} - \left(\frac{u^*}{u_\infty} - \frac{u_1}{u_\infty}\right)\frac{r^2}{r_1^2} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_\infty^2} - 1\right)} - \left[\sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_\infty^2} - 1\right)} - \frac{u_1}{u_\infty}\right]\frac{r^2}{r_1^2}. \tag{22}$$

Atunci, ecuația de continuitate în secțiunea x și într-o secțiune din amonte de arzător, care este

$$\rho_2 \int_0^{r_1} 2\pi r\, u\, dr + \rho_1 \pi (R^2 - r_1^2) u_1 = \rho_1 \pi R^2 u_\infty, \tag{23}$$

va da în mod aproximativ variația lățimii flăcării r_1 în funcție de viteza gazului nears u_1. Într-adevăr, ținînd seama de relațiile (6), ecuația (23) se scrie

$$\frac{2}{\lambda}\frac{r_1^2}{R^2}\int_0^1 \frac{r}{r_1}\frac{u}{u_\infty}\, d\left(\frac{r}{r_1}\right) + \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right)\frac{u_1}{u_\infty} = 1, \tag{24}$$

care integrată, ținînd seama că $\frac{u}{u_\infty}$ este dat de relația (22), dă, adoptînd notațiile (12),

$$\frac{2}{\lambda}\eta_1^2\left[\frac{1}{2}\frac{u^*}{u_\infty} - \frac{1}{2\lambda}\frac{u^*}{u_\infty} + \frac{1}{2\lambda}\frac{u_1}{u_\infty} - \frac{u_1}{u_\infty}\right] + (1 - \eta_1^2)\frac{u_1}{u_\infty} = 1, \tag{25}$$

de unde

$$\eta_1(U) = \sqrt{\frac{U - 1}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}}, \tag{26}$$

a cărei variație în raport cu U și λ este arătată în figura 4.

Aproximația făcută va fi mai mică decît pentru cazul unei camere de combustie dreptunghiulară, deoarece pentru camere circulare rezultă $r = 0$, $\frac{du}{dr} = 0$, în timp ce pentru primele [1] se consideră o repartiție liniară, cu $\frac{du}{dr} = \text{cst.} \neq 0$. Or, distribuția de viteze este simetrică față de axa camerei de combustie și deci la $r = 0$ în realitate $\frac{du}{dr} = 0$.

Ținînd seama de relația (26) de mai sus, fracțiunea de gaze arse (17) va fi egală cu

$$f = \frac{(U - 1)\left[U + \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}\right]}{(2\lambda - 1)\, U - \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}, \tag{27}$$

adică de aceeași formă ca și pentru problema bidimensională [1].

Ecuațiile (26) și (27) dau reprezentarea parametrică a curbei η_1 în funcție de f, curbă trasată în figura 5 pentru diverse valori ale lui λ. Pe aceeași diagramă s-au trasat pentru comparație și curbele η_1 în funcție de f, obținute de T s i e n și S c u r l o c k în cazul problemei plane.

Se constată din aceeași diagramă că arderea într-o cameră de combustie de secțiune circulară se face în condiții mai puțin bune decît într-o cameră de secțiune dreptunghiulară. Într-adevăr, pentru același procent de gaze arse f, lățimea η_1 a flăcării în prima situație este mai mare decît în cazul camerei de

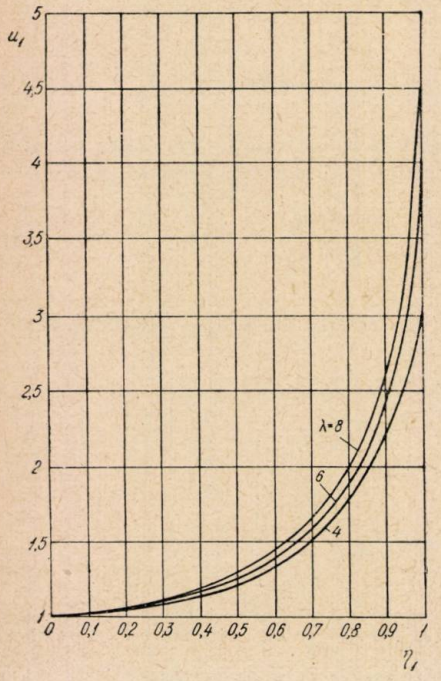


Fig. 4

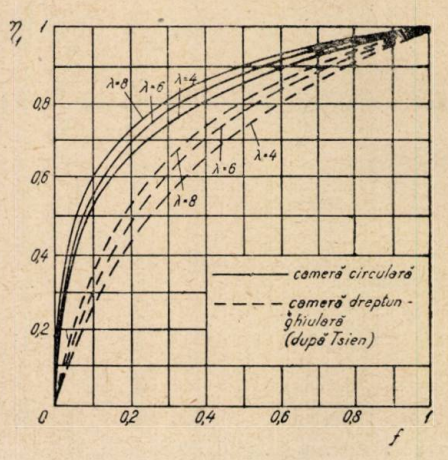


Fig. 5

secțiune dreptunghiulară. Explicația constă în faptul că, pentru camera de combustie circulară s-a presupus arzătorul punctiform, pe cînd în problema plană se presupune că arderea este generată de un arzător liniform, de aceeași lățime cu camera.

★

Aproximația făcută neglijînd numărul M_1 al flăcării (5) este cu atît mai justificată, cu cît numărul M_1 este mai mic decît numărul M_∞ al scurgerii (1). La numere M_∞ mai mari este necesar însă să se țină seama că scurgerea este compresibilă. Ca și pentru problema plană [1], vom considera că amestecul nears este compresibil. În zona arsă vom face aproximația că într-o secțiune densitatea gazului ars este constantă și egală cu

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{\lambda}. \tag{28}$$

Această aproximație este justificată, mai ales la valori λ mari, deoarece pentru gazul ars, viteza sunetului este de $\sqrt{\lambda}$ ori mai mare decît în zona nearsă și deci numerele Mach corespunzătoare sînt în același raport mai mici. Aproximația mai este justificată deoarece, după cum se va arăta, nu este posibilă o ardere completă la numere M_∞ prea mari.

O aproximație ceva mai mare este introdusă prin considerarea parametrului λ, ca fiind constant, deoarece în acest caz, notînd cu q aportul de căldură pe unitatea de masă datorită reacției chimice, λ este egal cu [1]

$$\lambda = \frac{q}{\frac{w_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1}} + 1 \simeq 1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{\rho_1 q}{p_1} \tag{29}$$

Deoarece pe o linie de curent entropia gazului este constantă, rezultă că se pot aplica relațiile izentropice corespunzătoare, în regiunea arsă și respectiv în regiunea nearsă. În acest caz în locul relațiilor (18) și (19) vom avea

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \tag{30}$$

și

$$\frac{u^{*2}}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\lambda\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\lambda\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \tag{31}$$

Împărțind relația (31) cu λ și scăzînd-o din relația (30) rezultă

$$\frac{u^*}{u_\infty} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_\infty^2} - 1\right)}, \tag{32}$$

relație identică cu (20), fapt care arată că relația dintre viteza gazului ars pe axă și viteza gazului nears u_1 nu este modificată prin compresibilitate.

Pentru a găsi profilul vitezelor într-o secțiune oarecare, respectiv valoarea lățimii flăcării am putea reface raționamentul lui S c u r l o c k, fiind însă conduși în acest caz la ecuații complicate. De aceea vom presupune aproximativ ca și pentru problema plană [1] că repartiția de viteze nu este modificată de compresibilitate.

În acest caz ecuația de continuitate (23) se scrie

$$\rho_2 \int_0^{r_1} 2\pi r\, u\, dr + \rho_1 \pi (R^2 - r_1^2) u_1 = \rho_\infty \pi R^2 u_\infty \tag{33}$$

Dacă ținem seama de relațiile (28) și (32), relația (33) devine, adoptînd aceleași notații ca și pentru (25),

$$r_1^2\left[\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)} + U\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)\right] = \frac{\rho_\infty}{\rho_1} - U, \tag{34}$$

de unde, ținînd seama că

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2 (U^2 - 1)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \tag{35}$$

rezultă pentru $\eta_1(U)$ relația

$$\eta_1(U) = \sqrt{\frac{U - \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2 (U^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}}}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda (U^2 - 1)}}} \tag{36}$$

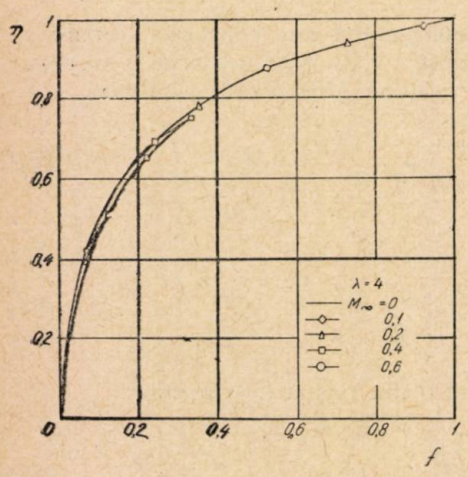


Fig. 6

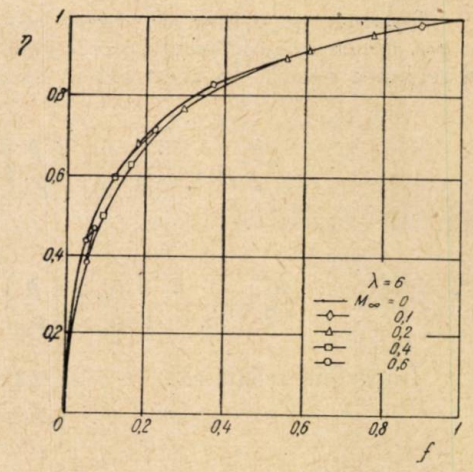


Fig. 7

Fracțiunea de gaze arse este

$$f = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_\infty} U (1 - \eta_1^2) \tag{37}$$

adică, ținînd seama de (35) și (36),

$$f = 1 - \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2 (U^2 - \right.$$

$$\left. - 1)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} U \left\{1 - \frac{U - \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2 (U^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}}}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda (U^2 - 1)}}\right\}\right. \tag{38}$$

Variația lui η_1 în funcție de f, dată de relațiile (36) și (38) este arătată în figurile 6, 7 și 8 pentru diverse numere M_∞. Din aceste figuri se constată că numărul Mach influențează puțin variația lui η_1 cu f. În schimb, ca și pentru

scurgerea plană [1], se constată că pentru numere M_∞ mai mari decît un anumit număr critic $M_{c\infty}$, arderea nu mai poate fi completă, frontul flăcării fiind « suflat » la extremități. Explicația acestui fenomen ar putea fi dată observînd că în aceste regiuni numărul Mach local ar deveni mai mare decît 1 și nu ar mai putea fi îndeplinite relațiile (6).

Numărul $M_{c\infty}$ poate fi calculat cu ajutorul relației (36), punînd condițiile ca la

$$U = U_c \; ; \; \eta_1 = 1 \; ; \; \frac{d\eta_1}{du} = 0, \tag{39}$$

condiții care se scriu

$$\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U_c - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda\,(U_c^2 - 1)} = U_c - \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_{c\infty}^2\,(U_c^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{U_c}{\sqrt{1 + \lambda\,(U_c^2 - 1)}} = 1 - U_c M_{c\infty}\left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_{c\infty}^2\,(U_c^2 - 1)\right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \tag{40}$$

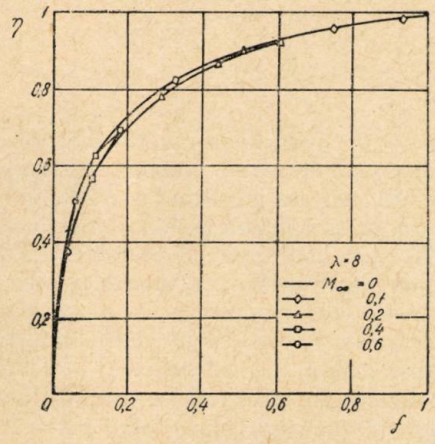


Fig. 8

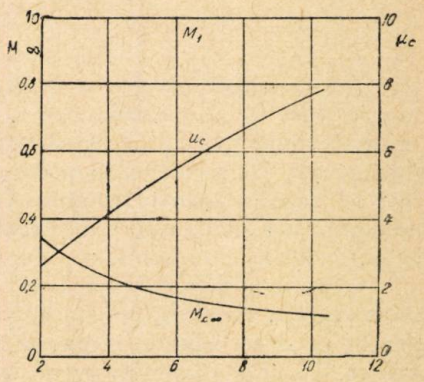


Fig. 9

Sistemul (40) reprezintă un sistem de două ecuații cu două necunoscute U_c și $M_{c\infty}$, identic ca formă cu sistemul care se obține pentru cazul scurgerii bidimensionale [1]. În consecință variația lui $M_{c\infty}$ și U_c cu λ este aceeași pentru ambele cazuri (fig. 9).

În considerațiile de mai sus nu s-a determinat forma frontului flăcării. Ecuația frontului flăcării poate fi găsită observînd că înclinarea locală a lui este dată de relația

$$\sin\alpha = \frac{w_n}{u_1}, \tag{41}$$

în care s-a notat cu $w_n = w_1$ viteza normală de combustie. Deoarece unghiul α nu are valori prea mari, se poate aproxima sinusul cu tangenta și în consecință

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{w_n}{u_1}, \tag{42}$$

ecuație diferențială care rezolvă problema. Într-adevăr, dacă se consideră viteza normală de combustie constantă (luînd eventual o valoare medie), obținem

$$x = \frac{Ru_\infty}{w_n} \int_{\tau_{i1}=0}^{\tau_{i1}} U \frac{d\tau_{i1}}{dU}\, dU, \tag{43}$$

în care $\frac{d\tau_{i1}}{dU}$ este dat de relația (26) sau de relația (36) în cazul cînd se ține seama de influența compresibilității. Relația (43) reprezintă ecuația frontului flăcării. Pentru camerele de combustie dreptunghiulare, considerații absolut analoge vor conduce la o relație de aceeași formă cu (42).

Relația (43) permite să se calculeze și lungimea L, pe care trebuie să o aibă camera de combustie, pentru ca arderea să se poată face complet. Această lungime este

$$L = \frac{RU_\infty}{w_n} \int_{\tau_{i1}=0}^{\tau_{i1}=1} U \frac{d\tau_{i1}}{dU}\, dU. \tag{44}$$

★

În concluzie rezultă că pe această cale se pot determina cîmpul de viteze, temperaturi etc., în cazul cînd un amestec de combustibil omogen se scurge printr-o cameră circulară de secțiune constantă, arderea efectuîndu-se în condițiile arătate. De asemenea se poate calcula cîmpul de entropii și deci și vîrtejurile care se nasc în spatele frontului flăcării. În plus, în funcție de caracteristicile de combustie ale amestecului, există un număr Mach critic al scurgerii la infinit amonte, de la care combustia nu se mai poate face complet.

Considerațiile făcute pot fi extinse și pentru cazul cînd camera de combustie are secțiunea variabilă, cu condiția ca variațiile secțiunii să fie suficient de lente, pentru ca să se poată face ipoteza că liniile de curent nu diferă cu mult de linii drepte. În aceste condiții se poate considera că distribuția de viteze păstrează același aspect și raționamentele pot fi refăcute în mod analog. În particular, dacă numărul Mach al scurgerii depășește numărul Mach $M_{c\infty}$, se poate calcula secțiunea finală a camerei de ardere în funcție de cea inițială, pentru ca arderea să se facă totuși complet. Această secțiune se poate calcula într-o primă aproximație cu ajutorul ecuațiilor mișcării unidimensionale a gazelor, punînd condiția ca în secțiunea respectivă să se atingă numărul Mach $M_{c\infty}$ (fig. 9).

Primită la redacție la 15 ianuarie 1955

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗАДАЧИ ЦИЕНА – СКУРЛОКА НА АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе соображения, высказанные Скурлоком и Циеном относительно случая сгорания однородной смеси газов в прямоугольной камере при двухразмерном протекании, применяются к случаю сгорания однородной смеси газа в камере сгорания круглого сечения при аксиально

симметричном движении; учитывается и влияние сжимаемости. Получаются сходные результаты.

В дополнение к упомянутым работам определяется кроме того форма фронтальной стороны пламени и длина камеры сгорания, необходимая для полного сгорания. Указывается также способ распространения полученных результатов на случай, когда сечение камеры сгорания изменяется, предполагая, что эти изменения происходят медленно.

SUR L'EXTENSION DU PROBLÈME DE TSIEN-SCURLOCK AUX MOUVEMENTS AXIAL-SYMÉTRIQUES

(RÉSUMÉ)

Le problème de Tsien-Scurlock [1] a trait à la combustion d'un mélange homogène de gaz dans une chambre rectangulaire, le mouvement étant considéré bidimensionel. On applique ces considérations à la combustion d'un mélange homogène de gaz dans une chambre de combustion circulaire, le mouvement étant considéré axial-symétrique. On tient également compte de l'influence de la compressibilité du gaz. L'auteur aboutit à des résultats semblables à ceux de Scurlock et Tsien.

Par rapport aux ouvrages cités ci-dessus, on détermine, en sus, la forme du front de flamme et la longueur de la chambre de combustion nécessaire à une combustion complète. On indique également la manière d'appliquer les résultats obtenus au cas où la section de la chambre de combustion est variable, en supposant cette variation lente.

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. Tsien, *Influence of the Flame Front on the Flow Field.* Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME, 1951, vol. 18, nr. 2, p. 188.
2. Th. Kármán, *Aerothermodynamic and Combustion Theory.* Aerotecnica, 1953, vol. XXXIII, nr. 1, p. 80.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

AEROMECANICĂ

CALCULUL LUNGIMII ELEMENTELOR COMPONENTE ALE UNUI TUB DE ŞOC, PENTRU O DURATĂ DE FUNCŢIONARE DATĂ

DE

LUCIAN DUMITRESCU

Timpul minim de funcţionare, necesar unui tub de şoc pentru efectuarea unei experienţe, este determinat de aparatura de vizualizare şi înregistrare cu care este dotat tubul; pe de altă parte, dimensiuni mai reduse ale camerei de presiune şi a celei de vid, permit o economie de energie pentru realizarea presiunii şi vacuumului şi o scurtare a intervalului de timp dintre experienţe. Ne-am propus de aceea să calculăm lungimea minimă a camerei de presiune şi a celei de vid, precum şi poziţia optimă a zonei de experimentare într-un tub de şoc, pentru un timp de funcţionare dat, la diferite valori ale numărului Mach.

A. INTERACŢIUNEA DINTRE O UNDĂ DE ŞOC ŞI O SUPRAFAŢĂ DE SEPARAŢIE, ÎN MIŞCARE UNIDIMENSIONALĂ NEPERMANENTĂ

Această problemă se aplică direct la calculul propus. Indicaţii asupra aspectului fizic al interacţiunii dintre o undă de şoc şi o suprafaţă de separaţie (reprezentînd o discontinuitate de temperaturi sau de natură a gazelor, sau ambele), se găsesc în literatură [1], însă nu şi calculul efectiv; de aceea, am fost nevoiţi să executăm acest calcul, ca preliminar la studiul problemelor propuse.

Să considerăm că într-o conductă cu secţiunea constantă se află două gaze, cu raport al căldurilor specifice, $\varkappa$ şi $\varkappa'$ şi viteze ale sunetului c_0 şi c_0', separate de o suprafaţă de discontinuitate; dacă gazele au o mişcare de-a lungul conductei cu viteza u_0, suprafaţa de separaţie va fi antrenată cu aceeaşi viteză. Să presupunem că o undă de şoc, deplasîndu-se în primul gaz, întîlneşte suprafaţa de separaţie; în al doilea mediu se va propaga o undă de şoc, avînd o intensitate în general diferită de cea a undei iniţiale, iar din punctul de intersecţie al acesteia din urmă cu suprafaţa de separaţie, se va reflecta în primul mediu, o perturbaţie. Această perturbaţie poate fi tot o undă de şoc sau o undă de rarefiere; se obţin respectiv configuraţiile din figurile 1 şi 2 [1]. După cum se va vedea mai jos, primul caz corespunde situaţiei $c_0' < c_0$, iar al doilea, la $c_0' > c_0$, dacă $\varkappa = \varkappa'$ (acelaşi gaz de ambele părţi ale suprafeţii de discontinuitate).

În fiecare secțiune a tubului, în intervalul de timp între trecerea a două unde, presiunea p, densitatea ρ, temperatura T, viteza sunetului c și viteza gazului u, au valorile constante înscrise pe figurile 1 și 2. Suprafața de separație se deplasează cu viteza gazelor adiacente; vitezele undelor de șoc le vom nota cu U_1, U_2, U_3.

Se mai pune:

$$\frac{p_0}{p_1} = \xi_1, \quad \frac{p_1}{p_2} = \xi_2, \quad \frac{p_0}{p_3} = \xi_3. \tag{1}$$

Se vede că $\xi_i \leqslant 1$, afară de ξ_2, care în cazul al doilea este supraunitar (este vorba de o rarefiere). Condițiile fizice care determină problema, sînt:

$$p_2 = p_3, \tag{2}$$

$$u_2 = u_3. \tag{3}$$

Ele rezultă din considerarea echilibrului suprafeței de separație după trecerea undei de șoc.

Din (2), se găsește numaidecît:

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = \xi_3. \tag{4}$$

ξ_1 fiind cunoscut, o a doua relație între ξ_2 și ξ_3 se deduce din (3). În acest scop se calculează u_2 și u_3, pornind de la condițiile de pe o parte și alta a suprafeței de separație inițiale, ținînd seama că în stînga se traversează două unde de șoc (sau, în cazul al doilea, o undă de șoc și una de rarefiere), iar în dreapta, o undă de șoc cu intensitatea ξ_3.

Dacă se cunoaște starea gazului pe o parte a unei unde de șoc și intensitatea undei, se poate determina starea gazului pe cealaltă parte a undei de șoc, prin aplicarea legilor energiei, a impulsului și a conservării masei [1]. Aplicîndu-se formulele respective de două ori în stînga și o dată în dreapta, se obțin, pentru configurația din figura 1, următoarele valori pentru u_2 și u_3:

$$u_2 = u_0 + c_0 \frac{(1-\mu^2)\left[(1-\xi_1)\sqrt{\xi_2(1+\mu^2\xi_2)} - (1-\xi_2)\sqrt{\xi_1+\mu^2}\right.}{\sqrt{\xi_1\xi_2(1+\mu^2)(1+\mu^2\xi_1)(1+\mu^2\xi_2)}}, \tag{5}$$

$$u_3 = u_0 + c_0' \frac{(1-\mu'^2)(1-\xi_1\xi_2)}{\sqrt{\xi_1\xi_2(1+\mu'^2)(1+\mu'^2\xi_1\xi_2)}}. \tag{6}$$

Aici s-au notat

$$\mu^2 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}, \quad \mu'^2 = \frac{\varkappa' - 1}{\varkappa' + 1}. \tag{7}$$

Introducînd rezultatele în relația (3), se deduce:

$$\frac{c_0'}{c_0} = \frac{1-\mu^2}{1-\mu'^2} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \cdot \frac{(1-\xi_1)\sqrt{\xi_2(1+\mu^2\xi_2)} - (1-\xi_2)\sqrt{\xi_1+\mu^2}}{1-\xi_1\xi_2} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu'^2\xi_1\xi_2}{(1+\mu^2\xi_1)(1+\mu^2\xi_2)}}. \tag{8}$$

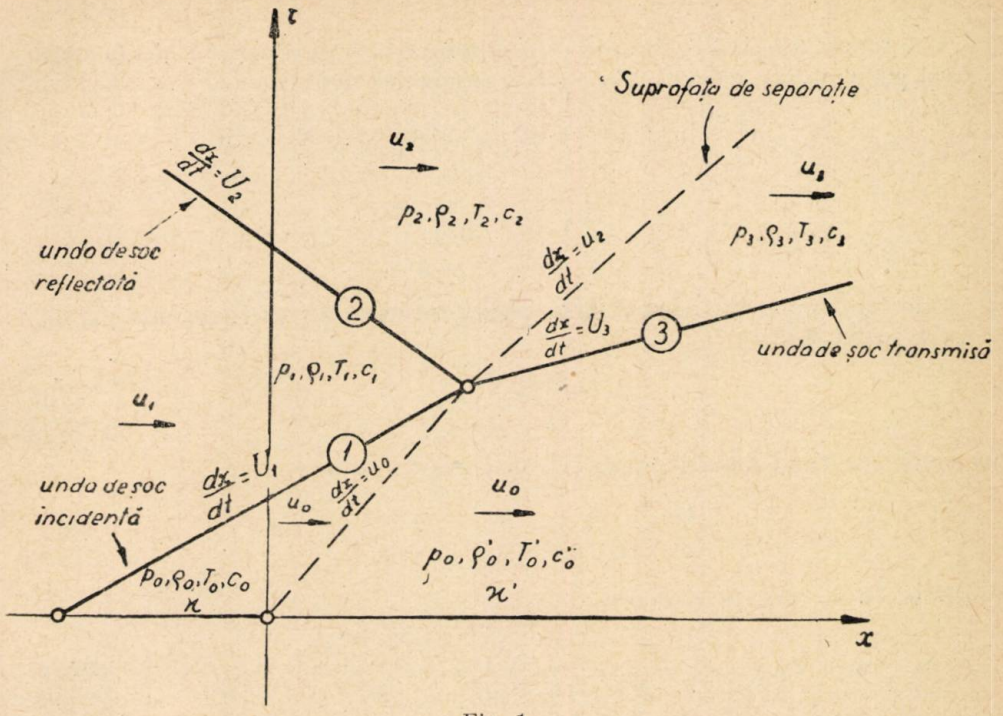

t
Suprafața de separație
u_2
p_2, ρ_2, T_2, c_2
u_3
p_3, ρ_3, T_3, c_3
undă de șoc reflectată
$\frac{dx}{dt} = U_2$
$\frac{dx}{dt} = u_2$
$\frac{dx}{dt} = U_3$
undă de șoc transmisă
p_1, ρ_1, T_1, c_1
u_1
undă de șoc incidentă
$\frac{dx}{dt} = U_1$
$\frac{dx}{dt} = u_0$
u_0
p_0, ρ_0, T_0, c_0
$\varkappa$
p_0, ρ_0', T_0', c_0'
$\varkappa'$
x

Fig. 1

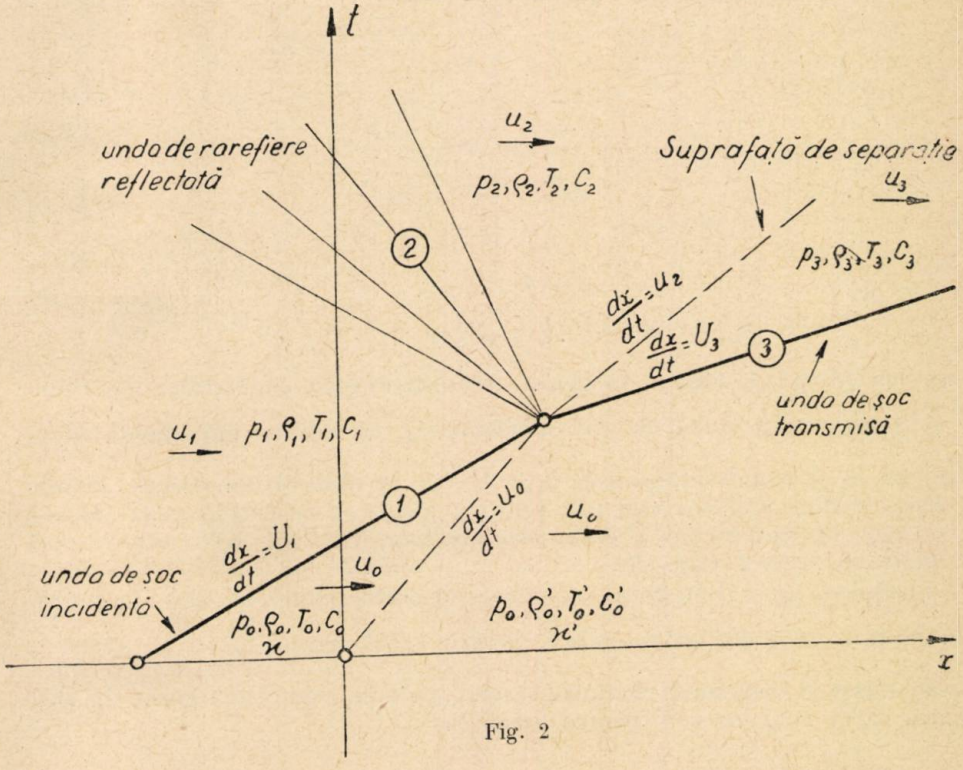

t
undă de rarefiere reflectată
u_2
p_2, ρ_2, T_2, C_2
Suprafață de separație
u_3
p_3, ρ_3, T_3, C_3
$\frac{dx}{dt} = u_2$
$\frac{dx}{dt} = U_3$
undă de șoc transmisă
u_1
p_1, ρ_1, T_1, C_1
$\frac{dx}{dt} = u_0$
u_0
$\frac{dx}{dt} = U_1$
undă de șoc incidentă
u_0
p_0, ρ_0, T_0, C_0
$\varkappa$
p_0, ρ_0', T_0', C_0'
$\varkappa'$
x

Fig. 2

Dacă discontinuitatea este numai de temperaturi (deci, de o parte și de alta este același gaz), atunci $\varkappa = \varkappa'$, $\mu^2 = \mu'^2$ și relația (8) devine

$$\frac{c_0'}{c_0} = \frac{(1-\xi_1)\sqrt{\xi_2(1+\mu^2\xi_2)} - (1-\xi_2)\sqrt{\xi_1+\mu^2}}{1-\xi_1\xi_2} \times \sqrt{\frac{1+\mu^2\xi_1\xi_2}{(1+\mu^2\xi_1)(1+\mu^2\xi_2)}}. \tag{9}$$

În cazul reprezentat în figura 2, la trecerea prin unda de rarefiere, entropia nu variază, astfel încît

$$\frac{p_2}{\rho_2^{\varkappa}} = \frac{p_1}{\rho_1^{\varkappa}}. \tag{10}$$

De asemenea, fiind o undă simplă [1], mai există relația

$$\frac{u_2}{2} + \frac{c_2}{\varkappa - 1} = \frac{u_1}{2} + \frac{c_1}{\varkappa - 1}. \tag{11}$$

Expresia lui u_2 este, în acest caz

$$u_2 = u_0 + c_0 \frac{1-\mu^2}{\sqrt{\xi_1(1+\mu^2\xi_1)}}\left[\frac{1-\xi_1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\sqrt{\xi_1+\mu^2}}{\mu^2}\left(1-\xi_2^{-\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}\right)\right]. \tag{12}$$

Relația (6), pentru u_3, rămîne valabilă; rezultă

$$\frac{c_0}{c_0'} = \mu^2 \frac{1-\mu'^2}{1-\mu^2}\sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+\mu'^2}} \frac{1-\xi_1\xi_2}{\mu^2(1-\xi_1) + \sqrt{1+\mu^2}\sqrt{\xi_1+\mu^2}\left(1-\xi_2^{-\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}\right)} \times \sqrt{\frac{1+\mu^2\xi_1}{\xi_2(1+\mu'^2\xi_1\xi_2)}}. \tag{13}$$

Dacă $\mu^2 = \mu'^2$ (vezi mai sus)

$$\frac{c_0}{c_0'} = \mu^2 \frac{1-\xi_1\xi_2}{\mu^2(1-\xi_1) + \sqrt{1+\mu^2}\sqrt{\xi_1+\mu^2}\left(1-\xi_2^{-\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}\right)} \sqrt{\frac{1+\mu^2\xi_1}{\xi_2(1+\mu^2\xi_1\xi_2)}}. \tag{14}$$

Formulele (8) și (13) rezolvă problema propusă, întrucît cunoașterea raportului $\frac{c_0'}{c_0}$ și a intensității undei de șoc incidente ξ_1, determină intensitatea undei reflectate, ξ_2 și a undei transmise, $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Se observă din relațiile deduse că, dacă mediul al doilea este mai cald ($c_0' > c_0$), se reflectă o undă de șoc $\xi_2 < 1$ (fig. 1); dacă mediul al doilea este mai rece, ($c_0' < c_0$), se reflectă o undă de rarefiere, $\xi_2 > 1$ (fig. 2).

Relațiile (8) și (14) nu pot fi explicitate; de aceea, pentru calculele ulterioare, s-au reprezentat grafic aceste relații, pentru cazul aerului $\left(\varkappa = \frac{7}{5},\ \mu_2 = \frac{1}{6}\right)$ și s-au trasat și diagramele complementare. Ele sînt redate în figurile 3*a* și *b* (pentru cazul 1) și 4*a* și *b* (pentru cazul 2).

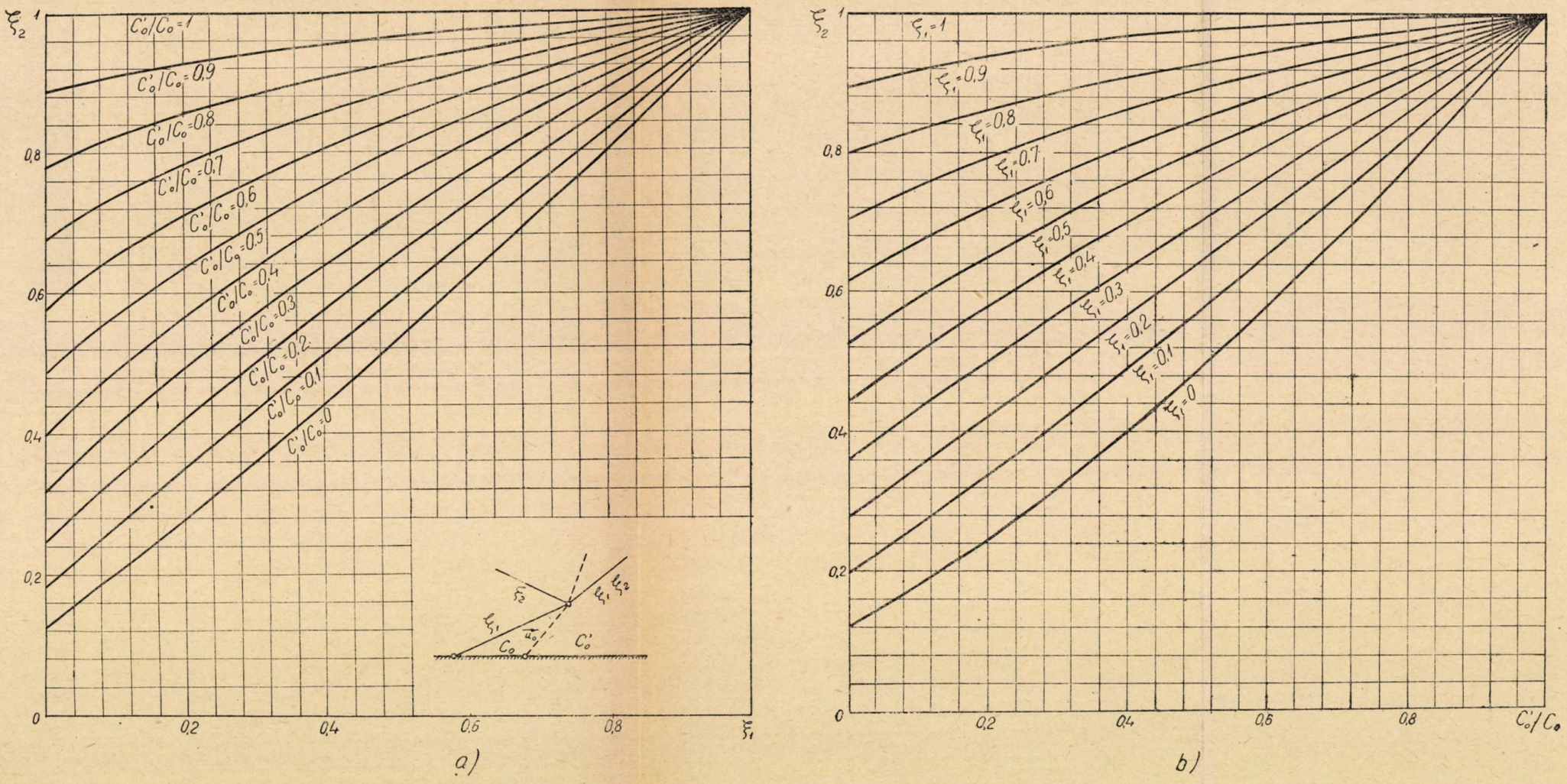
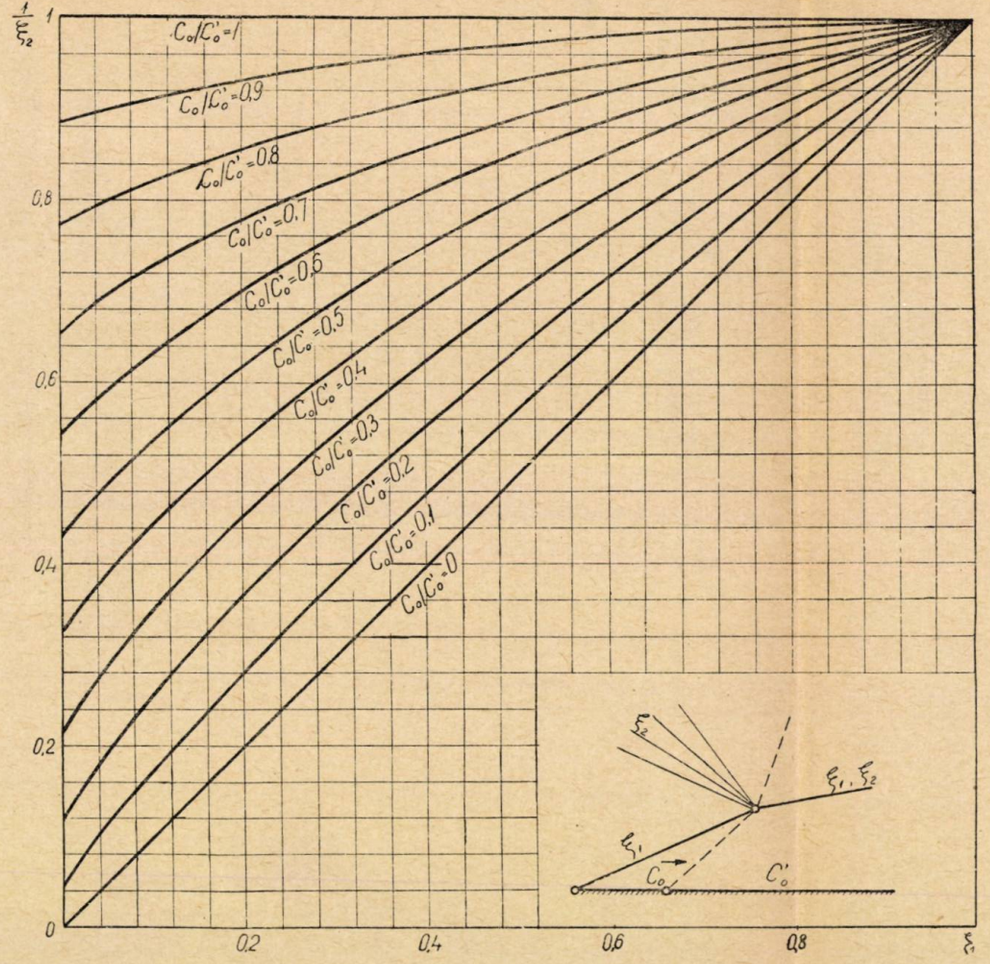
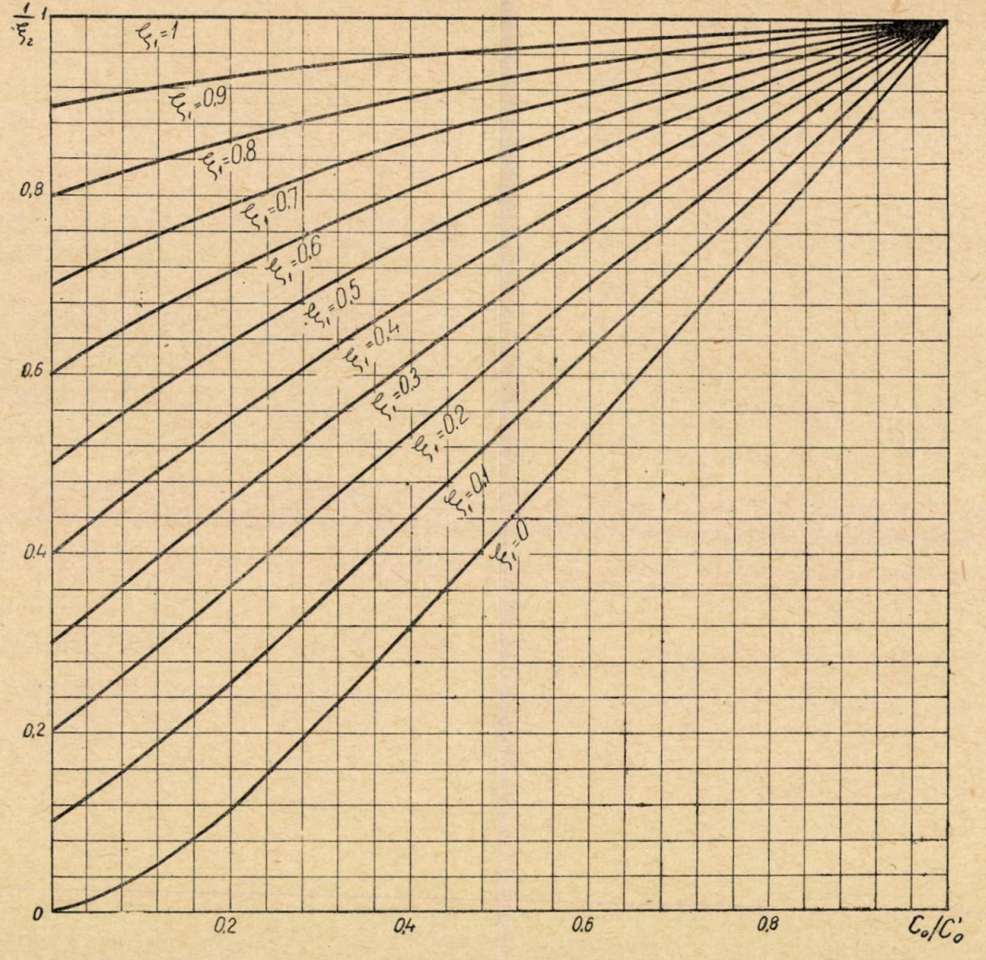


Fig. 3

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848


1/ξ2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
ξ1
C0/C'0=1
C0/C'0=0,9
C0/C'0=0,8
C0/C'0=0,7
C0/C'0=0,6
C0/C'0=0,5
C0/C'0=0,4
C0/C'0=0,3
C0/C'0=0,2
C0/C'0=0,1
C0/C'0=0
ξ2
ξ1, ξ2
ξ1
C0
C'0

a)


1/ξ2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
C0/C'0
ξ1=1
ξ1=0,9
ξ1=0,8
ξ1=0,7
ξ1=0,6
ξ1=0,5
ξ1=0,4
ξ1=0,3
ξ1=0,2
ξ1=0,1
ξ1=0

b)

Fig. 4

B. CALCULUL LUNGIMII MINIME A ELEMENTELOR UNUI TUB DE ȘOC, PENTRU UN TIMP DE FUNCȚIONARE DAT ȘI REALIZAREA UNUI NUMĂR MACH DAT, ÎNAINTEA SUPRAFEȚEI DE SEPARAȚIE

Pentru studierea fenomenelor dintr-un tub de șoc, este comodă o reprezentare într-o diagramă, avînd în abscisă secțiunile din lungul tubului, iar în ordonată, timpul. În figura 5 este dată o asemenea diagramă. Este ușor de văzut

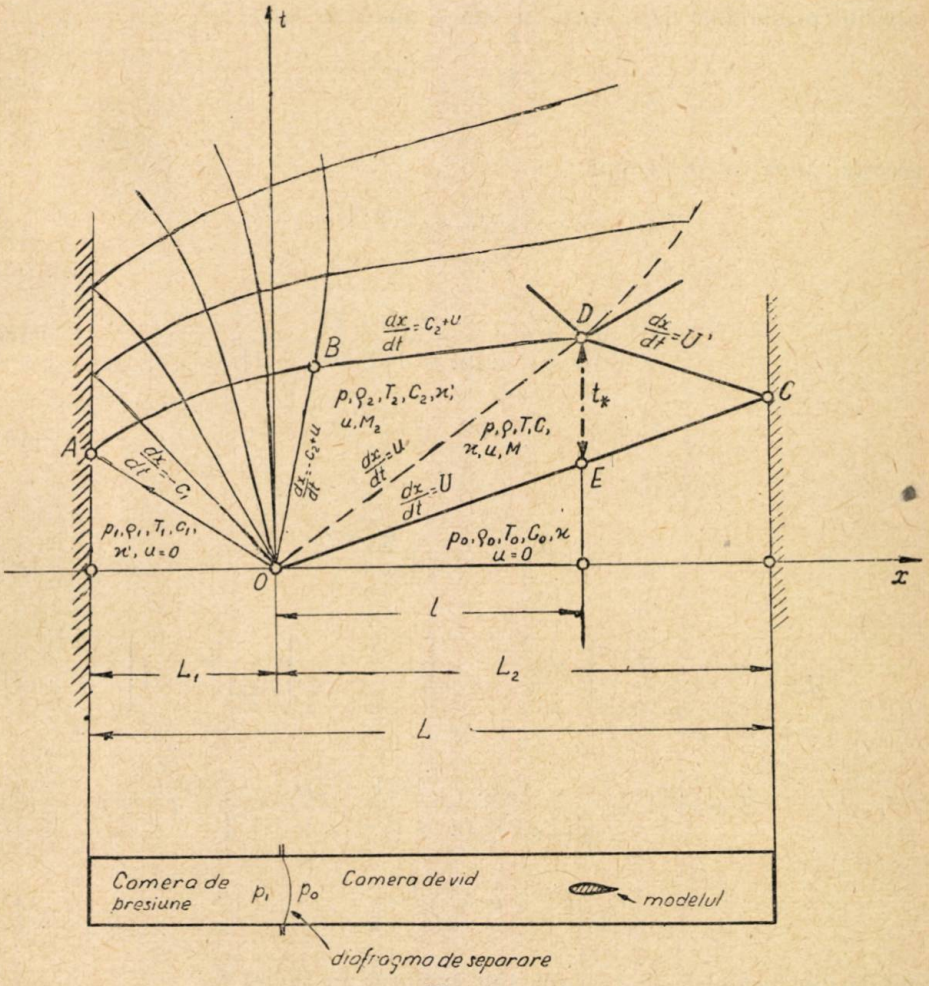


Fig. 5

că secțiunea pentru care durata scurgerii permanente, de la trecerea undei de șoc, pînă la ajungerea suprafeței de separație, este maximă, se află în punctul unde suprafața de separație este ajunsă din urmă de unda de rarefiere care s-a reflectat pe fundul camerei de presiune.

În aceste condiții, lungimea minimă a camerei de vid este determinată de condiția ca unda de șoc reflectată pe peretele din fund al acestei camere să treacă prin același punct de mai sus. Se ajunge astfel la configurația din figura 5.

Folosind relațiile pentru unde de șoc și de rarefiere, se pot determina parametrii gazului în fiecare din zonele ce se pot distinge pe figura 5 [2]. Dacă se notează raportul presiunilor inițiale,

$$\frac{p_0}{p_1} = \Xi \tag{15}$$

și raportul presiunilor de o parte și alta a undei de șoc,

$$\frac{p_0}{p} = \xi, \tag{16}$$

se găsește, după calcule simple:

$$\frac{U^2}{c_0^2} = \frac{(\varkappa - 1)\,\xi + \varkappa + 1}{2\,\varkappa\,\xi}, \tag{17}$$

$$M^2 = \left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{2\,(1-\xi)^2}{\varkappa\,[(\varkappa+1)\,\xi + \varkappa - 1]}, \tag{18}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\varkappa + 1 + (\varkappa - 1)\,\xi}{(\varkappa+1)\,\xi + \varkappa - 1}, \tag{19}$$

$$c_2 = c_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa'-1}{2\varkappa'}} = c_1 \left(\frac{\Xi}{\xi}\right)^{\frac{\varkappa'-1}{2\varkappa'}}, \tag{20}$$

$$M_2 = \frac{u}{c_2} = \frac{2}{\varkappa' - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa'-1}{2\varkappa'}} - 1\right] = \frac{2}{\varkappa' - 1}\left[\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^{\frac{\varkappa'-1}{2\varkappa'}} - 1\right], \tag{21}$$

$$\Xi = \xi\left\{1 - \frac{c_0\,(\varkappa' - 1)\,(1-\xi)}{c_1\,[2\varkappa\,\xi\,[\xi\,(\varkappa-1) + \varkappa + 1]]^{1/2}}\right\}^{\frac{2\varkappa'}{\varkappa'-1}}, \tag{22}$$

$$U' = u - \frac{c^2}{U - u}. \tag{23}$$

Notațiile din formulele de mai sus sînt explicate în figura 5.

Folosind relațiile de mai sus se pot determina coordonatele fiecărui punct din figura 5. Pentru calculul lui t_B (ordonata punctului B), se utilizează metoda lui Riemann, de integrare a ecuațiilor mișcării izentropice unidimensionale nepermanente, aplicată la cazul reflexiei unei unde de rarefiere pe un perete rigid. În cazul cînd numărul n' definit de

$$n' = \frac{1}{2}\,\frac{3 - \varkappa'}{\varkappa' - 1}, \tag{24}$$

este întreg $\left(\text{deci pentru } \varkappa' = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \cdots\right)$ ceea ce acoperă majoritatea gazelor reale $\left(\varkappa' = \frac{7}{5} \text{ pentru aer}\right)$, soluția este exprimabilă prin funcții elementare.

Se găsește [3]

$$t_B = \frac{c_1^{n'} L_1 (2n' + 1)^{n'+1}}{[(2n' + 1) c_1 - u]^{n'+1}} . \tag{25}$$

În continuare, avem

$$x_B = (- c_2 + u) t_B . \tag{26}$$

Ecuația dreptei BD (care este o linie caracteristică C_+), este

$$\frac{dx}{dt} = c_2 + u , \tag{27}$$

sau

$$x - x_B = (c_2 + u)(t - t_B) . \tag{27 bis}$$

Intersectînd cu dreapta OD, de ecuație

$$x = ut, \tag{28}$$

rezultă, după calcule elementare,

$$t_D = 2t_B , \tag{29}$$

$$x_D = l = ut_D . \tag{30}$$

Avînd în vedere că $x_D = x_E = l$ și că

$$x_E = Ut_E , \tag{31}$$

se poate scrie valoarea timpului de funcționare t_* :

$$t_* = t_D - t_E = t_D \left(1 - \frac{u}{U}\right) . \tag{32}$$

Întorcîndu-ne înapoi, putem acum determina toate coordonatele punctelor din figura 5, în funcție de t_*.

În continuare se găsește:

$$t_C = \frac{L_2}{U} . \tag{33}$$

Ecuația dreptei CD este

$$\frac{dx}{dt} = U' , \tag{34}$$

sau

$$x - L_2 = U'(t - t_C). \tag{35}$$

Aplicînd-o în punctul D, se găsește o relație care permite determinarea lungimii L_2:

$$l - L_2 = U'\left(t_D - \frac{L_2}{U}\right). \tag{36}$$

Lungimile căutate, l, L_1, și L_2, se găsesc ca funcție de numărul Mach M și de t_*, din formulele (25), (30) și (36), aplicînd relațiile (17)...(23).

Punînd

$$C = \frac{c}{c_0} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho\xi}} = \sqrt{\frac{(\varkappa+1)\xi + \varkappa - 1}{\xi[\varkappa + 1 + \xi(\varkappa - 1)]}}, \tag{37}$$

$$N = \frac{U}{c_0} = \sqrt{\frac{(\varkappa-1)\xi + \varkappa + 1}{2\varkappa\xi}}, \tag{38}$$

$$Q = 1 - \frac{MC}{N}, \tag{39}$$

$$k = \frac{c_0}{c_1}, \tag{40}$$

$$\lambda = c_0 t_*, \tag{41}$$

(mărimea λ are dimensiunile unei lungimi și joacă rol de unitate), se obține pînă la urmă:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{MC}{Q}, \tag{42}$$

$$\frac{L_1}{\lambda} = \frac{1}{2kQ}\frac{(2n' + 1 - MCk)^{n'+1}}{(2n' + 1)^{n'+1}}, \tag{43}$$

$$\frac{L_2}{\lambda} = \frac{NC^2}{Q}\frac{1}{N^2Q^2 + C^2}. \tag{44}$$

În aceste formule C, N și Q sînt funcții de ξ, care este la rîndul său determinat cînd se cunoaște numărul M, din (18); astfel, se vede că relațiile (42), (43) și (44) rezolvă problema propusă, căci ele dau lungimile porțiunilor tubului de șoc ca funcție de M și t_*.

În cazul cînd în ambele camere este același gaz, $c_0 = c_1$ (deci $k = 1$) și $\varkappa = \varkappa'$. Dacă acest gaz este aerul, $\varkappa = \frac{7}{5}$ și mărimile de mai sus se scriu după cum urmează:

$$\Xi = \xi\left\{1 - \frac{1-\xi}{[7\xi(\xi+6)]^{1/2}}\right\}^7, \tag{22 bis}$$

$$n' = 2, \tag{24 bis}$$

$$C = \sqrt{\frac{6\xi + 1}{\xi(6+\xi)}}, \tag{37 bis}$$

$$N = \sqrt{\frac{\xi + 6}{7\xi}}. \tag{38 bis}$$

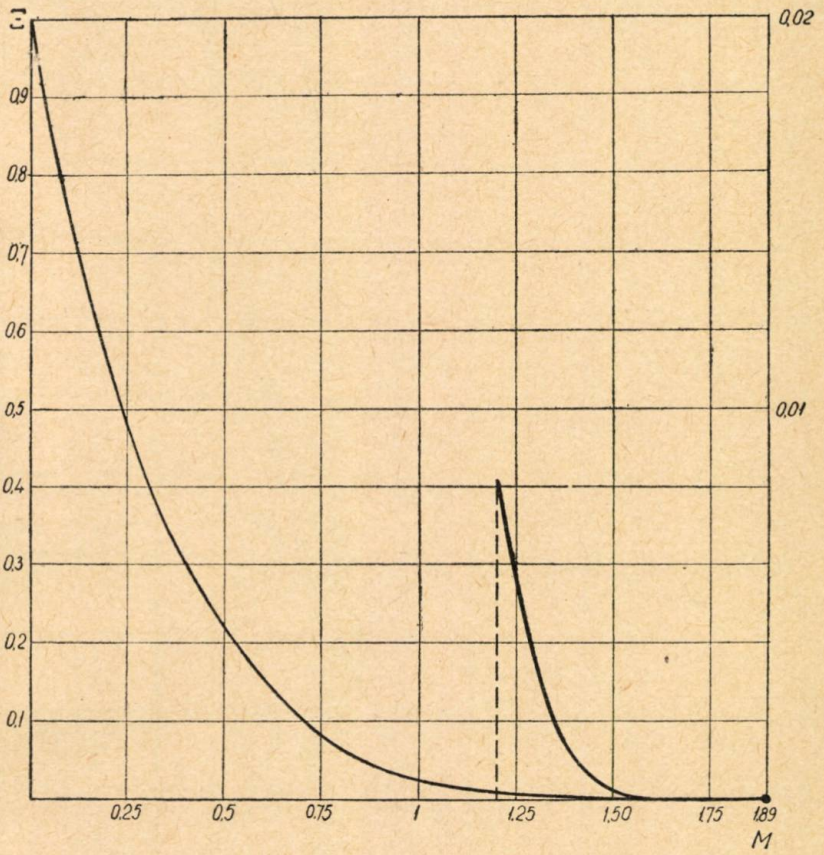


Fig. 6

Formulele (42) şi (44) rămîn la fel, iar (43) devine

$$\frac{L_1}{\lambda} = \frac{(5 - MC)^3}{250\,Q}. \tag{43 bis}$$

Avînd în vedere aplicaţiile practice, s-a reprezentat grafic variaţia lui Ξ, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{L_1}{\lambda}$ şi $\frac{L_2}{\lambda}$ pentru aer, în diagramele din figurile 6 şi 7.

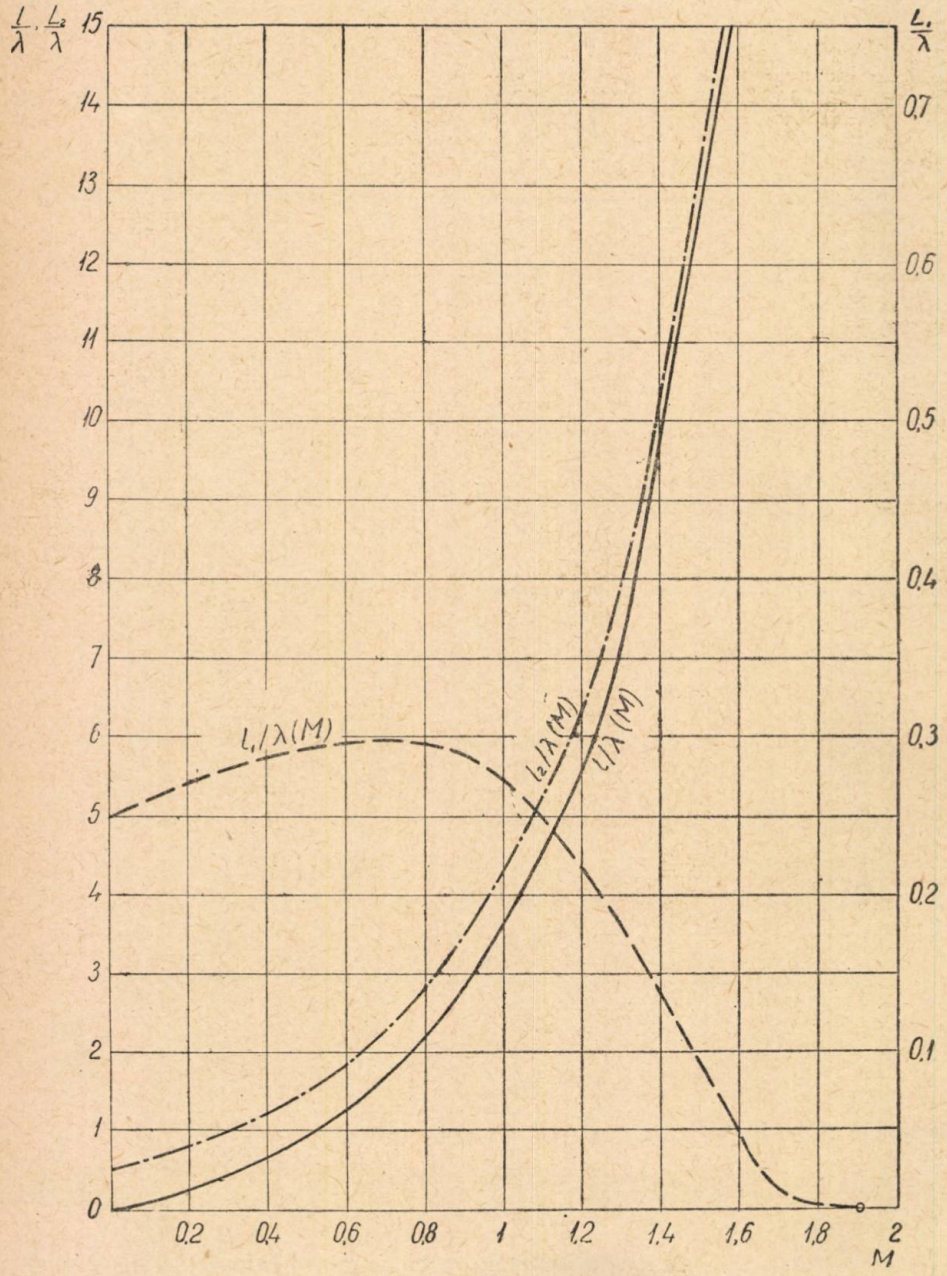

$\frac{l}{\lambda}, \frac{L_2}{\lambda}$
$\frac{L_1}{\lambda}$
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$l_1/\lambda(M)$
$L_2/\lambda(M)$
$L/\lambda(M)$
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
M

Fig. 7

C. CALCULUL LUNGIMII MINIME A ELEMENTELOR TUBULUI DE ȘOC, PENTRU UN TIMP DE FUNCȚIONARE DAT ȘI PENTRU REALIZAREA UNUI NUMĂR MACH DAT ÎN SPATELE SUPRAFEȚEI DE SEPARAȚIE

Se știe că numărul Mach M al scurgerii din spatele undei de șoc crește în mod limitat (pînă la circa 1,89, pentru aer), cînd raportul presiunilor din tub crește.

În schimb, în spatele suprafeței de discontinuitate, numărul Mach M_2 crește nelimitat o dată cu raportul presiunilor de pe o parte și alta a diafragmei. Ca și mai sus, se vede că poziția pentru care durata scurgerii permanente cu numărul Mach M_2 este maximă, este determinată de punctul B (fig. 8). Pentru ca lungimea tubului de șoc să fie minimă, trebuie ca unda de șoc reflectată să treacă prin punctul B.

Este interesant de aceea să se refacă studiul din secțiunea precedentă, în condițiile din figura 8, luînd ca parametru M_2.

Acesta este legat de raportul ξ, prin următoarea relație (d dusă din (20) și (21)):

$$M_2 = \frac{2}{\varkappa' - 1}\left\{1 - \frac{1}{\dfrac{c_0(\varkappa'-1)(1-\xi)}{c_1[2\varkappa\xi[\xi(\varkappa-1)+\varkappa+1]]^{1/2}}} - 1\right\}. \tag{45}$$

Relațiile deduse mai sus rămîn în majoritatea cazurilor valabile, și avem

$$B' = \frac{L_1'(2n'+1)^{n'+1}}{c_1\left|(2n'+1) - \dfrac{u}{c_2}\cdot\dfrac{c_2}{c_1}\right|^{n'+1}}. \tag{46}$$

Poziția optimă a secțiunii experimentale este dată de relația

$$l' = (-c_2 + u)\, t_{B'}. \tag{47}$$

Vom introduce notațiile:

$$C_2 = \frac{c_2}{c_1} = 1 - \frac{c_0(\varkappa'-1)(1-\xi)}{c_1[2\varkappa\xi[\xi(\varkappa-1)+\varkappa+1)]]^{1/2}}. \tag{48}$$

$$\lambda' = c_0\, t_{**}, \tag{49}$$

și vom observa că

$$t_{B'} = M_2\, t_{**}, \tag{50}$$

unde t_{**} este durata scurgerii permanente în spatele suprafeței de discontinuitate, în zona experimentală.

Rezultă, din (46) și (47):

$$\frac{L_1'}{\lambda'} = \frac{[2n'+1-M_2C_2]^{n'+1}}{k(2n'+1)^{n'+1}}, \tag{51}$$

$$\frac{l'}{\lambda'} = \frac{M_2C_2}{k}(M_2 - 1). \tag{52}$$

Pentru calculul lungimii L_2', vom folosi relația (35), pe care o vom aplica în punctul D', ținînd seama că $x_{D'} = ut_{D'}$

$$ut_{D'} - L_2' = U'\left(t_{D'} - \frac{L_2'}{U}\right). \tag{53}$$

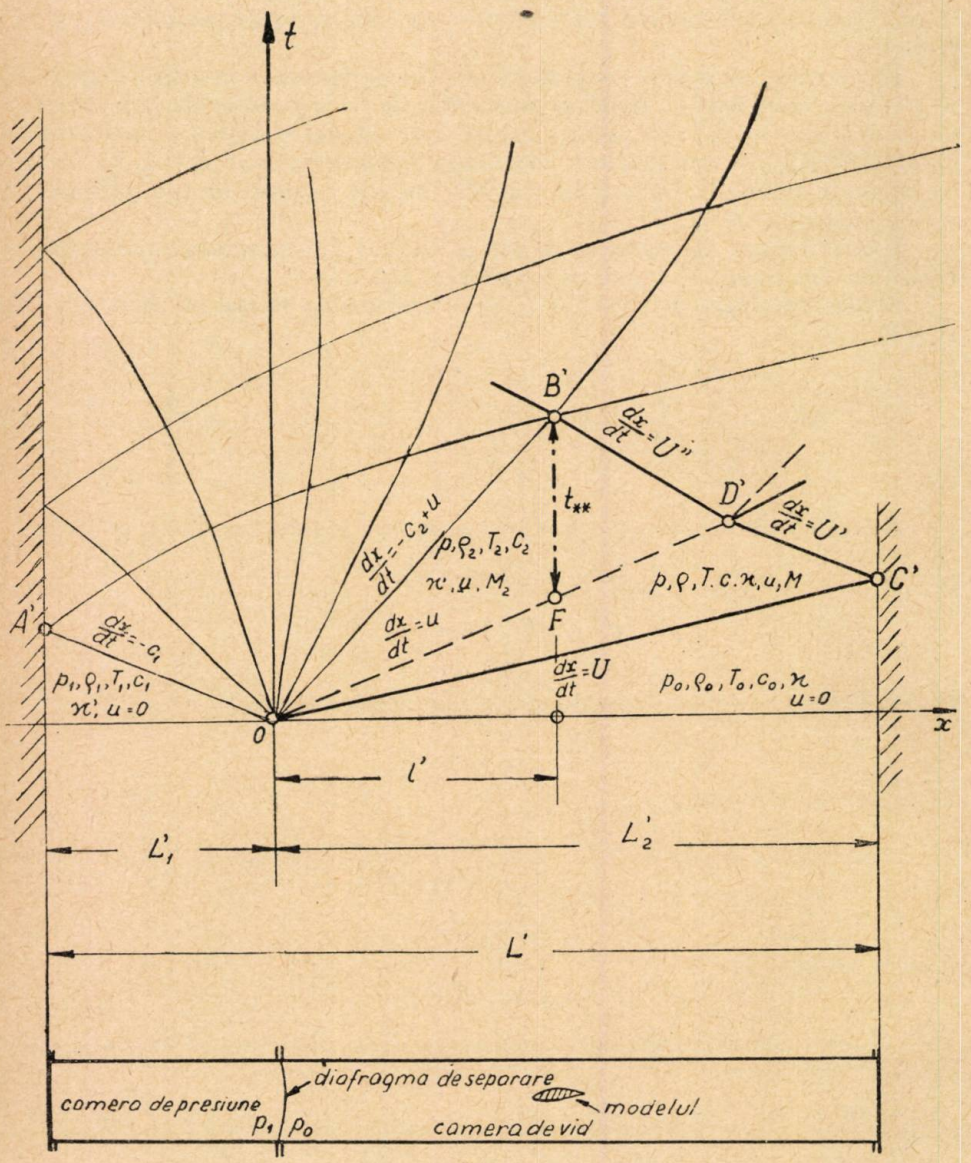


Fig. 8

Apoi vom scrie ecuația dreptei $D'B'$ și vom scrie că are drept pantă U'', care este viteza de propagare a unei unde de șoc după traversarea suprafeței de discontinuitate.

Trebuie deci calculată viteza U''. În acest scop vom determina intensitatea ξ'' a undei $D'B'$. Intensitatea ξ', a undei de șoc reflectate, este [1]

$$\xi' = \frac{\varkappa - 1 + \xi(\varkappa + 1)}{3\varkappa - 1 - (\varkappa - 1)\xi}. \tag{54}$$

Dacă se cunoaște ξ', rezultă din formulele deduse în secțiunea A a acestei lucrări, valoarea ξ'':

$$\xi'' = \xi' X\left(\frac{C_2}{C \cdot k}\right). \tag{55}$$

Aici s-a notat cu X relația (dedusă prin explicitarea grafică a formulei (9), dintre intensitatea undei de șoc incidente și intensitatea undei de șoc reflectate de o suprafață de discontinuitate, ca funcție de raportul vitezelor sunetului. Funcția X este reprezentată în diagrama din figura 3*b*. Viteza U'' este legată de ξ'' prin relația [1]

$$\left(\frac{u - U''}{c_2}\right)^2 = \frac{\varkappa' + 1 + \xi''(\varkappa' - 1)}{2\varkappa'\xi''} = N''^2. \tag{56}$$

Rezultă

$$U'' = c_1 C_2 (M_2 - N''). \tag{57}$$

Scriind acum ecuația dreptei $D'B'$:

$$l' - ut_{D'} = U''(t_{B'} - t_{D'}), \tag{58}$$

și eliminînd $t_{D'}$ din (53) și (58), rezultă lungimea L_2', căutată. Dacă se notează

$$R = \left(1 - \frac{M_2 C_2}{k N}\right), \tag{59}$$

se găsește pînă la urmă

$$\frac{L_2'}{\lambda'} = \frac{N'' - 1}{N''} \frac{M_2 N C^2}{C^2 + R^2 N^2}. \tag{60}$$

N'' este funcție de ξ, prin intermediul relațiilor (56), (55) și (54). Se vede astfel că formulele (51), (52) și (60) determină lungimea elementelor tubului, ca funcție de M_2 și t_{**}, prin intermediul lui ξ (care este legat de M_2 prin relația (45)).

În cazul particular cînd există aer în ambele camere, formulele de mai sus se simplifică astfel:

$$M_2 = 5\left\{\frac{1}{1 - \frac{1 - \xi}{[7\xi(\xi + 6)]^{1/2}}} - 1\right\}, \tag{45'}$$

$$C_2 = 1 - \frac{1-\xi}{\sqrt{7\xi(\xi+6)}}, \tag{48'}$$

$$\frac{L_1'}{\lambda'} = \frac{(5 - M_2C_2)^3}{125}, \tag{51'}$$

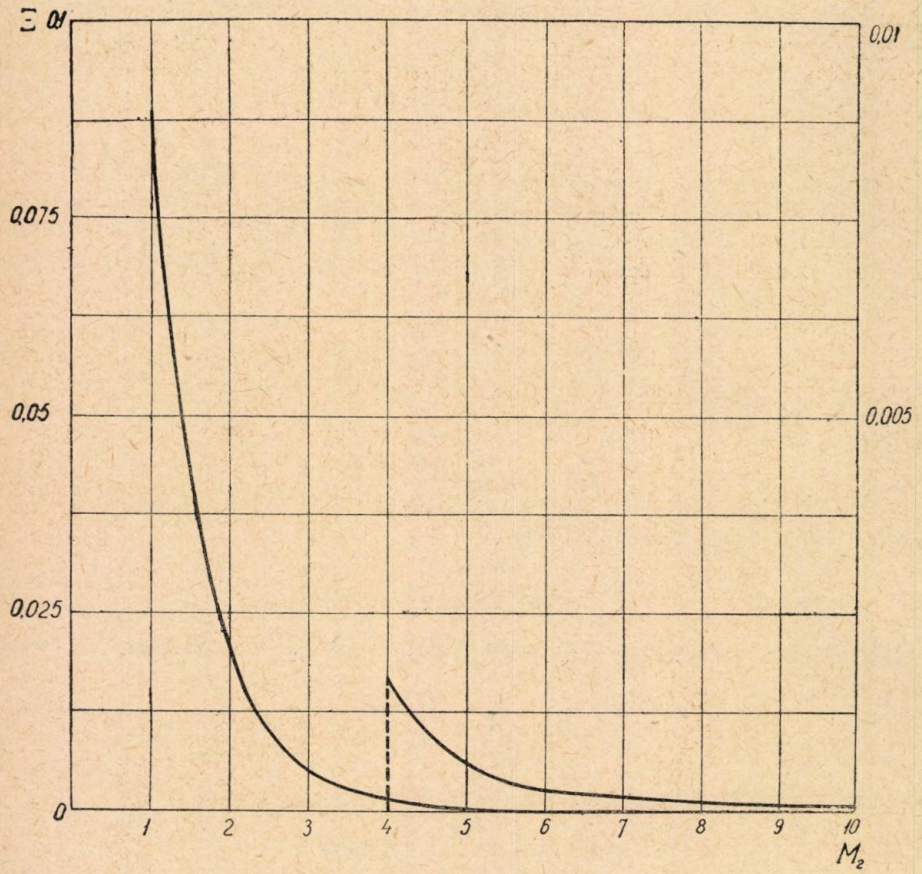


Fig. 9

$$\frac{l'}{\lambda'} = M_2C_2(M_2 - 1), \tag{52'}$$

$$R = 1 - \frac{M_2C_2}{N}. \tag{59'}$$

Formula (60) nu se schimbă. În diagramele din figurile 9 și 10 s-a reprezentat variația lui Ξ, $\frac{l'}{\lambda'}$, $\frac{L_1'}{\lambda'}$ și $\frac{L_2'}{\lambda'}$ ca funcție de M_2.

Primită la redacție la 22 septembrie 1955

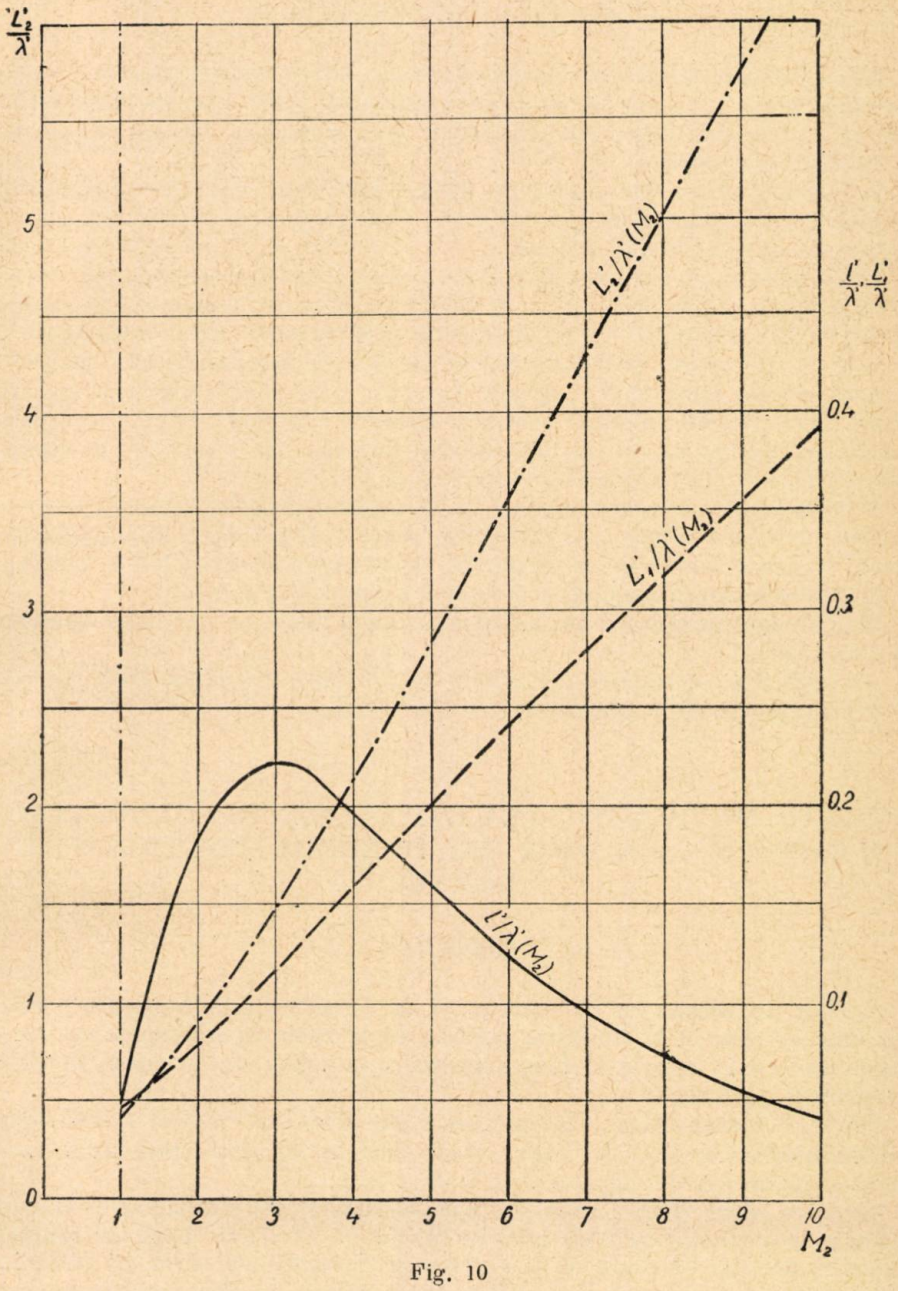

$\frac{L_2'}{\lambda'}$
$\frac{l'}{\lambda'}, \frac{L_1'}{\lambda'}$
$L_2'/\lambda'(M_2)$
$L_1'/\lambda'(M_2)$
$l'/\lambda'(M_2)$
0
1
2
3
4
5
0,1
0,2
0,3
0,4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
M_2

Fig. 10

РАСЧЕТ ДЛИНЫ СОСТАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ УДАРНОЙ ТРУБЫ ДЛЯ ЗАДАННОГО ВРЕМЕНИ ДЕЙСТВИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Цель статьи определить минимальную длину частей ударной трубы и оптимального положения экспериментальной зоны для реализации некоторой продолжительности действия как функции числа Маха для постояного протекания.

В разделе *A* рассматривается взаимодействие ударной волны и поверхности прерывистости (рис. 1 и 2). Результаты конкретизированы в диаграммах рисунков 3*a*, *в* и 4*a*, *в*.

В разделе *B* статьи рассчитывается длина элементов ударной трубки для получения числа Маха, M и продолжительности действия t_*, указанной перед поверхностью прерывистости в условиях, представленных на рисунке 5. Применяя теорию непостоянных одномерных сжимаемых протеканий, автор приходит к формулам (42), (43), (44), которые решают задачу. Для случая, когда в обеих камерах ударной трубы находится воздух, эти формулы переходят в формулы (42), (43 бис), (44) и изображены графически на диаграммах рисунков 6 и 7.

В разделе *C* рассматривается та же задача, причем исследуется протекание за поверхностью разделения с числом Маха M_2 и продолжительностью t_{**} (в отличие от M число M_2 возрастает беспредельно, одновременно с отношением давления в ударной трубе) (рис.8).

Пользуясь результатами, полученными в разделе *A*, автор приходит к формулам (51) (52), (60).

Для воздуха применяются формулы (51 бис), (52 бис), (60), которые даются на диаграммах рисунков 9 и 10.

CALCUL DE LA LONGUEUR DES ÉLÉMENTS COMPOSANTS D'UN TUBE DE CHOC POUR UNE DURÉE DE FONCTIONNEMENT DONNÉE

(RÉSUMÉ)

Le but du travail est de déterminer la longueur minimum des portions d'un tube de choc et la meilleure position de la zone expérimentale en vue de réaliser un certain temps de fonctionnement, fonction du nombre Mach de l'écoulement permanent.

En *A*, l'Auteur étudie l'interaction d'une onde de choc et d'une surface de discontinuité (fig. 1 et 2). Les résultats sont rendus d'une manière concrète par les diagrammes des figures 3 *a*, *b* et 4 *a*, *b*.

Dans la partie *B* de l'étude, on calcule la longueur des éléments du tube de choc pour la réalisation d'un nombre Mach, M, et d'une durée de fonctionnement t_* donnés, en avant de la surface de discontinuité, dans les conditions représentées par la figure 5. En appliquant la théorie des écoulements compressibles unidimensionnels non permanents, on arrive aux formules (42), (43) et (44), qui résolvent le problème. Pour le cas où les deux chambres du tube de

choc contiennent de l'air, ces formules deviennent (42), (43 bis) et (44) et sont représentées d'une manière graphique sur les diagrammes des figures 6 et 7.

La partie *C* traite le même problème en étudiant l'écoulement en arrière de la surface de séparation, avec un nombre Mach, M_2 et une durée de fonctionnement t_{**} (à l'opposé de M, M_2 croît avec le rapport des pressions dans le tube de choc) (fig. 8).

A l'aide des résultats obtenus en *A*, on arrive aux formules (51), (52) et (60).

Pour l'air, on utilise les formules (51 bis), (52 bis) et (60), données par les diagrammes des figures 9 et 10.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Courant a. K. O. Friederics, *Supersonic Flow and Shock Waves.* Interscience Publishers, New York, 1948.
2. Bleakney, Fletcher a. Weimer, *The Shock Tube, a Facility for Investigations in Fluid Dynamics.* Rev. Sci. Inst., New York, Nov. 1949.
3. L. D. Landau i E. M. Lifşiţ, *Mehanika sploşnîh sred.* Gostehizdat, Moscova, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

HIDRODINAMICĂ

O NOUĂ METODĂ DE PREVEDERE A COMPORTĂRII ZĂCĂMINTELOR DE ŢIŢEI CU ÎMPINGERE PARŢIALĂ DE APĂ

DE

D. CODREANU şi N. CRISTEA

1. INTRODUCERE

Datele din literatura de specialitate [1] şi [2] precum şi cele obţinute în cazul zăcămintelor din ţara noastră, arată că în cursul exploatării celor mai multe dintre acestea se remarcă o înaintare a apei de sinclinal. Înainte de atingerea presiunii de saturaţie, prevederea comportării se poate face utilizînd aceleaşi procedee ca şi în cazul existenţei unei înlocuiri substanţiale a ţiţeiului produs de către apa pătrunsă în zona saturată iniţial cu ţiţei. Acest lucru n-a fost însă arătat pînă acum în literatură.

După căderea presiunii sub presiunea de saturaţie, problema prevederii comportării zăcămintelor de ţiţei devine mai complicată, indiferent de raportul dintre fluidele extrase şi apa pătrunsă în zăcămînt. Pînă acum, s-au făcut mai multe încercări de obţinere a unor soluţii aproximative, făcîndu-se în acest scop o serie de supoziţii simplificatoare. În cazul metodei ce se va reda mai jos, supoziţiile menţionate au fost reduse simţitor. Datorită acestui fapt, s-a obţinut o îmbunătăţire a posibilităţilor de apreciere a necesităţii aplicării sau a efectului proceselor de menţinere de presiune.

2. PREVEDEREA COMPORTĂRII PÎNĂ LA ATINGEREA PRESIUNII DE SATURAŢIE

Cunoscînd caracteristicile fundamentale ale zăcămîntului precum şi variaţia debitului şi presiunii cu timpul pînă la data efectuării prevederii, se poate calcula, mai întîi, variaţia cantităţii de apă pătrunsă în zăcămînt W, utilizînd relaţia simplă

$$W = \left(\frac{\Delta N \beta}{\gamma} - VKm \Delta p \right), \tag{1}$$

în care

ΔN este ţiţeiul produs (tone), γ-greutatea specifică a ţiţeiului în condiţii de suprafaţă (tone/m^3), V-volumul brut al zăcămîntului (m^3), K-coeficientul de compresibilitate complex *), β-factorul micşorării de volum, m-porozitatea şi Δp-căderea de presiune (at).

Relaţia (1) s-a dedus presupunînd constant volumul de ţiţei din zăcămînt. Acest lucru este admisibil, întrucît cantitatea de ţiţei exploatabilă prin destinderea elastică a zonei de ţiţei propriu-zisă este neglijabilă faţă de rezervă **).

Avînd variaţia lui W cu timpul, se calculează uşor variaţia debitului lunar de apă Q_a pătrunsă în zăcămînt. Pentru simplificare, debitul de apă pătrunsă în zăcămînt se poate asimila cu mai multe segmente de dreaptă cu coeficienţii unghiulari $c_0, c_1, \ldots c_n$.

De regulă, în primele luni după începerea extracţiei de ţiţei din zăcămînt, nu se remarcă o pătrundere a apei în zona saturată cu ţiţei. Aceasta denotă că în zona de apă nu a avut loc decît o cădere de presiune relativ redusă, mai ales dacă în perioada iniţială debitul zăcămîntului este relativ mic. În această situaţie, calculele legate de prevederea comportării se pot începe luînd ca punct de plecare, apariţia pătrunderii apei în zona de ţiţei şi luînd ca presiune iniţială presiunea medie a zăcămîntului la data respectivă. Acest mod de a proceda este admisibil dacă se ţine seamă, că după un timp oarecare curbele de cădere a presiunii medii a sistemului la diferiţi timpi, rămîn practic paralele în prima lor porţiune [3].

Avînd curba de variaţie a debitului de apă pătrunsă în zona de ţiţei şi admiţînd pe baza imaginii geologice că sistemul hidrodinamic poate fi asimilat cu unul ce ar poseda o apă de sinclinal de întindere infinită, se pot determina indirect constantele caracteristice C_1 şi C_2 necesare pentru prevederea căderii de presiune Δp, utilizînd relaţia cunoscută [2]

$$\Delta p = \frac{2\eta}{\pi^3 k h}\left[\bar{c}_0 \int_0^{\bar{t}} I(\bar{t})\, d\bar{t} + (\bar{c}_1 - \bar{c}_0) \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} I(\bar{t} - \bar{t}_0)\, d\bar{t} + \ldots\right], \qquad (2)$$

unde

$C_1 \frac{\bar{c}}{c} = \frac{R^2}{a}$, $C_2 = \frac{2\eta}{\pi^3 kh}$, η — coeficientul de viscozitate dinamică, k-permeabilitatea, h-grosimea, R-raza contactului apă-ţiţei, a-coeficientul de piezoconductibilitate, $\bar{t} = \frac{at}{R^2}$ — timpul adimensional şi

$$I(\bar{t}) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-z^2 \bar{t}})\, dz}{z^3 [\mathcal{J}_1^2(t) + Y_1^2(z)]}, \qquad (3)$$

în care

Y_1 şi $\mathcal{J}_1$, sînt funcţii Bessel de specia întîi şi a doua, de ordinul 1.

---

*) $K = s_l K_l + s_a Ka + \frac{K_r}{m}$, unde K este coeficientul de compresibilitate, s saturaţia, iar indicii t, a şi r se referă la ţiţei, apă şi rocă respectiv.

**) S-ar putea proceda şi exact, dacă raportul dintre volumul zonei de ţiţei şi al zonei de apă ar fi mare.

Alegînd o valoare pentru C_1, pe baza datelor reale de cădere de presiune, se determină prin încercări valoarea constantei C_2 la diferite date. Numărul încercărilor se poate reduce simțitor alegînd pentru C_1 valori apropiate de cele presupuse pentru sistem pe baza datelor de explorare (R) și a datelor privitoare la caracterul fizic al zăcămîntului (a). În cazul asimilării sistemului geometric cu un sector circular cu deschiderea α, în fața relației (2) se introduce factorul de corecție $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Trecînd la prevederea comportării zăcămîntului pînă la atingerea presiunii de saturație, se ia ca bază variația debitului de țiței ce urmează a fi extras. Acesta se poate admite în prima perioadă crescător, ca urmare a intrării de noi sonde în producție și apoi constant sau chiar descrescător, avînd în vedere o eventuală necesitate de reglare a acestuia după săparea tuturor sondelor, în vederea obținerii unui factor de recuperare cît mai mare.

Variația debitului de țiței fiind impusă, se admite mai întîi, o variație a debitului de apă pătrunsă în zona de țiței formată din mai multe segmente de dreaptă cu înclinări apropiate de înclinarea segmentelor de dreaptă prin care s-a reprezentat variația debitului de țiței impus. După aceea, se calculează variația căderii de presiune la contactul apă-țiței prin intermediul relației (2), și folosind valorile constantelor C_1 și C_2 determinate anterior. Utilizînd valorile căderii de presiune calculate ca mai sus, prin intermediul relației (1) se calculează, lună de lună cantitatea de țiței provenită prin expansiunea zonei de țiței, care se adună la cantitatea de țiței corespunzătoare debitului de apă pătruns în zăcămînt, calculat anterior.

Calculele de mai sus se repetă variind pe rînd înclinările segmentelor de dreaptă ce constituie variația debitului de apă pătrunsă în zăcămînt pînă ce debitul de țiței obținut prin calcul se suprapune peste debitul de țiței impus. În felul acesta, se poate prevedea cu destulă exactitate, data la care presiunea va scădea sub presiunea de saturație.

În locul procedeului de prevedere redat mai sus, s-ar putea lucra și după cum urmează.

În loc de a admite o variație a debitului de apă și de a calcula pe baza acesteia căderea de presiune, se poate admite o variație a presiunii și apoi se poate efectua calculul variației debitului de apă pătrunsă în zona de țiței, la care se adaugă lună de lună cantitatea de țiței provenită prin expansiunea zonei de țiței. Calculele sînt absolut similare și se repetă variind pe rînd, înclinările segmentelor de dreaptă ce constituie variația presiunii, pînă ce debitul de țiței calculat se suprapune peste debitul de țiței impus.

La această nouă variantă, în locul relației (2) se aplică relația

$$Q_a = \frac{2\pi kh}{\eta}\left[p_0' G(\bar{t}) + (p_1' - p_0') G(\bar{t} - \bar{t}_1) + \dots\right], \qquad (2')$$

unde p_0', $p_1' \cdots p_n'$ sînt coeficienții unghiulari ai segmentelor de dreaptă cu care s-a asimilat curba de variație a presiunii, iar

$$G(\bar{t}) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-z^2\bar{t}})\, dz}{z^3\left[J_0^2(z) + Y_0^2(z)\right]}. \qquad (3')$$

J_0 și Y_0 sînt funcții Bessel de specia întîi și a doua și de ordinul zero respectiv.

3. PREVEDEREA COMPORTĂRII DUPĂ SCĂDEREA PRESIUNII SUB PRESIUNEA DE SATURAŢIE

a. Metodele existente

Din literatura de specialitate, se remarcă mai întîi trei lucrări scrise de aceiaşi autori [4], [5] şi [6] dintre care prima reprezintă o redare pe scurt a celei de-a doua.

Într-o primă încercare, autorii utilizează soluţiile privitoare la curgerea staţionară radială a unui sistem constituit dintr-o fază lichidă şi una gazoasă, care s-au dedus admiţînd coeficienţii de viscozitate constanţi, factorul micşorării de volum egal cu 1, legea lui Henry valabilă şi posibilitatea asimilării presiunii şi saturaţiei medii cu presiunea şi saturaţia pe contur. Fenomenul de curgere este asimilat cu o succesiune de stări staţionare atît în zona saturată iniţial cu ţiţei, cît şi în zona saturată cu apă.

În a treia lucrare, nu se introduce altă modificare de concepţie decît admiterea unei permeabilităţi diferite în zona invadată de apă.

În legătură cu supoziţiile făcute, se remarcă rezultatele lucrării efectuate de L. A. Zinovieva [7], din care rezultă că neglijînd proprietăţile fizice reale ale ţiţeiului şi gazelor se fac erori considerabile, care ating valori de peste 100%. Datorită acestui fapt şi ţinînd seamă de admiterea unei succesiuni de stări staţionare în zona de apă, care poate introduce erori suplimentare în cazul în care dimensiunile acesteia sînt mari în raport cu zona saturată cu ţiţei, metoda propusă de sus-numiţii autori apare ca o metodă aproximativă mai mult cu caracter calitativ.

O altă metodă a fost propusă de M. Muskat [2] şi se deosebeşte de prima prin aceea că se iau în considerare proprietăţile reale ale ţiţeiului. Totodată, debitul de ţiţei este impus, iar apa pătrunsă în zăcămînt este considerată proporţională cu căderea de presiune. Detaliile distribuţiei de presiune în interiorul zonei saturate cu ţiţei sau invadate cu apă nu se analizează. De altfel, acest lucru nu s-ar fi putut face decît admiţînd ca şi în lucrările amintite, existenţa unei singure sonde în centrul unui contur circular.

Admiterea unei curgeri staţionare în zona de apă, precum şi impunerea debitului constituie scăderile metodei propuse.

b. Noua metodă

Utilizînd ecuaţia de bilanţ material, ecuaţia raţiei de gaze, ecuaţia saturaţiei şi variaţia permeabilităţilor efective pentru gaze şi ţiţei în funcţie de saturaţie, se prevede prin încercare şi eroare*), comportarea zăcămîntului, admiţînd că n-ar exista nici o pătrundere de apă în zona saturată cu ţiţei. Admiţînd trepte mici în variaţia producţiei cumulative de ţiţei şi împărţind producţia aferentă fiecărei trepte cu debitul mediu corespunzător, se ajunge printre altele, la variaţia presiunii cu timpul. Variaţia debitului admis la presiunea de saturaţie cu presiunea, care este necesară în efectuarea calculelor de mai sus, se obţine luînd ca bază variaţia indicelui specific de productivitate **) cu presiunea care se

*) Procedeul de încercare şi eroare este necesar, întrucît se dispune de trei ecuaţii pentru determinarea a patru necunoscute: presiunea, raţia gaze-ţiţei, producţia cumulativă de ţiţei şi producţia cumulativă de gaze.

**) Indice specific de productivitate $= \dfrac{2\pi k_t}{\eta_t \beta \, In \dfrac{r_c}{r_s}}$, notaţiile fiind cele obişnuite.

obține ușor, dacă se dispune de variația factorului micșorării de volum β și a viscozității dinamice a țițeiului η cu presiunea, precum și a variației permeabilității efective pentru țiței cu saturația.

Avînd variația de presiune cu timpul, se trece la prevederea cantității de apă pătrunsă în zăcămînt, care se poate face, fie calculînd mai întîi variația debitului de apă pătrunsă în zăcămînt prin intermediul relației (2) sau (2′) după ce curba de presiune s-a admis compusă din mai multe segmente de dreaptă, fie procedînd direct și folosind relația cunoscută

$$W = 2\pi\,hR^2\,mk\,[p_0'\,H(\bar{t}) + (p_1' - p_0')\,H(\bar{t} - \bar{t}_1) + \ldots], \tag{4}$$

unde h este grosimea efectivă a stratului de apă și p_n' coeficienții unghiulari ai segmentelor de dreaptă cu care a fost asimilată căderea de presiune, iar

$$H(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} G(\bar{t})\,d\bar{t}, \quad \text{unde } G(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} F(\bar{t})\,d\bar{t} \tag{5}$$

și

$$F(\bar{t}) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\bar{t}z^2}\,dz}{z\,[J_0^2(z) + Y_0^2(z)]},$$

J_0 și Y_0 fiind funcții Bessel de specia întîi și a doua și respectiv de ordinul zero.

Folosind relațiile (2) sau (2′) nu mai este necesar să se determine prin încercări constanta $C = 2\pi\,hR^2\,mk$ din (4). Pe de altă parte, utilizarea relației (4) ar reduce mult calculul numeric, însă totodată prevederea ar putea fi afectată de erori mari, întrucît în literatura de specialitate nu se dau tabele pentru funcția $H(\bar{t})$ ci numai o reprezentare grafică în sistem dublu logaritmic și de aceea citirile nu se pot face cu destulă precizie.

Procedînd ca mai sus, se va obține evident o cantitate de apă intrată în zăcămînt mai mare decît în realitate.

Luînd ca bază variația cantității de apă pătrunsă în zona saturată cu țiței, se trece la prevederea unei căderi de presiune folosind ecuația de bilanț material (cazul pătrunderii apei în zona de țiței), ecuația ratiei de gaze și ecuația saturației valabilă în cazul înaintării de apă *)

$$S_t = \frac{1}{\bar{A}}\left[\left(1 - \frac{\Delta N}{N}\right)\frac{\beta}{\beta_s}(1 - \bar{s}_a) - \beta\, s_{tr}\int_{\bar{A}}^{1}\frac{d\bar{A}}{\beta}\right], \tag{6}$$

unde

S este saturația, $\bar{A}$ — raportul dintre volumul zonei petrolifere neinundate și volumul inițial al acesteia, indicii — $\bar{a}$, r, s, t se referă la apă, saturația remanentă, presiunea de saturație și la țiței.

Valoarea lui $\bar{A}$ se calculează admițînd cunoscută saturația în apă interstițială S_a, saturația remanentă în țiței S_{tr}, cantitatea de apă pătrunsă în zăcă-

*) Relația (6) este echivalentă cu relația [7.17 (10)] redată de M u s k a t [2] și include presupunerea unei saturații în gaze egale cu zero în zona invadată de apă.

mînt $W - w$ (w = apa extrasă) şi volumul iniţial al porilor, utilizînd relaţia simplă

$$\bar{A} = 1 - \frac{W - w}{A} \cdot \frac{1}{1 - S_a - S_{tr}}. \tag{7}$$

În cazul cînd există material experimental suficient pentru variaţia lui S_{tr}, nu-i necesar să se admită în relaţia (6) o valoare medie constantă, ci se va putea ţine seamă de această variaţie şi atunci S_{tr} se introduce sub semnul integral. De asemenea, în prezenţa unui material experimental privitor la aspectul cantitativ al saturaţiei remanente în gaze în zona inundată, relaţiile (6) şi (7) s-ar putea modifica în mod corespunzător.

Căderea de presiune determinată conform indicaţiilor de mai sus, va fi evident mai mică decît cea reală. S-ar putea întîmpla îndeosebi la zăcămintele cu un coeficient mare de piezoconductibilitate, să se ajungă prin calculul de mai sus, la o creştere a presiunii cu timpul. În astfel de cazuri, pentru a reduce la minimum calculele numerice, se renunţă la continuarea prevederilor pe baza acestei variaţii de presiune şi se ia ca bază, o presiune constantă egală cu presiunea de saturaţie.

Variaţia de presiune calculată mai sus (respectiv admisă) predetermină o variaţie în timp a cantităţii de apă pătrunsă în zăcămînt, care se determină, fie prin intermediul relaţiei (2) sau (2′) fie prin intermediul relaţiei (4). Dacă se ia ca bază de calcul o presiune constantă egală cu presiunea de saturaţie, se utilizează relaţia cunoscută

$$W = 2\,\pi\, hR^2\, mk\, \Delta p\, G(\bar{t}), \tag{8}$$

unde Δp este căderea constantă de presiune.

Curba de variaţie în timp a apei pătrunsă în zăcămînt calculată pe baza căderii de presiune menţionate, se va găsi sub curba reală. Luînd din nou ca bază de calcul ultima curbă de variaţie a apei pătrunsă în zăcămînt, se va obţine o cădere mai accentuată de presiune, respectiv o curbă de variaţie a presiunii mai apropiată de curba reală.

Procedeul de calcul se continuă, pînă se ajunge ca ultimele două curbe de variaţie a cantităţii de apă pătrunsă în zăcămînt practic să se suprapună. Ultima curbă de variaţie a presiunii reprezintă soluţia căutată.

După cum s-a menţionat la punctul 2, metoda de prevedere se bazează pe supoziţia existenţei unei ape de sinclinal de proporţii foarte mari, aşa încît în calcule să poată fi admisă de întindere infinită. Acest lucru este valabil dacă raportul dintre volumul zonei de apă şi al zonei de ţiţei va fi mai mare decît circa 1 000 [2]. Dacă investigaţiile geologice arată contrariul, după perioada de timp în care zăcămîntul poate fi considerat infinit, în calculele numerice se vor utiliza relaţiile corespunzătoare pentru zăcămintele cu apă de sinclinal de întindere finită.

4. UN EXEMPLU

Se consideră un zăcămînt cu următoarele caracteristici fundamentale: volumul brut al rocii saturate cu ţiţei 125.10^6 (m^3), porozitatea 22%, saturaţia în ţiţei 73%, coeficientul de compresibilitate al ţiţeiului $1{,}35.10^{-4}$ (1/at), coeficientul de compresibilitate al apei $4{,}6.10^{-5}$ (1/at), proprietăţile ţiţeiului şi gazelor redate în figura 1, relaţiile permeabilitate-saturaţie din figura 2, presiunea iniţială a zăcămîntului 240 (at), presiunea de saturaţie 115 (at).

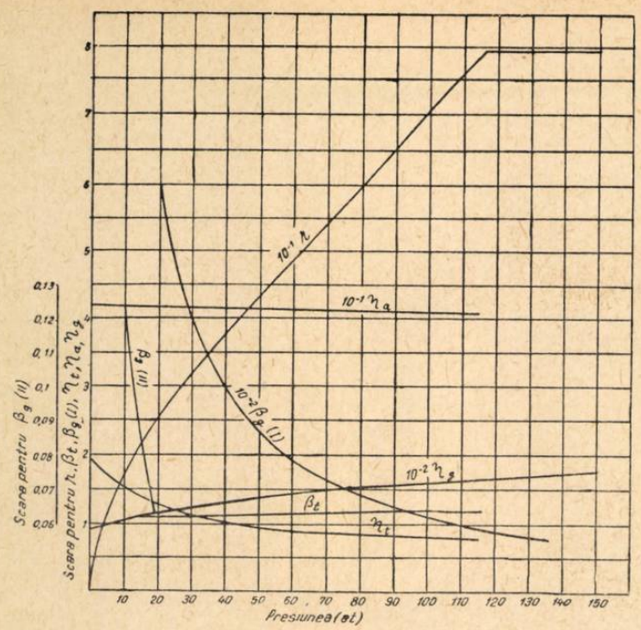


Fig. 1. — Caracteristicile medii ale țițeiului și gazelor în condiții de zăcămînt pentru un zăcămînt cu împingere parțială de apă. r este rația de soluție m^3/m^3, coeficientul de viscozitate dinamică (cp), β factorul micșorării de volum, indicii t, a și g se referă la țiței-apă și la gaze respectiv.

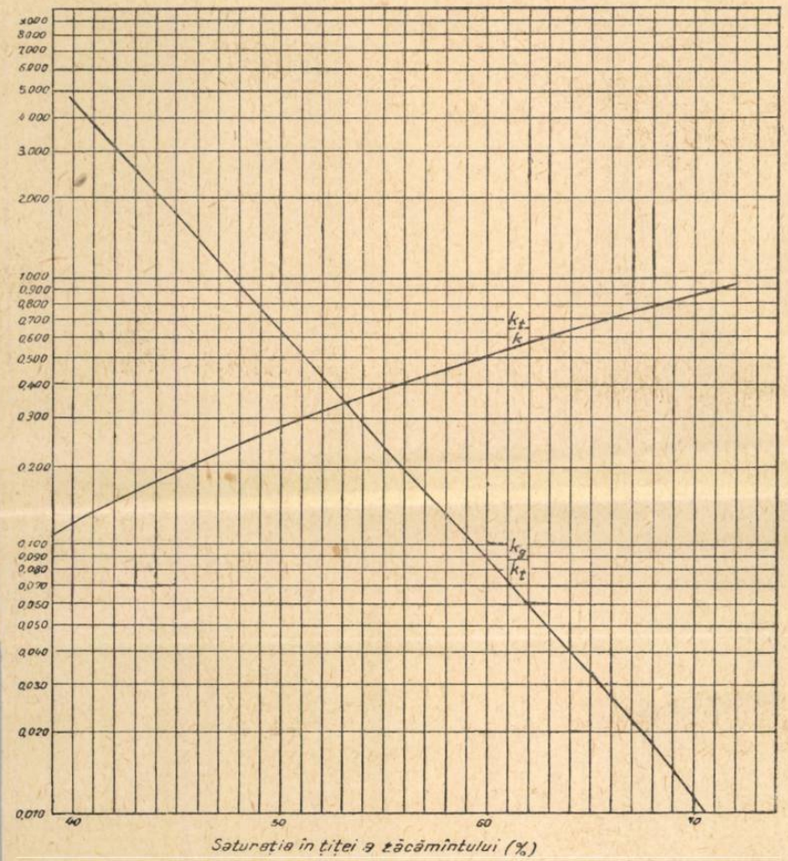


Fig. 2. — Relații permeabilitate-saturație admise în calculul prevederii comportării unui zăcămînt cu împingere parțială de apă k_g și k_t sînt permeabilități efective pentru gaze și țiței k = permeabilitatea absolută. Saturația în apă interstițială 27%.

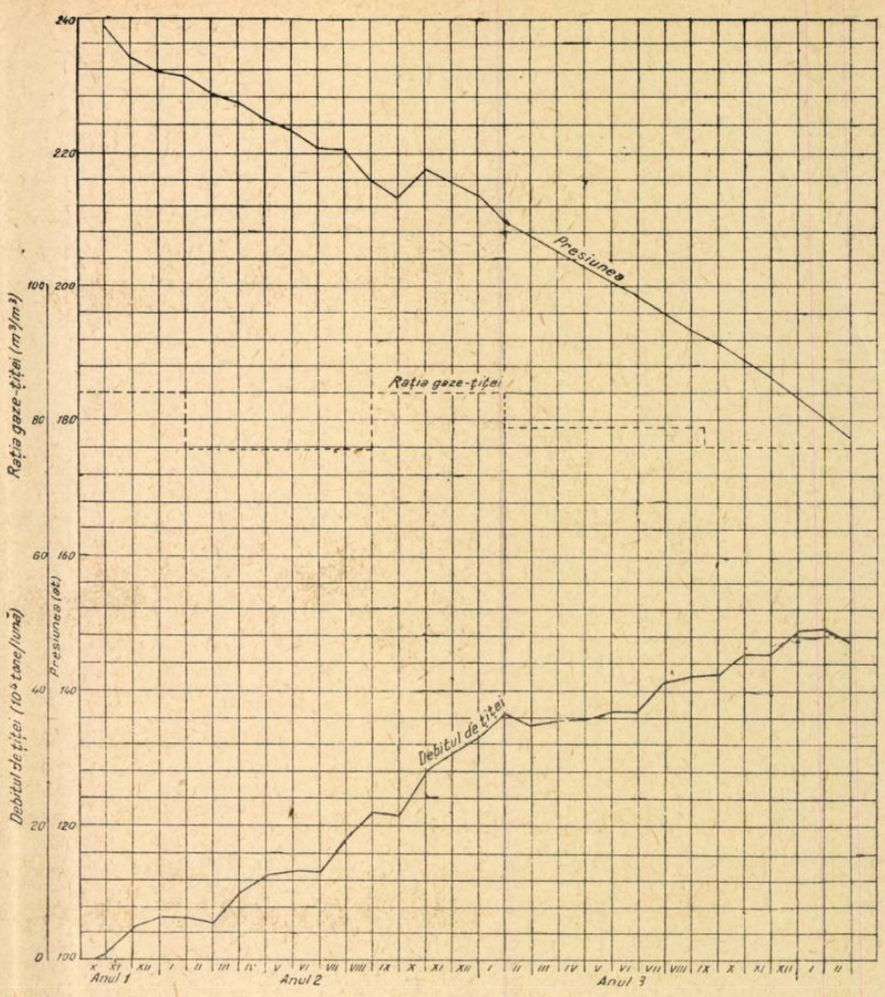


Fig. 3. — Caracteristicile fundamentale de comportare ale zăcămîntului de la punerea în exploatare pînă la data efectuării prevederii.

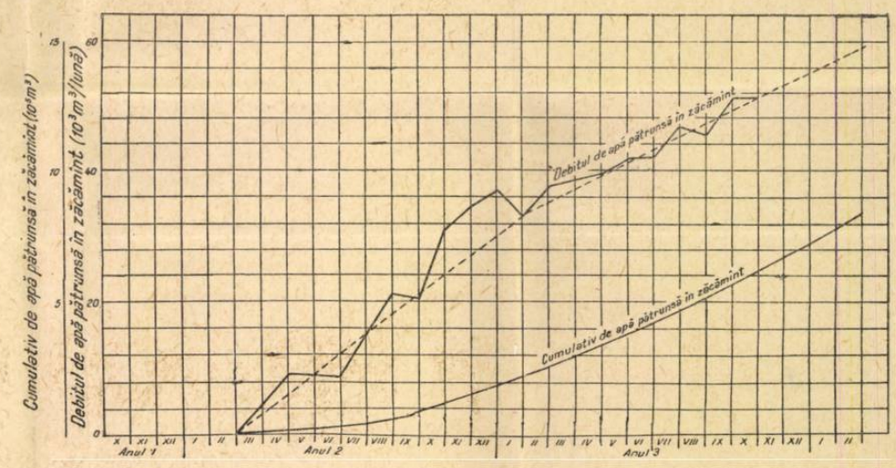


Fig. 4. — Variația debitului și a cantității totale de apă pătrunsă în zăcămînt. Linia întreruptă: variația medie a debitului de apă pătrunsă în zăcămînt.

MŰSZAKI EGYETEM · BUDAPEST
1848
KÖNYVTÁRA

a. Comportarea zăcămîntului de la punerea în exploatare pînă la data efectuării prevederii

Caracteristicile fundamentale de comportare de la punerea în exploatare pînă la data efectuării prevederii, sînt redate în figura 3. Se observă că debitul este crescător, iar curba de variație a presiunii are o formă corespunzătoare cu rezultatele teoriei curgerii lichidelor compresibile prin medii poroase. Neatingîndu-se presiunea de saturație pînă la data efectuării prevederii, rația gaze-țiței a rămas practic constantă.

Folosind curbele de comportare din figura 3, se calculează, mai întîi, variația cantității de apă pătrunsă în zăcămînt prin intermediul relației (1) și apoi variația corespunzătoare a debitului de apă. Rezultatele calculului s-au trecut în figura 4.

Pentru simplificare, variația medie a debitului de apă pătrunsă în zăcămînt s-a asimilat cu două segmente de dreaptă (liniile întrerupte din figura 4) cu coeficienții unghiulari c_0 și c_1. Din figura 4, se observă că în primele 5 luni de la punerea în exploatare, nu a reieșit existența unei pătrunderi de apă în zăcămînt. Conform celor arătate anterior (punctul 2), analiza sistemului se poate începe cu luna a șasea, căreia îi corespunde o presiune medie de 233 at.

Avînd datele de mai sus, s-a trecut la determinarea constantelor C_1 și C_2 care intră în relația (2), prin încercări. Încercările au fost reduse simțitor alegînd pentru C_1 valori presupuse valabile pentru sistem pe baza datelor de explorare (arc de cerc cu raza contactului apă-țiței $R = 620$ m și deschiderea $\alpha = 26°30'$) și a datelor privitoare la caracterul fizic al zăcămîntului ($a = 23\,364$ cm^2/s).

Ținînd seamă de forma aproximativă a zăcămîntului (sector circular), conform teoriei ar fi trebuit în relația (2) să se introducă factorul de corecție $\frac{2\pi}{\alpha}$. În calcule, nu s-a făcut acest lucru, ci s-au înmulțit coeficienții unghiulari cu acest raport rezultînd $c_0 = 0{,}00595$ și $c_1 = 0{,}0387$ (cm^3/s^2).

Încercările au condus la o valoare a constantei $C_1 = 16\,505\,000$ (s) și cu aceasta $\bar{c}_0 = 98\,204$ (cm^3/s) și $\bar{c}_1 = 63\,877$ (cm^3/s). Rezultatele calculelor efectuate pentru stabilirea constantei C_2 s-au redat în tabloul nr. 1. După cum se observă din acest tablou valorile obținute pentru C_2 sînt destul de apropiate. În calculele următoare, s-a folosit valoarea $C_2 = 13\,200 \left(\frac{\text{at}}{\text{cm}^3/\text{s}}\right)$.

Tabloul nr. 1

Rezultatele calculelor de verificare a valorii constantei C_2 (relația 2)

Data de referință (luna)	Timpul t (s)	Căderea de presiune Δp (at)	Constanta C_2 (at/cm^2/s)
17	31 539 456	25,2	13 345
18	34 167 744	27,6	13 163
19	36 796 032	29,8	13 755
20	39 424 320	32,0	13 153
21	42 052 608	34,1	13 361
22	44 680 896	36,5	13 282
23	47 309 184	39,4	13 277
24	49 937 472	41,2	13 247
25	52 565 760	43,9	13 277

Pentru mai multă siguranţă, s-a trecut la o reverificare a justeţii valorii constantei C_2 pentru perioada dintre luna a cincea şi a şaptesprezecea şi pentru perioada dintre lunile 26 şi 29. Rezultatele s-au redat în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

Rezultatele calculului de verificare suplimentară a justeţii valorii constantei C_2 (relaţia 2)

Data de referinţă (luna)	Diferenţa de presiune Δp (at)		Presiunea (at)		Diferenţa dintre presiunea calculată şi presiunea măsurată (at)
	Calculată utilizînd const. $C_2 = 13\,200$ at/cm³/s	Măsurată	Calculată	Măsurată	
6	0,8	1,8	232,2	231,2	+ 1,0
7	2,1	3,6	230,9	229,4	+ 1,5
8	3,7	5,6	229,3	227,4	+ 2,1
9	5,6	7,6	227,4	225,4	+ 2,0
10	7,7	9,6	225,3	223,4	+ 1,9
11	9,8	11,6	223,2	221,4	+ 1,8
12	12,1	13,6	220,9	219,4	+ 1,5
13	14,7	15,4	218,3	217,6	+ 0,7
14	17,3	17	215,7	216,0	− 0,3
15	19,9	19	213,1	214,0	− 0,9
16	22,8	22,8	210,2	210,2	− 0
26	47,3	47,3	185,7	186,5	− 0,8
27	49,3	50,2	183,7	183,4	+ 0,3
28	52,7	54,0	180,3	180,5	− 0,2
29	54,8	57,8	178,2	177,6	+ 0,6

Din tabloul nr. 2 reiese că diferenţele între presiunea calculată şi măsurată nu depăşesc limita erorilor aparatelor de măsură. Prin urmare, valoarea stabilită pentru constanta C_2 se poate considera satisfăcătoare din punct de vedere al preciziei.

b. Prevederea comportării zăcămîntului pînă la atingerea presiunii de saturaţie

Pentru prevederea comportării zăcămîntului pînă la atingerea presiunii de saturaţie, s-a impus un debit crescător în prima perioadă (fig. 5) şi un debit constant şi chiar descrescător în a doua perioadă. Utilizînd relaţiile (2) şi (1) şi valorile constantelor C_1 şi C_2 stabilite anterior, s-a trecut la efectuarea prevederii. Rezultatele calculelor s-au redat în tabloul nr. 3. Valorile coeficienţilor unghiulari ai segmentelor de dreaptă privitoare la variaţia debitului de apă pătruns în zăcămînt, care au condus la concordanţă satisfăcătoare (a se vedea tabloul nr. 3 şi fig. 5) sînt următoarele: $c_2 = 0{,}00966$ (cm³/s²), $c_3 = 0{,}007209$ (cm³/s²), $c_4 = 0{,}00322$ (cm³/s²), $c_5 = -\,0{,}00903$ (cm³/s²), $c_6 = 0{,}00143$ (cm³/s²). Atingerea presiunii de saturaţie va avea loc în luna 49 după punerea zăcămîntului în exploatare.

c. Prevederea comportării zăcămîntului după scăderea presiunii sub presiunea de saturaţie

După cum s-a arătat la punctul 3 a, s-a executat mai întîi o prevedere a comportării zăcămîntului admiţînd că n-ar exista nici o înaintare a apei de sinclinal. Relaţiile folosite sînt:

1) ecuația de bilanț material scrisă sub forma

$$\Delta NR_c = \frac{N(u - u_0) - \Delta N(u - r_0 v)}{v}, \tag{9}$$

unde

N este cantitatea de țiței conținută inițial în zăcămînt (m^3 în condiții de suprafață), ΔN — cantitatea totală de țiței extrasă din zăcămînt (m^3 condiții de suprafață), R_c — rația cumulativă gaze-țiței (m^3/m^3), r — rația de soluție la

Tabloul nr. 3

Rezultatele prevederii comportării zăcămîntului pînă la atingerea presiunii de saturație

Data de referință (luna)	Timpul (t) (s)	Diferența de presiune p (at)	Presiunea p (at)	Debitul de țiței		Eroare privitoare la debit (%)
				Real (tone/lună)	Calculat (tone/lună)	
30	65 707 200	58,7	174,3	58 077	58 568	— 0,84
31	68 335 488	62,6	170,4	61 340	62 070	— 1,19
32	70 963 776	66,9	166,1	67 680	66 982	+ 1,03
33	73 592 064	71,4	161,6	69 159	70 068	— 1,31
34	76 220 352	75,3	157,7	72 090	70 523	+ 2,17
35	78 848 640	79,8	153,2	75 782	75 250	+ 0,70
36	81 476 928	84,2	148,8	78 505	77 558	+ 1,20
37	84 105 216	89,0	144,0	81 739	81 350	+ 0,47
38	86 733 504	92,6	140,4	78 871	78 309	+ 0,71
39	89 361 792	95,9	137,1	79 665	78 442	+ 1,53
40	91 990 080	99,6	133,4	80 340	80 973	— 0,78
41	94 618 368	101,1	131,9	69 200	69 854	— 0,94
42	97 246 656	102,6	130,4	73 554	70 415	+ 4,26
43	99 874 944	105,0	128,0	70 309	74 078	— 5,36
44	102 503 232	106,0	127,0	71 923	69 632	+ 3,18
45	105 131 520	109,2	123,8	69 958	77 879	— 11,32
46	107 759 808	111,2	121,8	72 265	74 208	— 2,68
47	110 388 096	113,5	119,5	74 027	75 757	— 2,33
48	113 016 364	114,7	118,3	72 674	72 438	+ 0,32
49	115 644 672	117,3	115,7	74 068	77 864	— 5,12

o presiune oarecare (m^3/m^3), r_0 — rația de soluție la presiunea de saturație (m^3/m^3), β — factorul micșorării de volum, v — factorul micșorării de volum pentru gaze, $u = \beta + (r_0 - r)v$ factorul micșorării de volum bifazic, $u_0 = \beta_0$ factorul micșorării de volum la presiunea de saturație:

2) ecuația rației de gaze

$$R = \frac{kg}{k_t} \cdot \frac{\eta_t}{\eta_g} \cdot \frac{\beta}{v} + r, \tag{10}$$

unde

R este rația de gaze-țiței (m^3/m^3), k — permeabilitatea (darcy), η — coeficientul de viscozitate dinamică, iar indicii g și t se referă la gaze și țiței respectiv.

3) ecuația saturației valabilă în cazul absenței unei pătrunderi de apă în zona de țiței

$$S_t = \left(1 - \frac{\Delta N}{N}\right) \frac{\beta}{\beta_0} (1 - S_a) \tag{11}$$

4) relațiile experimentale permeabilitate-saturație în figura 2.

Pentru calcul, expresia ΔNR_c din relaţia (9), care reprezintă cantitatea totală de gaze produse, s-a exprimat ca o însumare a produsului dintre raţia gaze-ţiţei (R) şi cantitatea de ţiţei produsă, adică

$$\Delta NR_c = \int_0^t Rd\,(\Delta N). \tag{12}$$

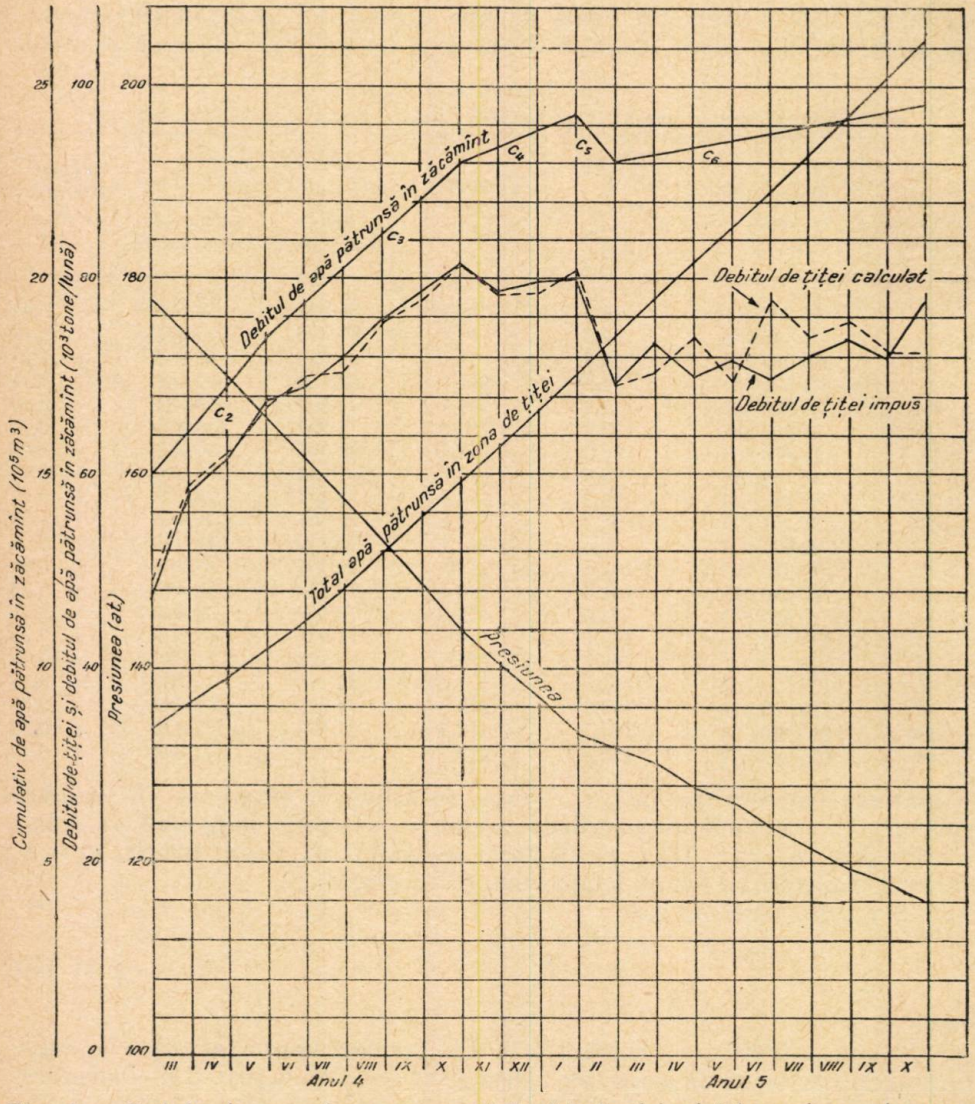


Fig. 3. — Curbele de prevedere a comportării zăcămîntului pînă la presiunea de saturaţie. Debitul de ţiţei a fost admis ca variabil în timp, c_2, c_3 ... c_6 sînt coeficienţi unghiulari ai segmentelor de dreaptă ce reprezintă variaţia debitului de apă rezultată în urma prevederii.

Prevederea s-a executat după cum urmează

1) S-a ales o valoare a presiunii cu cîteva atmosfere mai mică decît presiunea de saturaţie şi s-au evaluat caracteristicile fluidelor pentru această pre-

siune, iar apoi s-a ales o valoare pentru ΔN (ΔN_1) care s-a înlocuit în partea dreaptă a relațiilor (9) și (11) concomitent cu datele privitoare la caracteristicile fluidelor și rezerva inițială N la presiunea de saturație. În acest mod, s-a obținut cîte o valoare pentru ΔNR_c și S_t .

2) Avînd valoarea lui S_t și utilizînd figura 2, se obține o valoare a raportului k_g/k_t . Introducînd această valoare împreună cu caracteristicile fluidelor în relația (10), s-a determinat o valoare pentru rația gaze-țiței R.

3) Admițînd o creștere liniară a lui R pe intervalul considerat, se obține din relația (12) valoarea ΔNR_c , adică pentru prima treaptă

$$\Delta NR_c = \frac{r_0 + R_1}{2} \Delta N_1. \tag{13}$$

4) În cazul în care valorile ΔNR_c obținute din ecuațiile (9) și (13) coincid, înseamnă că valoarea aleasă pentru ΔN_1 este în concordanță cu presiunea. În caz contrar, se alege o altă valoare pentru ΔN_1 și calculul se repetă pînă ce cele două valori ΔNR_c obținute coincid.

5) Pentru treptele următoare, calculul se continuă în mod analog, cu deosebirea că la punctul (3), se compară

$$\Delta N_{(n)} R_{c\,(n)} - \Delta N_{(n-1)} R_{c\,(n-1)} = \frac{R_{(n)} + R_{(n-1)}}{2} (\Delta N_{(n)} - \Delta N_{(n-1)}), \tag{14}$$

unde n este numărul de ordine al treptelor. Aplicînd relația (14), curba rației gaze-țiței se asimilează cu o succesiune de segmente scurte de dreaptă și nu cu un segment de dreaptă dintre punctul inițial și punctul considerat, cum se procedează în mod obișnuit. În felul acesta, se obține o mărire a exactității.

Procedînd ca mai sus, s-au obținut, printre altele, variația presiunii și saturației în funcție de cantitatea de țiței produsă. Admițînd ca debit inițial valoarea debitului impus cu care s-a atins presiunea de saturație (73 000 tone/lună) și ținînd seamă de proprietățile redate în figurile 1 și 2, s-a ajuns la variația debitului și presiunii cu timpul (tabloul nr. 4).

Pentru continuarea prevederii, nu este necesară decît variația presiunii cu timpul, care s-a redat în figura 6 (curba I). Luînd ca bază această curbă, s-a trecut la calcularea cantității corespunzătoare de apă pătrunsă în zăcămînt, utilizîndu-se în acest scop relația (2). Calculul s-a făcut pentru intervale de timp egale și s-a admis o variație liniară a debitului pentru fiecare interval. Astfel, s-a scris relația (2) cu opt termeni și cunoscînd constantele c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 și C_1 și C_2 precum și Δp s-a calculat coeficientul unghiular c_8. Procedeul s-a continuat pînă la presiunea pînă la care s-a făcut prevederea și astfel s-a obținut variația cu timpul a debitului de apă pătrunsă în zăcămînt. Avînd variația debitului cu timpul, s-a determinat ușor variația cantității totale de apă pătrunsă în zăcămînt.

Folosind variația cantității totale de apă pătrunsă în zăcămînt obținută pe baza datelor din tabloul nr. 4, s-a ajuns la o creștere a presiunii cu timpul, adică la un rezultat lipsit de sens fizic. În această situație, s-a încercat același calcul pe baza datelor obținute, admițînd un debit la presiunea de saturație mai mic decît cel din tabloul nr. 4 (61 320 tone/lună) și s-a obținut un rezultat analog (curbele II și II′ din fig. 6).

Față de aceste rezultate, s-a admis un caz limită și anume absența unei căderi de presiune (curba III din fig. 6) și s-a obținut curba III′ pentru variația apei pătrunsă în zăcămînt, care reprezintă un minimum de apă pătrunsă în zăcămînt.

Folosind această curbă din urmă, s-a prevăzut căderea de presiune ce ar înregistra-o zăcămîntul în cazul pătrunderii apei indicate și producerii cu un

Tabloul nr. 4

Calculul variației presiunii și debitului cu timpul

Et a Nr.	Presiunea (at)	Permeabilitatea relativă pt. țiței k_t	Viscozitatea țițeiului η_t (cp)	Factorul micșorării de volum β_t	$\frac{\left(\frac{k_t}{\eta_t \beta_t}\right)_n}{\left(\frac{k_t}{\eta_t \beta_t}\right)_s}$ *)	ΔN_n (m³)	Debitul m³/lună	Durata unei etape (luni)
1	115	1	0,800	1,238	1	—	86 904	—
2	115—109	0,920	0,815	1,233	0,916	241 636	78 821	2,8
3	109—103	0,860	0,825	1,225	0,851	137 776	73 173	1,9
4	103—97	0,800	0,835	1,218	0,786	190 806	67 611	2,8
5	97 —91	0,755	0,845	1,210	0,732	87 895	62 918	1,4
6	91— 85	0,705	0,860	1,202	0,682	133 995	58 660	2,3
7	85— 79	0,655	0,870	1,195	0,630	166 098	54 228	3,1
8	79— 73	0,605	0,885	1,187	0,576	119 953	49 535	2,4
9	73— 67	0,565	0,905	1,179	0,529	109 003	45 537	2,4
10	67— 61	0,535	0,925	1,172	0,493	129 794	42 409	3,1
11	61— 55	0,500	0,945	1,164	0,454	93 145	39 019	2,4
12	55— 49	0,470	0,970	1,157	0,419	91 361	36 065	2,5
13	49— 43	0,450	1,000	1,149	0,394	85 689	33 892	2,5
14	43— 37	0,420	1,040	1,141	0,354	82 119	30 416	2,7
15	37— 31	0,400	1,075	1,133	0,328	96 611	28 243	3,4
16	31— 25	0,370	1,120	1,125	0,293	78 024	25 202	3,1
17	25— 19	0,350	1,170	1,116	0,267	95 560	22 942	4,2
18	19— 13	0,320	1,220	1,106	0,237	131 160	20 335	6,4

*) n se referă la numărul de ordine la treptei, iar s la presiunea de saturație.

debit la presiunea de saturație egal cu 73 000 tone/lună. Prevederea s-a făcut după cum urmează:

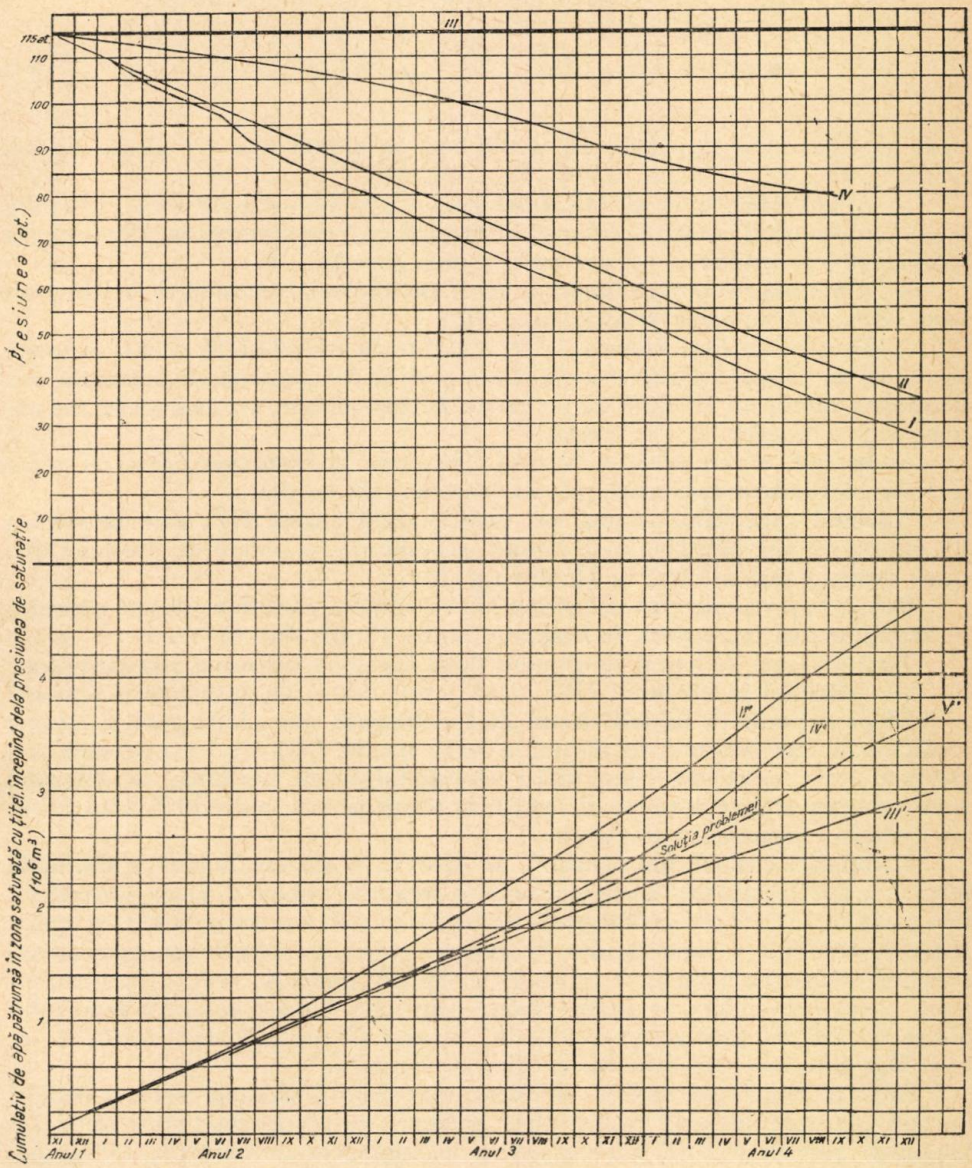


Fig. 6. — Rezultatele încercărilor de determinare a variației cantității totale de apă pătrunsă în zona saturată cu țiței după scăderea presiunii zăcămîntului sub presiunea de saturație.

1) S-a ales o valoare a presiunii cu cîteva atmosfere mai mică decît presiunea de saturație și s-au evaluat caracteristicile fluidului pentru această presiune. După aceea, s-a ales un ΔN și s-a citit pe curba III′ (fig. 6) valoarea lui W corespunzătoare timpului rezultat din împărțirea lui ΔN la debitul inițial admis.

2) Valorile ΔN şi W concomitent cu datele privitoare la caracteristicile fluidelor, şi rezerva de ţiţei conţinută la presiunea de saturaţie, s-au introdus în partea dreaptă a ecuaţiei de bilanţ material *) scrisă sub forma

$$\Delta NR_c = \frac{N(u - u_0) - \Delta N(u - r_0 v) + W - w}{v}, \qquad (15)$$

şi în ecuaţia saturaţiei (6). În acest fel, se obţine cîte o valoare pentru ΔNR_c şi S_t.

3) Avînd valoarea S_t şi utilizînd figura 2, s-a obţinut o valoare a raportului k_g/k_t. Introducînd această valoare împreună cu caracteristicile fluidelor în relaţia (10), a rezultat o valoare pentru raţia gaze-ţiţei R.

4) Admiţînd o creştere liniară a lui R pe intervalul considerat, s-a obţinut (din relaţia 12) valoarea produsului ΔNR_c.

5) În cazul în care valorile ΔNR_c obţinute cu relaţiile (15) şi (12) coincid, înseamnă că valoarea aleasă pentru ΔN_1 a fost în concordanţă cu presiunea şi a corespuns valorii lui W citită de pe curbă. În caz contrar, s-a ales o altă valoare pentru ΔN_1 şi calculul s-a repetat.

6) În rest, rămîn valabile integral cele spuse în cazul prevederii efectuate în lipsa pătrunderii apei marginale în zona saturată cu ţiţei.**)

Aplicînd procedeul de mai sus pentru cazul curbei III', care reprezintă un minim de apă pătrunsă în zăcămînt, s-a obţinut, o cădere de presiune mai mare decît în realitate (curba IV din fig. 6).

Reluînd prevederea pe baza curbei IV, s-a obţinut o cantitate de apă pătrunsă în zăcămînt mai mare decît în realitate (curba IV din fig. 6).

Ţinînd seamă de faptul că ultimele două curbe de variaţie a cantităţii totale de apă pătrunsă în zăcămînt (III' şi IV') sînt destul de apropiate şi aproape coincid pe o perioadă iniţială destul de îndelungată, s-a admis pentru variaţia cantităţii de apă pătrunsă în zăcămînt curba medie (V'). Pe baza acesteia, s-a efectuat apoi prevederea comportării zăcămîntului sub presiunea de saturaţie conform celor arătate anterior. Principalele rezultate s-au redat în tabloul nr. 5, iar curbele caracteristice în figura 7.

Examinînd curbele din figura 7, se observă o scădere iniţială a saturaţiei în ţiţei şi apoi o creştere a acesteia pînă la saturaţia iniţială a zonei saturată cu ţiţei egală cu 73%. Acesta e însoţit de o creştere iniţială a raţiei gaze-ţiţei şi apoi o reducere continuă a acesteia pînă la valoarea raţiei de soluţie corespunzătoare presiunii actuale de 88 at (a se vedea şi fig. 1). Din punct de vedere fizic, resaturarea zonei neinundate se poate explica prin micşorarea continuă a raportului dintre debitul de ţiţei extras şi debitul de apă pătrunsă în zona saturată cu ţiţei, fapt care se observă destul de bine pe figura 7.

După ce practic s-a realizat un bilanţ între debitul de fluid extras şi debitul de apă pătrunsă în zona neinundată, sistemul se transformă dintr-unul cu împingere parţială de apă, într-un sistem cu împingere substanţială. În special, după ce resaturarea este completă, dacă se păstrează ultimul debit de fluid extras, se va înregistra mai întîi o creştere de presiune, corespunzătoare raportului mai

*) w = cantitatea de apă produsă.

**) În prevederea indicată, s-ar putea mări exactitatea, dacă se refac calculele consecutiv, introducînd de fiecare dată valoarea medie a debitelor rezultate din prevederile anterioare, pînă cînd debitele medii rezultate diferă puţin. În felul acesta, admiterea debitului iniţial ca debit mediu pe treaptă, n-ar mai conduce la o micşorare a exactităţii.

mic decît 1 dintre debitul de fluid extras q_t și debitul de apă pătrunsă în zona saturată cu țiței q_a la data cînd a avut loc resaturarea completă și apoi presiunea va scădea din nou (relația (2)). După atingerea presiunii de saturație (în cazul de față 88 at), prevederea în continuare, s-ar putea face ca și de la presiunea de saturație de la început (115 at) pînă la presiunea de 88 at. Prin urmare, este de așteptat să apară pînă la sfîrșitul exploatării o serie de procese consecutive de desaturare și resaturare, a cărei consecință mai demnă de remarcat va fi o

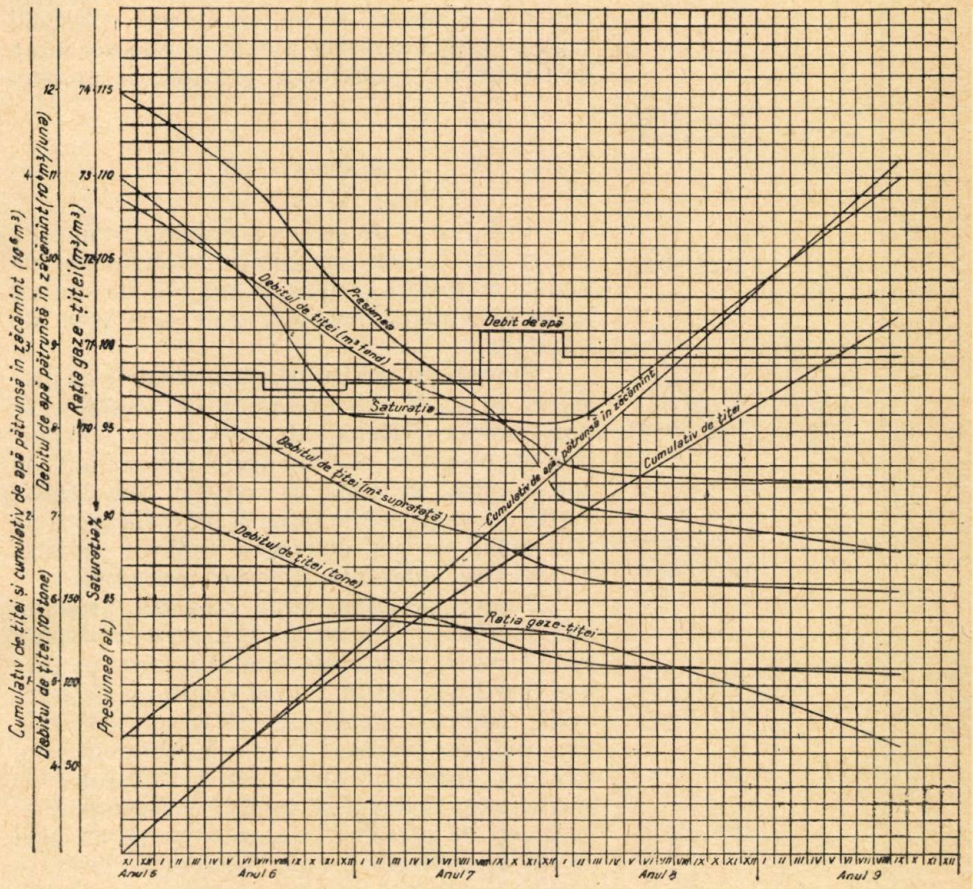


Fig. 7. — Curbele de prevedere a comportării zăcămîntului după scăderea presiunii sub presiunea de saturație, pînă la atingerea saturației inițiale în țiței a zonei neinundate cu apă.

succesiune de creșteri și descrșteri a rației gaze-țiței. Numărul proceselor menționate, într-un anumit caz va fi cu atît mai redus, cu cît debitul inițial va fi mai mare.

Curbele de prevedere a comportării zăcămîntului deasupra (fig. 5) și sub presiunea de saturație (fig. 7), s-au redat împreună în figura 8, pentru a obține o privire de ansamblu.

O încercare de corelare a curbelor de comportare obținute în exemplul examinat cu observațiile de șantier, nu s-a putut face, din lipsă de date suficient

Tabloul nr. 5

Prevederea comportării zăcămîntului sub presiunea de saturaţie

Presiunea (at)	ΔN (m^3)	W (m^3)	$\overline{A}$	S_t	R (m^3/m^3)	R_c (m^3/m^3)	$\left(\frac{k_t}{\gamma_t \beta}\right)_n$	Debitul (m^3/lună)	Timpul (luni)
109	739 684	750 000	0,870	0,71	127	102	0,916	78 821	9
103	1 105 549	1 175 000	0,797	0,70	137	111	0,851	73 173	14
97	1 646 437	1 860 000	0,679	0,70	130,6	119	0,786	67 611	22
91	1 961 032	2 320 000	0,600	0,70	129,4	121	0,732	62 918	27
88	3 184 632	4 100 000	0,292	0,73	64	111	0,682	61 180	47

de complete publicate în literatură pentru zăcămintele cu împingere parţială de apă. Totuşi, trebuie menţionat că fenomenul de resaturare, a fost observat în cazul anumitor zăcăminte de la noi din ţară. O probă şi mai evidentă în acest sens, îl oferă zăcăminte de la noi din ţară care produceau cu raţii gaze-ţiţei mult superioare raţiei de soluţie, iar după începerea injecţiei şi creşterea continuă a cantităţii de apă injectată, raţia gaze-ţiţei a scăzut practic la valoarea raţiei de soluţie corespunzătoare presiunii respective.

5. CONCLUZII

În lucrarea de faţă, s-a elaborat o metodă pentru prevederea comportării zăcămintelor de ţiţei cu împingere parţială de apă atît înainte cît şi după scăderea presiunii sub presiunea de saturaţie.

Prevederea pentru perioada dinainte ca presiunea să scadă sub presiunea de saturaţie, se poate reduce la metoda de prevedere a comportării zăcămintelor cu împingere substanţială de apă. În plus, se arată că valorile constantelor legate de proprietăţile fizice şi hidrodinamice ale sistemului se pot determina indirect pe baza comportării anterioare începerii prevederii.

Pentru perioada după scăderea presiunii sub presiunea de saturaţie, prin metoda propusă s-au înlăturat supoziţiile simplificatoare pe care s-au bazat alţi autori în mod simţitor şi de aceea e de presupus ca rezultatele să se apropie mult mai mult de realitate, decît cele obţinute prin metodele aproximative descrise în literatura de specialitate. Probabil că neglijarea existenţei unor gradienţi de presiune în zona saturată cu ţiţei să nu afecteze mai mult rezultatele decît în cazul prevederilor comportării zăcămintelor cu împingere substanţială de apă, unde de regulă, se face aceeaşi supoziţie simplificatoare şi erorile sînt practic neglijabile.

Fenomenul de restaurare a zonei neinundate de apă după un anumit timp de la scăderea presiunii sub presiunea de saturaţie, care a reieşit în urma exemplului calculat este explicabil din punct de vedere fizic.

S-a arătat că pînă la sfîrşitul exploatării există posibilitatea apariţiei unei serii de procese consecutive de desaturare şi resaturare, a căror

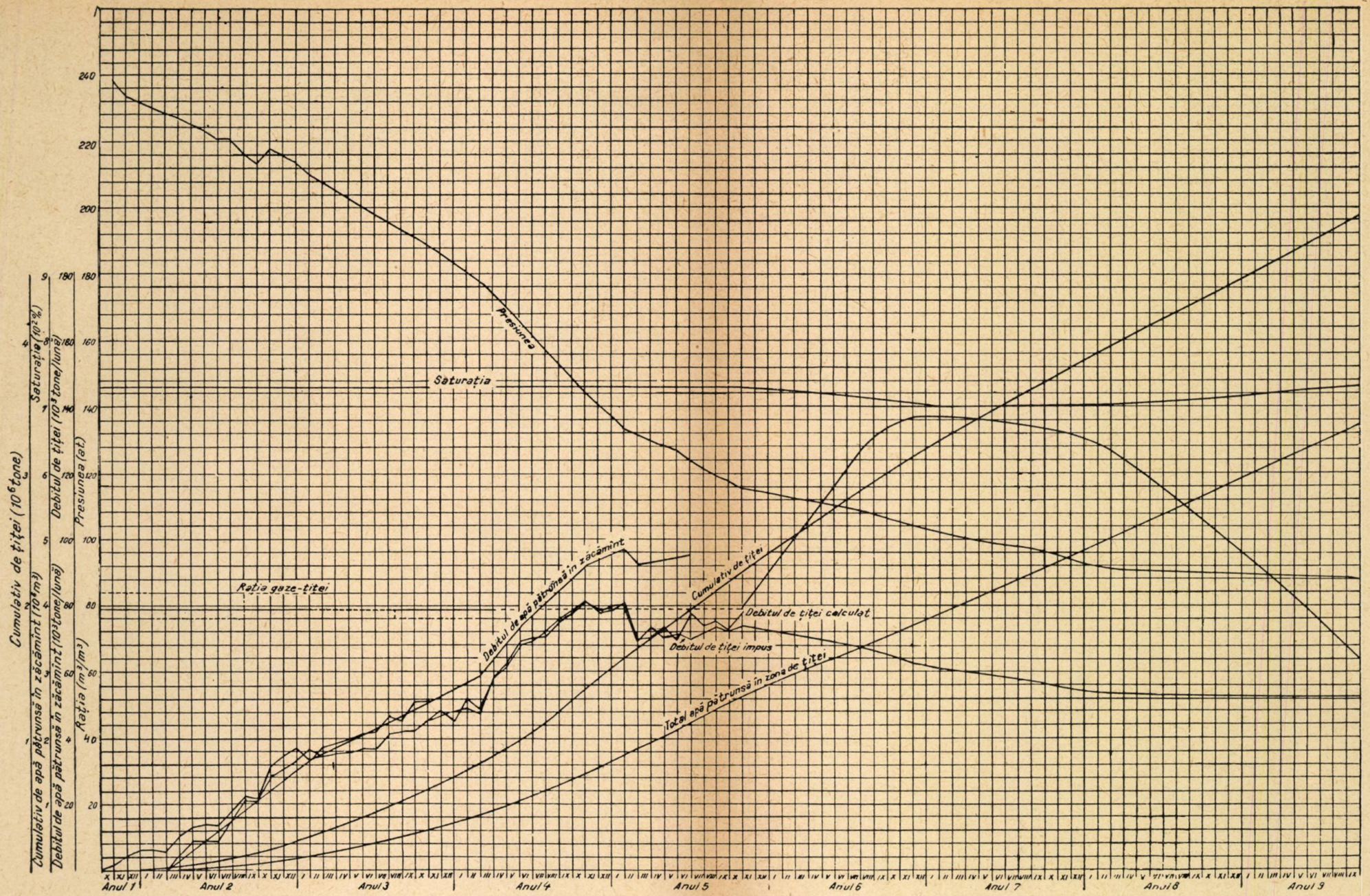


Fig. 8. — Curbele de prevedere a comportării zăcămîntului deasupra şi sub presiunea de saturaţie (pînă la atingerea saturaţiei iniţiale de ţiţei a zonei neinundate cu apă).

consecință mai demnă de remarcat va fi o succesiune de creșteri și descreșteri a rației gaze-țiței.

Metoda propusă s-ar putea îmbunătăți după ce se va dispune de rezultate experimentale concludente în legătură cu variația saturației reziduale în țiței și gaze în zona invadată de apă. Totodată, dacă se va cunoaște cantitativ mecanismul de segregare a gazelor, se va putea ține seamă de acest fenomen.

*

Autorii mulțumesc directorului LCCS Cîmpina, ing. I. Niculescu, și inginer-șef P. Lupu pentru permisiunea de utilizare a materialului documentar din arhiva LCCS. Totodată, exprimă mulțumiri tov. M. Begheș, care a executat cu deosebită scrupulozitate calculele numerice.

Primită la redacție la 3 octombrie 1955.

НОВЫЙ МЕТОД ПРОГНОЗА ПОВЕДЕНИЯ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ С НЕПОЛНЫМ ВОДОНАПОРНЫМ РЕЖИМОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Излагается новый метод для прогноза поведения нефтяных месторождений с неполным водонапорным режимом. До падения пластового давления ниже давления насыщения, прогноз основывается на тех же способах как и в случае полного водонапорного режима: показывается также, что значения постоянных, связанных с физическими и гидродинамическими свойствами системы, можно определить косвенно на основании прежнего поведения эксплоатационного объекта. После падения давления ниже давления насыщения, прогноз поведения основывается на повторном комбинировании способов прогноза, используемых при полном отсутствии синклинальных вод, с способами, применяемыми при наличии полного водонапорного режима. Новый метод позволяет в значительной мере избежать некоторых упрощающих допущений, которыми пользовались другие авторы. На численном примере авторами доказывается возможность появления в процессе добычи и ряда последовательных процессов снижения и повышения насыщенности нефтью, сопровождаемых повышениями и снижениями газового фактора.

ОБЧЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис.1.— Средние характеристики нефти и газа в условиях залегания для месторождения с неполным водонапорным режимом. r—забойный газовый фактор м³/м³; η — коэффициент динамической вязкости (ср); β— объемный фактор; показатели t, a и g обозначают соответственно нефть, воду и газ.

Рис.2.— Соотношения проницаемости насыщения, допущенные в расчете по прогнозу поведения месторождения с частным водонапорным режимом. k_g и k_t — фактические проницаемости для газа и нефти, k — абсолютная проницаемость. Насыщение интерстициальной водой равно 27%.

Рис.3.— Основные характеристики поведения месторождения с момента ввода в эксплоатацию до даты выполнения расчетов по прогнозу.

Рис.4.— Изменение дебита и общего количества воды, проникнувшей в месторождение. Пунктирная линия—среднее изменение дебита воды, проникнувшей в месторождение.

Рис. 5.— Кривые прогноза поведения месторождения до давления насыщения. Было допущено, что дебит нефти изменяется во времени; c_2, $c_3 \ldots c_6$ — угловые коэффициенты отрезков прямой, представляющей собой изменения дебита воды, определенного в результате прогноза.

Рис. 6.— Результаты испытаний по определению изменения общего количества воды, проникшей в зону, насыщенную нефтью после снижения пластового давления ниже давления насыщения.

Рис. 7.— Кривые прогноза поведения месторождения после падения давления ниже давления насыщения до достижения начального насыщения нефтью необводненной зоны.

Рис. 8.— Кривые прогноза поведения месторождения при давлении выше и ниже давления насыщения до достижения начального насыщения нефтью необводненной зоны.

UNE NOUVELLE MÉTHODE D'ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES GISEMENTS DE PÉTROLE EN RÉGIME HYDRAULIQUE PARTIEL

(RÉSUMÉ)

Les auteurs exposent une nouvelle méthode d'étude du comportement des gisements de pétrole en régime hydraulique partiel. Avant que la pression descende sous la pression de saturation, on prévoit le comportement en utilisant les mêmes méthodes que dans le cas des poussées totales d'eau et l'on démontre en même temps que les valeurs des constantes liées aux propriétés physiques et hydro-dynamiques du système peuvent être déterminées indirectement, en vertu du comportement antérieur au début de la prévision. Quand la pression baisse sous la pression de saturation, on obtient le comportement des gisements par une combinaison répétée des procédés de prévision employés dans l'absence totale de l'eau du synclinal et des procédés élaborés pour le cas de l'existence d'une poussée d'eau. Par cette nouvelle méthode, les suppositions simplificatrices utilisées par d'autres auteurs sont sensiblement réduites et l'on a indiqué, par un exemple numérique, les possibilités d'apparition, pendant l'exploitation d'un gisement, d'une série de processus de saturation et de resaturation de pétrole accompagnés en même temps d'augmentations et de diminutions du rapport gaz-pétrole.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Caractéristique physique du pétrole et du gaz dans les conditions d'un gisement en régime hydraulique partiel. r = quantité de gaz dissous dans un mètre cube de pétrole, η = coefficient de viscosité dynamique (cp), β = facteur de la diminution de volume. Les indices t, a et g ont respectivement trait au pétrole, à l'eau et au gaz.

Fig. 2. — Dépendance perméabilité-saturation, admise pour l'étude du comportement d'un gisement de pétrole hydraulique partiel. k_g et k_t = perméabilités effectives pour le gaz et le pétrole; k = perméabilité spécifique. Saturation en eau interstitielle: 27%.

Fig. 3. — Caractéristiques fondamentales de l'histoire du gisement jusqu'au commencement de l'analyse théorique.

Fig. 4. — Variation du débit et de la quantité totale d'eau ayant pénétré dans le gisement. La ligne pointillée représente la variation moyenne du débit de l'eau qui a pénétré dans le gisement.

Fig. 5. — Courbes résultant de l'analyse théorique jusqu'à la pression de saturation. Le débit de pétrole est admis variable avec le temps; c_2, $c_3 \ldots c_6$ représentent les inclinaisons des segments de droite dont on a assimilé la variation au débit d'eau résultant de l'analyse.

Fig. 6. — Résultats des calculs préliminaires en vue de déterminer la quantité totale d'eau ayant pénétré dans la zone saturé de pétrole, quand la pression descend sous la pression de saturation.

Fig. 7. — Courbes résultant de l'étude du comportement des gisements après diminution de la pression au-dessous de la pression de saturation (jusqu'au moment où la saturation s'élève de nouveau jusqu'à la saturation initiale en pétrole de la zone non inondée).

Fig. 8. — Courbes résultant de l'étude du comportement des gisements au-dessus et au-dessous de la pression de saturation (jusqu'au moment où la saturation s'élève de nouveau jusqu'à la saturation initiale en pétrole de la zone inondée).

BIBLIOGRAFIE

1. G. N. Gaziev i I. I. Korganov, *Ekspluatația neftianîh mestorojdenii.* Baku, Azneftizdat, 1950, p. 224.
2. M. Muskat, *Fiziceskie osnovî tehnologii dobîci nefti.* Gostoptehizdat, Moscova—Leningrad, 1953, p. 317, 343 și 372.
3. V. N. Scelkacev i S. N. Nazarov, *Uciot vliania ghidrodinamiceskovo nesovernșentva skvajin v usloviah uprugovo regima.* Neft. Hoz., mai 1954, nr. 5, p. 35.
4. M. M. Glogovski i M. D. Rosenberg, *Radialnoe vîtesnenie gazirovanoi nefti, kraevoi vodoi.* DAN SSSR, 1952, seria nouă, vol. 4, XXXV, nr. 6.
5. — *Vîtesnenie gazirovanoi jidkosti vodoi v sluciaie radialnoi filtrații*, în *Trudî MNI.* Gostoptehizdat, Moscova—Leningrad, 1953, p. 134.
6. — *Vîtesnenie gazirovanoi nefti kraevoi vodoi v krugovoi zaleji s uciotom ostatocinoi nefti i izmenenia fazovoi proniațaeimosti dlia vodî v zone vîtesnenia* în *Trudî VNII.* Gostoptehizdat, Moscova, 1954, vol. 6, p. 205.
7. L. A. Zinovieva, *Priblojonii metod-rasciota pritoka gazirovanoi nefti k skvajinam s uciotom realnîh svoistv plastovîh neftei* în *Trudî VNII.* Gostoptehizdat, Moscova, 1954, vol. 6, p. 254.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

HIDRODINAMICĂ

UN CAZ PARTICULAR DE MIŞCARE ASCENSIONALĂ A PÎNZEI FREATICE

DE

I. VLADIMIRESCU

Fluctuaţiile pînzei de apă într-un strat freatic sînt condiţionate de parametrii care guvernează alimentarea şi golirea sa. Dintre aceştia sînt de menţionat:

— intensitatea, durata şi repartizarea precipitaţiilor atmosferice;
— capacitatea de infiltrare a apei în pămînt;
— evaporarea apei din pămînt;
— nivelul apelor de suprafaţă la contactul cu pînza freatică;
— permeabilitatea şi porozitatea;
— alimentările suplimentare;
— poziţia şi forma stratului impermeabil etc.

În general, factorii de mai sus variază ei înşişi în timp şi în spaţiu, după legi puţin cunoscute, astfel încît nu este posibil ca, pe cale pur analitică, să se stabilească o lege a mişcării apei în pînza freatică, cu o valabilitate extinsă.

Totodată se ivesc dificultăţi uneori de neînvins, în ceea ce priveşte integrarea ecuaţiilor diferenţiale la condiţiile iniţiale şi de limită, puse de practică.

Pentru aceste considerente se utilizează în mod curent pentru aplicaţiile practice în domeniul agriculturii, alimentărilor cu apă, construcţiilor etc., metoda observaţiilor directe.

Metoda conţine însă în sine, un inconvenient de ordin principial, fiindcă nu merge la cauzalitatea fenomenului ci mai mult la înregistrarea efectelor.

De aici derivă un al doilea important inconvenient şi anume, numărul mare de termeni pe care trebuie să-l conţină inevitabilul şir statistic; şi aceasta nu se poate obţine decît dacă se dispune de observaţii directe, adesea de-a lungul a cîtorva decenii.

De multe ori, aplicaţiile practice cer însă soluţii care nu pot aştepta înregistrarea unui astfel de şir numeric.

În articolul de faţă prezentăm un caz particular care a fost soluţionat pe cale analitică cu formule mai simple, folosind un număr redus de observaţii directe, precum şi anumite corelaţii de ordin hidrologic.

Cazul corespunde — cu oarecare abateri — la o situaţie existentă — în felul în care se va concretiza în aplicaţia de la sfîrşitul articolului.

În mod schematizat, problema constă în a se determina mișcarea pe verticală a punctului de cotă maximă al pînzei freatice din interiorul unui platou, în următoarele ipoteze:

a) platoul de formă circulară cu raza R_1, este alimentat pe toată suprafața sa cu debitul specific q provenit din precipitații atmosferice;

b) platoul este alimentat în mod continuu doar pe o suprafață concentrică de rază mai mică decît cea a platoului;

c) platoul din ipoteza *b)* — la un moment dat nemaifiind alimentat de nici o sursă, se cere mișcarea de coborîre a aceluiași punct de cotă maximă.

Se mai admit următoarele condiții:

— in interiorul platoului, stratul filtrant este omogen și izotrop din punct de vedere al permeabilității;

— înălțimea geodezică a platoului în raport cu terenul înconjurător este relativ mică față de diametrul lui;

— stratul impermeabil, în mod practic, poate fi considerat orizontal.

CAZUL *a)*

Schematizarea acestui caz este redată în figura 1, cu următoarele notații:

m = porozitatea stratului filtrant,

K = coeficientul de permeabilitate în m/zi,

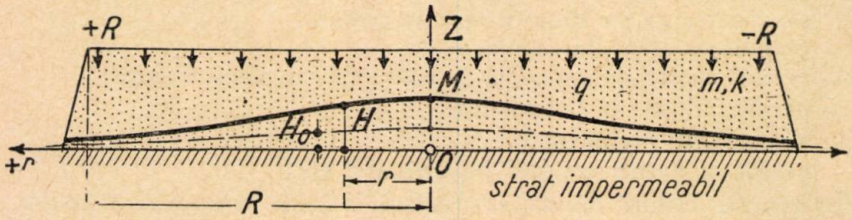


Fig. 1

q = debitul specific de alimentare în m^3/m^2 zi,

M = punctul de cotă maximă,

R = raza platoului în m,

H = înălțimea — în metri — a unui punct pe pînză lichidă corespunzătoare distanței r de la originea axelor.

Expresia mișcării unui punct de coordonate cilindrice (H, r, θ) derivă din ecuația Boussinesq și se exprimă prin relația [1]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial H}{\partial r} Hr\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial H}{\partial \theta} H\right) - \frac{mr}{K}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{qr}{K} = 0.$$

Simetria față de axa verticală OZ asigură condiția

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Relația de mai sus devine deci

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial H}{\partial r} Hr\right) + \frac{qr}{K} = \frac{mr}{K}\frac{\partial H}{\partial t},$$

sau, dacă admitem pentru liniarizare că termenul H din paranteză $H = H_{med}$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{q}{m}, \tag{1}$$

în care

$$a^2 = \frac{K}{m} H_{med}$$

Soluția primară a ecuației (1) este forma [2],

$$H(r, t) = \int_0^t \frac{d\,\tau\, e^{-b^2(t-\tau)}}{2\,a^2\,(t-\tau)} \int_0^\infty f(\rho, \tau)\, e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4\,a^2(t-\tau)}} I_0\left[\frac{r\cdot\rho}{2\,a^2\,(t-\tau)}\right] \rho\, d\rho,$$

care corespunde de fapt ecuației diferențiale

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) - b^2 H^2 + f(r, t). \tag{1'}$$

Condițiile la limită sînt

pentru $r \leqslant R$, $H = H(r, 0)$ și $f(r, t) = \frac{q}{m}$,

pentru $r \geqslant R$, $H = H(r, 0)$ și $f(r, t) = 0$,

$H(0, 0) = 0$,

τ și ρ fiind parametrii de integrare și I_0 funcția cilindrică de argument imaginar.

Din comparația ecuațiilor (1) și (1') cu condiția comună $r < R$ obținem ca soluție pentru (1)

$$H(r, t) - H_0 = \frac{q}{2\,a^2 m} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_0^R e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4\,a^2\,(t-\tau)}} I_0\left(\frac{r\cdot\rho}{2\,a^2\,(t-\tau)}\right) \rho\, d\rho, \tag{2}$$

cu $b = 0$, iar $H(0, 0) \cong H_0 =$ nivelul inițial, de regulă destul de mic.

Mișcarea de ridicare a punctului M (fig. 1) rezultă, făcînd în (2) $r = 0$ și avem

$$H(0, t) - H_0 = \frac{q}{2a^2 m} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{4a^2(t-\tau)}} \rho \cdot d\rho, \tag{3}$$

deoarece $I_0(0) = 1$.

Prin schimbarea de variabilă

$$\lambda = \frac{-\rho^2}{4a^2\,(t-\tau)},$$

relația (3) devine

$$H(0,t) - H_0 = \frac{q}{m} \int_0^t d\tau \int_0^{\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\lambda}\, d\lambda \tag{4}$$

și prin efectuarea celei de-a doua integrale

$$H(0,t) - H_0 = \frac{q}{m} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) d\tau . \tag{5}$$

Ultima integrală poate fi rezolvată prin procedeul tehnic al însumării termenilor de forma

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} e^{-\frac{R^2}{4a^2 \frac{n-i}{n} t}},$$

în care s-a admis

$$d\tau = \Delta\tau = \frac{t}{n}, \quad \tau = \frac{i}{n}\, t,$$

n fiind un număr destul de mare de intervale, iar i fiind ordinul intervalului însumat.

Relația (5) devine astfel

$$H(0,t) - H_0 = \frac{qt}{m}\left[1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n-1} e^{-\frac{R^2}{4a^2 \frac{n-1}{n} t}}\right] \tag{6}$$

și va putea fi aplicată în ipoteza că alimentarea cu debitul q se menține constantă, adică pînă cînd nivelul ascendent freatic nu a intrat în zona de aerații în care procesul de evaporare este mult mai intens.

Influența ordinului de mărime a numărului n de interva'e însumate, poate fi apreciată din aplicația următoare, în care am admis succesiv $R^2 : 4a^2\, t = 0{,}1;\ 1{,}0;\ 2$.

Tabloul nr. 1

Influența numărului n asupra relației (6)

$n =$	5	10	20	
$1 - \frac{1}{n} \sum e^{-\frac{n}{n-1} 0{,}1} =$	0,38	0,32	0,26	$R^2 : 4a^2 t = 0{,}1$
$1 - \frac{1}{n} \sum e^{-\frac{n}{n-1} 1} =$	0,88	0,87	0,86	$R^2 : 4a^2 t = 1$
$1 - \frac{1}{n} \sum e^{-\frac{n}{n-1} 2} =$	0,975	0,964	0,963	$R^2 : 4a^2 t = 2$

Din tabloul nr. 1, rezultă că numărul de termeni n influențează cu atît mai puțin rezultatul, cu cît numărul fără dimensiune $R^2/4a^2t$ depășește valoarea unitară și că, în mod acoperitor cum se cere în practică, vom putea să ne limităm la $n = 20$.

CAZUL *b)*

Schematizarea acestui caz este redată în figura 2.

Păstrînd notațiile cazului *a)* cu deosebirea că R reprezintă aici raza cercului de alimentare, vom constata că, ecuația mișcării punctului M este identică cu aceea a cazului *a)*, adică cu ecuația (6).

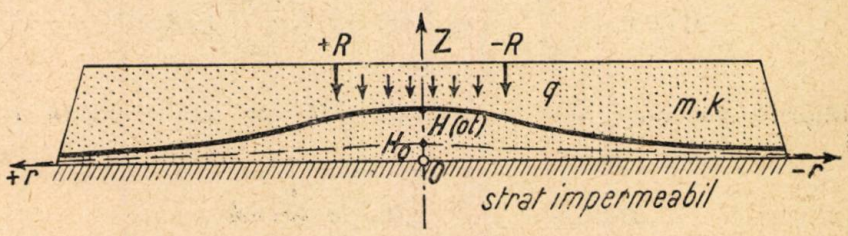


Fig. 2

CAZUL *c)*

Figura 3 redă în mod schematic ipotezele inițiale admise. Acest caz studiază relația după care punctul M se coboară, cînd a încetat în mod brusc alimentarea stratului freatic.

Conform figurii 3 s-a admis aproximația că forma pînzei freatice în momentul încetării alimentării, este conică cu înălțimea H_0 la vîrful M.

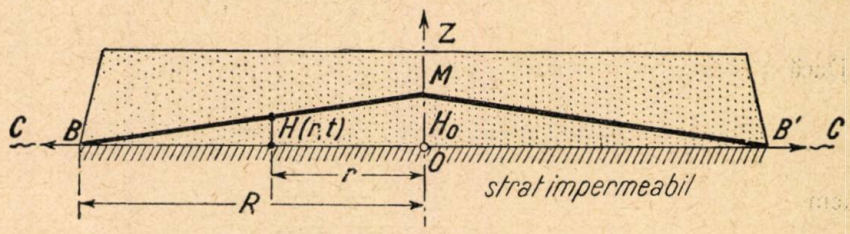


Fig. 3

Ecuația diferențială a mișcării unui punct oarecare de pe suprafața conului, pornește din ecuația (1) în care $q = 0$, adică

$$\text{identic (1) fără} + \frac{q}{m} \tag{7}$$

cu condiția la $t = 0$; $H(r, 0) = H_0(r)$.

Funcția $H_0(r)$ este nulă la infinit și este reprezentată prin linia $CBMB'C$.

Din cele de mai sus avem

$$\text{pentru } r > R, \qquad H_0(r) = 0,$$

$$0 \leqslant r \leqslant R, \qquad H_0(r) = H_0\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

$$-R \leqslant r \leqslant 0, \qquad H_0(r) = H_0\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Cu condițiile menționate, soluția dată de prof. R. B ă d e s c u *), ecuația diferențială (7) este

$$H(r, t) = \frac{H_0}{2a^2 Rt} \int_0^R d\rho \int_0^\rho e^{-\frac{r^2+\alpha^2}{4a^2 t}} I_0\left(\frac{r\alpha}{2a^2 t}\right) \alpha d\alpha, \tag{8}$$

Mișcarea punctului M — pe verticala OH — se obține pentru $r = 0$, adică

$$H(0, t) = \frac{H_0}{2a^2 Rt} \int_0^R d\rho \int_0^\rho e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2 t}} \alpha d\alpha. \tag{9}$$

Ținînd seama că

$$\int_0^\rho e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2 t}} \alpha d\alpha = 2a^2 t \left[1 - e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}}\right],$$

ecuația (9) devine

$$H(0, t) = H_0\left[1 - \frac{1}{R} \int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}} d\rho\right].$$

Dacă se înlocuiește variabila ρ prin

$$\lambda = \frac{\rho}{2a^2 \sqrt{t}} \quad \text{și} \quad d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{t}} d\rho,$$

obținem

$$H(0, t) = H_0\left[1 - \frac{2a\sqrt{t}}{R} \int_0^{R/2a\sqrt{t}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right].$$

Se știe că

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{R/2a\sqrt{t}} e^{-\lambda^2} d\lambda = \Phi\left(\frac{R}{2a\sqrt{t}}\right),$$

*) Lucrare în manuscris.

în care termenul al doilea este integrala erorilor a lui Gauss, dată de manualele uzuale.

În final vom avea

$$H(0, t) = H_0\left[1 - \frac{a\sqrt{\pi t}}{R}\Phi\left(\frac{R}{2a\sqrt{t}}\right)\right], \tag{10}$$

în care și aici, conform ecuației (1)

$$a^2 = H_{\text{med}}\frac{K}{m}.$$

Pentru valori

$$\frac{R}{2a\sqrt{t}} \geqslant 2, \text{ rezultă } \Phi(\ ) \cong 0{,}99 \div 1.00$$

iar formula (10) se poate admite la forma simplificată

$$H(0, t) = H_0\left[1 - \frac{a\sqrt{\pi t}}{R}\right]. \tag{10'}$$

Aplicații. Formulele stabilite mai sus și-au găsit aplicarea la clarificarea unor aspecte privind cazul particular de la Brăila.

Sub acest oraș dunărean — nivelul freatic a crescut incontinuu în decursul ultimilor ani, încît în primăvara anului 1954 hidroizohipsele se prezentau conform figurii 4 cu vîrful la cota 16,50. Profilul transversal distorsionat din figura 5 redă în mod schematic proporțiile la care pînza freatică s-a ridicat, în raport cu nivelul maxim al Dunării.

În legătură cu aceasta și pentru stabilirea cauzelor s-a cerut să se determine nivelul maxim al pînzei — în cazul alimentării sale cu apele provenite din precipitațiile atmosferice — observațiile directe în puțuri lipsind integral.

Observațiile hidrogeologice și hidrometeorologice din țara noastră ale pînzelor freatice, au arătat că acestea se află la nivelul lor maxim de regulă în decursul lunilor de primăvară. El se datorește precipitațiilor căzute în decursul lunilor de toamnă și de iarnă, precipitații care parțial se infiltrează și alimentează stratul freatic.

Din cercetarea regimului pluviometric al microregiunii s-au ales precipitațiile la Brăila, în perioada cea mai abundentă în ploi și zăpezi 1941/1942, conform cu tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

Precipitațiile la Brăila în 1941/42 (după Bul. Inst. meteorologic)

Lunile	Sept. 1941	Oct.	Nov.	Dec.	Ian. 1942	Febr.	Total
Precipit. P = în mm	39	49	26	40	56	24	234
		154 mm					
Natura precipit.	ploi	ploi	ploi	ploi	zăpadă	ploi + zăpadă	
Temp. medie	14°,9	10°,3	1°,4	−1°,4	−9°,7	−2°,7	

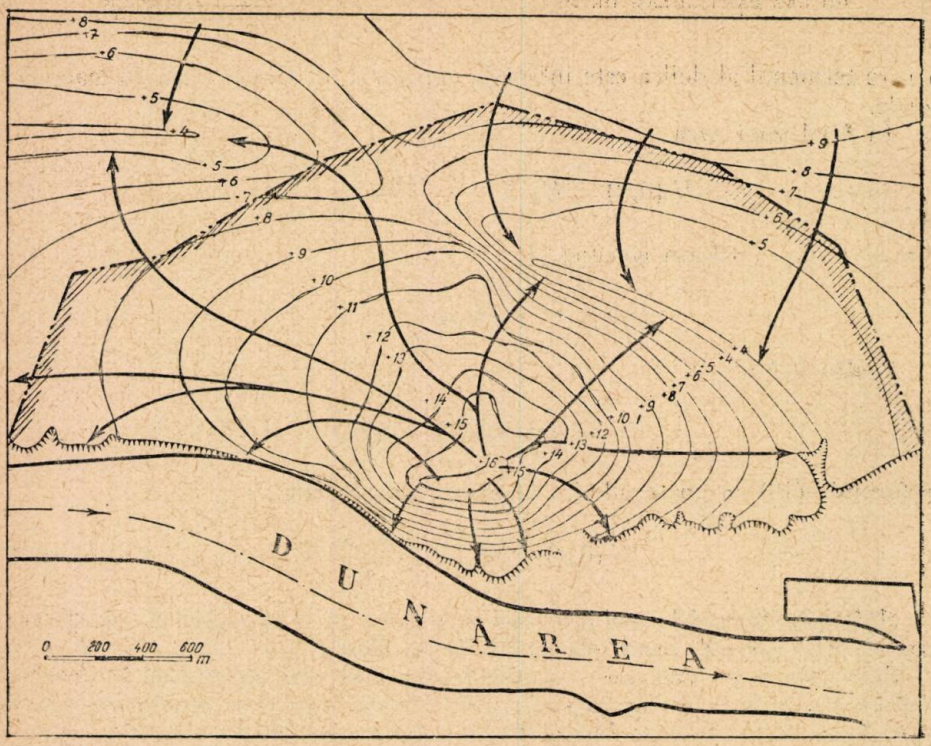

D U N Ă R E A
0 200 400 600 m

Fig. 4

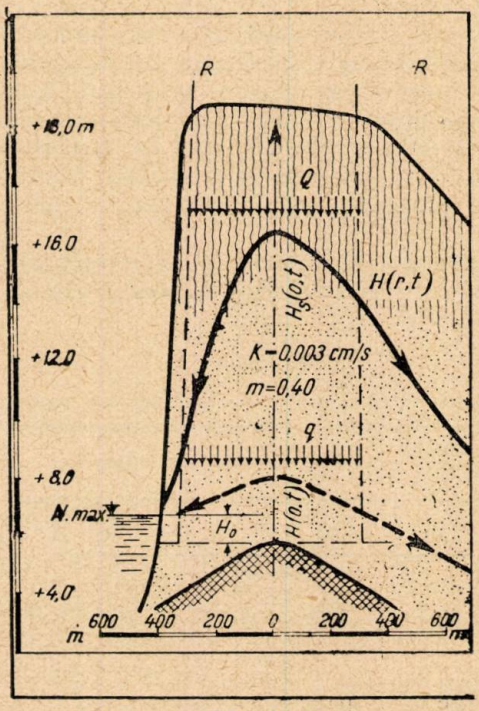

R
R
+18,0 m
+16,0
+12,0
+8,0
N. max
+4,0
Q
H(r,t)
Hs(o,t)
K=0,003 cm/s
m=0,40
q
H(o,t)
H0
600 400 200 0 200 400 600 m

Fig. 5

În condițiile hidrometeorologice indicate în tabloul nr. 2 este probabil că doar precipitațiile din cursul lunilor septembrie-decembrie, totalizînd 154 mm, s-au infiltrat în mod continuu, celelalte, din cauza solului înghețat și a temperaturilor negative ale aerului au suferit o decalare de cel puțin două luni.

Pentru calcularea debitului activ, care alimentează stratul freatic, în mod exact va trebui să considerăm o valoare parțială P' a precipitațiilor adică

$$P' = \beta (1 - \mu) P,$$

întrucît precipitațiile P căzute, pierd pînă a ajunge în strat, partea aferentă scurgerii superficiale — scoasă în evidență prin coeficientul de scurgere μ — și partea aferentă refacerii umidității solului, scoasă în evidență prin coeficientul β.

Pentru a ne situa în cazul cel mai defavorabil, am admis valoarea integrală a precipitațiilor, neglijînd totodată pierderile prin evaporare, destul de reduse de altfel în condițiile de temperatură ale aerului și ale solului indicate în tablou.

Debitul activ de alimentare continuă a stratului freatic este așadar

$$q = \frac{1}{1000}\frac{P}{t} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{154}{4 \times 30} = 0{,}0013 \ \text{m}^3/\text{m}^2 \text{ zi}.$$

Printr-o echivalare a cazului teoretic *a)* mai sus studiat, cu condițiile medii ale platoului de la Brăila, concretizate în figura 5, devine posibilă aplicarea formulei (6) pentru a determina nivelul maxim al pînzei freatice de sub oraș, în alimentarea sa naturală.

Datele numerice fiind

$$R = 400 \text{ m}; \quad H_{med} = 1{,}40 \text{ m}; \quad K = 3{,}0 \text{ m/zi}; \quad m = 0{,}40; \quad t = 120 \text{ zile}$$

obținem

$$\frac{R^2}{4a^2t} = \frac{400^2}{4 \times 4{,}2 \times 120} = 80$$

Ținînd seama de rezultatele tabloului nr. 1 se deduce că valoarea parantezei din formula

$$H(0, t) - H_0 = \frac{qt}{m}\left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n-1} e^{-\frac{R^2}{4a^2t}\frac{n-1}{n}}\right],$$

se apropie de unitate, așa că

$$H(0, t) - H_0 = \frac{0{,}0013 \times 120}{0{,}40} = 0{,}40 \text{ m}.$$

Întrucît H_0 are cota + 6,60 m — nivelul maxim de durată al apelor Dunării în epoca de maxim al stratului freatic, va avea ca valoare maximă

$$H_{max} = + 6{,}60 + 0{,}40 = 7{,}00 \text{ m}.$$

Această cotă este evident cu mult mai mică decît cota + 16,50 m — la care s-a găsit nivelul maxim al pînzei freatice. Luînd în considerare faptul că evacuarea pe contur a stratului, nu a fost cu nimic obstruată, s-a tras concluzia că nivelul ridicat al pînzei freatice nu se datorește decît în mică măsură alimentărilor din precipitații atmosferice.

De altfel niciodată de la înființarea orașului nu s-a constatat inundarea subsolurilor și a galeriilor orașului, așa cum s-a produs în ultimii ani.

Analizarea situației locale — în corelație cu fenomenul fizic studiat pe cale analitică — a condus la concluzia că nivelul freatic la cote atît de ridicate, trebuie să provină dintr-o alimentare cu apă — suplimentară — în partea centrală a orașului, fiindcă aceasta coincide cu însăși zona nivelurilor ridicate ale pînzei freatice. Cercetările întreprinse au arătat într-adevăr pierderi de apă importante atît în rețeaua de canalizare a orașului cît și la branșamentele de apă potabilă, pierderi care au avut posibilitatea să alimenteze cu ușurință stratul freatic prin canalele structurale ale terenului alcătuit din loess. O dată identificată cauza, s-a pus problema să se determine durata în care fenomenul a avut loc.

Aceasta s-a obținut prin încercări aplicînd formula (6) în care înlocuim

$H(0, t) - H_0 = 16{,}50 - 7{,}00 = 9{,}50$ m; $R = 300$ m; $H_{med} = 4{,}50$ m;
$K = 3{,}0$ m/zi; $m = 0{,}40$; $a^2 = 33{,}8$;

Valoarea debitului q s-a evaluat ca fiind 40% din consumul de apă potabilă a părții centrale a orașului, adică $q = 0{,}0028$ m^3/m^2, zi.

Prin calcularea expresiei (admitem $t = 4\,000$ zile)

$$\frac{R^2}{4a^2t} = \frac{300^2}{4 \times 33{,}8 \times 4\,000} = 0{,}164,$$

care, conform tabloului nr. 1 corespunde prin interpolare — la 0,35 pentru valoarea parantezei din ecuația (6), se obține

$$9{,}50 = \frac{0{,}0028 \times t}{0{,}40} \times 0{,}34 \quad t = 3750 < 4\,000 \text{ zile}$$

Pentru $t = 3\,750$ zile vom avea în a doua aproximație

$$\frac{R^2}{4a^2t} = \frac{400}{3\,750} \times 0{,}164 = 0{,}175,$$

căruia îi corespunde o valoare a parantezei din ecuația (6′) de 0,36 și deci

$$t = \frac{9{,}50 \times 0{,}40}{0{,}0028 \times 0{,}36} = 3\,780 \text{ zile} \approx 3\,750 \text{ zile}$$

Procesul de ridicare a nivelului freatic durează așadar de mai bine de zece ani.

În sfîrșit răspunsul pozitiv la întrebarea dacă prin suprimarea pierderilor care alimentează stratul, se poate obține — în mod natural — o coborîre rapidă a nivelului de apă constituie o aplicație utilă pentru cazul de la Brăila, a formulelor mai înainte stabilite.

S-a admis ca această coborîre a nivelului să fie deocamdată pînă la cota + (13,00) m, cu 3,50 m mai jos de nivelul maxim existent, adică pînă unde apele ar evacua subsolurile clădirilor centrale.

Răspunsul s-a obținut aplicînd formula (10′) cu

$R = 800$ m; $H_{med} = 9{,}50$; $K = 3{,}0$ m/zi; $m = 0{,}40$
$a^2 = 9{,}50 \times 3{,}0 : 0{,}40 = 70$; valoarea duratei t este

$$t = \frac{R^2}{\pi a^2}\left[\frac{H(0, t)}{H_0} - 1\right]^2 = \frac{800^2}{3{,}14 \times 70}\left[\frac{13{,}0-55}{16{,}5-5{,}5} - 1\right]^2 = 290 \text{ zile}$$

Natural, că ipoteza unei încetări bruște a oricărei alimentări a stratului freatic nu va fi realizabilă, de aceea termenul de scădere a nivelului va fi cu mult mai mare.

Pentru aceste motive s-a propus Comisiunii technice de sub președenția prof. dr. ing. St. Bălan — scăderea nivelului freatic prin drenaje și puțuri cu diametru mic.

Primită la redacție la 26 februarie 1956.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ВОСХОДЯЩЕГО ДВИЖЕНИЯ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье излагается предлагаемый автором метод исследования уровня грунтовых вод, залегающих в плато города Брэила.

По этому методу наблюдения, производимые в течение продолжительного времени, дополняются практическим применением теории поверхности уровня грунтовых вод и генетического процесса образования самого слоя грунтовых вод.

Метод приводит к выводу сравнительно простых формул (6), (10), (10′), при помощи которых возможно определить положение наивысшей отметки слоя грунтовых вод при различных гипотезах о его питании.

UN CAS PARTICULIER DE MOUVEMENT ASCENSIONNEL DE LA NAPPE PHRÉATIQUE

(RÉSUMÉ)

Cet article expose la méthode que l'auteur préconise pour l'étude du niveau phréatique à l'intérieur du plateau de la ville de Brăila.

Cette méthode supplée aux observations de longue haleine, par une mise en valeur pratique de la théorie du mouvement de la surface de niveau phréatique avec le processus génétique de formation de la couche phréatique elle-même.

La méthode conduit à des formules relativement simples (6), (10) et (10′) qui ont permis de déterminer la position du point de cote maximum de la nappe phréatique, dans différentes hypothèses d'alimentation.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Aravin i S. Numerov, *Teoria dvijenie jidkostei i gazov v nedeformiremoi poristoi srede.* Gostehizdat, Moscova, 1953.
2. P. Polubarinova Kocina, *Teoria dvijeniia arumtovih vod.* Gostehizdat, Moscova, 1953.
3. R. Dachler, *Grundwasserströmung.* J. Springer, Viena, 1956.
4. M. A. Velikanov, *Hidrologia uscatului.* I.D.T., București, 1954.
5. G. V. Bogomolov, *Bazele hidrogeologiei.* I.D.T., București, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

HIDROMECANICĂ

SCURGEREA STAŢIONARĂ PLAN-RADIALĂ A UNUI AMESTEC DE LICHID ŞI GAZ PRINTR-UN MEDIU POROS

DE

T. OROVEANU şi H. PASCAL

În cele ce urmează, vom considera scurgerea staționară a unui amestec de lichid și gaz spre o sondă care exploatează un strat în regimul de gaze dizolvate. În acest scop, vom utiliza rezultatele obținute într-o lucrare anterioară [1].

Vom presupune că sonda este situată în centrul unui zăcămînt de formă circulară și deschide stratul pe toată grosimea lui, așa fel că scurgerea să fie plan-radială.

Dacă notăm cu ρ masa specifică a amestecului și cu v_r viteza radială a acestuia, ecuația de continuitate se scrie

$$\frac{d(\rho v_r)}{dr} + \frac{\rho v_r}{r} = 0. \tag{1}$$

Din lucrarea citată mai sus, viteza radială a amestecului rezultă sub forma

$$v_r = -\frac{1}{\rho}\left(\rho_g \frac{k_g}{\eta_g} + \rho_l \frac{k_l}{\eta_l}\right)\frac{dp}{dr}, \tag{2}$$

unde k_g și η_g sînt permeabilitatea efectivă și viscozitatea dinamică pentru gaz, k_l și η_l aceleași mărimi pentru lichid, iar ρ_g și ρ_l masele specifice, respectiv a gazului și a lichidului.

Dacă introducem funcția φ definită în aceeași lucrare

$$\varphi = \int\left(\rho_g \frac{k_g}{\eta_g} + \rho_l \frac{k_l}{\eta_l}\right) dp + C, \tag{3}$$

obținem imediat

$$v_r = -\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{dr}, \tag{4}$$

și ecuația (1) ia forma

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0. \tag{5}$$

Notînd cu φ_c valoarea funcţiei φ pe conturul de alimentare a cărui rază este r_c şi cu φ_s valoarea aceleiaşi funcţii la sonda de rază r_s, soluţia ecuaţiei precedente este

$$\varphi = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\log \frac{r_c}{r_s}} \log \frac{r}{r_s} + \varphi_s. \tag{6}$$

Viteza radială are prin urmare expresia

$$v_r = \frac{1}{\rho} \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\log \frac{r_c}{r_s}} \frac{1}{r}, \tag{7}$$

luată în valoare absolută, iar debitul se calculează uşor din formula

$$Q = 2\pi r_s h v_{rs} = \frac{2\pi h}{\rho_s} \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\log \frac{r_c}{r_s}}, \tag{8}$$

v_{rs} fiind valoarea lui v_r pe cercul de rază r_s şi h grosimea stratului, iar ρ_s masa specifică a amestecului pentru $r = r_s$.

Plecînd de la expresia precedentă, este uşor să stabilim debitele de lichid şi gaz la talpa sondei. Din relaţia

$$\rho Q = \rho_l Q_l + \rho_g Q_g, \tag{9}$$

unde Q_l şi Q_g sînt debitele de lichid şi de gaz, rezultă

$$Q_l = \frac{\rho}{\rho_l} \frac{Q}{1 + \frac{\rho_g Q_g}{\rho_l Q_l}}. \tag{10}$$

Avem însă

$$\frac{\rho_g Q_g}{\rho_l Q_l} = \mu, \tag{11}$$

μ fiind raţia masică de gaze introdusă în lucrarea [1]. Ţinînd seama de aceasta, obţinem

$$Q_l = \frac{2\pi h}{\rho_{ls}(1 + \mu_s)} \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\log \frac{r}{r_s}}, \tag{12}$$

unde ρ_{ls} şi μ_s sînt valorile lui ρ_l şi μ pentru $r = r_s$.

Analog, găsim debitul de gaze

$$Q_g = \frac{2\pi h \mu_s}{\rho_{gs}(1 + \mu_s)} \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\log \frac{r_c}{r_s}}, \tag{13}$$

ρ_{gs} fiind valoarea lui ρ_g pentru $r = r_s$.

Pentru calculul efectiv este necesar să se cunoască expresia funcției φ. Relația de definiție (3) se mai poate scrie

$$\varphi = \int \rho_l \frac{k_l}{\eta_l}\left(1 + \frac{\rho_g}{\rho_l}\,\frac{k_g}{k_l}\,\frac{\eta_l}{\eta_g}\right) dp + C, \tag{14}$$

și se observă că

$$\frac{\rho_g \dfrac{k_g}{\eta_g}}{\rho_l \dfrac{k_l}{\eta_l}} = \mu, \tag{15}$$

deoarece avem

$$\bar{v}_g = -\frac{k_g}{\eta_g}\nabla p\,, \quad \bar{v}_l = -\frac{k_l}{\eta_l}\nabla p\,, \tag{16}$$

și primul membru al relației (15) exprimă prin urmare raportul dintre masa de gaz și masa de lichid care trec în același timp printr-o suprafață oarecare; se constată ușor că acest raport este egal chiar cu μ. Putem scrie deci

$$\varphi = \int \rho_l \frac{k_l}{\eta_l}(1 + \mu)\, dp + C. \tag{17}$$

Presupunînd că μ variază liniar cu presiunea, avem

$$\mu = \mu_c + \varepsilon(p_c - p), \tag{18}$$

unde p_c este presiunea pe conturul de rază r_c, iar μ_c valoarea corespunzătoare a lui μ. Mai departe, utilizăm aproximația introdusă în lucrarea [2] punînd

$$\frac{k_l}{\beta_l \eta_l} = ap + b, \tag{19}$$

unde a și b sînt coeficienți care trebuie determinați în mod corespunzător. Factorul micșorării de volum β_l are de asemenea o variație liniară în intervalul de presiuni care intervine în aceste probleme. Notînd cu β_{lc} și cu β_{ls} valorile lui β_l care corespund respectiv presiunilor p_c și p_s pe cercurile de rază r_c și r_s, avem

$$\beta_l = \frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s}(p - p_s) + \beta_{ls}. \tag{20}$$

De aici rezultă

$$\frac{k_l}{\eta_l} = Aap^2 + (Ab + Ba)\,p + Bb, \tag{21}$$

unde am pus

$$A = \frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s}\,, \qquad B = \beta_{ls} - \frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s}\,p_s\,. \tag{22}$$

Pe de altă parte, în lucrarea [1] am adoptat pentru ρ_l o expresie de forma

$$\rho = \rho_{lc}\,[1 + \varkappa(p_c - p)], \tag{23}$$

şi dacă ţinem seama de (18) găsim în cele din urmă pentru funcţia φ următoarea expresie

$$\varphi = \rho_{lc}(\alpha_0 p^5 + \alpha_1 p^4 + \alpha_2 p^3 + \alpha_3 p^2 + \alpha_4 p) + C, \tag{24}$$

coeficienţii avînd la rîndul lor expresiile care rezultă din cele precedente şi anume

$$5\alpha_0 = \frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} \varkappa \varepsilon a,$$

$$4\alpha_1 = \left(\frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} b + \beta_{ls} a\right) \varkappa \varepsilon - \frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} a [(1 + \mu_c)\varkappa + (2p_c + p_s)\varkappa\varepsilon + \varepsilon],$$

$$3\alpha_2' = (1 + \mu_c + \varepsilon p_c)\left\{\frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} a [1 + \varkappa(p_c + p_s)] - \varkappa\left(\frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} b + \beta_{ls} a\right)\right\},$$

$$2\alpha_3 = (1 + \mu_c + \varepsilon p_c)\left\{\frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s}[b(1 + \varkappa p_c + \varkappa p_s) - a p_s (1 + \varkappa p_c)] + \right. \tag{25}$$

$$\left. + \beta_{ls}[a(1 + \varkappa p_c) - b\varkappa]\right\} + \varepsilon b (1 + \varkappa p_c)\left(\frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} p_s - \beta_{ls}\right),$$

$$\alpha_4 = (1 + \mu_c + \varepsilon p_c)(1 + \varkappa p_c) b \left(\beta_{ls} - \frac{\beta_{lc} - \beta_{ls}}{p_c - p_s} p_s\right).$$

Ţinînd seama de expresia funcţiei φ, formulele (12) şi (13) care dau debitele, devin respectiv

$$Q_l = \frac{2\pi h}{1 + \mu_s} \frac{\rho_{lc}}{\rho_{ls}} \frac{1}{\log \frac{r_c}{r_s}} [\alpha_0 (p_c^5 - p_s^5) + \alpha_1 (p_c^4 - p_s^4) + \tag{26}$$

$$+ \alpha_2 (p_c^3 - p_s^3) + \alpha_3 (p_c^2 - p_s^2) + \alpha_4 (p_c - p_s)],$$

şi

$$Q_g = \frac{2\pi h \mu_s}{1 + \mu_s} \frac{\rho_{lc}}{\rho_{gs}} \frac{1}{\log \frac{r_c}{r_s}} [\alpha_0 (p_c^5 - p_s^5) + \alpha_1 (p_c^4 - p_s^4) + \tag{27}$$

$$+ \alpha_2 (p_c^3 - p_s^3) + \alpha_3 (p_c^2 - p_s^2) + \alpha_4 (p_c - p_s)].$$

Primită la redacţie la 26 decembrie 1955.

СТАЦИОНАРНОЕ ПЛОСКО-РАДИАЛЬНОЕ ПРОТЕКАНИЕ СМЕСИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА СКВОЗЬ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье рассматривается задача установления дебита нефти и газа буровой скважины, эксплуатирующей слой растворенных газов. Предполагая, что протекание плоско-радиальное и пользуясь выводами, приведенными в ранее опубликованной статье [1], выводятся формулы для дебитов.

L'ÉCOULEMENT STATIONNAIRE PLAN-RADIAL D'UN MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE GAZ À TRAVERS UN MILIEU POREUX

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, les auteurs étudient le problème du calcul des débits de pétrole et de gaz d'un puits qui exploite une couche en régime de gaz dissous. En supposant l'écoulement plan-radial et en utilisant les résultats indiqués dans un travail antérieur [1], on établit les formules cherchées.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu și H. Pascal, *Scurgerea unui amestec compresibil de lichid și gaz printr-un mediu poros.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 9, septembrie 1955, p. 1311.
2. L. A. Zinovieva, *Priblijennîi metod rasceta pritoka gazirovannoi nefti k skvajinam s ucetom realnîh svoistv plastovîh neftei.* Trudî VNII, 1954, vol. 6 M, nr. 6, p. 254.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

TEORIA MECANISMELOR

CONSIDERAŢII ASUPRA POSIBILITĂŢILOR DE MĂRIRE A VITEZEI DE LUCRU LA MAŞINILE CIRCULARE AUTOMATE DE TRICOTAT

DE

E. BUGAIEVSKI, R. BOGDAN, D. PAVELESCU, C. PELECUDI
şi A. LEZER

Maşinile textile prezintă în dimensionare o problemă delicată, datorită condiţiilor de gabarit pe care le impune unor anumite piese, finețea țesăturii. Acest lucru face ca piesele în cauză să nu poată fi dimensionate oricît de puternic, după eforturile care intervin, şi ele duc de regulă la limitarea vitezei de lucru.

Pentru acest motiv trebuie acordată o atenţie deosebită formelor geometrice ale elementelor importante, care pot reduce solicitările şi deci permit o ridicare a vitezei de lucru, adică a productivităţii maşinii.

Studiul de faţă priveşte acest aspect la maşinile circulare automate folosite la confecţionarea ciorapilor, căutînd să dea criterii de dimensionare cît mai avantajoasă pentru atingerea unor viteze sporite de lucru.

Din analiza maşinii circulare, a cărei descriere nu este cazul să fie făcută aici, rezultă că ea poate fi împărţită în patru mecanisme cu funcţiuni distincte:

— mecanismul de transmisie, care pune în mişcare întregul ansamblu, formînd partea motoare a maşinii;

— mecanismul de comandă, care acţionează diferitele schimbări în funcţionare pentru obţinerea tricotului de o anumită formă;

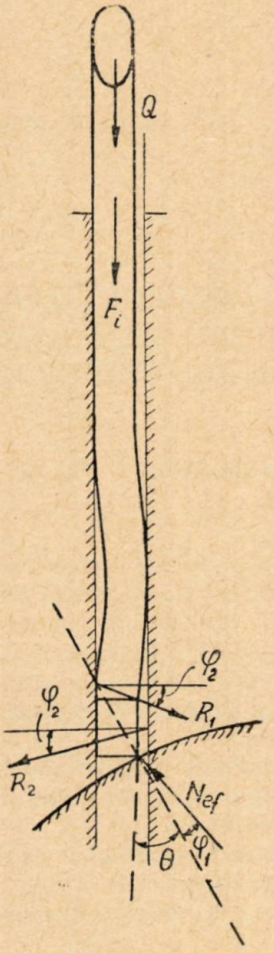
— mecanismul de formare a ochiurilor, care reprezintă partea centrală a maşinii;

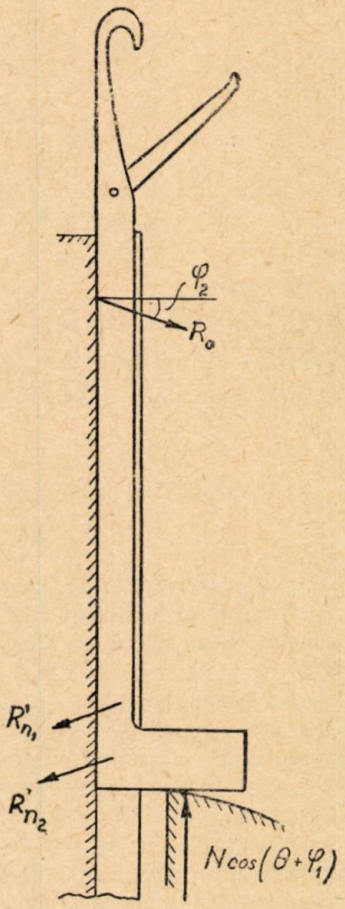
— mecanismul de alimentare cu fir.

Considerînd solicitările elementelor maşinii care sînt periclitate în funcţionare, se pot găsi parametrii de care depind aceste solicitări şi putem trage concluzii asupra alegerii lor judicioase.

Din mecanismul maşinii, singurele elemente care nu pot fi dimensionate oricum, sînt acele şi platinele, dintre care ultimele sînt solicitate neglijabil şi deci nu prezintă un interes special. La acestea se mai adaugă firul, care de asemenea prezintă un punct slab în funcţionare.

Elementele mecanismelor de transmisie, comandă şi alimentare, pot fi oricînd dimensionate conform eforturilor care le solicită şi considerarea lor nu prezintă o problemă specială.


Q
F_i
φ_2
φ_2
R_1
R_2
N_{ef}
θ
φ_1


φ_2
R_o
R'_{n_1}
R'_{n_2}
$N\cos(\theta+\varphi_1)$

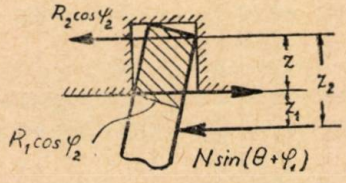

$R_2\cos\varphi_2$
z
z_2
z_1
$R_1\cos\varphi_2$
$N\sin(\theta+\varphi_1)$

Fig. 1

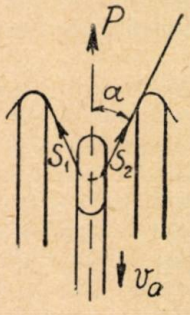

P
α
S_1
S_2
v_a

Fig. 2

Pentru determinarea parametrilor și a legăturilor dintre ei este necesară întîi stabilirea eforturilor și apoi studierea solicitărilor acului și firului.

Determinarea eforturilor asupra acului

Eforturile se determină din considerarea ansamblului camă-ac, care formează un mecanism cu camă de translație, înfășurat pe un cilindru. Pentru simplificare, putem considera acest mecanism plan, ceea ce duce la neglijarea forțelor centrifuge asupra acelor în mișcare. Aceste forțe care caută să scoată acele din canalele cilindrului sînt însă anulate independent, de frecarea în canale și de un resort special, fără importanță pentru solicitarea acelor. Pe de altă parte forța centrifugă are un efect favorabil asupra limbii acului, diminuînd șocul care se produce între aceasta și cîrlig.

În figura 1 sînt arătate eforturile asupra acului:

a) Forța Q. Aceasta se compune de fapt din două forțe:

1. Forța P care reprezintă acțiunea firului (fig. 2)

$$P \cong 2\,S_1 \cos\alpha \cong 2\,S_1, \tag{1}$$

(α fiind mic în cazul poziției coborîte a acului).

Tensiunea S_1 din fir se determină cum se va arăta la calculul firului și la limită poate merge pînă la efortul admisibil în fir P_f.

2. Forțele de frecare ale acului în canal, pe direcția acului, a căror sumă o notăm F_f. Acestea depind de curbarea inițială a acului și se determină prin măsurare cu dinamometrul.

Deci putem pune $Q = P + F_f$.

b) Forța de inerție (F_i).

Pentru determinarea ei ca și pentru studiul șocului limbii este necesar un studiu cinematic al mișcării acului.

Deplasările acului sînt date de ordonatele profilului lacătului și se determină pe considerente de tehnologie a buclării.

Viteza acului rezultă vectorial din figura 3.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_c + \bar{v}_{ac}$$

Final obținem

$$v_a = v_c \operatorname{tg}\theta = r\,\omega \operatorname{tg}\theta, \tag{2}$$

unde

v_a este viteza acului în canalul său,

v_c este viteza periferică a cilindrului,

v_{ac} este viteza relativă a acului față de camă,

r este raza cilindrului după care are loc contactul dintre călcîi și camă,

ω este viteza unghiulară a cilindrului.

De asemenea accelerația acului rezultă din figura 4

$$\bar{a}_a = \bar{a}_c^{\,t} + \bar{a}_{ac}^{\,n} + \bar{a}_{ac}^{\,t}$$

și are expresia

$$a_a = r\varepsilon \operatorname{tg}\theta + \frac{r^2\,\omega^2}{\rho\cos^3\theta}, \tag{3}$$

unde

a_a este accelerația acului în direcția canalului,

a_c^t este accelerația tangențială a cilindrului,

a_{ac}^n este accelerația normală a acului în mișcare față de camă,

a_{ac}^t este accelerația tangențială a acului în mișcare față de camă,

ε este accelerația unghiulară a cilindrului cu ace, care în mișcarea de regim este teoretic nulă. Astfel, primul termen se poate neglija și se ajunge la expresia

$$a_a = \frac{r^2 \omega^2}{\rho \cos^3 \theta} \cdot \tag{3'}$$

În cazul mișcării oscilante a cilindrului, un calcul riguros cere să se ia în considerație și ε, însă neglijarea sa nu duce la erori sensibile.

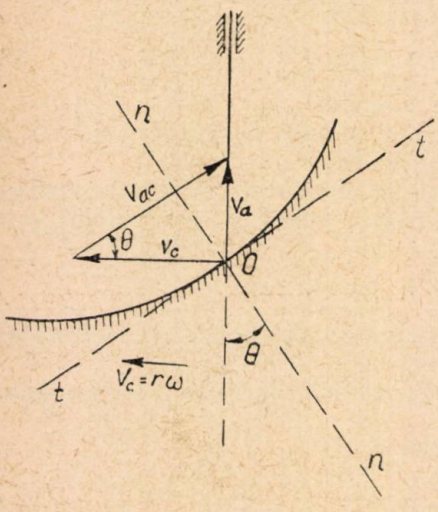


Fig. 3

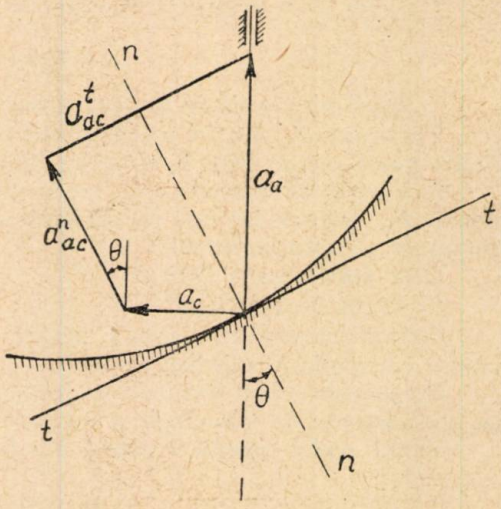


Fig. 4

Forța de inerție rezultă astfel

$$| F_i | = m_a | a_a | = \frac{G_a}{g} \cdot \frac{r^2 \omega^2}{\rho \cos^3 \theta}, \tag{4}$$

unde m_a și G_a sînt masa, respectiv greutatea acului.

Momentele defavorabile care fac ca F_i să fie mare, sînt acelea în care acul merge pe pante mari sau în care parcurge racordări de rază mică ale profilului camei. Ambele cazuri se întîlnesc la sfîrșitul buclării.

c) Acțiunea camei asupra călcîiului N_{ef}.

Aceasta se determină din echilibrul acului, care, conform figurilor 1 și 5, după efectuarea calculelor dă expresia

$$N_{ef} = (Q + F_i) \frac{\cos \varphi_2'}{\cos (\theta + \varphi_1' + \varphi_2')}, \tag{5}$$

sau

$$N_{ef} = Q \frac{\cos \varphi_2'}{\cos (\theta + \varphi_1 + \varphi_2')} + \frac{m_a r^2 \omega^2}{\rho \cdot \cos^3 \theta} \cdot \frac{\cos \varphi_2'}{\cos (\theta + \varphi_1 + \varphi_2')} \cdot \qquad (5')$$

În această relație am notat cu θ unghiul de pantă al camei, cu φ_1 și φ_2, unghiurile de frecare la camă, respectiv în ghidaj, adică $\operatorname{tg} \varphi = \mu$ și $\operatorname{tg} \varphi_2' = \frac{z_1 + z_2}{z} \operatorname{tg} \varphi_2$. Astfel apare un coeficient de frecare « transformat » $\mu_2' = \operatorname{tg} \varphi_2'$ care conține influența brațelor de pîrghie z_1, z_2 și z din figura 1.

Această expresie a acțiunii camei arată că ea depinde de o serie de factori, a căror alegere judicioasă este de mare importanță, cum se va vedea la concluzii.

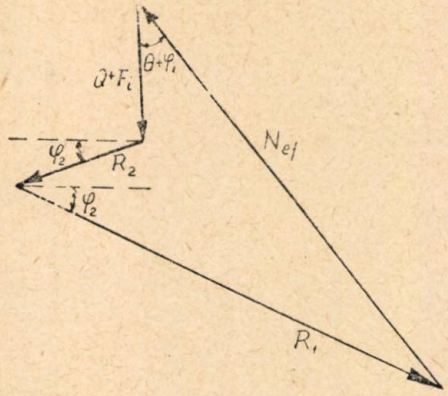


Fig. 5

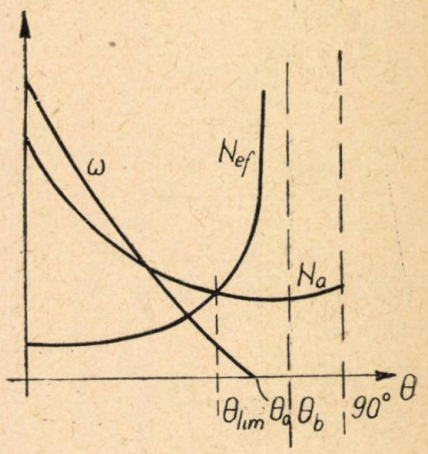


Fig. 6

Deocamdată separăm acești factori în două grupe: prima cuprinde pe aceia care pot varia în limite restrînse și sînt impuși de tipul constructiv și precizia de execuție a mașinii (μ, z, m_a, ρ); pe aceștia îi vom numi pur constructivi. O altă grupă cuprinde factorii care în principiu pot fi aleși arbitrar de constructor (θ și ω); influența lor este hotărîtoare în funcționarea mașinii și pentru alegerea lor este necesar să se stabilească criterii de apreciere.

Cum acești factori (θ și ω) se vor întîlni în toate relațiile de funcționare a mașinii, vom studia expresiile respective în funcție de ei, ca variabile, factorii pur constructivi arătați și cei care vor mai apărea fiind tratați ca parametri.

Într-o primă fază considerăm pentru simplificare și pe ω ca parametru fixat și atunci expresia $N_{ef} = f(\theta)$ va avea alura din figura 6. Se constată că N_{ef} crește cu θ și tinde către infinit pentru un anumit unghi, denumit de blocare, deoarece de la el înainte acul nu mai poate fi mișcat de camă.

Pentru alte valori ale factorilor fixați ca parametri, nomogramele din figurile 7, 8 și 9, permit determinarea lui N_{ef} și a unghiului de blocare.

În cazul cînd acul atacă cama, intervine șocul datorit schimbării brușce a direcției de mișcare și N_{ef} determinat ca mai sus nu este valabil. În acest caz efortul N_{ef}^* se determină pe baza ecuațiilor de mișcare, aplicate unei scheme ca în figura 10.

Ecuaţiile de la care se pleacă sînt de forma

$$m_a \ddot{x} = X + R_1 \cos \varphi_2 - R_2 \cos \varphi_2,$$
$$m_a \ddot{y} = Y - R_1 \sin \varphi_2 - R_2 \sin \varphi_2 - Q, \qquad (6)$$

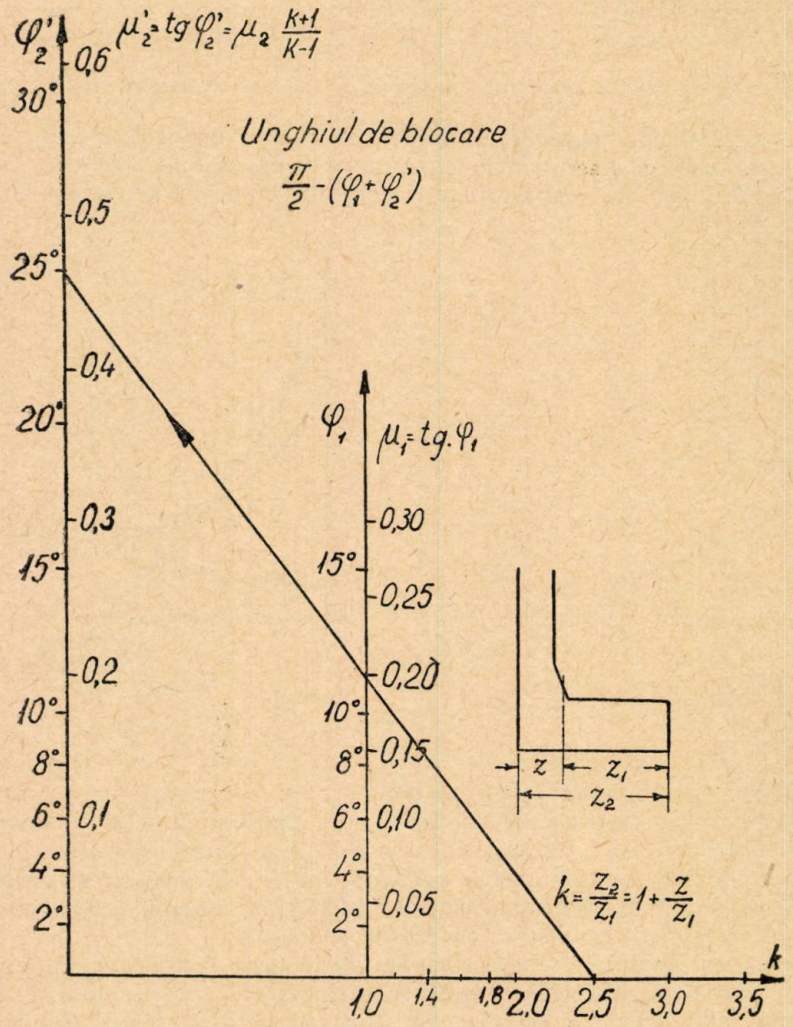


Fig. 7

unde

$$X = N_{ef}^* \sin(\theta + \varphi_1) = \alpha (x - \xi), \qquad (7)$$
$$Y = N_{ef}^* \cos(\theta + \varphi_1) = \beta (\eta - y).$$

Profilul camei este exprimat printr-o relaţie $\eta = f(\xi)$ care poate fi aproximată ca dreaptă, iar α şi β sînt coeficienţii de rigiditate ai acului pe orizontală şi verticală

$$\alpha = \frac{3\,EI_y}{(z + z_1)\,z_1^2}; \qquad \beta = \frac{3E\,I_x}{z_1^3}.$$

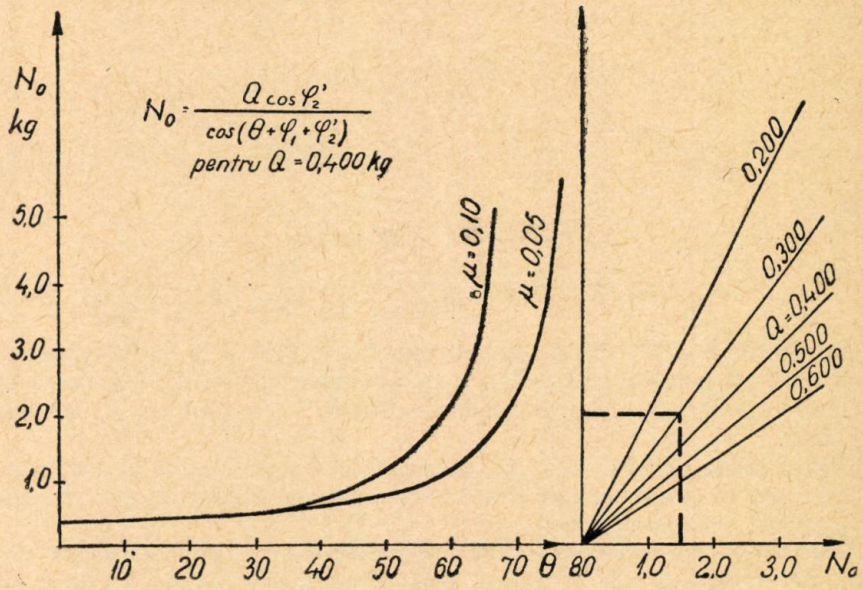

N_o
kg
$N_o = \frac{Q\cos\varphi_2'}{\cos(\theta+\varphi_1+\varphi_2')}$
pentru $Q = 0{,}400$ kg
$\mu = 0{,}10$
$\mu = 0{,}05$
0,200
0,300
Q=0,400
0,500
0,600
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
10
20
30
40
50
60
70
θ
80
1,0
2,0
3,0
N_o

Fig. 8

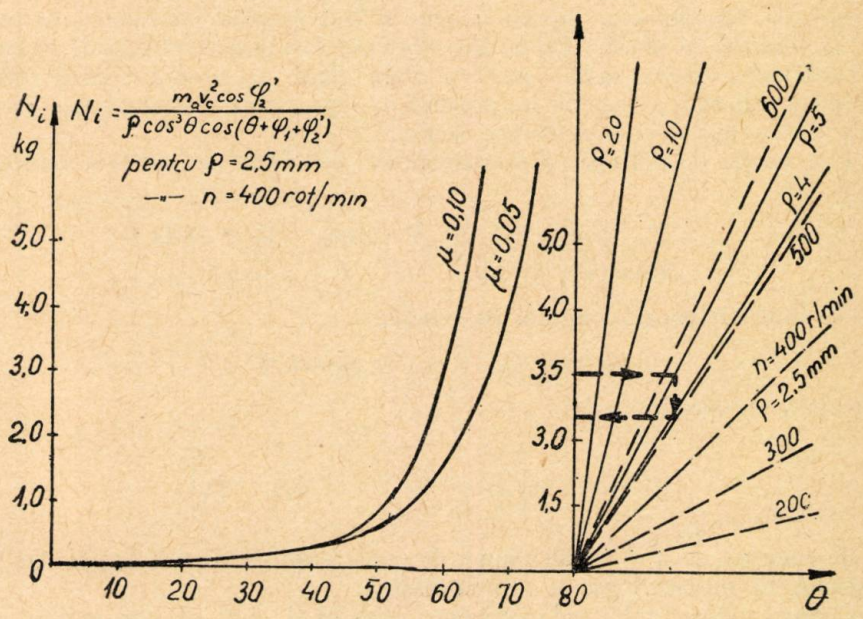

N_i
kg
$N_i = \frac{m_a v_c^2 \cos\varphi_2'}{p\cos^3\theta\cos(\theta+\varphi_1+\varphi_2')}$
pentru $p = 2{,}5$ mm
n = 400 rot/min
$\mu = 0{,}10$
$\mu = 0{,}05$
p=20
p=10
p=5
p=4
600
500
n=400 r/min
p=2,5 mm
300
200
5,0
4,0
3,5
3,0
1,5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
θ

Fig. 9

Integrînd și ținînd seama de condițiile inițiale, rezultate din mișcarea uniformă pe orizontală, se obține

$$N_{ef}^{*} = N_0 + N_s \tag{8}$$

unde

$N_0 = Q \dfrac{\cos \varphi_2'}{\cos (\theta + \varphi_1 + \varphi_2')}$, obținut în cazul fără șoc și fără a ține seama de F_i, și

$$N_s = v_c \sqrt{\alpha\, m_a \cos \varphi_2'} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \theta}{\sin (\theta + \varphi_1) \cos (\theta + \varphi_1 + \varphi_2')}} . \tag{8'}$$

În figurile 8 și 11, sînt arătate curbele $N_0 = f(\theta)$ și $N_s = f(\theta)$, iar nomograma alăturată permite găsirea lui N_s pentru diferite turații. Se constată că N_0 este foarte mic față de N_s și neglijarea primului în calculul lui N_{ef}^{*} nu duce la erori mari.

De remarcat este că N_{ef}^{*} nu intervine decît local, așa că în acele zone de atac pe camă se poate menține totdeauna un θ convenabil de mic, și astfel în cazul general, vom considera numai pe N_{ef} (fără șoc).

Celelalte eforturi asupra acului sînt reacțiuni, care se pot calcula de asemenea pe considerații de echilibru, însă determinarea lor nu prezintă interes deoarece nu intervin în relațiile de funcționare.

Randamentul mișcării acelor pe came

Această mărime prezintă interes prin faptul că dă indicații asupra uzurii, deoarece la funcționarea cu randament scăzut energia consumată în frecări, care se traduce în uzuri, crește. De asemenea la randament scăzut, eforturile dezavantajoase asupra acelor cresc și chiar dacă nu produc ruperi, obosesc materialul. Bilanțul energetic nu prezintă o importanță deosebită aici, datorită consumului redus al unor asemenea mașini.

Din relația de definiție a randamentului se obține cu ajutorul figurii 12, relația

$$\eta = \frac{Q\, dy}{N \sin (\theta + \varphi_1)\, dx} = \frac{1 - \mu_1 \mu_2' - (\mu_1 + \mu_2') \operatorname{tg} \theta}{1 + \mu_1 \operatorname{ctg} \theta} , \tag{9}$$

care se anulează pentru unghiul de blocare

$$\theta_b = 90 - (\varphi_1 + \varphi_2') \text{ și pentru } \theta = 0$$

și prezintă un maximum la

$$\theta_m = \operatorname{arc\,tg} \left[\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2'} (1 + \mu_1^2)} - \mu_1 \right] .$$

Se remarcă că η depinde numai de coeficienții de frecare (μ) și de θ și, în special, că nu este legat de turația mașinii.

Curba randamentului are alura din figura 13 și arată că este indicat să se aleagă un θ nu prea apropiat de extreme, pentru reducerea uzurilor.

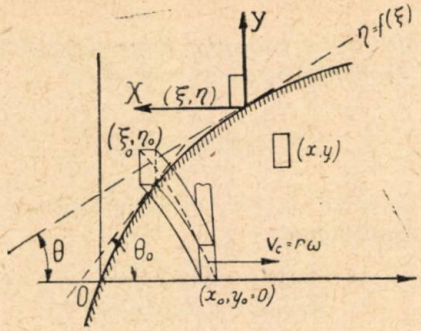


Fig. 10

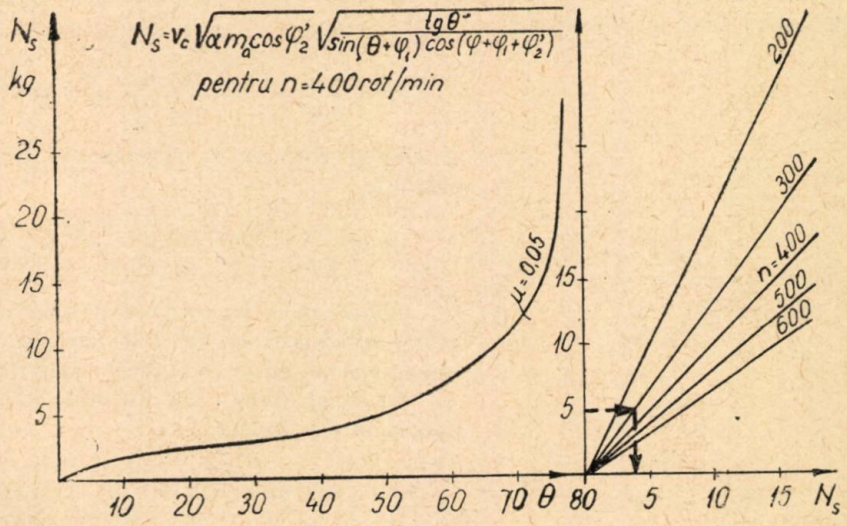


Fig. 11

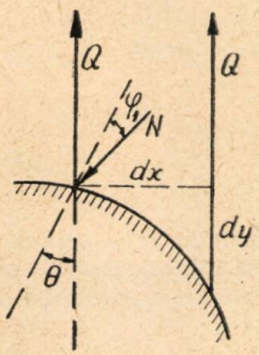


Fig. 12

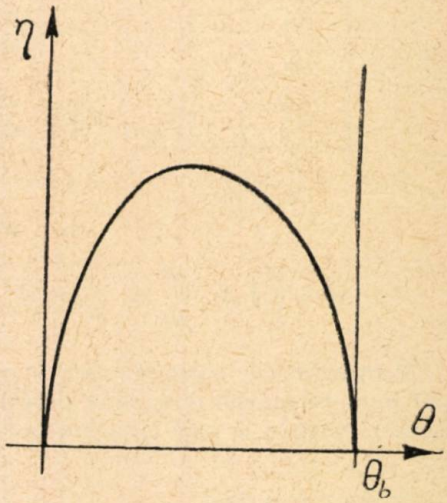


Fig. 13

Pentru obţinerea gabaritelor minime, S a u m i a n [6] recomandă alegerea lui θ cu ajutorul unei diagrame în funcţie de $\mu_1 + \mu_2$.

Solicitările acului

Acul este solicitat la călcîi, la încovoiere, răsucire şi neglijabil la forfecare, iar la cîrlig şi limbă, la încovoiere.

Solicitarea călcîiului

Din figura 14, se pot determina momentele încovoietoare care dau final efortul unitar total de încovoiere

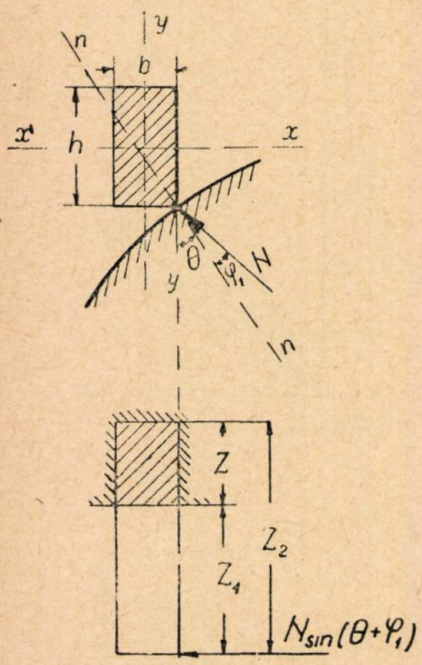


Fig. 14

$$\sigma_i = \frac{6\,z_1}{b\,h^2} \cdot \frac{\sin(\theta + \varphi_1 + \psi)}{\sin\psi} N \qquad (10)$$

şi analog obţinem la răsucire, în aceeaşi secţiune,

$$\tau_t = \frac{\eta_2}{2\,bh} \cdot \frac{\sin(\theta + \varphi_1 - \psi)}{\sin\psi} N. \qquad (10')$$

Observaţie. Dezvoltarea acestor relaţii prin explicitarea lui N calc lat mai înainte, nu prezintă interes în cele ce urmează.

În aceste relaţii am introdus în afara notaţiilor din figură

$$\operatorname{ctg}\,\psi = \frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b},$$

iar η_2 este coeficientul pentru modulul de rezistenţă polar al secţiunii dreptunghiulare *).

Cu aceste tensiuni σ_i şi τ_t putem obţine un σ_r după ipoteza lucrului mecanic de deformare

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_i^2 + 3\tau_t^2} = a\sigma_i\,,$$

unde

$$a = \sqrt{1 + 3\frac{\tau^2}{\sigma_i^2}} = \sqrt{1 + 3\left|\frac{\eta_2 h}{12\,z_1} \cdot \frac{\sin(\theta + \varphi_1 - \psi)}{\sin(\theta + \varphi_1 + \psi)}\right|^2}. \qquad (11)$$

Pentru valorile obişnuite ale parametrilor, σ_r este cu cel mult 25% mai mare decît σ_i şi cu această observaţie putem neglija într-o primă aproximaţie efectul răsucirii, relaţiile la care ajungem putînd fi oricînd corectate cu coeficientul a.

*) Hütte, I, p. 688.

În scopul unei comparări mai simple cu N_{ef}, vom considera, în locul tensiunii, un efort admisibil N_{ad}, care din (10) capătă expresia

$$N_{ad} = \frac{bh^2}{6z_1} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin(\theta + \varphi_1 + \psi)} \sigma_{ad} = \frac{K}{\sin(\theta + \varphi_1 + \psi)}, \tag{12}$$

sau ținînd seama și de răsucire (11)

$$N_{ad} = \frac{K}{a \cdot \sin(\theta + \varphi_1 + \psi)}, \tag{12'}$$

unde

$$K = \frac{bh^2}{6z_1} \cdot \sin\psi\, \sigma_{ad} \tag{13}$$

este un parametru nou, în afară de cei întîlniți în relațiile anterioare, care cuprinde influența materialului acului și a formei secțiunii călcîiului și deci poate intra în categoria celor pur constructivi.

Se constată că N_{ad} nu depinde de turația mașinii ω și dacă reprezentăm curba $N_{ad} = f(\theta)$ pe aceeași diagramă cu N_{ef} (fig. 6), obținem un punct de intersecție care determină o limită superioară pentru θ (evident inferioară lui θ_b) de la care acele sînt suprasolicitate.

Limita aceasta este valabilă numai pentru ω la care s-a trasat $N_{ef} = f(\theta)$. Dacă plecăm de la condiția $N_{ad} \geqslant N_{ef}$ se poate obține o relație $\omega \leqslant f(\theta)$, a cărei expresie, după efectuarea calculelor, este

$$\omega \leqslant \sqrt{\frac{\rho \cos^3\theta}{m_a r^2}\left[K' \frac{\cos(\theta + \varphi_1 + \varphi_2')}{\sin(\theta + \varphi_1 + \psi)} - Q\right]}, \tag{14}$$

sau ținînd seama și de răsucire

$$\omega \leqslant \sqrt{\frac{\rho \cos^3\theta}{m_a r^2}\left[\frac{K'}{a} \cdot \frac{\cos(\theta + \varphi_1 + \varphi_2')}{\sin(\theta + \varphi_1 + \psi)} - Q\right]}, \tag{14'}$$

în care am notat

$$K' = \frac{K}{\cos\varphi_2'}. \tag{15}$$

Dacă fixăm parametrii pur constructivi putem reprezenta funcția $\omega = f(\theta)$, dată de (14) sau (14') pe aceeași diagramă cu N_f (fig. 6). Pe această curbă putem găsi, pentru cel mai mare θ de pe parcursul lacătului de ace, turația limită admisă de rezistența călcîiului acului și pe N_{ef} maxim pe curba N_{ad} (la atingerea acestei turații). Invers, pentru un ω ales putem găsi pe θ limită și pe N_{ef}.

Curba $\omega = f(\theta)$ scade repede și se anulează înaintea lui θ_b. Valoarea lui θ pentru care $\omega_{lim} = 0$ se obține din anularea membrului al doilea din expresia (14)

$$\theta_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos\varphi_2' - K''\sin\psi}{\sin\varphi_2' + K''\cos\psi} - \varphi_1, \tag{16}$$

unde

$$K'' = \frac{Q}{K'}. \tag{17}$$

Acesta este unghiul limită permis de rezistența călcîiului, care poate fi apropiat de θ_b prin îmbunătățirea factorilor pur constructivi (material, construcția acelor etc.). θ_0 nu poate însă niciodată întrece pe θ_b care reprezintă limita impusă de frecări.

Observație. Pentru cazul cînd ținem seama și de răsucire, o relație de felul (16) este foarte greu de obținut, deoarece a este la rîndul său funcție de θ.

În cazul șocului, expresia lui N^*_{ef} permite de asemenea găsirea unei relații $\omega^* \leqslant f(\theta)$, pe aceeași cale

$$\omega^* \leqslant \frac{\dfrac{K}{a \sin(\theta + \varphi_1 + \psi)} - \dfrac{Q \cos \varphi_2'}{\cos(\theta + \varphi_1 + \varphi_2')}}{r \sqrt{\alpha . m_a \cos \varphi_2'}} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \theta}{\sin(\theta + \varphi_1) \cos(\theta + \varphi_1 + \varphi_2')}}. \tag{18}$$

Reprezentarea acestei funcții nu este însă necesară deoarece ω este determinat de zona cea mai periculoasă a lacătului (cu θ maxim), iar în regiunile de șoc se poate alege totdeauna un θ convenabil de mic.

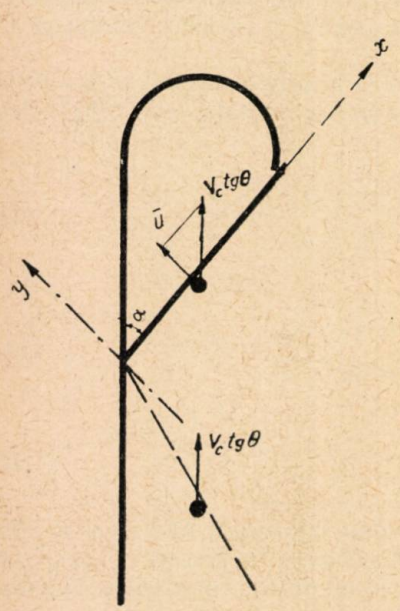


Fig. 15

Astfel din figurile 7 și 11, se poate găsi pentru ω ales prin relațiile (14) sau (14'), care este θ maxim admis în zonele unde se produce șocul, care se alege astfel ca să fie asigurat $N^* < N_{ad}$. Cu relația (18) se poate apoi verifica dacă alegerea a fost bine făcută.

Solicitarea cîrligului și limbii acului

Limba prinsă de ac printr-o articulație, în deplasarea acestuia în jos este acționată de tricot și prin rotație este lovită de cîrligul acului. Șocul dintre tricot și limbă este mai redus decît între limbă și cîrligul acului, acestea fiind amîndouă din oțel cu coeficient mare de rigiditate.

Viteza limbii după șocul cu tricotul, poate fi considerată, acoperitor, egală în punctul de contact cu viteza relativă dintre ac și tricot, deoarece chiar dacă s-ar presupune șocul perfect elastic (tricot elastic) viteza acului după șoc ar fi cel mult egală cu aceasta, și în plus lovitura se produce și la un braț de pîrghie mai mare decît în momentele următoare.

Dacă cercetăm șocul dintre cîrligul acului și limbă, considerînd numai elasticitatea longitudinală a limbii, neglijînd elasticitatea transversală și presupunînd reazemele rigide, se obține (cu notațiile dinainte și cu cele din figura 15)

$$p = -\frac{d^2 M}{dx^2} = E I \frac{d^4 y}{dx^4}, \tag{19}$$

forța distribuită pe limba acului care provoacă deformarea, și

$$p = \frac{df}{dx} = -\frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \tag{20}$$

forța de inerție distribuită.

Apropiind formulele (19) și (20) se obține ecuația diferențială

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{21}$$

care admite soluții de forma

$$y = \sum X(x) \cdot T(t)$$

unde

$$X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + C\,\mathrm{ch}\,\alpha x + D\,\mathrm{sh}\,\alpha x \tag{22}$$

$$T = E\cos\lambda t + F\sin\lambda t\,;\ \text{cu}\ \lambda = \alpha^2\beta\ \text{iar}\ \beta^2 = \frac{EIg}{\gamma A}$$

considerînd condițiile la limită

pentru

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad y = 0 \qquad \text{și} \qquad y''_{x^2} = 0, \\ x &= l \qquad y = 0 \qquad \text{și} \qquad y''_{x^2} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

și pentru

$$t = 0 \qquad y = 0 \qquad \text{și} \qquad \dot{y} = \omega x,$$

se obține final

$$y = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\omega\cos k\pi}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3\beta} \sin\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \beta \cdot t\right] \sin\frac{k\pi}{l}x \cdot \tag{24}$$

Valoarea momentului încovoietor este dată de formula

$$M = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2\omega l}{\pi}\sqrt{\frac{E.I.\gamma.A}{g}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi \sin\left[k^2\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \cdot t\right]}{k} \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{25}$$

Pentru valoarea timpului dată de relația

$$\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}} \cdot t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ se obține } M_1 = \frac{\omega l}{2}\sqrt{\frac{E.I.\gamma.A}{g}}, \tag{26}$$

în care viteza $v_a = \dfrac{\omega\, l}{2} = v_c\ \mathrm{tg}\,\theta$ iar pentru $\dfrac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EIg}{\gamma A}}\, t_2 = \dfrac{\pi}{4}$

se obține

$$M_2 = \frac{\omega l}{2}\sqrt{\frac{EI\gamma A}{g}} \sin\frac{\pi}{4} \cdot \tag{27}$$

Rezultă că solicitarea la încovoiere

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W} = v_c \operatorname{tg} \theta \sqrt{\frac{3\,EI}{\gamma}} \text{ și } \sigma_2 = \frac{M_2}{W} = v_c \operatorname{tg} \theta \sqrt{\frac{3\,EI}{\gamma}} \sin \frac{\pi}{4} \qquad (28)$$

crește liniar cu viteza și după curba tangentei cu θ și nu depinde de dimensiunile piesei. Repartiția eforturilor unitare pe limba acului este uniformă (fig. 16), iar

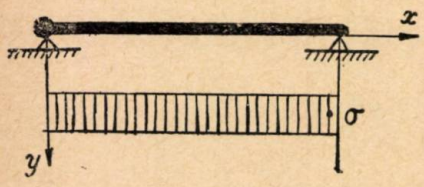


Fig. 16

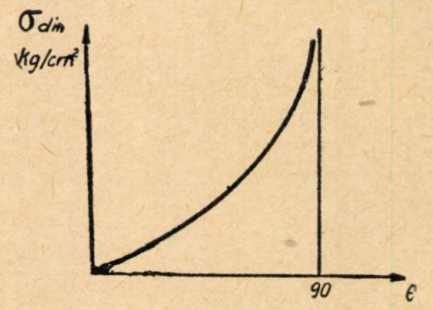


Fig. 17

variația în funcție de θ (pentru v_2 constant) este arătată în figura 17. Solicitarea reală este însă mai mică atît din cauză că trebuia să se țină seama de elasticitatea transversală, cît și din cauză că reazemele nu sînt perfect rigide.

În ceea ce privește cîrligul acului, solicitarea din cauza șocului este aceeași, situația fiind relativă la limbă și cîrlig. Calculînd solicitarea limbii cu valorile restrictive de la solicitarea călcîiului, se constată că aceasta este admisibilă.

Studiul comportării firului

Firul este solicitat la tracțiune de ace în timpul formării ochiurilor și apoi, ochiul format este supus în timpul primului tur următor, la frecare de tija și limba acului. Această din urmă solicitare, însoțită în oarecare măsură și de tracțiune, este mică.

Tracțiunea din timpul formării ochiurilor este datorită acțiunii acelor pe de o parte și reacțiunii la derularea firului și frecării în ghidaje, ace și platine, pe de altă parte. Dacă notăm tracțiunea efectivă maximă în fir cu S_1, condiția de funcționare a mașinii, din punct de vedere al firului, cere ca

$$S_1 \leqslant P_f \,, \qquad (29)$$

unde P_f reprezintă tracțiunea admisibilă.

Tracțiunea într-un punct oarecare din fir, S_i va crește conform relației lui Euler, pe măsură ce firul trece prin mai multe ace și deci va atinge valoarea maximă la ultimul ac de buclare pe care-l notăm cu 1.

Dacă notăm cu S_b rezistența la derulare a firului, cu α unghiul total de înfășurare (pe ghidaje, ace și platine) și cu μ_f coeficientul de frecare între fir și piese, expresia tracțiunii maxime în fir, la ultimul ac de buclare, va fi

$$S_1 = S_b e^{\mu_f \alpha} + S_1' \,, \qquad (30)$$

în care S_1' este un efort provenit din accelerarea firului sub acțiunea mișcării acelor.

În ceea ce privește S_b, acesta provine din aderența firelor pe bobină, din greutatea sa, din forța centrifugă a firului derulat și din rezistența aerului întîmpinată în timpul derulării. Cercetînd această derulare, se obține următoarea expresie

$$S_b = S_0 + \gamma h + \frac{\gamma v_0^2}{2g}, \tag{31}$$

în care S_0 este rezistența datorită aderenței, γ este greutatea specifică a firului, v_0 viteza sa și h înălțimea conului descris de fir în timpul derulării. Rezistența aerului a fost lăsată la o parte fiind foarte mică și, în ansamblu, s-a constatat că pentru firele obișnuite, S_b are valori foarte mici. Astfel considerarea sa după o relație de forma (31) devine inutilă pentru exactitatea rezultatelor și este suficient să se admită o valoare puțin acoperitoare față de cea care se măsoară la o turație obișnuită a mașinii.

Coeficientul de frecare μ_f depinde de natura firelor și ghidajelor și poate fi admis constant pentru o anumită fabricație.

Unghiurile de înfășurare pe ghidaje depind de construcția mecanismului de alimentare și se pot evalua ușor după unghiul făcut de ramurile firului la trecerea prin fiecare ghidaj.

Unghiurile de înfășurare pe ace și platine depind de poziția fiecărui ac în timpul buclării și se pot evalua pe considerente geometrice după figura 18.

Efectuînd calculele pentru acul din cîmpul de buclare i (cuprins între 2 platine vecine) se obține, cu notațiile din figură

$$\alpha_i = \gamma_i + \arcsin \frac{2\delta \cos \gamma_i}{a}, \tag{32}$$

unde

$$\operatorname{tg} \gamma_i = \frac{2y_i}{a}, \tag{33}$$

și

$$\delta = R + r + f. \tag{34}$$

Unghiul de înfășurare total în cîmpul i va fi $4\alpha_i$. Conform figurii 19, fiind

$$Y_i = (i - 1)\, a \operatorname{tg} \theta \tag{35}$$

și

$$y_i = b - r - Y_i, \tag{36}$$

se constată că α_i depinde de tipul acelor și platinelor și de finețea mașinii, ca parametri pur constructivi, precum și de unghiul θ întîlnit la solicitarea acelor.

Unghiul total de înfășurare în regiunea buclării va rezulta ca sumă pentru toate cîmpurile.

Analizînd geometric poziția ultimului ac n care mai buclează simetric, conform figurii 20 și a ultimului ac n' care mai buclează conform figurii 21, obținem (cu aceleași notații)

$$n = \frac{b + R + f}{a \operatorname{tg} \theta} \tag{37}$$

și

$$n' = \frac{b}{a \operatorname{tg} \theta} + \frac{R+f}{a \sin \theta} + \frac{1}{2} \cdot \tag{37'}$$

Observînd că $0 < n' - n < 1$, este suficient să se calculeze n care se rotunjește în minus, iar unghiul total de înfășurare în regiunea buclării este

$$\alpha_a = 4 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2\alpha_{n+1} + \beta. \tag{38}$$

În ceea ce privește efortul S_1' datorit accelerării firului, acesta implică determinarea accelerațiilor în fiecare cîmp de buclare și însumarea rezistențelor provenite astfel, de la cîmp la cîmp.

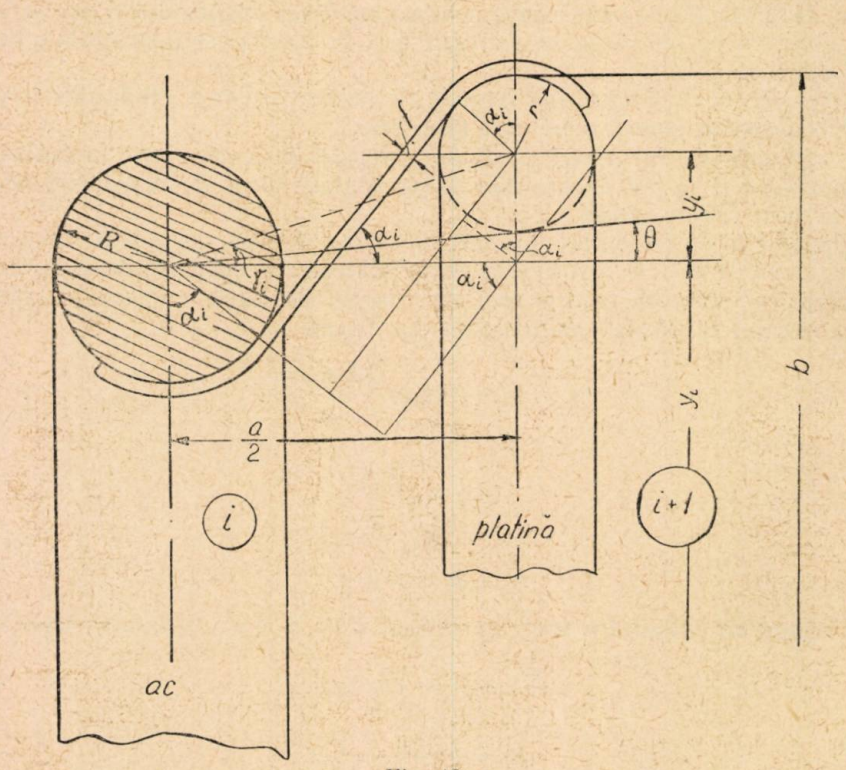


Fig. 18

După figura 22, accelerația firului la coborîrea acului cu h_i are final expresia

$$a_{fi} = \frac{4}{a} v_c^2 \operatorname{tg}^2 \theta \left[1 + 4 (n-i)^2 \operatorname{tg}^2 \theta\right]^{-3/2}$$

iar accelerația totală este

$$a_{ft} = \frac{4}{a} v_c^2 \operatorname{tg}^2 \theta \sum_{i=1}^{n} \left[1 + 4 (n-i)^2 \operatorname{tg}^2 \theta\right]^{-3/2} \tag{39}$$

Determinînd forța de inerție asupra firului din cîmp în cîmp, cu considerarea creșterii unghiului de înfășurare, se obține în cîmpul i din mecanismul de alimentare (deci în afara zonei de buclare) (fig. 23)

$$S' = \frac{\gamma}{g} a_{ft_m} \left(\sum_{l=m}^{i+1} l_k e^{\mu_f \sum_{j=k-1}^{i} \alpha_j} + l_i \right) \tag{40}$$

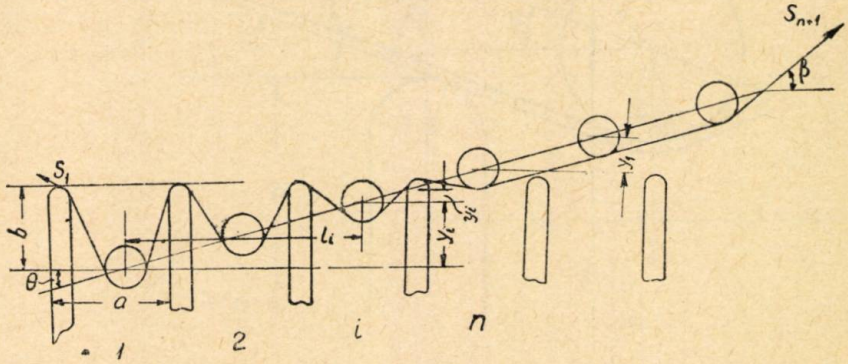


Fig. 19

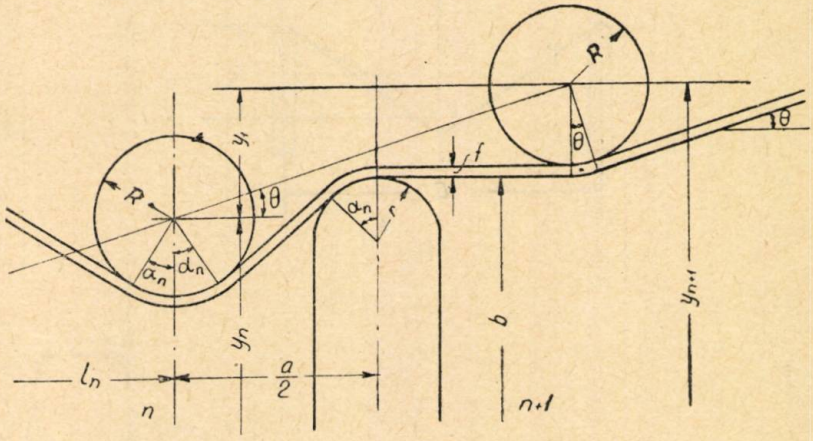


Fig. 20

unde $a_{ft_m} = \frac{a_{ft}}{2}$ este accelerația totală, ținînd seama de elasticitatea firului,

m este ultimul cîmp (cel de derulare),

l_n și l_i reprezintă lungimea firului, într-un cîmp k respectiv i din mecanismul de alimentare,

γ este greutatea specifică a firului (inversul numărului metric).

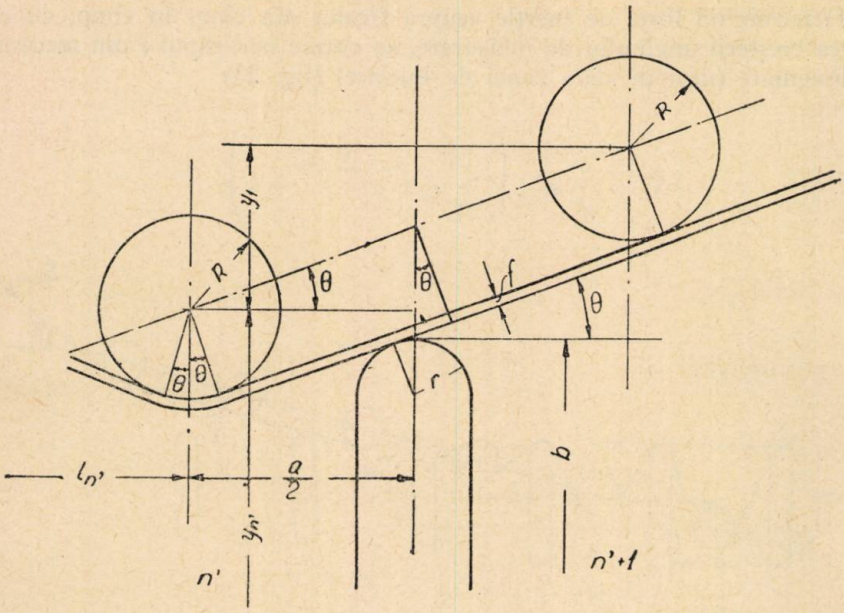


Fig. 21

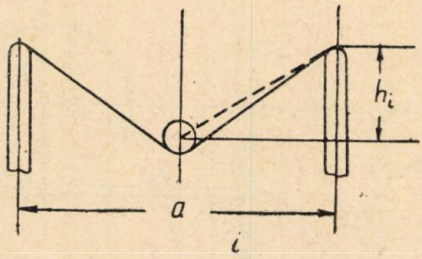


Fig. 22

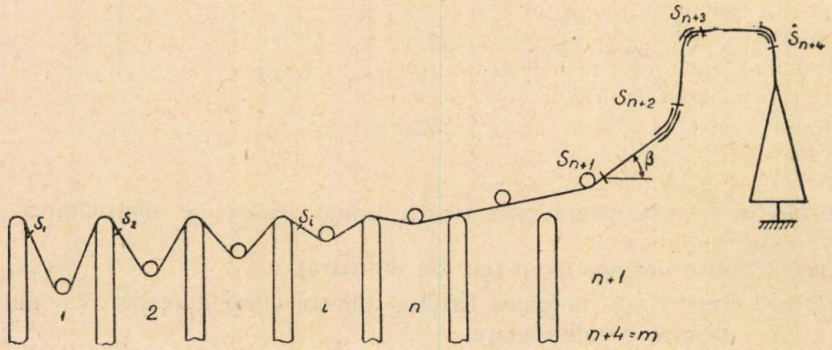


Fig. 23

Neglijînd efortul de inerție asupra porțiunilor de fir din cîmpurile zonei de buclare, datorită lungimilor mici ale acestora, găsim pentru efortul maxim din fir expresia

$$S_1 = S_b e^{\mu_f \sum_{k=m-1}^{1} \alpha_k} + S'_{m-s} e^{\mu_f \sum_{i=m-s}^{1} \alpha_i}, \tag{41}$$

unde

$$\sum_{k=m-1}^{1} \alpha_k = \sum_{i=m-1}^{m-s} \alpha_i + \sum_{i=m-s}^{1} \alpha_i, \tag{42}$$

s este numărul cîmpurilor din mecanismul de alimentare,

$$S'_{m-s} = \frac{\gamma}{g} a_{ft_m} \left(\sum_{k=m}^{m-s+1} l_k e^{\mu_f \sum_{j=k-1}^{m-s} \alpha_j} + l_{m-s} \right) \tag{43}$$

după relația (40),

iar $\sum_{i=m-s}^{1} \alpha_i = \alpha_a$ se calculează pentru fiecare θ după relația (38).

În expresia (41) în afara parametrilor de natura celor pur constructivi care mai intervin, apar ca factori comuni cu celelalte solicitări, θ și ω.

Și aici pentru un ω ales, putem reprezenta funcția $S_1 = f(\theta)$, în care predomină net influența lui S', termenii care nu-l conțin putînd fi neglijați. Curba scade la început (fig. 24), deoarece este mai puternică influența lui $e^{\mu_f \Sigma \alpha}$, care scade cu θ; apoi însă, după un minim, curba crește, căci de vreme ce $\Sigma\alpha$ rămîne aproape constant, a_{ft} crește proporțional cu $\operatorname{tg}^2 \theta$ (39). Intersecțiile acestei curbe cu orizontala reprezentînd forța admisibilă în fir (P_f) dau două limite pentru θ, între care $S_1 < P_f$ și deci firul rezistă.

CONCLUZII

Din cele arătate rezultă că solicitările critice pentru funcționarea mașinii sînt cele ale călcîielor acelor și ale firului. În general solicitarea limbii și a cîrligului acului sînt de importanță mai mică; dacă totuși se constată și aici ruperi în exploatare, acestea se datoresc accidentelor de lucru (agățări, noduri etc.) a căror frecvență în funcție de viteză și material trebuie urmărită statistic, luîndu-se măsurile tehnologice necesare.

De asemenea la mărirea turației se poate ca accidentele în prelucrare să devină mai dese datorită întîrzierii comenzilor. Pentru evitarea lor este necesară o profilare corespunzătoare a camelor mecanismului de comandă.

Influența în funcționare a parametrilor pur constructivi, rezultă din examinarea relațiilor obținute:

Coeficienții de frecare (μ_1, μ_2 și μ_f) trebuie ținuți cît mai mici deoarece ei măresc solicitările acului și firului și micșorează randamentul. În felul acesta la creșterea coeficienților de frecare apare o reducere a limitelor superioare ale lui θ datorită acului și o restrîngere a domeniului de alegere al său, datorită firului. Astfel gabaritul lăcătului acelor poate fi puțin influențat, iar viteza limită a

mașinii scade. Datorită faptului că aceste dezavantaje sînt simțitoare chiar la creșteri mici ale coeficienților μ, se cere o deosebită atenție asupra ungerii și întreținerii, care pot compromite funcționarea mașinii. Cînd la proiectare se aleg valori pentru coeficienții de frecare, trebuie avut în vedere prin ce mijloace se asigură ele, și apoi este necesar să fie verificate experimental.

Raza de curbură ρ micșorează forța de inerție și mărește turația limită a mașinii, cînd ea crește. Se recomandă astfel alegerea unor raze de curbură cît mai mari, ceea ce însă se lovește de condițiile de gabarit ale lăcătului acelor. În special această recomandare trebuie respectată în zonele de șoc ale acelor pe came (unde însă situația este avantajată de posibilitatea realizării unui θ mic) și în regiunea sfîrșitului buclării.

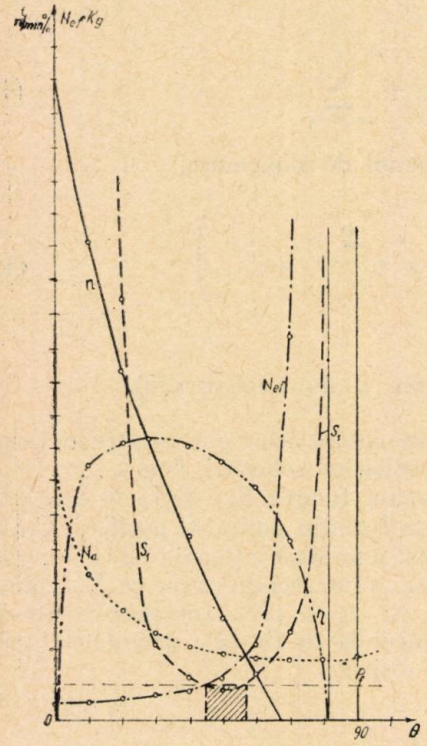


Fig. 24

Brațele de pîrghie z, z_1 și z_2 influențează coeficientul de frecare μ_2 și deci acționează în același sens cu coeficienții de frecare. De asemenea acestea reduc și efortul admisibil N_{ad}, ceea ce în ansamblu micșorează gama lui θ și turația admisibilă. Trebuie deci ca brațele de pîrghie să fie cît mai mici, printr-o execuție precisă, care să permită realizarea unui interstițiu minim între cilindrul cu ace și came. Această considerație este importantă în special la macazul acelor, care este mai depărtat de cilindru; o compensare a acestei situații dezavantajoase se poate face prin alegerea unui θ mic în acea zonă.

Ceilalți parametri sînt pe de o parte legați de cerințele tehnologice ale produsului (dimensiunile acelor, finețea mașinii etc.) iar pe de alta de materialul utilizat. Calitatea materialelor acelor și a firului, permit astfel o creștere simțitoare a turației mașinii.

Fixînd acum acești parametri, se poate trece la alegerea factorilor principali θ și ω care sînt hotărîtori în proiectarea mașinii.

Întrucît s-a văzut că acești doi factori intervin în toate relațiile de rezistență ale pieselor, este normal să se facă cercetarea pe o diagramă comună în care diferitele mărimi caracteristice sînt reprezentate în funcție de θ. Această diagramă (fig. 24) dă o privire de ansamblu asupra comportării mașinii și permite o alegere judicioasă a parametrilor, ținînd seama de efectul lor asupra solicitărilor critice.

Se constată astfel că θ poate fi ales numai în cuprinsul unei zone, relativ restrînse. Limita inferioară este determinată de firul de prelucrat ($S_1 = P_f$) iar cea superioară, după caz, fie de-a doua intersecție $S_1 = P_f$, fie de solicitarea călcîiului ($N_{ef} = N_{ad}$). Aceste limite pot fi deplasate în funcție de ceilalți para-

metri, iar pentru ușurarea tatonărilor preliminare s-au întocmit nomogramele din figurile 7, 8, 9 și 11.

Așa se ajunge la o construire în primă etapă a diagramei din care se aleg unghiurile θ convenabil. În general condițiile de gabarit cer unghiuri θ mari, ceea ce însă reduce randamentul (cresc uzurile) și turația admisibilă și mărește șocurile. Alegerea atentă a lui θ trebuie făcută în special la panta de buclare, unde atinge maximul. În celelalte porțiuni ale camelor, θ impune condiții mai slabe de funcționare, fie că nu prezintă o valoare extremă, fie că nu mai este limitat inferior, dacă acolo acele nu mai buclează. Acest lucru permite un θ suficient de mic în zonele de șoc, în afară de sfîrșitul pantei de buclare, unde și ρ fiind oarecum impus, se aplică în ajutor o lamelă elastică amortizoare.

De asemenea, tot în zona de buclare, θ nu poate fi prea mic, deoarece astfel lucrează simultan prea puține ace și firul rămîne slab întins, ceea ce riscă accidente (încurcări de fire).

Funcția $\omega = f(\theta)$ reprezentată pe aceeași diagramă indică turația limită pentru cel mai mare θ ales pe parcursul lăcătului cu came. După stabilirea acesteia trebuie însă să se reconstruiască curbele S_1 și N_{ef} pentru noul ω, în vederea actualizării diagramei.

Nomogramele date cît și diagrama de ansamblu a funcționării ajută astfel la alegerea rațională a parametrilor, la proiectarea mașinii, și indică rezultatele la care se poate ajunge. Bineînțeles, concluziile trase trebuie supuse unei verificări experimentale, care arată corecțiile de adus comenzilor pentru evitarea anomaliilor, justețea alegerii făcute a parame rilor constructivi, precum și comportarea la uzură care este hotărîtoare în rentabilitatea mașinii.

Primită la redacție la 2. III. 1956

О ВОЗМОЖНОСТИ УВЕЛИЧЕНИЯ РАБОЧЕЙ СКОРОСТИ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ КРУГОВЯЗАЛЬНЫХ МАШИН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Увеличение скорости круговязальных машин связано, между прочим, с механическим сопротивлением их деталей. В статье анализируется влияние различных параметров на напряженность деталей и указывается значительность каждого из них, причем даются критерии для выбора параметров, на основе диаграмм.

Эти диаграммы представляют собой общий вид условий, в которых работает машина, и позволяют выбрать элементы проектирования для получения лучшей рабочей скорости.

Равным образом с их помощью можно установить наибольшую скорость, с которой может работать уже построенная машина, а также и необходимые изменения для увеличения скорости, включая и пределы возможного увеличения.

Вопрос об износе рассматривается только с точкой зрения приблизительной оценки, так как это является обширной задачей, нуждающейся в специальном рассмотрении.

CONSIDÉRATIONS SUR LES POSSIBILITÉS D'ACCROÎTRE LA VITESSE DE TRAVAIL DES MACHINES CIRCULAIRES AUTOMATIQUES À TRICOTER

(RÉSUMÉ)

L'augmentation de la vitesse des machines circulaires à tricoter est liée, entre autres, à la résistance mécanique des pièces. La présente étude analyse l'influence des divers paramètres sur la sollicitation des pièces et, montrant ainsi l'importance de chacun d'eux, donne des critériums pour leur choix, à l'aide de diagrammes.

Ces diagrammes présentent une vue d'ensemble des conditions dans lesquelles la machine travaille et permettent de choisir les éléments nécessaires à l'établissement d'un projet en vue d'obtenir la meilleure vitesse de travail possible.

A l'aide de ces diagrammes, on peut également connaître la vitesse maximum à laquelle peut fonctionner une construction existante et les modifications necessaires en vue d'accroître cette vitesse ainsi que les limites entre lesquelles cet accroissement est possible.

Le problème de l'usure n'est traité ici que d'une manière appréciative; il constitue une question vaste qui nécessite des recherches spéciales.

BIBLIOGRAFIE

1. Artobolevski I. I., *Teoria mecanismelor şi maşinilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
2. Dalidovici A. S., *Bazele teoriei tricotării*. I.D.T., Bucureşti, 1955.
3. Kojevnikov S. N., *Teoria mehanismov i maşin*. Maşghiz, Kiev, 1954.
4. Petre A., *Raport de expertiză asupra maşinii de tricotat tip « Ideal »* (în manuscris la fabrica « Pavel Tcacenko », Bucureşti).
5. Ponomarev S. D., *Osnovî sovremennîh metodov rasciota na procinosti v maşinostroenii*. Maşghiz, Moscova, 1952.
6. Saumian G. A., *Avtomati*. Maşghiz, Moscova, 1955, ed. a II-a.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

PROBLEMA PLANĂ A ELASTICITĂŢII PENTRU O COROANĂ CIRCULARĂ ÎN CAZUL CELEI DE-A DOUA PROBLEME FUNDAMENTALE LA LIMITĂ

DE

A. PÂRVU

În cartea sa *Câteva probleme de bază din teoria elasticităţii* (Editura Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., Moscova-Leningrad, 1949), acad. N. I. Mușhelișvili rezolvă o serie de probleme ale teoriei elasticităţii plane cu o metodă elaborată de el, folosind proprietăţile funcţiilor analitice de variabilă complexă.

El arată cum cu ajutorul a două funcţii analitice $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ ecuaţiile

$$2\mu(u+iv) = X\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{1}$$

$$X_x + Y_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \tag{2}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

unde

$$X = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

(notaţiile fiind cele obişnuite folosite şi în cartea mai sus citată) descriu univoc problema plană.

Funcţiile $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ pot fi definite prin ecuaţiile de mai sus, dacă substituim în ele condiţiile la limită.

Pentru o stare de tensiune dată, funcţia $\varphi(z)$ este determinată mai puţin un termen $Ciz + \gamma$, iar funcţia $\psi(z)$ mai puţin un termen γ', unde C este o constantă reală, iar γ şi γ' nişte constante arbitrare complexe.

Dacă în afara componentelor tensiunii se dau şi componentele deformaţiei este necesar ca

$$\begin{aligned} C &= 0\,, \\ X\gamma + \overline{\gamma'} &= 0\cdot \end{aligned} \tag{3}$$

În toate acestea se presupune că

— componentele tensiunii X_x, Y_y, X_y sînt funcții uniforme, continue, cu derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea inclusiv și satisfac ecuațiile

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0,$$

și

$$\Delta (X_x + Y_y) = 0;$$

— iar componentele deplasărilor u și v sînt funcții uniforme, continue, cu derivate parțiale de ordinul întîi, legate de componentele tensiunii prin relațiile

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Folosind această metodă în cartea sa, mai sus citată, acad. N. I. Mușhelișvili rezolvă cazul coroanei circulare pentru prima problemă la limită fundamentală.

În această notă ne propunem să rezolvăm problema plană a elasticității pentru o coroană circulară în cazul celei de-a doua probleme la limită fundamentală (să se găsească starea de echilibru pentru deplasări date ale punctelor de pe contur).

Considerăm materialul izotrop, deplasările și deformațiile mici și neglijăm forțele periferice.

Fie coroana

$$R_1 \leqslant r \leqslant R_2,$$

avînd pe contur deplasările

pentru
$$r = R_1,$$
$$u = g_2(\theta), \tag{4}$$
$$v = g_2(\theta);$$

pentru
$$r = R_2,$$
$$u = G_1(\theta), \tag{5}$$
$$v = G_2(\theta).$$

Dezvoltăm în serie Fourier expresiile

$$2\mu(u+iv) = 2\mu[g_1(\theta)+ig_2(\theta)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta},$$
$$2\mu(U+iV) = 2\mu[G_1(\theta)+iG_2(\theta)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta}, \tag{6}$$

unde A'_k și A''_k sînt constante cunoscute.

Funcțiile $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ pot fi desfășurate în seriile

$$\varphi(z) = \gamma_1 \log z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$
$$\psi(z) = \gamma'_1 \log z + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a'_k z^k. \tag{7}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Ținînd seama de (6), relația (1) se scrie pe cele două cercuri

$$\chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta}$$
$$\chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta}. \tag{8}$$

Dacă substituim în (8) pe $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ cu expresiile lor din (7), pe z cu $re^{i\theta}$ și pe $\log z$ cu $\log r + i\theta + 2n\pi i$ obținem

$$\log R_{-1}(\chi\gamma_1 + \overline{\gamma}'_1) + i\theta(\chi\gamma_1 + \overline{\gamma}'_1) + 2n\pi i(\chi\gamma_1 + \overline{\gamma}'_1) - e^{2i\theta}\overline{\gamma}_1 +$$
$$+ \chi\sum a_k R_1^k e^{ik\theta} - \sum a_{-k} + 2(2-k)R_1^{-k+2} e^{ik\theta} - \sum \overline{a}'_{-k} R_1^{-k} e^{ik\theta} = \tag{9}$$
$$= \sum A'_k e,$$
$$\log R_2(\chi\gamma_1 - \overline{\gamma}'_1) + i\theta(\chi\gamma_1 + \overline{\gamma}'_1) + 2n\pi i(\chi\gamma_1 + \overline{\gamma}'_1) - e^{2i\theta}\overline{\gamma}_1 +$$
$$+ \chi\sum a_k R_2^k e^{ik\theta} - \sum \overline{a}_{-k} + 2(2-k)R_2^{-k+2} e^{ik\theta} - \sum \overline{a}'_{-k} R_2^{-k} e^{ik\theta} = \sum A''_k e^{ik\theta}.$$

Ținînd seama de faptul că relațiile (9) sînt valabile pentru orice valoare a lui θ, coeficienții lui $e^{ik\theta}$ și θ trebuie să fie nuli.

Pe a_k și a'_k îi obținem prin identificarea coeficienților lui $e^{ik\theta}$ pentru $k=0$, $k=2$ și k oricare (diferit de zero și 2) și obținem

$$\left.\begin{aligned}\chi a_0 - \overline{a}'_0 + 2\chi\gamma_1 \log R_1 &= A'_0 + 2\overline{a}_2 R_1^2\\ \chi a_0 - \overline{a}_0 + 2\chi\gamma_1 \log R_2 &= A''_0 + 2\overline{a}_2 R_2\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\chi a_2 R_1^2 - \overline{a}'_{-2}\overline{R}_1^{-2} &= A'_2 + \overline{\gamma}_1\\ \chi a_2 R_2^2 - \overline{a}'_{-2} R_2^2 &= A''_2 + \overline{\gamma}'_1\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

și

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa a_k R_1^k - \bar{a}_{-k+2}(2-k) R_1^{-k+2} - \bar{a}'_{-k} R_1^{-k} = A'_k \\ &\varkappa a_k R_2^k - a_{-k+2}(2-k) R_2^{-k+2} - \bar{a}'_{-k} R_2^{-k} = A''_k \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

de unde scoatem

$$\varkappa a_0 - \bar{a}'_0 = \frac{1}{-\varkappa \log \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}} \left[\left(\varkappa \log R_1 - R_1^2 \frac{1}{\varkappa (R_1^2 + R_2^2)} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \left(A''_0 + 2R_2^2 \frac{\bar{A}''_2 R_2^2 - A'_2 R_1^2}{\varkappa (R_2^4 - R_1^4)} \right) - \left(\varkappa \log R_2 - R_2^2 - \frac{1}{\varkappa (R_1^2 + R_2^2)} \right) \cdot$$

$$\left. \cdot \left(A'_0 + 2R_1^2 \frac{A''_2 R_2^2 - A'_2 R_1^2}{\varkappa (R_2^4 - R_1^4)} \right) \right],$$

$$a_2 = \frac{(\bar{A}''_2 + \bar{\gamma}_1) R_2^2 - (A'_2 + \bar{\gamma}_1) R_1^2}{\varkappa (R_2^4 - R_1^4)} \text{ și } a'_{-2} = \frac{(\bar{A}''_2 + \gamma_1) R_1^2 - (\bar{A}'_2 + \gamma_1) R_2^2}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_1^2}{R_2^2}},$$

$$a_k = \frac{\varkappa (A''_k R_2^k - A'_k R_1^k)(R_2^{-2k+4} - R_1^{-2k+4}) - (2-k)[A''_{-k+2} R_2^k - A_k^1 R_1^k](R_1^2 - R_2^2)}{\varkappa (R_2^{2k} - R_1^{2k})(R_2^{-2k+4} - R_1^{-2k+4}) - k(2-k)(R_2^2 - R_1^2)^2}$$

$$a'_k = R^k [- \bar{A}'_k + \varkappa \bar{a}_k R_1^k - a_{-k+2}(2-k) R_1^{-k+2}] .$$

Prin substituirea valorilor lui $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ și $\psi(z)$ în (1) și (2), cunoaștem starea de deplasare și tensiune în cazul celei de-a doua probleme fundamentale la limită.

Convergența absolută și uniformă a seriilor obținute pentru φ, φ', ψ în coroana circulară $R_1 < r < R_2$ rezultă din convergența seriilor majorante

$$\sum_1^\infty |a_k| R_2^k, \qquad \sum_1^\infty |a_{-k}| R_1^{-k},$$

$$\sum_1^\infty k |a_k| R_2^{k-1}, \qquad \sum_1^\infty k |a_{-k}| R_1^{-k-1},$$

$$\sum_1^\infty |a'_k| R_2^k, \qquad \sum_1^\infty |a'_{-1}| R_1^{-k},$$

care se demonstrează imediat.

Presupunem că condițiile la limită ale deplasării împlinesc condiția lui Dirichlet și deci există $C > 0$, așa că

$$\left| A_k' \right| < \frac{C}{k^3},$$

$$\left| A_{-k}' \right| < \frac{C}{k^3},$$

$$\left| A_k'' \right| < \frac{C}{k^3},$$

$$\left| A_{-k}'' \right| < \frac{C}{k^3},$$

unde $k = 1, 2, 3$ etc.

Înlocuind aceste valori ale lui $|A_k'|, |A_{-k}'|, |A_k''|$ și $|A_{-k}''|$ în relațiile de mai sus, care ne dau pe a_k, a_{-k} etc., găsim că termenii generali ai seriilor majorate sînt $< \frac{C}{k^3}$ respectiv $\frac{C}{k^2}$.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛОГО КОЛЬЦА В СЛУЧАЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей заметке автор решает плоскую задачу упругости для круглого кольца в случае второй основной краевой задачи, пользуясь методом, разработанным академиком Н.И. Мушелишвили.

LE PROBLÈME PLAN DE L'ÉLASTICITÉ POUR UNE COURONNE CIRCULAIRE DANS LE CAS DU DEUXIÈME PROBLÈME FONDAMENTAL À LA LIMITE

(RÉSUMÉ)

L'auteur résout le problème plan de l'élasticité, pour une couronne circulaire, dans le cas du deuxième problème fondamental à la limite, en utilisant la méthode élaborée par l'académicien N. I. Mouchélichvili.

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Mușhelișvili, *Cîteva probleme de bază din teoria elasticității.* I.R.S., București (sub tipar).

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

TEORIA DE ÎNCOVOIERE LA PARABOLOIZII HIPERBOLICI

DE

MIRCEA MIHĂILESCU

Acoperirea traveelor de deschideri mari pentru hale industriale și săli de spectacol a fost mereu un stimulent spre soluții noi de performanță, pentru că în acest caz se poate sensibil pune în evidență avantajul economic și funcțional al unei forme mai judicioase, arătînd totodată și măsura dezvoltării în tehnica constructivă.

Astfel s-a preconizat în Franța mai întîi, realizarea acoperișurilor din învelitori riglate în care predomină forma de paraboloid hiperbolic [1]. În cadrul acestei lucrări se studiază la paraboloizii hiperbolici determinarea stării de eforturi datorită rigidității învelitorii la încovoiere pentru cele trei tipuri de conture marginale care intervin în practică:

— *paraboloid limitat de parabole principale* (forma seamănă cu o șea) (fig. 1);

— *paraboloid mărginit de generatoare* (suprafața seamănă cu un patrulater strîmb) (fig. 2);

— paraboloid limitat la intersecția cu un cilindru circular (fig. 3).

Pe linia acestei preocupări se situează o interesantă lucrare a prof. K. H r u b a n [2] în care se pune problema fără a analiza în detaliu soluțiile ce i se pot da.

I

1. Fie ecuația unui *paraboloid hiperbolic* raportat la un sistem de *coordonate rectangulare* (fig. 4) avînd originea în centrul învelitorii, axele Ox și Oy, tangente la parabolele de curbură și axa Oz normală la suprafață

$$z = a_1 y^2 - a_2 x^2. \tag{1}$$

Intersecția suprafeței cu un plan vertical trecînd prin origine

$$y = mx$$

este

$$z = (a_1 m^2 - a_2)\, x^2,$$

pentru

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \pm \sqrt{\frac{a_2}{a_1}};\quad z = 0$$

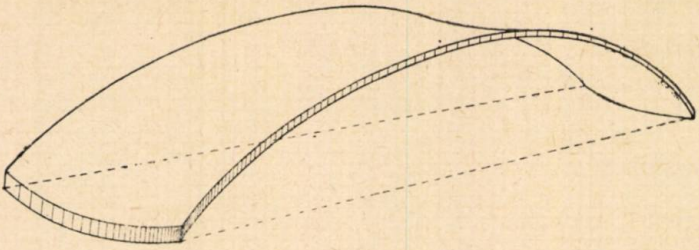


Fig. 1

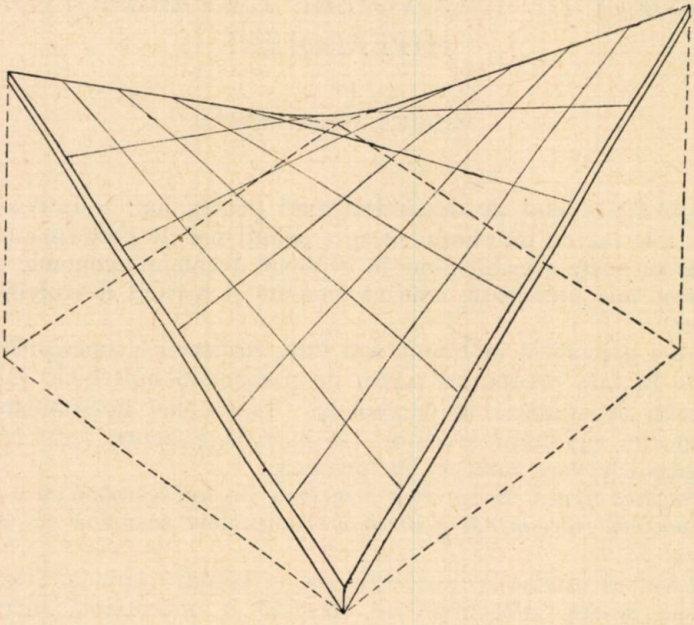


Fig. 2

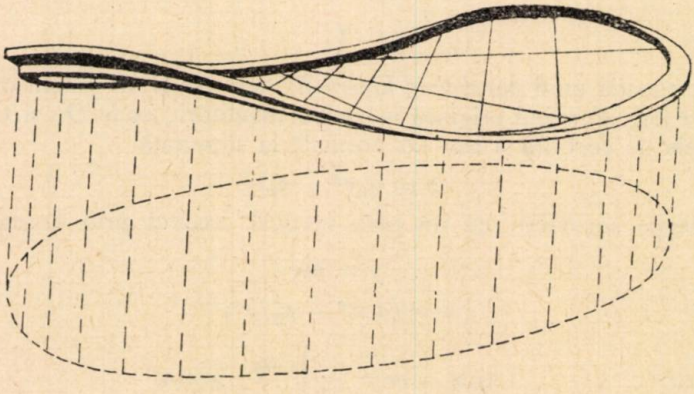


Fig. 3

se obțin direcțiile celor două generatoare care trec prin origine. Cînd $a_2 = a_1$ *unghiul format de ele este drept.*

2. *Prin rotirea de axe* (fig. 4)

$$\begin{aligned} x &= (\xi - \eta) \cos \alpha, \\ y &= (\xi + \eta) \sin \alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

(introducem pentru coordonatele oblice notația ξ, η pentru a le distinge de coordonatele rectangulare x, y)
în care

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{a_1}{a_1 + a_2}}; \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \tag{3}$$

se obține

$$z = \omega \sin \beta . \xi\eta \tag{4}$$

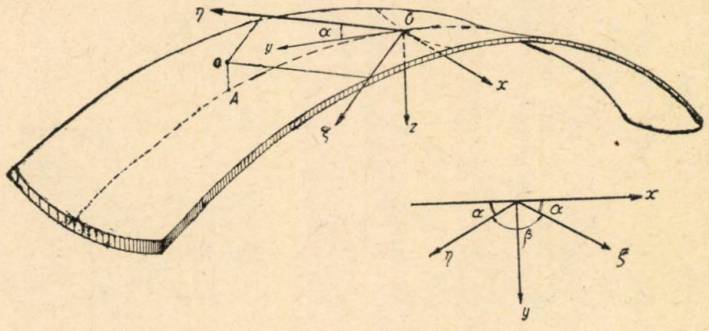


Fig. 4

unde $\beta = \pi - 2\alpha$ reprezintă unghiul celor două generatoare trecînd prin origine și

$$\omega = 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

Din formula 4 *reiese că ordonata* z *este proporțională cu mărimea produsului vectorial al vectorilor de coordonate* $O\xi$, $O\eta$ respectiv $OxOy$.

3. Derivatele lui z în raport cu ξ și η sînt:

$$p = \frac{\partial z}{\partial \xi} = \omega \sin \beta\eta; \quad q = \frac{\partial z}{\partial \eta} = \omega \sin \beta\xi$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \omega \sin \beta; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0. \tag{5}$$

Se remarcă particularitatea suprafeței în formă de paraboloid hiperbolic de a avea *curburile pe direcțiile* ξ, η *nule* și *răsucirea* (strîmbarea suprafeței) în mod aproximativ *constantă.*

II

4. Să considerăm în cazul general un paraboloid hiperbolic la care unghiul celor două generatoare care trec prin centru: $\beta < \frac{\pi}{2}$ (cele două parabole principale sînt diferite); un element de suprafață limitat de 4 generatoare avînd un vîrf în A (x, y) se proiectează într-un paralelogram cu laturile paralele la axele

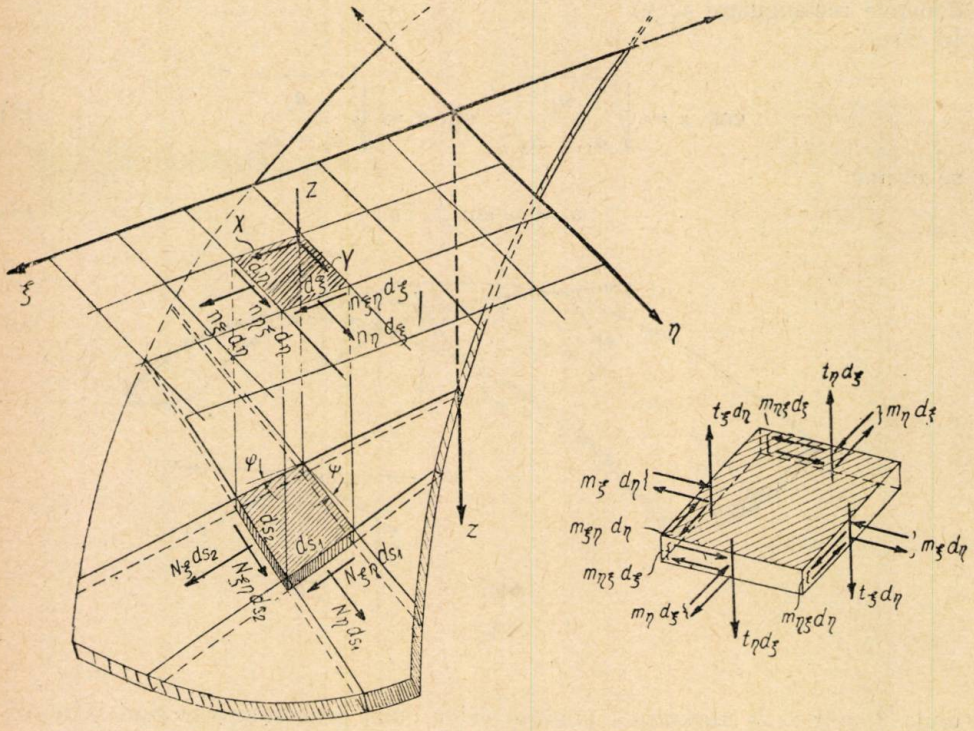


Fig. 5

de coordonate (fig. 5) pentru care se pot fixa dimensiile $d\xi$ și $d\eta$. Vom referi starea de eforturi și deformații a elementului de învelitoare la proiecția sa din planul $\xi O\eta$, pentru *avantajul de a lucra cu un element constant de formă și dimensii.*

Conform figurii 5 se notează:

$\mathfrak{c} = \cos\beta$; $\mathfrak{s} = \sin\beta$, elementele trigonometrice ale unghiului format de axele $O\xi$ și $O\eta$;

ds_1 și ds_2, laturile elementului de învelitoare la care corespund proiecțiile $d\xi$ și $d\eta$;

φ și ψ, unghiurile formate între ds_1 și $d\xi$ respectiv ds_2 și $d\eta$.

Pentru a simplifica problema, vom presupune după V. Z. Vlasov [3] unghiurile φ și ψ relativ mici, astfel încît

$$\cos\varphi \cong \cos\psi \cong 1$$
$$\sin\varphi \cong \operatorname{tg}\varphi \cong p;\ \sin\psi \cong \operatorname{tg}\psi \cong q \qquad (6)$$

ceea ce revine la a considera p^2 și q^2 mici în raport cu unitatea. Această aproximație, ținînd seama de formele realizate practic, corespunde unei subevaluări a coeficienților care nu depășește $10\,^0/_0$, fiind de același ordin cu eroarea care intervine la aprecierea sarcinii de calcul.

5. *Încărcarea exterioară* pe aria unitară de învelitoare fiind

$$G(g\xi,\ g\eta,\ gz) \tag{7}$$

componentele ei, raportate la elementul plan $d\xi$, $d\eta$ în conformitate cu aproximația (6) sînt

$$X = g\xi, \quad Y = g\eta, \quad Z = gz. \tag{8}$$

6. *Solicitările* care intervin pe o latură a elementului de învelitoare se descompun în *eforturi oblice* (adică paralele cu cealaltă latură și tangențiale la latura respectivă).

Conform figurii 4 eforturile oblice și tangențiale la elementul de învelitoare au următoarele componente:

$$\begin{aligned}
&N_\xi ds_2\,(n_\xi d\eta,\ 0,\ pn_\xi d\eta),\\
&N_\eta ds_1\,(0,\ n_\eta d\zeta,\ qn_\eta d\zeta),\\
&N_{\xi\eta} ds_1\,(0,\ n_{\xi\eta} d\zeta,\ pn_{\xi\eta} d\xi),\\
&N_{\eta\xi} ds_2\,(n_{\eta\xi} d\eta,\ 0,\ qn_{\eta\xi} d\eta),
\end{aligned} \tag{9}$$

în aproximația făcută

$$n_\xi = N_\xi;\quad n_\eta = N_\eta;\quad N_{\xi\eta} = N_{\eta\xi} = n_{\xi\eta} = n_{\eta\xi}.$$

7. *Momentele* pe laturile elementului de învelitoare s-au considerat astfel *încît forțele care reprezintă cuplul corespunzător să fie paralele cu axele de coordonate sau tangente la laturile elementului* (astfel M_ξ corespunde cuplului avînd componentele paralele la direcția ξ iar $M_{\xi\eta}$ este momentul cuplului la care componentele sînt tangente la direcția ξ (fig. 5).

Momentele și forțele tăietoare se descompun după cele trei axe astfel:

$$\begin{aligned}
&M_\xi ds_2\,(m_\xi d\eta,\ 0,\ p^2 m_\xi d\eta),\\
&M_\eta ds_1\,(0,\ m_\eta d\zeta,\ q^2 m_\eta d\zeta),\\
&M_{\eta\xi} ds_2\,(m_{\eta\xi} d\eta,\ 0,\ p^2 m_{\eta\xi} d\eta),\\
&M_{\xi\eta} ds_1\,(0,\ m_{\eta\xi} d\zeta,\ q^2 m_{\xi\eta} d\zeta),
\end{aligned} \tag{10}$$

în cadrul aproximației făcute

$$m_\xi = M_\xi;\ m_\eta = M_\eta;\ m_{\xi\eta} = m_{\eta\xi} = M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi}.$$

8. Cele 6 ecuații care exprimă echilibrul elementului de învelitoare, la o solicitare oarecare, se pot scrie referindu-ne la componentele deduse pentru elementul plan $d\xi$, $d\eta$, astfel: (fig. 5).

Neglijînd influența forței tăietoare:

— proiecția pe direcția ξ: $\dfrac{\partial n_\xi}{\partial \xi} + \dfrac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \eta} + c\left(\dfrac{\partial n_\eta}{\partial \eta} + \dfrac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \xi}\right) + X + cY = 0,$ (1.11)

— proiecția pe direcția η; $\dfrac{\partial n_\eta}{\partial \eta} + \dfrac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \xi} + c\left(\dfrac{\partial n_\xi}{\partial \xi} + \dfrac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \eta}\right) + Y + cX = 0,$ (2.11)

Proiecția pe direcția z: $\frac{\partial}{\partial \xi}(pn_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(qn_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(qn_{\xi\eta}) +$ (3.11)

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta}(pn_{\xi\eta}) + \frac{\partial t_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial t_{\eta}}{\partial_{\eta}} + Z = 0,$$

— rotirea în jurul normalei la planul ξz:

$$\frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial m_{\xi}}{\partial \xi} + c\left(\frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{\eta}}{\partial \eta}\right) - t_{\xi} - ct_{\eta} = 0, \tag{4.11}$$

— rotirea în jurul perpendicularei la planul ηz: $\frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{\eta}}{\partial \eta} + c\left(\frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial m_{\xi}}{\partial \xi}\right)$

$- t_{\eta} - ct = 0.$ (5.11)

Relația de rotire în jurul axei Oz ținînd seama de aproximația făcută este identic satisfăcută dacă $n_{\xi\eta} = n_{\eta\xi}$.

9. Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (1.11) și (2.11) în raport cu cele două grupuri de necunoscute din parantezele multiplicate cu c, rezultă relații similare cu cele din coordonate rectangulare; procedînd la fel cu ecuațiile (4.11) și (5.11), se obțin relații diferențiale între momente și forțele tăietoare analoge celor în coordonate rectangulare.

Efectuînd derivatele care apar în ecuația (3.11), ținînd seama de expresiile (5) (ale derivatelor ecuației suprafeței) și de relațiile deduse din ecuațiile (1.11) și (2.11), se obține și pentru proiecția pe direcția z o ecuație la fel ca în coordonate rectangulare.

Sistemul de ecuații 11, după operațiile arătate mai sus devine:

$$\frac{\partial n_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \eta} + X = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial n_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial n_{\xi\eta}}{\partial \xi} + Y = 0, \tag{2.12}$$

$$2sn_{\xi\eta} + \frac{\partial t_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial t_{\eta}}{\partial \eta} + z - pX - qY = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial m_{\xi}}{\partial \xi} - t_{\xi} = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial m_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{\eta}}{\partial \eta} - t_{\eta} = 0. \tag{5.12}$$

10. Integrala acestui sistem de ecuații (12) se compune dintr-o integrală particulară a sistemului complet, la care se adaugă integrala generală a sistemului omogen. *Este cunoscut că integrala particulară se poate obține cu suficientă exactitate pentru practică, în cadrul teoriei de membrană (cînd se neglijează influența momentelor)* [4]. Expresiile eforturilor în acest caz la paraboloizii hiperbolici se găsesc în diferite memorii [5].

În cele ce urmează *vom trata problema determinării integralei generale a sistemului omogen*, obținut din sistemul de ecuații (12), în care $X = Y = Z = 0$, care reprezintă starea de eforturi în învelitoare datorită *influenței marginilor*.

III

11. *Deplasarea învelitorii* sub acțiunea încărcării se poate reprezenta printr-un *cîmp vectorial*; în punctul A (ξ, η), componentele vectorului cîmp, orientate după cele trei axe, fiind (fig. 6)

$$a\,[u(\xi, \eta)\,,\quad v(\xi, \eta)\,,\quad w(\xi, \eta)] \tag{13}$$

În punctul B de pe învelitoare situat la distanța $d\xi$ de A, creșterea vectorului cîmp are componentele

$$\vec{da}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\xi, \frac{\partial v}{\partial \xi}\,d\xi, \frac{\partial w}{\partial \xi}\,d\xi\right). \tag{14}$$

12. *Proiecția vectorului* $\vec{da}$ *(fig. d) pe direcția AB, care se poate calcula ca produsul scalar dintre vectorul unitar AB și vectorul* $\vec{da}$*, raportată la lungimea AB, reprezintă deformația specifică de extensiune (sau contragere) a învelitorii pe această linie.*

Expresia produsului scalar în coordonatele oblice date, este

$$u_1u_2 + \mathfrak{c}\,(u_1v_2 + u_2v_1) + v_1v_2 + w_1w_2 = 0$$

în care (15)

$$(u_1,\ v_1,\ w_1)$$

$$(u_2,\ v_2,\ w_2)$$

sînt componentele celor doi vectori.

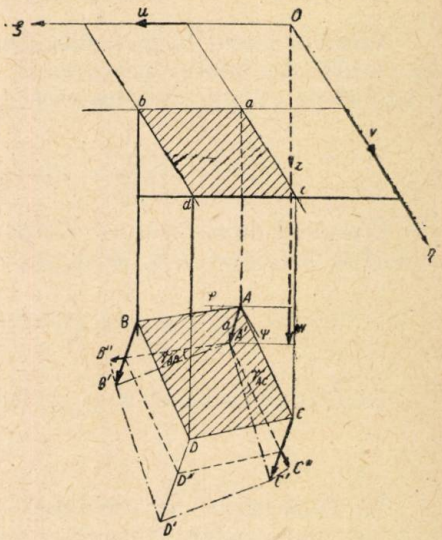


Fig. 6

În consecință deformația specifică a învelitorii pe direcția AB este

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mathfrak{c}\,\frac{\partial v}{\partial \xi} + p\,\frac{\partial w}{\partial \xi}\,, \tag{16}$$

analog se obține deformația pe direcția BC; conform figurii 6, C se găsește la distanța d_η de A

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mathfrak{c}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + q\,\frac{\partial w}{\partial \eta} \tag{17}$$

13. *Deformarea unghiulară corespunzătoare laturii AB se obține în felul următor*: se proiectează vectorul $\vec{da}$ (care arată creșterea deplasării în B față de A) pe direcția perpendicularei comune la AB și normala la învelitoare în A; se raportează apoi această lungime la distanța AB.

Normala la învelitoare în A se calculează ca un produs vectorial al vectorilor *unitari* $S_1(1,O,p)$ *și* $S_2(O,1,q)$; de asemenea vectorul unitar al perpendicularii comune la latura AB $(1,O,p)$ și normala la învelitoare se determină ca produs vectorial al vectorilor unitari de pe aceste două direcții.

Cunoscînd expresia produsului vectorial în sistemul de coordonate oblice ales conform notației (15):

$$\begin{aligned}&\frac{\vec{i}}{\xi}[(v_1w_2 - v_2w_1) - c(u_2v_1 - u_1w_2)] + \\ &\frac{\vec{j}}{\xi}[(u_2w_1 - u_1w_2) - c(v_1w_2 - v_2w_1)] + \\ &\vec{k}\,\xi\,[u_1v_2 - u_2v_1].\end{aligned} \tag{18}$$

Vectorul unitar al perpendicularei comune la AB și normala la învelitoare are (neglijînd conform aproximației introduse la punctul 4 termenii în p^2, q^2 și pq față de ceilalți) următoarea expresie:

$$\vec{p} = -c\vec{i} + \vec{j} + (q - cp)\vec{k} \tag{19}$$

Efectuînd după formula (15) produsul scalar al vectorilor $\vec{da}$ și $\vec{P}$ și raportîndu-l la lungimea AB, se obține

$$\gamma_{AB} = (1 - c^2)\frac{\partial v}{\partial \xi} + (q - cp)\frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{20}$$

La fel se calculează și γ_{AC}; deformația totală unghiulară în A este

$$\gamma_A = \gamma_{AB} + \gamma_{AC} \tag{21}$$

14. *Deformațiile de extensiune măsurate* pe elementul de învelitoare sînt egale (în conformitate cu aproximațiile (6)) cu deformațiile *elementului proiectat pe planul* $\xi O\eta$; recapitulînd, aceste deformații specifice sînt

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + c\frac{\partial v}{\partial \xi} + p\frac{\partial w}{\partial \xi}, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\partial v}{\partial \eta} + c\frac{\partial u}{\partial \eta} + q\frac{\partial w}{\partial \eta}, \\ \gamma_{\xi\eta} &= (1 - c^2)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + (q - cp)\frac{\partial w}{\partial \xi} + (p - cq)\frac{\partial w}{\partial \eta}.\end{aligned} \tag{22}$$

Derivînd convenabil în raport cu ξ și η se obține ecuația de compatibilitate

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} - c\frac{\partial^2(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 2^{\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}. \tag{23}$$

IV

15. Legătura *dintre eforturi și deformații* în coordonate oblice este *greu de stabilit direct* și ea se poate determina mai *ușor indirect pe baza relațiilor* dintre eforturi și deformații scrise în coordonate rectangulare [6].

16. Observînd figura (7*a*) între eforturile n_x, n_y și n_{xy} care solicită elementul rectangular și n_ξ n_η, $n_{\xi\eta}$ care se produc pe laturile paralelogramului elementar se pot deduce următoarele relații:

$$n_x = \frac{1}{\mathfrak{s}}\left(n_\xi + \mathfrak{c}^2 n_\eta + 2\,\mathfrak{c}\, n_{\xi\eta}\right),$$

$$n_y = \mathfrak{s}\, n_\eta, \qquad (24)$$

$$n_{xy} = n_{\xi\eta} + \mathfrak{c}\, n_\eta .$$

17. Notînd deplasările în coordonate rectangulare după cele trei axe:

$$\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w}.$$

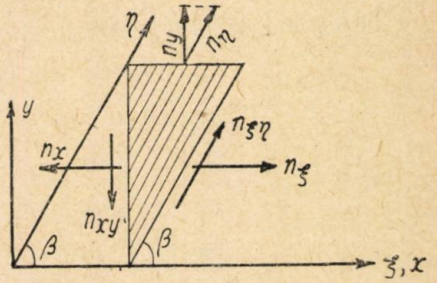


Fig. 7 *a*

După cum reiese din figura 7 *b* și 7 *c*, se pot stabili următoarele relații de legătură cu deformările considerate în coordonate oblice

$$\bar{u} = u + \mathfrak{c}\, v, \qquad u = \bar{u} - \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{s}}\bar{v},$$

$$\bar{v} = \mathfrak{s}\, v, \qquad v = \frac{1}{\mathfrak{s}}\bar{v}. \qquad (25)$$

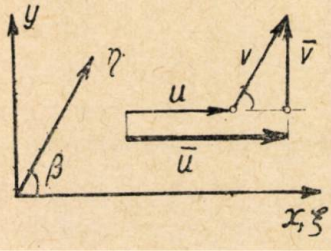


Fig. 7 *b*

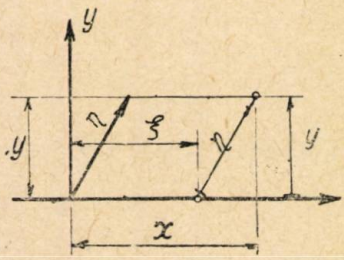


Fig. 7 *c*

Se cunoaște de asemenea relația de legătură dintre coordonatele oblice și rectangulare:

$$x = \xi + \mathfrak{c}\,\eta,$$

$$y = \mathfrak{s}\,\eta. \qquad (26)$$

Să calculăm acum derivatele deplasărilor în coordonate oblice (care intervin în expresiile deformațiilor (22) *funcție de deplasările considerate în axe rectangulare*; conform relațiilor (25) și (26) se obține

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

în care

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{c}}{\bar{\mathfrak{s}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\mathfrak{c}}{\bar{\mathfrak{s}}} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{27}$$

și

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 .$$

Procedînd în felul acesta s-au determinat următoarele ecuații:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{c}}{\bar{\mathfrak{s}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \\ &\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mathfrak{c}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{c}}{\bar{\mathfrak{s}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) + \bar{\mathfrak{s}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\mathfrak{c}}{\bar{\mathfrak{s}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) \\ &\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{\bar{\mathfrak{s}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\mathfrak{c}}{\bar{\mathfrak{s}}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \\ &\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = \mathfrak{c} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\mathfrak{s}} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

în funcție de relațiile (26) expresiile (5) se pot calcula

$$\left.\begin{aligned} &p = \bar{p}, \\ &q = \mathfrak{c}\bar{p} + \bar{\mathfrak{s}}\bar{q}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

în care

$$\bar{p} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \bar{q} = \frac{\partial z}{\partial y} .$$

Pe baza relațiilor (28) și (29), deformațiile în coordonate oblice (22) devin

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \\ &\varepsilon_\eta = \bar{\mathfrak{s}}^2 \varepsilon_y + \mathfrak{c}^2 \varepsilon_x + \mathfrak{c}\,\bar{\mathfrak{s}}\,\gamma_{xy} \\ &\gamma_{\xi\eta} = \bar{\mathfrak{s}}^2 \left[\mathfrak{c}\,(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \bar{\mathfrak{s}}\,\gamma_{xy}\right] \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

în care ε_x, ε_y, γ_{xy} sînt deformările în coordonate rectangulare, avînd expresiile

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{p} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ &\varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{q} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{p} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{q} \frac{\partial w}{\partial x} . \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

18. După cum se cunoaște la învelitorile de beton armat se neglijează influența coeficientului de contracție transversală.

De altfel introducerea coeficientului lui Poisson nu antrenează decît o complicație în scrierea relațiilor, procedeul de rezolvare folosit rămînînd valabil și în acest caz.

În consecință pentru elementul rectangular se poate scrie simplificat

$$\varepsilon_x = \frac{1}{D} n_x \; ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{D} n_y \; ; \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{D} n_{xy} \tag{32}$$

în care

$$D = Eh$$

h fiind grosimea învelitorii.

Ținînd seama de relațiile (24) care dau eforturile n_x, n_y și n_{xy} funcție de n_ξ, n_η și $n_{\xi\eta}$ prin intermediul relațiilor (32), relațiile (30) se transformă funcție de eforturile în coordonate oblice, în felul următor

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \frac{1}{\mathfrak{s} D}(n_\xi + \mathfrak{c}^2 n_\eta + 2 n_{\xi\eta}),\\
\varepsilon_\eta &= \frac{1}{D}\left[\mathfrak{s}^3 n_\eta + \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{s}}(n_\xi + \mathfrak{c}^2 n_\eta + 2\mathfrak{c} n_{\xi\eta}) + 2\mathfrak{s}(n_{\xi\eta} + \mathfrak{c} n_\eta)\right] \qquad (33)\\
\gamma_{\xi\eta} &= \mathfrak{s}^2\left\{\mathfrak{c}\left[\frac{1}{\mathfrak{s}}(n_\xi + \mathfrak{c}^2 n_\eta + 2\mathfrak{c} n_{\xi\eta}) - \mathfrak{s} n_\eta\right] + 2\mathfrak{s}(n_{\xi\eta} + \mathfrak{c} n_\eta)\right\}.
\end{aligned}$$

19. Atunci cînd se caută soluția generală a sistemului de ecuații (12) făcut omogen ($X = Y = Z = 0$) se poate introduce pentru eforturile axiale o funcție de forțe, față de care eforturile n_ξ, n_η și $n_{\xi\eta}$ sînt definite astfel

$$n_\xi = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \; ; \quad n_\eta = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \; ; \quad n_{\xi\eta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \; . \tag{34}$$

Inlocuind aceste ecuații în egalitățile (33), se obțin relațiile dintre ε_ξ, ε_η și $\gamma_{\xi\eta}$ și derivatele funcției de eforturi; mai departe substituind aceste expresii ale lui ε_ξ, ε_η și $\gamma_{\xi\eta}$ în ecuația de compatibilitate (23) aceasta devine

$$\frac{1}{\mathfrak{s} D}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} + 2(1 + 2\mathfrak{c}^2)\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4c\left(\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^3 \partial \xi}\right)\right) = 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{35}$$

sau

$$\frac{1}{\mathfrak{s} D} \Delta^* \Delta^* F - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{36}$$

în care

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\mathfrak{c}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{37}$$

reprezintă laplacian-ul scris în coordonate oblice.

20. Să deducem acum relațiile dintre momentele încovoietoare și de torsiune M_ξ, M_η și $M_{\xi\eta}$ și rotirile suprafeței mediane $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$. Vom proceda la fel ca pentru forțele axiale, scriind mai întîi legătura dintre rotirile

măsurate pe direcțiile oblice și cele măsurate pe direcții rectangulare. Conform figurii 7 *c* și relațiilor (26), rezultă

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \xi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2c\xi \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{38}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \xi \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

În coordonate rectangulare legătura dintre momente și rotirile suprafeței mediane sînt cele cunoscute

$$m_x = -k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad m_y = -k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad m_{xy} = -k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{39}$$

în care neglijînd coeficientul lui Poisson

$$k = \frac{Eh^3}{12}.$$

Pe baza celor stabilite la punctul 7, corespondența dintre momentele care apar pe direcții oblice paralele cu axele ξ și η și momentele care se produc pe direcții rectangulare x și y este conform figurii 8 la fel cu aceea dedusă la punctul 15, între eforturile axiale scrise în raport cu cele două sisteme de axe

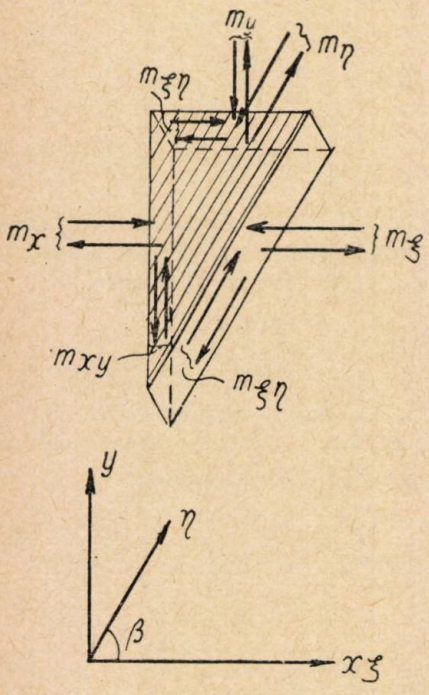


Fig. 8

$$m_x = \frac{1}{\xi}(m_\xi + c^2 m_\eta + 2 m_{\xi\eta});$$
$$m_y = \xi m_\eta, \tag{40}$$
$$m_{xy} = m_{\xi\eta} + c m_\eta.$$

Înlocuind aceste relații în ecuațiile (39) și substituind derivatele $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ astfel obținute, funcție de momentele m_ξ, m_η, $m_{\xi\eta}$ în egalitățile (38), acestea devin

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{k\xi}(m_\xi + c^2 m_\eta + 2 m_{\xi\eta}),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{k\xi}(m_\eta + c^2 m_\xi + 2 m_{\xi\eta}), \tag{41}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{k\xi}[(1 + c^2) m_{\xi\eta} + c(m_\eta + m_\xi)].$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (41) funcție de $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$ se obține

$$m_\xi = -\frac{k}{\xi^3}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2c \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right],$$

$$m_\eta = -\frac{k}{\xi^3}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2c \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right], \tag{42}$$

$$m_{\xi\eta} = -\frac{k}{\xi^3}\left[-c \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + (1 + c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right].$$

21. Înlocuind în ecuația de proiecție pe direcția z (3,12) forțele tăietoare t_ξ și t_η funcție de momentele m_ξ, m_η și $m_{\xi\eta}$ conform relațiilor (4) și 5.12 și apoi momentele funcție de rotiri pe baza relațiilor (42), ținînd seama de funcția de eforturi introdusă la punctul 18, se obține în cadrul sistemului omogen ($X = Y = Z = 0$) următoarea relație care sintetizează condițiile de echilibru

$$\frac{k}{\xi^3} \Delta^* \Delta^* w + 2s \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{43}$$

În care Δ^* este conform notației (37) laplacian-ul în coordonate oblice.

V

22. Pentru a rezolva problema stării de eforturi care se produce în învelitoare să rescriem ecuațiile (36) și (43):

$$\frac{1}{\xi D} \Delta^* \Delta^* F - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{36}$$

$$\frac{k}{\xi^3} \Delta^* \Delta^* w + 2s \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{43}$$

Introducînd după V. Z. Vlasov o nouă funcție de forțe U definită astfel încît

$$F = 2\xi D s \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{44}$$

$$w = \Delta^* \Delta^* U.$$

Atunci ecuația (36) este identic satisfăcută iar ecuația (43) devine

$$\Delta^* \Delta^* \Delta^* \Delta^* U + 4\gamma^{*4} \frac{\partial^4 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{45}$$

unde

$$\gamma^{*4} = \frac{s^2 \xi^4 D}{k}. \tag{46}$$

23. *In cazul în care paraboloidul hiperbolic are unghiul format* de generatoarele din origine drept, ecuațiile de echilibru și compatibilitate, se scriu în

coordonate rectangulare; ecuația problemei în acest caz se deduce din ecuația (45) considerînd unghiul $\beta = \frac{\pi}{2}$ și în consecință $c = 0$ și $s = 1$, rezultînd

$$\Delta\Delta\Delta\Delta U + 4\gamma^4 \frac{\partial U}{\partial x \partial y} = 0, \tag{47}$$

în care

$$\gamma^4 = \frac{s^2 D}{k}. \tag{48}$$

Ecuațiile cu derivate parțiale (45) *și* (47) *sînt de ordinul* 8 *cu coeficienți constanți și după cum se constată sînt simetrice ca și învelitoarea în raport cu* ξ *și* η *respectiv* x, y; *ținînd seama că toate curbele caracteristice ale ecuațiilor* (45) *și* (47) *sînt imaginare, aceste ecuații se zic total eliptice.*

VI

24. *Vom rezolva mai întîi cazul paraboloidului hiperbolic avînd unghiul generatoarelor în origine* $\beta = \frac{\pi}{2}$ *a cărui stare de eforturi și deformații este reprezentată de ecuația* (47).

Pentru determinarea unor soluții care să convină problemei în cazul diferitelor condiții de margini impuse, vom folosi un procedeu unitar. Cunoscînd că integrala ecuației (47) reprezintă o suprafață mărginită și continuă, dacă se secționează cu un plan oarecare, rezultă o curbă a cărei ecuație diferențială se deduce direct din ecuația cu derivate parțiale și este ușor de integrat; cu ajutorul acestor curbe se poate construi o suprafață integrală astfel încît să fie satisfăcute condițiile de margini date.

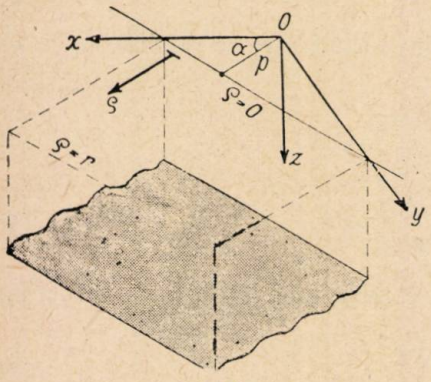


Fig. 9

25. Suprafața integrală fiind de forma $Z = U(x, y)$ mai întîi o vom intersecta cu un plan variabil paralel cu ∂z, ecuația lui fiind

$$\rho = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \tag{49}$$

în care α și p sînt constante iar ρ un parametru variabil (fig. 9).

Ecuația curbei de intersecție se poate obține din ecuația (47) căutînd soluții de forma

$$U = f(\rho). \tag{50}$$

În acest caz, derivatele parțiale ale funcției U în x și y raportate la noua variabilă ρ, conform ecuației (49) sînt

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \cos \alpha f', \quad & \frac{\partial U}{\partial y} &= \sin \alpha f', \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \cos^2 \alpha f'', \quad & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \sin^2 \alpha f''. \end{aligned} \tag{51}$$

De unde rezultă laplacian-ul

$$\Delta U = f'', \tag{52}$$

și în consecință

$$\Delta\Delta\Delta\Delta U = f^{(8)}. \tag{53}$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\, \partial y^2} = \sin^2\alpha\, \cos^2\alpha f^{(4)}. \tag{54}$$

Ca urmare ecuația (47) devine

$$f^{(8)} + 4b^4 f^{(4)}, \tag{55}$$

unde

$$b^4 = \sin^2\alpha\, \cos^2\alpha\, \gamma^4,$$

și ecuația ei caracteristică este

$$m^4 (m^4 + 4b^4) = 0, \tag{56}$$

cu rădăcinile

$$m_{1,\,2,\,3,\,4} = 0; \qquad m_{5,\,6,\,7,\,8} = \pm b(1 \pm i). \tag{57}$$

În consecință, integrala căutată se poate scrie

$$\begin{aligned} U = {} & C_1 \rho + C_2 (r - \rho) + C_3 \rho^3 + C_4 (r - \rho)^3 + \\ & + C_5 e^{-b(r-\rho)} \sin (b\rho + \omega_1) + C_6 e^{-b\rho} \sin (b\rho + \omega_2) \end{aligned} \tag{58}$$

r reprezintă o anumită valoare fixă a lui ρ astfel încît cele 8 constante arbitrare C_i și ω_j se pot determina din condițiile care se cer funcției U și diferitelor grupări de derivate în planele $\rho = 0$ și $\rho = r$.

După cum se constată în figura 9 soluțiile de tipul (58) *reprezintă suprafețe cilindrice și convin numai unei rezemări pe două laturi paralele*; în cazul unui contur închis, în mod evident nu se poate obține o integrală prin suprapunerea mai multor soluții de acest fel construite pe fiecare din laturi.

26. *La contururile poligoane închise vom încerca pentru fiecare din laturi, soluții mai complicate, dezvoltări în serii, termenul general fiind de forma:*

$$U = \cos(\lambda\zeta) f(\lambda\rho) \tag{59}$$

în care

$$\begin{aligned} \rho &= x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_1, \\ \zeta &= x \sin\alpha - y \cos\alpha - p_2, \\ \lambda &= \frac{2n\pi}{l} \end{aligned} \tag{60}$$

l = lungimea laturii,

α, p_1, p_2 sînt constante; p_2 este astfel încît pentru o dreaptă care trece prin $\frac{l}{2}$; $\zeta = 0$,

ρ și ζ parametrii variabili.

Ecuațiile (60) reprezintă plane variabile paralele cu Oz și perpendiculare între ele (fig. 10).

Procedînd ca la punctul (25) expresia laplacian-ului raportată la noile variabile ρ și ζ este

$$\Delta U = \lambda^2 \cos \lambda\zeta\,(f'' - f), \tag{61}$$

și se mai obține

$$\Delta\Delta\Delta\Delta U = \lambda^8 \cos \lambda\zeta\,(f^{(8)} - 4f^{(6)} + 6f^{(4)} - 4f^{(2)} + f). \tag{62}$$

De asemenea se calculează :

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} = \lambda^2 \cos\lambda\zeta\,[\cos^2\alpha \sin^2\alpha\,(f^{(4)} + 2f^{(2)} + f) - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) f^{(2)}] +$$

$$+ \lambda^4 \sin\lambda\zeta\,[2\cos\alpha \sin\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,(f' + f^{(3)})]. \tag{63}$$

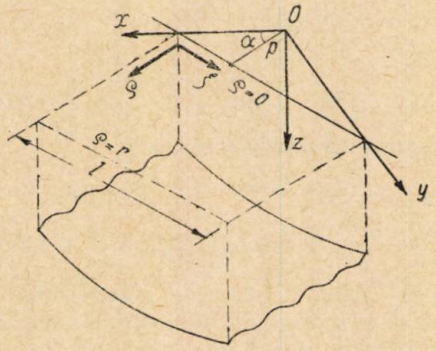


Fig. 10

Pentru ca soluția (59) *să verifice ecuația* (47) *trebuie ca*

$$\cos 2\alpha = 0\colon\ \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \tag{1.64}$$

sau

$$\sin 2\alpha = 0 \quad \alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi. \tag{2.64}$$

Punînd condiția (1.64) în ecuația (59) și înlocuind soluția propusă pentru U în ecuația (47), aceasta devine

$$(f^{(8)} - 4f^{(6)} - 4f^{(2)} + f) + 4b^{(4)}(f^{(4)} + 2f^{(2)} + f) = 0$$

$$b^4 = \frac{1}{4}\frac{\gamma^4}{\lambda^4}, \tag{65}$$

ecuația ei caracteristică este:

$$m^8 - 4m^6 + 6m^4 - 4m^2 + 4b^4(m^4 + 2m^2 + 1) + 1 = 0, \tag{66}$$

substituind

$$n = m^2,$$

se obține

$$(n-1)^4 + 4b^4 (n+1)^2 = 0, \tag{67}$$

care se poate desface într-un produs

$$[(n-1)^2 + 2i\, b^2 (n+1)]\ [(n-1)^2 - 2ib^2 (n+1)] = 0. \tag{68}$$

Referindu-ne la fiecare termen al produsului care trebuie să fie egal cu zero, se poate nota

$$\cos\ \delta = \frac{b^2}{\sqrt{b^4+16}}\ ;\quad \sin\ \delta = \frac{4}{\sqrt{b^4+16}} \tag{69}$$

și în consecință

$$\chi_{1.2} = 1 \pm b^2 \sqrt{b^4+16}\cos\frac{\delta}{2}\ ;\quad \mu_{1,2} = b^2\left(\sqrt{b^4+16}\sin\frac{\delta}{2} \pm 1\right) \tag{70}$$

cu aceste notații se obține

$$n_{1,2} = \chi_1 \pm i\,\mu_1\ ;\quad un_{3,4} = \chi_2 \pm i\,\mu_2 \tag{71}$$

pentru a determina valorile lui m, vom scrie

$$\delta_1^* = \text{arc tg}\,\frac{\mu_1}{\chi_1}\ ;\quad \delta_2^* = \text{arc tg}\,\frac{\mu_2}{\chi_2} \tag{72}$$

și

$$\begin{aligned} \chi_1^* &= \sqrt{\chi_1^2+\mu_1^2}\cos\frac{\delta_1^*}{2}\ ;\quad \mu_1^* = \sqrt{\chi_1^2+\mu_1^2}\sin\frac{\delta_1^*}{2}, \\ \chi_2^* &= \sqrt{\chi_2^2+\mu_2^2}\cos\frac{\delta_2^*}{2}\ ;\quad \mu_2^* = \sqrt{\chi_2^2+\mu_2^2}\sin\frac{\delta_2^*}{2}, \end{aligned} \tag{73}$$

în consecință

$$\begin{aligned} m_{1,2,3,4} &= \pm\chi_1^* \pm i\,\mu_1^*, \\ m_{5,6,7,8} &= \pm\chi_2^* \pm i\,\mu_2^*. \end{aligned} \tag{74}$$

Ținînd seama că rădăcinile ecuației caracteristice sînt imaginar conjugate, integrala poate fi scrisă

$$\begin{aligned} U = \cos\lambda\zeta\{ & C_1 e^{-\chi_1^*\lambda\rho}\sin(\mu_1^*\lambda\rho+\omega_1) + C_2 e^{-\chi_2^*\lambda\rho}\sin(\mu_2^*\lambda\rho+\omega_2) + \\ & + C_3 e^{-\chi_1^*\lambda(r-\rho)}\sin[u_1^*\lambda_1(r-\rho)+\omega_3) + \\ & + C_4 e^{-\chi_2^*\lambda(r-\rho)}\sin[\mu_2^*\lambda_1(r-\rho)+\omega_4]\}. \end{aligned} \tag{75}$$

Constantele C_1C_2; ω_1, ω_2 și C_3, C_4; ω_3, ω_4 se determină cunoscînd condițiile de margine în planele $\rho = 0$ și $\rho = r$ pentru anumite valori ale lui ζ. Procedeul de lucru a fost expus pentru învelitoarea cilindrică într-o lucrare anterioară [7].

27. Să examinăm acum *situația particulară a soluțiilor de forma*

$$U = \cos \lambda x \, f(\lambda y) \tag{76}$$

care corespunde condiției (2.64).

Soluția are variabilele separate.

Calculînd derivatele acestei soluții în raport cu x și y se obține expresia laplacianului

$$\Delta U = \lambda^2 \cos \lambda x \, (f^{(2)} - f) \tag{77}$$

și în consecință

$$\Delta\Delta\Delta\Delta U = \lambda^8 \cos \lambda x \, (f^{(2)} - f)^4 . \tag{78}$$

De asemenea se deduce

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = - \lambda^4 \cos \lambda x f^{(2)} \tag{79}$$

Înlocuind expresiile derivatelor (78) și (79) în ecuația (47) se obține o ecuație diferențială

$$\cos \lambda x \, [f^{(8)} - 4f^{(6)} + 6f^{(4)} - 4 (1 + b^4) \, f^{(2)} + f] = 0 , \tag{80}$$

pentru care ecuația caracteristică este

$$m^8 - 4m^6 + 6m^4 - 4 (1 + b^4) \, m^2 + 1 = 0 . \tag{81}$$

Procedînd la fel ca la punctul 26 se înlocuiește

$$n = m^2 \tag{82}$$

și se obține o ecuație în n

$$n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4 (1 + b^4) \, n + 1 = 0 , \tag{83}$$

care poate fi rezolvată prin metoda Descartes; rădăcinile fiind toate imaginar conjugate, integrala va avea aceeași expresie (75), în care coeficienții χ_1^*, χ_2^*, μ_1^*, μ_2^* au valorile rezultate din ecuația (81).

28. Soluțiile de la punctul 26 și 27 permit să se determine starea de *eforturi din încovoiere pe un contur închis format din laturi perpendiculare pe axele de coordonate, sau pe dreptele bisectoare*, suprapunînd integralele determinate pe fiecare pereche de laturi.

Este de remarcat că *condițiile de mai sus sînt satisfăcute de contururile avînd formă de dreptunghi, pătrat, romb echilater* sau *octogon regulat*; în cazul octogonului suprapunerea soluțiilor determinate pe fiecare pereche de laturi, trebuie făcută cunoscînd că ele sînt valabile numai pe lățimea egală cu latura respectivă.

VII

29. Să analizăm acum starea de eforturi în teoria de încovoiere la un paraboloid hiperbolic, care se proiectează pe planul xOy după un cerc de ecuație

$$x^2 + y^2 = R^2 . \tag{84}$$

După J. Barta [8] vom căuta să determinăm soluția într-un punct din interiorul domeniului $P(a, b)$, figura 11. Să reprezentăm o direcție oarecare trecînd prin P, caracterizată prin unghiul α, pe care-l face normala ei cu axa Ox. Să notăm pe această direcție o distanță variabilă ρ, avînd originea în P și sensul pozitiv îndreptat către punctele la care $y > b$.

Distanța ρ este dată de ecuația

$$\rho = (a - x) \sin \alpha - (b - y) \cos \alpha. \tag{85}$$

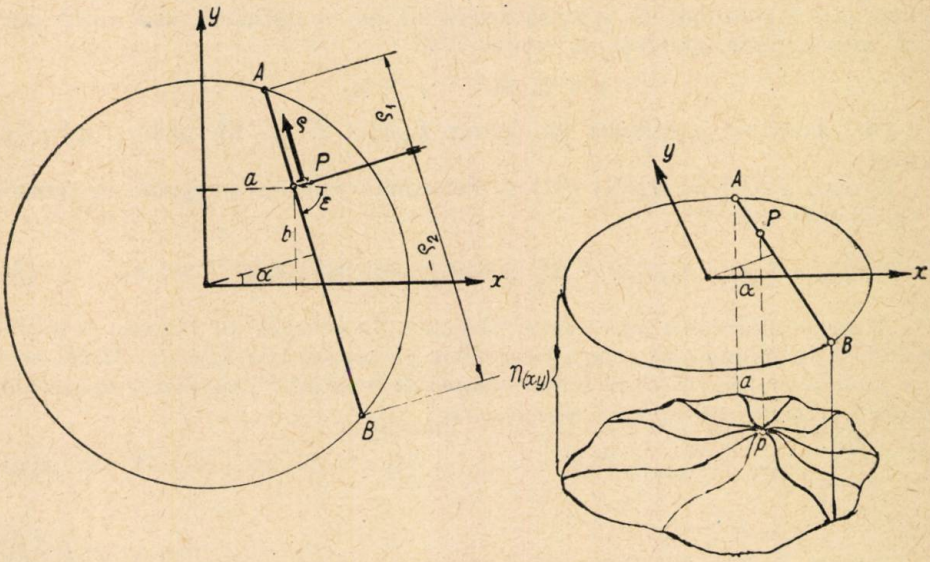


Fig. 11

Secționînd suprafața integrală cu un plan a cărei urmă este pe direcția ρ, va rezulta o curbă integrală, a cărei ecuație în termeni finiți se obține căutînd soluții de forma

$$U = f(\rho). \tag{86}$$

Așa cum s-a arătat la punctul 24, calculînd și în acest caz derivatele funcției U în raport cu x și y prin intermediul noii variabile ρ se obține expresia laplacianului:

$$\Delta U = f''(\rho) \tag{87}$$

și în consecință

$$\Delta\Delta\Delta\Delta U = f^{(8)}. \tag{88}$$

De asemenea se poate calcula

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha f^{(4)}, \tag{89}$$

ecuația cu derivate parțiale (47) se transformă în ecuația diferențială

$$f^{(8)} + 4b^4 f^{(4)} = 0,$$

în care (90)

$$b^4 = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \gamma^4.$$

Ecuația (90) se rezolvă la fel ca la punctul 25; integrala care se obține este

$$U = C_1(\rho - \rho_1) + C_2(\rho + \rho_2) + C_3(\rho - \rho_1)^3 + C_4(\rho + \rho_2)^3 + \\ + C_5 e^{+b(\rho-\rho_1)} \sin(b\rho + w_1) + C_6 e^{-b(\rho+\rho_2)} \sin(b\rho + w_2), \quad (91)$$

în care cele 8 constante C_i și w_j se determină din condițiile în care curba integrală intersectează cilindrul de contur cînd

$$\rho = \rho_1 \text{ sau } -\rho = \rho_2.$$

De obicei se precizează pe contur funcția U și diferitele grupări de derivate.

Punînd $\rho = 0$ în soluția (91) se determină valoarea integralei în punctul P (a, b) care este

$$U^P = C_1\rho_1 + C_2\rho_2 + C_3\rho_1^3 + C_4\rho_2^3 + C_5 e^{-b\rho_1} \sin w_1 + C_6 e^{-b\rho_2} \sin w_2. \quad (92)$$

Această valoare are un caracter particular fiind legată de direcția α trecînd prin P; la fel se pot găsi soluții particulare pe oricare altă direcție. *Media valorilor particulare care se obțin rotind dreapta în jurul lui P, reprezintă soluția care satisface la toate condițiile de margine, deci*

$$U^P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (C_1\rho_1 + C_2\rho_2 + C_3\rho_1^3 + C_4\rho_2^3 + C_5 e^{-b\rho_1} \sin w_1 + C_6 e^{-b\rho_2} \sin w_2)\, d\varepsilon \quad (93)$$

ε fiind conform figurii unghiul format în punctul P de direcția variabilă ρ (caracterizată prin unghiul α măsurat în raport cu Ox) cu o direcție fixă (de exemplu, paralela la Ox).

Pentru a efectua integrala (93) este necesar să se scrie constantele C_i, w_j și distanțele ρ_1 și ρ_2 funcție de ε și raza cercului R.

VIII

30. În cazul *paraboloidului hiperbolic la care unghiul generatoarelor în centrul paraboloidului este ascuțit*, trebuie rezolvată ecuația (45); vom proceda la fel ca la punctul 25 căutînd soluții de forma

$$U = f(\rho),$$

în care, în coordonate oblice, ρ are expresia

$$\rho = \xi \cos \alpha + \eta \sin(\beta - \alpha) - p. \quad (94)$$

Procedînd ca la punctul 25 și ținînd seama de expresia (37) a laplacianului în coordonate oblice se deduce

$$\Delta^* = Af'', \quad (95)$$

unde

$$A = [\cos^2\alpha + \sin^2(\beta - \alpha) - 2\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta - \alpha)] \tag{96}$$

și

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = Bf'', \tag{97}$$

în care

$$B = \cos\alpha\sin(\beta - \alpha). \tag{98}$$

Ecuația (45) devine

$$f^{(8)} + 4b^4 f^{(4)} = 0, \tag{99}$$

în care

$$b^4 = \frac{B^2}{A^4}\gamma^{*4}. \tag{100}$$

În consecință integrala căutată se poate scrie analog ecuației (58)

$$U = C_1\rho + C_2(r - \rho) + C_3\rho^3 + C_4(r - \rho)^3 + \\ + C_5 e^{-b(r-\rho)}\sin(b\rho + w_1) + C_6 e^{-b\rho}\sin(b\rho + w_2). \tag{101}$$

Constantele arbitrare determinîndu-se din condițiile cerute funcției U și diferitelor grupări de derivate în planele $\rho = 0$ și $\rho = r$.

Primită la redacție la 29. VI. 1955

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Выводят формулы для определения состояния напряжения, учитывая жесткость кровли при изгибе в разных случаях нагрузки по контуру (предполагая, что внешнее усилие, которому подвергается кровля под влиянием нагрузки, определено теорией мембраны).

Рассматривались параболоиды, имеющие при прямоугольных ромбовидных или округлых контурах прямой или косой угол между образующими. Приближенность расчета по В. З. Власову предполагает малые значения s^2, q^2 и p, q, по сравнению с единицей.

LA THÉORIE DE LA FLEXION APPLIQUÉE AUX PARABOLOÏDES HYPERBOLIQUES

(RÉSUMÉ)

On déduit les formules pour la détermination de l'état d'efforts pour le cas où l'on tient compte de la rigidité à la flexion de la couverture dans divers cas de charges sur le contour (en supposant la sollicitation de la couverture sous l'action de la charge extérieure déterminée par la théorie de membrane).

On a considéré des paraboloïdes dont l'angle formé par les génératrices est droit ou oblique, pour des contours rectangulaires, en losange ou circulaires. L'approximation du calcul, d'après V. S. Vlassov, suppose les valeurs de s^2, q^2 et p, q, petites par rapport à l'unité.

BIBLIOGRAFIE

1. B. Lafaille, *Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauche minces.* Mémoires de l'AIPC, Zürich, 1935, vol. 3.
2. K. Hruban, *Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau.* Acta tehnica Academiae Scientiarum Hungaricae, Budapesta, 1953, tomus VII, fasc. 3—4.
3. V. Z. Vlasov, *Pologhie obolociki i slegka iskriblĕnnie plastinki.* Izvestia Akad. Nauk SSSR, OTN, 1950, nr. 9, p. 1298.
4. M. Mihailescu, *Criterii generale pentru calculul învelitorilor subțiri.* Bul. ştiinț. Acad. R.P.R., Secția de ştiințe tehnice şi chimice, t. VI, 1954, p. 109.
5. F. Aimond, *Étude statique des voiles minces en paraboloïde hyperbolique travaillant sans flexion.* Mémoires de l'AIPC, Zürich, 1936, vol. 4.
6. P. Lardy, *Die Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe.* Schweizerische Bauzeitung, iulie 1949.
7. M. Mihailescu, *Asupra unor formule practice pentru calculul învelitorilor cilindrice subțiri.* Bul. ştiinț. Acad. R.P.R., Secția de ştiințe tehnice şi chimice, t. IV, 1952, p. 343.
8. J. Barta, *Sulla risolutione del problema de Dirichlet per il cerchio o per la sfera.* Reale Academia Nazionale dei Lincei, 1937, vol. VI, serie VI, fasc. XII.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

ÎNVELITORI SUBŢIRI ÎN FORMĂ DE PARABOLOID HIPERBOLIC

DE

VIOREL VISARION

1. Introducere

Obiectul acestei lucrări este studiul învelitorilor în formă de paraboloid hiperbolic, cu considerarea momentelor şi forţelor tăietoare.

Învelitorile în formă de paraboloid hiperbolic prezintă faţă de alte învelitori multe avantaje constructive şi statice; datorită însă faptului că nu a existat nici o metodă de calcul a eforturilor încovoietoare şi a stabilităţii, mulţi proiectanţi s-au ferit, pe drept cuvînt, să le utilizeze. Această atitudine a fost întărită atunci cînd cîteva din astfel de învelitori necalculate la încovoiere şi stabilitate au flambat.

Din aceste fapte a rezultat necesitatea unui studiu static mai cuprinzător.

Ecuaţiile se vor stabili aproximativ admiţînd o eroare; astfel, pentru paraboloizii hiperbolici cu generatoare ortogonale, ea este de ordinul lui $a^2 l^2$ faţă de 1 *), a fiind coeficientul ce intervine în ecuaţia suprafeţei mediane referită

*) Pentru o mai bună înţelegere precizăm:
Dacă considerăm parabolele principale, se deduce cu uşurinţă relaţia:

$$\frac{f}{l} = \frac{a\,l}{2},$$

f fiind săgeata acestei parabole. Cu aceasta, eroarea maximă devine

$$4\left(\frac{f}{l}\right)^2 \times 100\% .$$

În cazul în care dorim ca această eroare maximă să nu depăşească k %, va trebui ca

$$\frac{f}{l} \leqslant \frac{1}{20}\sqrt{k}, \qquad \text{(i)}$$

care evident determină turtirea parabolelor principale.

În realitate însă, eroarea medie este mult mai mică şi de ordinul lui

$$\frac{1}{l}\int_0^l a^2 x^2\,dx, \qquad \text{faţă de 1.}$$

la linii asimptotice

$$z = axy, \quad x = x, \quad y = y \text{ *)},$$

iar

$$l^2 = \max (x^2 + y^2).$$

În această aproximație, se deduc ecuațiile satisfăcute de deplasări și tensiuni, dîndu-se soluția generală pentru două tipuri, șeaua și paraboloidul hiperbolic decupat după patru generatoare. Partea a doua a lucrării lămurește problema stabilității în cazul solicitării din compresiune uniformă dată de o creștere uniformă de temperatură, și pentru presiune uniformă.

Ecuațiile de la care se pleacă, sînt cele exacte ale elasticității învelitorilor subțiri în coordonate oblice pe suprafață date de lucrarea [2].

2. Ecuațiile în eforturi și deplasări

În cele ce urmează, prezentăm elementele geometrice necesare deducerii ecuațiilor elasticității și a celor geometrice pentru paraboloidul hiperbolic cu generatoare ortogonale, referit la liniile asimptotice $x = x$, $y = y$, $z = axy$.

Prima formă fundamentală pentru suprafața mediană este

$$ds^2 = (1 + a^2x^2)\, dx^2 - a^2xy\, dx\, dy + (1 + b^2y^2)\, dy^2.$$

Curburile sînt

$$\frac{1}{R_{xy}} = \frac{a}{(1 + a^2x^2)(1 + a^2y^2)} \qquad \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_y} = 0.$$

Liniile trigonometrice ale unghiului χ format de liniile coordonate, sînt date de

$$\cos \chi = \frac{a^2xy}{\sqrt{1 + a^2x^2}\sqrt{1 + a^2y^2}}, \quad \sin \chi = \frac{\sqrt{1 + a^2(x^2 + y^2)}}{\sqrt{1 + a^2x^2}\sqrt{1 + a^2y^2}}.$$

În tot restul calculului, vom face aproximația deja enunțată, renunțînd la $a^2(x^2 + y^2)$ în raport cu unitatea. Cu aceasta vom putea lua $\sin \chi = 1$ și deci $\cos \chi = 0$; liniile coordonate care în realitate se taie după un unghi χ apropiat

---

Rezultă cu aceasta o eroare medie

$$\frac{1}{3} a^2 l^2, \qquad \text{față de } 1,$$

astfel că inegalitatea (i) poate fi înlocuită practic cu

$$\frac{f}{l} \leqslant \frac{1}{20}\sqrt{3k}. \qquad (i')$$

Întrucît eroarea este maximă pe contur, acolo unde înseși condițiile sînt date cu o eroare echivalentă, indicăm drept eroare a acestui calcul pe cea medie, ce stă la baza inegalității (i').

Este de remarcat că această eroare se află la baza teoriei lui V. V. Vlasov pentru învelitori de mică curbură, unde în plus se face și neglijarea forțelor tăietoare în primele două ecuații de echilibru. Ea se află și la baza lucrării [1] care în plus consideră $\mu = 0$, ducînd la erori mari în calculul lui $\mathfrak{M}_x$ și $\mathfrak{M}_y$.

*) x, y, z formează un sistem de coordonate carteziene ortogonale.

de un unghi drept, le vom considera în calcul ortogonale. Pentru lungimile elementelor de arc, de-a lungul liniilor coordonate vom lua de asemenea

$$1 + a^2x^2 \cong 1 + a^2y^2 \cong 1 .$$

Elementele geometrice vor fi date aproximativ de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 ,$$

$$\frac{1}{R_{xy}} = a .$$

Cu aceasta, sistemul de ecuații de echilibru dat în lucrarea [2], în linii ortogonale pentru o suprafață oarecare, se va scrie pentru paraboloidul hiperbolic astfel

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial y} + X = 0 , \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial x} + Y = 0 ,$$

$$\mathfrak{N}_{xy} - \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) - Z\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + Q_y = 0 , \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 ,$$

$$\mathfrak{N}_{xy} + \mathfrak{N}_{yx} = 0 .$$

Ecuația suplimentară $\mathfrak{M}_{xy} + \mathfrak{M}_{yx} = 0$, dedusă din relațiile elasticității în aceeași lucrare, a fost de asemenea folosită pentru scrierea acestui sistem.

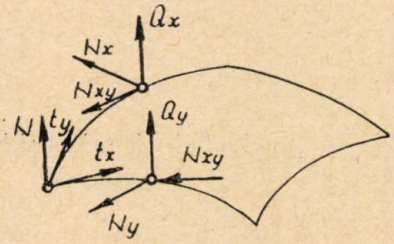


Fig. 1

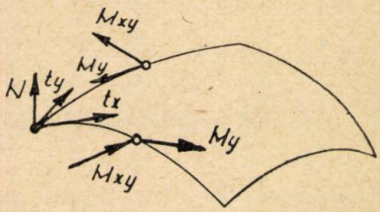


Fig. 2

Convenția de semne pentru forțe și momente este dată în figura 1 și figura 2.

Ecuațiile de continuitate ale deformației transcrise în efortul cu ajutorul legii lui Hooke, de către A. L. Goldenweizer însă în forma simplificată indicată de V. V. Novojilov în lucrarea [3] sînt

$$\frac{\partial (\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y)}{\partial x} - (1 + \mu) Q_x = 0 ,$$

$$\frac{\partial (\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y)}{\partial y} - (1 + \mu) Q_y = 0 ,$$

$$\mathfrak{M}_{xy} + \frac{h^2}{6a(1 + \mu)} \Delta (\mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y) = 0 ,$$

$2h$ fiind grosimea învelitorii măsurată pe normală la suprafața mediană.

Deducerea ecuației rezolvante se face imediat, luînd drept elemente necunoscute

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y, \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y.$$

Ecuațiile de continuitate și cea de-a treia de echilibru, dau în cazul problemei omogene

$$Q_x = \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y},$$

$$\mathfrak{M}_{xy} = -\frac{h^2}{6a(1+\mu)}\Delta\mathfrak{M}, \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{N}_{xy} = \frac{1}{2a}\frac{1}{1+\mu}\Delta\mathfrak{M}.$$

Derivînd prima ecuație de echilibru în raport cu y, pe a doua în raport cu x, înlocuind pe $\mathfrak{N}_{xy}$, $\mathfrak{M}_{xy}$ în funcție de $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$, deducem o primă ecuație

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{1}{2a(1+\mu)}\Delta\Delta\mathfrak{M} = 0. \tag{2.2}$$

Derivînd prima ecuație de momente în raport cu y, pe a doua în raport cu x, analog cazului anterior, deducem o a doua ecuație în $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{h^2}{6a(1-\mu)}\Delta\Delta\mathfrak{N} = 0. \tag{2.3}$$

Amplificînd a doua ecuație cu $-i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3}{h^2}}$ adunînd-o la prima și luînd drept necunoscută nouă, efortul complex

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{N} - i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3}{h^2}}\,\mathfrak{M},$$

rezultă ecuația

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x \partial y} + i\frac{h}{2a}\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\Delta\Delta\mathfrak{E} = 0. \tag{2.4}$$

Cele două ecuații (2.2) și (2.3) se pot reduce la o singură ecuație pe calea eliminării uneia din necunoscute. Obținem astfel ecuația

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\mathfrak{M} + 12\,a^2\frac{1-\mu^2}{h^2}\frac{\partial^4 \mathfrak{M}}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \tag{2.5}$$

Observînd că sistemul de ecuații de echilibru și de continuitate are coeficienți constanți, deducem că această ecuație va fi satisfăcută de oricare dintre

eforturi. Expresiile eforturilor axiale și ale momentelor încovoietoare se obțin în funcție de $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$ din ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_x &= -\frac{1}{2a(1+\mu)}\int_a^x \frac{\partial}{\partial y}\Delta\mathfrak{M}dx;\\
\mathfrak{N}_y &= -\frac{1}{2a(1+\mu)}\int_b^y \frac{\partial}{\partial x}\Delta\mathfrak{M}dy,\\
\mathfrak{M}_x &= \frac{1}{1+\mu}\mathfrak{M} - \frac{h^2}{6a(1+\mu)}\int_a^x \Delta\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}dx\\
\mathfrak{M}_y &= \frac{\mu}{1+\mu}\mathfrak{M} + \frac{h^2}{6a(1+\mu)}\int_a^x \Delta\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}dy.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Cunoscînd o soluție a ecuației (2.4), cu ajutorul lui (2.1) și (2.6) rezultă toate eforturile.

3. Relațiile elasticității, relațiile geometrice

În aproximația enunțată, ecuațiile elasticității pentru linii ortogonale, date în lucrarea [2] pentru o suprafață oarecare, se scriu pentru paraboloidul hiperbolic astfel

$$\mathfrak{N}_x = \frac{2\mathcal{E}h}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2),\quad \mathfrak{N}_y = \frac{2\mathcal{E}h}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1),\quad \mathfrak{N}_{xy} = \frac{\mathcal{E}h}{1+\mu}\omega,$$

$$\mathfrak{M}_x = -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}h^3}{1-\mu^2}(\chi_1+\mu\chi_2),\quad \mathfrak{M}_y = -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}h^3}{1-\mu^2}(\chi_2+\mu\chi_1)$$

$$\mathfrak{M}_{xy} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}h^3}{1+\mu}\tau,$$

în care

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+2aw,$$

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2}a\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{2}a\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},$$

deduse pe baza aceleiași aproximații, prin particularizare, din lucrarea [2].

Relațiile acestea fiind de asemenea cu coeficienți constanți, deformațiile și deplasările satisfac toate, ecuația (2.6).

4. Solicitarea la temperatură uniformă

Pentru calculul la solicitarea la temperatură uniformă, este necesar să cunoaștem deformarea învelitorii cu margini libere, datorită unei modificări de temperatură.

Ca solicitare pentru învelitoare vom lua apoi efectul de împiedicare al reazemului, care se opune mai mult sau mai puțin dilatării învelitorii.

Vom presupune că tendința temperaturii este de a dilata uniform învelitoarea în suprafață mediană, fără forfecări; în rest evident, vor trebui să apară mici eforturi de încovoiere.

Fie două sisteme de coordonate curbilinii x și y, și un altul care are liniile sale coordonate decalate cu unghiurile θ, λ față de vechiul sistem. Relațiile ce leagă deformările și unghiurile de rotire de-a lungul liniilor coordonate ale celui de-al doilea sistem, în funcție de primul, sînt

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sin\theta\cos\lambda}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\sin\theta\sin\lambda}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\omega} + \frac{\cos\theta\sin\lambda}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\varepsilon}_2,\\
\omega &= -\frac{\cos(\lambda-\theta)}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\varepsilon}_1 - \frac{\sin(\lambda-\theta)}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\omega} + \frac{\cos(\lambda-\theta)}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\varepsilon}_2,\\
\varepsilon_2 &= \frac{\cos\theta\sin\lambda}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\varepsilon}_1 - \frac{\cos\theta\cos\lambda}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\omega} + \frac{\sin\theta\cos\lambda}{\sin(\lambda+\theta)}\bar{\varepsilon}_2.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Se observă că există posibilitatea ca pe toate direcțiile să se producă o aceeași deformație de întindere și în același timp, unghiul dintre liniile coordonate să nu se modifice.

Într-adevăr, punînd $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon = \alpha\Delta t^0$ și $\bar{\omega} = 0$ se deduce indiferent de valoarea unghiurilor θ, λ (deci pentru orice direcție ce trece prin punctul respectiv)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \omega = 0. \tag{4.2}$$

Aceasta arată că tendința temperaturii de a dilata în mod uniform învelitoarea, nu este oprită și că se face fără eforturi de întindere sau de lunecare în suprafața mediană, atît timp cît nu se pune problema deformațiilor de încovoiere.

În ceea ce privește deplasările, ele se pot deduce din

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(u + \cos\chi v) = \varepsilon,\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial y}(v + \cos\chi u) = \varepsilon,
\end{aligned} \qquad \omega = 0$$

relații exacte, de astă dată. Prin integrare ele devin

$$u = \frac{A[\varepsilon x + f_1(y) - \cos\chi B[\varepsilon y + f_2(x)]}{\sin^2\chi},$$

$$v = \frac{B[\varepsilon y + f_2(x)] - \cos\chi A[\varepsilon x + f_1(y)]}{\sin^2\chi}.$$

Funcțiile f_1 și f_2 se determină astfel ca deplasările să fie nule pe anumite axe de simetrie; pentru paraboloidul hiperbolic decupat pe generatoare, simetric față de bisectoare, se poate lua de exemplu $f_1 = f_2 = 0$, obținînd

$$w = \frac{R_{xy}}{2}\,\frac{A^3 + B^3}{A^3B^3}\,a^2xy\varepsilon.$$

În cadrul aproximației propuse, ele se scriu simplificat astfel

$$u = \varepsilon x, \quad v = \varepsilon y, \quad w = \varepsilon z. \tag{4.3}$$

Interpretarea fizică a acestui rezultat este simplă și arată că învelitoarea, la o creștere de temperatură, în dilatare tinde să-și mărească curburile, desfăcîndu-se, iar la o scădere de temperatură tinde să se aplatiseze.

5. Paraboloidul hiperbolic în formă de șea (fig. 3)

În acest caz, pentru a aduce marginile învelitorii printre liniile coordonate, vom opera schimbarea de variabile ce corespunde unei rotiri cu 45° a planului xy

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y).$$

Fig. 3

Se deduce ecuația

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\mathfrak{F} + i\,\frac{h}{a}\,\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\,\Delta\Delta\,\mathfrak{F} = 0, \tag{5.1}$$

pentru efortul complex $\mathfrak{F}$.

În tot restul calculului se va căuta o soluție care pe două din laturi să se reducă la serii Fourier. Luînd dezvoltarea în cos $\lambda_n\beta$ cu $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ pe celelalte două laturi vor fi îndeplinite condițiile de rezemare timpane. Astfel vom lua

$$\mathfrak{F} = \sum_0^\infty{}_n\, C_n \cos \lambda_n \beta f_n(\lambda_n \alpha),$$

deducînd șirul de ecuații diferențiale ordinare cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2 f_n}{d(\lambda_n\alpha)^2} + f_n + i\,\frac{h}{a}\,\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left(\frac{d^2}{d(\lambda_n\alpha)} - 1\right)^2 f_n = 0,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Acestora li se pot asocia ecuațiile caracteristice

$$\rho^2 + 1 + i\,\frac{h}{a}\,\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}(\rho^2 - 1)^2 = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

care prin notația $r = \rho^2$ se reduc la ecuația de gradul doi

$$r + 1 + i\,\frac{h}{a}\,\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}(r - 1)^2 = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Se observă că vom avea pentru ecuația caracteristică două rădăcini complexe $a_j + ib_j$ și două $-(a_j + ib_j)$.

Fiecare introduce o constantă arbitrară; se poate arăta cu ușurință că vom avea soluțiile

$$f_{n1j} = \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha + i \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha,$$

$$f_{n2j} = \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha - i \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha,$$

$$f_{n3j} = \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha + i \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha,$$

$$f_{n4j} = \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha - i \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha.$$

Separînd partea reală de cea imaginară în expresia lui $\mathfrak{E}$ vom deduce pe $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$. Astfel atribuind fiecărei soluții cîte un coeficient nedeterminat C_{lj}^n de exemplu în cazul în care avem solicitare și condiții de contur simetrice față de $o\beta$

$$\mathfrak{N} = \sum_1^N{}_n \cos \lambda_n \beta \left[\sum_1^2{}_j \left(C_{1j}^n \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha + \right. \right.$$

$$\left. \left. + C_{2j}^n \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha \right) \right],$$

$$\mathfrak{M} = - \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{h^2}{3}} \sum_1^N{}_n \cos \lambda_n \beta \left[\sum_1^2{}_j \left(C_{1j}^n \operatorname{sh} a_j \lambda_n \alpha \sin b_j \lambda_n \alpha - \right. \right.$$

$$\left. \left. - C_{2j}^n \operatorname{ch} a_j \lambda_n \alpha \cos b_j \lambda_n \alpha \right) \right].$$

Pentru marginea $\alpha = \alpha_0$ rezultă serii Fourier.

6. Paraboloidul hiperbolic decupat după generatoare (fig. 4)

Procedînd analog ca în cazul precedent, considerăm o soluție de forma

$$\mathfrak{E} = \sum_n{}_n C_n e^{i \lambda_n x} f_n (\lambda_n y), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$$

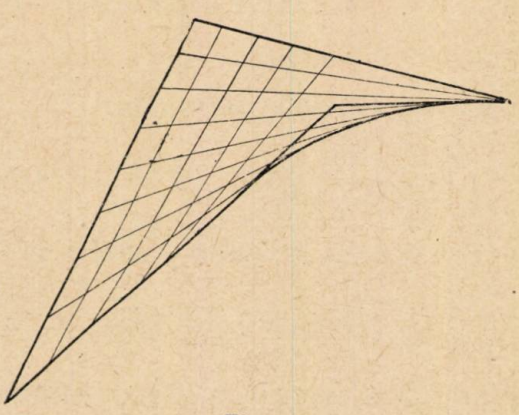


Fig. 4

Se deduce ecuația diferențială ordinară

$$\frac{df_n}{d\bar{y}} + \lambda_n^2 \frac{2a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)} \left(\frac{d^2}{d\bar{y}^2} - 1\right)\left(\frac{d^2}{d\bar{y}^2} f_n - f_n\right) = 0; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

unde $\bar{y} = \lambda_n y$. Ea este cu coeficienți constanți, fapt ce ne permite să considerăm că f_n este real. Pe de altă parte, ca și în cazul anterior, i se poate asocia o ecuație caracteristică

$$\rho + \lambda_n^2 \frac{2a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)} (\rho^2 - 1)(\rho^2 - 1) = 0; \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

care de data asta are însă rădăcinile conjugate două cîte două.

Soluțiile vor fi deci de forma

$$\mathfrak{E} = \sum_0^\infty{}_n C_n e^{+i\lambda_n x} e^{\lambda_n a y} \cos \lambda_n b_y$$

și altele în minus. Deducem

$$\mathfrak{N} = \sum C_n \cos \lambda_n x\, e^{\lambda_n a y} \cos \lambda_n b_y,$$

$$\mathfrak{M} = -h \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{1}{3}} \sum C_n \sin \lambda_n x\, e^{\lambda_n a y} \cos \lambda_n b_y.$$

Se observă că între $\mathfrak{N}$ și $\mathfrak{M}$ avem relațiile suplimentare *)

$$\mathfrak{M} = \frac{h}{\lambda_n} \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{1}{3}} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x},$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{1}{h\lambda_n} \sqrt{3\frac{1-\mu}{1+\mu}} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}$$

care ne permit să luăm pe baza formulelor (2.1) și (2.5)

$$\mathfrak{N}_x = -\frac{h}{2a\lambda_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\partial}{\partial_y} \Delta \mathfrak{N},$$

$$\mathfrak{N}_y = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}_x,$$

$$\mathfrak{N}_{xy} = \frac{1}{2a}\frac{1}{1+\mu} \Delta \mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{1+\mu} \mathfrak{M} + \frac{h}{6a\lambda_n(1+\mu)} \sqrt{3\frac{1-\mu}{1+\mu}} \Delta \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial_y}$$

$$\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_x$$

$$\mathfrak{M}_{xy} = -\frac{h^2}{6a(1+\mu)} \Delta \mathfrak{M}.$$

*) Pentru prima armonică

7. Stabilitatea învelitorilor subțiri în formă de paraboloid hiperbolic, cu generatoarele ortogonale

Calculul se va face în ipoteze analoge celor din lucrarea [4] considerate pentru flambajul plăcii plane și cilindrului circular drept. Ele sînt:

1. Se produc deplasări mari numai pe normala la suprafața mediană, astfel că nu se neglijează pătratele lui w, deplasarea pe normală, sau ale derivatelor sale în raport cu u și v și derivatele lor.

2. Se neglijează pătratele lui w sau ale derivatelor sale în raport cu însuși w.

În aceste ipoteze, sistemul de ecuații de echilibru se scrie în linii asimptotice, astfel *)

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{N}_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$2a\mathfrak{N}_{xy} - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) + \varphi = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + Q_y = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

unde

$$\varphi = \mathfrak{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\mathfrak{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y} + \mathfrak{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Pentru a obține sistemul de ecuații de continuitate a deformației, în aceste ipoteze, ne sînt necesare relațiile dintre deformații și deplasări. Astfel pentru

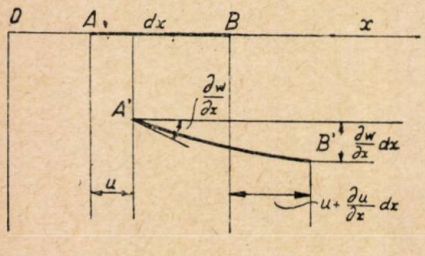


Fig. 5

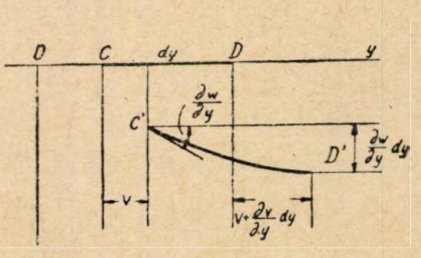


Fig. 6

deformația specifică de alungire, din figura 5 în care este arătat un element AB de linie asimptotică $y = \text{const.}$ înainte și după deformație, se deduce expresia

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

și analog pentru cealaltă se deduce din figura 6

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

*) În cazul omogen.

Din figura 7, în care se arată cum se deformează unghiul drept făcut de două linii asimtotice rezultă

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2aw + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Celelalte deformații de încovoiere, torsiune nu se modifică, deoarece în expresia lor intră ca parte principală w sau derivatele sale, față de care neglijăm totdeauna pătratele lui u, v și w, conform ipotezelor 1 și 2.

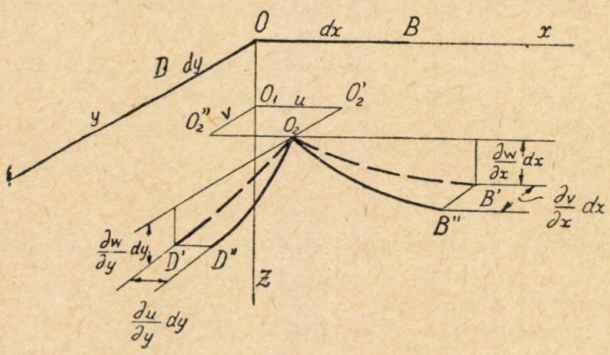


Fig. 7

Primele două ecuații de continuitate se scriu pornind doar de la deformații de încovoiere, ale căror expresii în funcție de deplasări nu se modifică; aceste ecuații își păstrează deci forma din cazul deformațiilor mici.

$$\frac{\partial (\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y)}{\partial x} - \frac{1}{1+\mu} Q_x = 0,$$

$$\frac{\partial (\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y)}{\partial y} - \frac{1}{1+\mu} Q_y = 0.$$

Cea de-a treia ecuație de continuitate se obține, pentru deformații mici, eliminînd deplasările între deformații de încovoiere și de alungire; în prezența lui w din deformațiile de încovoiere, pătratele sale cuprinse în deformațiile de alungire în cazul deformațiilor mari, vor fi neglijabile, astfel că final această ecuație nu se modifică. Vom putea lua deci

$$\mathfrak{M}_{xy} + a \frac{h^2}{6(1+\mu)} \Delta (\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y) = 0.$$

Pentru ca o ecuație să-și modifice aspectul, ea trebuie să conțină pe u, v și pătratele lui w, ceea ce nu se întîmplă la nici una din ecuațiile de continuitate. Singura ecuație care se modifică, este după cum am mai văzut cea de-a treia ecuație de echilibru.

Sistemul ecuațiilor de echilibru și de continuitate permite eliminarea tuturor eforturilor, în afară de unul singur — de exemplu $\mathfrak{M}_{xy}$. Transcriindu-l ulterior pe acesta în funcție de $\tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y}$, rezultă o ecuație neomogenă de flambaj.

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w + 12\frac{1-\mu^2}{h^2}a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{3}{2Eh^3}\Delta\Delta\varphi$$

Ea este perfect analogă aceleia ce se obține pentru cilindru în lucrarea [4].

8. Pierderea stabilității din cauza compresiunii uniforme

Solicitarea din compresiune uniformă apare în cazul unei creșteri uniforme de temperatură pe toată învelitoarea, în cazul în care reazemele suficient de rigide împiedică deplasarea învelitorii pe contur. Liberă, învelitoarea ar fi avut pe contur, așa cum am mai arătat, deplasările

$$u = \varepsilon x,\ v = \varepsilon y,\ w = \varepsilon z$$

împiedicînd realizarea lor, marginile impun învelitorii deplasările de contur

$$u = -\varepsilon x,\ v = -\varepsilon y,\ w = -\varepsilon z \text{ pe contur}$$

cărora le corespund în întreaga învelitoare, deplasările

$$u = -\varepsilon x,\ v = -\varepsilon y,\ w = -\varepsilon z$$

Cu acestea se deduc eforturile axiale

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = -N = -\frac{2Eh}{1-\mu^2}\varepsilon,$$

cu

$$\varepsilon = \alpha_t\,\Delta t^\circ$$

Efortul de lunecare care rezultă în acest caz, în cadrul aproximației inițiale, poate fi neglijat; în adevăr, el este

$$\mathfrak{M}_{xy} = \frac{2Eh}{1+\mu}\varepsilon a w = \frac{2Eh}{1+\mu}\varepsilon a^2 xy,$$

astfel că

$$\frac{\mathfrak{M}_{xy}}{\mathfrak{M}_x} \cong a^2 xy \leqslant a^2 l^2.$$

Vom putea lua deci pentru o învelitoare decupată pe generatoare drept ecuație de flambaj

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w + 12\frac{1-\mu^2}{h^2}a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{N}{D}\Delta\Delta\Delta w$$

Pentru o învelitoare articulată pe contur, se poate lua

$$w = \sin n_1\lambda_1 x \sin n_2\lambda_2 y, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{l_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{l_2}$$

Se observă că această soluție dă de-a lungul celor patru margini, deplasarea pe contur nulă și în același timp și momentul nul. În adevăr, deplasarea w pe normală și deformația de încovoiere $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ se anulează pentru $x = l_1$ sau $y = l_2$. Deplasările u și v nu se modifică esențial, în perioada flambajului, astfel că raționamentul se poate face chiar înainte de producerea lui; adăugînd soluției omogene, din cazul temperaturii, o soluție pentru care deplasările pe contur sînt egale și de sens contrar, final, deplasările u, v și w rezultă a fi nule. În timpul producerii flambajului, se modifică doar w, astfel că u și v rămîn nule. Cu alte cuvinte sînt îndeplinite toate cele patru condiții de margine cerute de teoria cu momente.

Soluția anterioară, introdusă în ecuația de flambaj dă condiția pentru $l_1 = l_2 = l$,

$$N = D\left(2\lambda^2 n^2 + \frac{3}{2}\frac{(1-\mu^2)}{h^2}\cdot\frac{a^2}{n^2\lambda^2}\right)$$

Efortul critic este valoarea minimă a acestei expresii

$$N_{cr} = 4D\lambda^2\mathfrak{N}_{cr}^2$$

în care

$$\mathfrak{N}_{cr} = \frac{1}{\lambda}\sqrt[4]{\frac{3}{4}\frac{a^2}{h^2}(1-\mu^2)}$$

Se observă că $\mathfrak{N}_{cr}$ face ca cei doi termeni din N să fie egali, primul fiind însă acela ce se obține în cazul flambajului plăcii plane din compresiune uniformă, placa avînd deschiderea pe ambele direcții $2l$, dar nu în prima poziție de flambaj care este caracterizată printr-o singură buclă, ci într-o poziție ulterioară, cu n_{cr} bucle. Deducem că valoarea lui N este de aproximativ $2n_{cr}$ ori mai mare decît în cazul plăcii plane ce se află în prima poziție de flambaj datorită compresiunii uniforme. Cum $n_{cr} = 3\ldots4\ldots5\ldots$ rezultă că eforturile critice vor fi $18\ldots50$ de ori mai mari, fapt ce pune în evidență excepționala stabilitate a învelitorilor în formă de paraboloid hiperbolic decupat pe generatoare.

Astfel, pentru o învelitoare cu deschiderile de 60 m cu grosimea de 5 cm, $a = 0{,}01\frac{1}{m}$ se deduce $n_{cr}\,cr = 6$ și deci $N_{cr} = 61$ kg/cm², ceea ce corespunde la o creștere de temperatură de 30 grade, în cazul unei rezemări perfect rigide.

Pentru învelitori în formă de șea, ecuația de flambaj se deduce prin transformarea de variabilă deja enunțată

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

Ea este

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w + 3.\frac{1-\mu^2}{h^2}a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2 w = -\frac{N}{D}\Delta\Delta\Delta w$$

Pentru o învelitoare articulată pe contur, putem lua

$$w = \cos n_1\lambda_1\alpha \cos n_2\lambda_2\beta, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2l_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{2l_2}$$

deducînd ca și în cazul anterior o condiție

$$N = D\left(A + 3a^2 \frac{1-\mu^2}{h^2} \frac{B^2}{A^3}\right),$$

în care

$$A = n_1^2\lambda_1^2 + n_2^2\lambda_2^2$$

$$B = n_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2$$

Efortul critic va fi dat de valorile întregi ale lui n_1 și n_2 care minimează expresia lui N; se mai observă că pentru ca w să fie nul pe contur, este necesar ca ele să fie impare. Se găsesc condițiile

$$n_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2 = 0$$

$$n_1^2\lambda_1^2 + n_2^2\lambda_2^2 = 0.$$

Acest sistem dă soluția banală $n_1 = n_2 = 0$ care nu corespunde unei stări de deformație mare, ci poziției premergătoare flambajului. Studiind însă alura suprafeței

$$N = N(n_1, n_2),$$

se poate observa că minimul printre valorile lui N date de n_1 și n_2 numere întregi impare, este realizat prin satisfacerea cea mai apropiată a celei de-a doua relații de condiție. Vom lua deci pentru $\lambda_2 > \lambda_1$

$n_1 = 1$

$n_2 =$ cel mai apropiat întreg impar de valoarea $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{l_2}{l_1}$.

În toate cazurile se poate remarca cu ușurință, că învelitoarea caută să flambeze astfel ca liniile nodale să formeze o rețea de pătrate, paralele cu laturile învelitorii, analog cu fenomenul ce se produce la învelitorile cilindrice, fiind verificat și experimental în acest caz.

Exemple. 1. Pentru un paraboloid în șea cu deschiderile de 40 m și 8 m, grosimea de 7 cm și $a = 0{,}015 \frac{1}{\text{m}}$, rezultă efortul critic $\sigma_{cr} = 27$ kg/cm².

2. Pentru un paraboloid în șa cu grosimea de 5 cm, deschiderile de 80 m și 16 m curbura $a = 0{,}008$ se deduce efortul critic $\sigma_{cr} = 7$ kg/cm².

În ceea ce privește efectul temperaturii, desigur că vom lua în calcul numai constrîngerea exercitată de sistemul de margine asupra învelitorii; acesta nu este niciodată perfect flexibil, ca să permită total dilatarea învelitorii dar nici perfect rigid, așa cum a fost presupus în exemplele anterioare. În realitate reazemele au o rigiditate care poate fi apreciată de către proiectant astfel că se poate cunoaște fracțiunea din creșterea de temperatură, la care trebuie calculată învelitoarea. Într-o primă aproximație, suficient de bună, ea poate fi calculată astfel:

Să presupunem că reazemele cedează cu

$$\left(1-\frac{1}{f}\right)k\,\varepsilon,$$

k fiind un coeficient ce depinde de deschiderile învelitorii, iar f este un coeficient de flexibilitate relativă a reazemelor față de învelitoare. Energia acumulată de ele va fi de forma

$$E_r=\left(1-\frac{1}{f}\right)^2\varepsilon^2\,e_r$$

Pentru învelitoare va rămîne drept constrîngere $\frac{1}{f}\,k\,\varepsilon$, energia acumulată de ea fiind de forma

$$E_i=\frac{1}{f^2}\,\varepsilon^2\,e_i$$

Energia acumulată de întregul sistem rezultă a fi

$$E_t=\varepsilon^2\left[\left(1-\frac{1}{f}\right)^2 e_r+\frac{1}{f^2}\,e_i\right].$$

Cantitatea f trebuie să o minimeze, astfel că putem deduce

$$f=\frac{e_r+e_i}{e_r}.$$

Învelitoarea se va calcula la o creștere fictivă de temperatură $\Delta t_f^0=\frac{1}{f}\,\Delta t^0$. Coeficientul f în cazul unei flexibilități infinite a reazemelor are valoarea 0, iar pentru reazeme perfect rigide, valoarea 1. Pentru condiții normale de rezemare, f este de ordinul a 50—100, ceea ce arată că în afară de rezemări excepțional de rigide, nu luăm în considerare posibilitatea pierderii stabilității din pricina temperaturii.

9. Pierderea stabilității datorită presiunii uniforme

În paragraful anterior, am arătat că în cazul compresiunii uniforme cauzată de temperatură uniformă pierderea stabilității nu se poate produce decît pentru reazeme foarte rigide. Ceea ce efectiv poate produce flambajul este sarcina suportată de învelitoare, dată de greutatea proprie și zăpadă, care pentru învelitorile ce se încadrează în aproximația caracteristică acestei lucrări poate fi asimilată cu presiunea uniformă.

Este de remarcat că în acest caz sarcina fiind orientată pe normală, ipoteza deformațiilor mari pe normală în care se face acest calcul, este mult mai apropiată de realitate decît în cazul anterior sau decît în cazul calculului făcut în lucrarea [4] pentru învelitorile cilindrice, pentru care cauza producătoare a flambajului este de orientare tangențială.

Înainte de producerea flambajului, o soluție riguroasă a sistemului de ecuații de echilibru și de continuitate a deformației, în cazul unei învelitori referită la generatoare este

$$\mathfrak{N}_{xy} = -\frac{p}{2a}$$

toate celelalte eforturi fiind nule. Presupunînd ca în lucrarea [4] că eforturile axiale ce lucrează în lungul riglelor învelitorii nu se modifică mult în momentul producerii flambajului, vom lua în ecuația de flambaj

$$\varphi = -\frac{p}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Aceasta nu este o ipoteză suplimentară, ci se reduce la aplicarea ipotezei 2 (punctul 6) prin renunțarea la pătratele lui w în raport cu w, în ecuația a treia de echilibru.

Înainte de producerea flambajului, soluția particulară dată verifică următoarele condiții de contur: deplasările tangențiale nule — în tot cuprinsul învelitorii — iar deplasarea pe normală w constantă de unde rezultă că momentele încovoietoare vor fi și ele nule pe toată suprafața. Deplasările tangențiale fiind nule pe două direcții ortogonale, ele vor fi nule pe oricare direcție.

După producerea flambajului, conform ipotezelor de calcul, deplasările vor rămîne nule în planul tangent, modificîndu-se doar deplasarea pe normală w.

Ecuația de flambaj este

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

Pentru cazul paraboloidului în șea, cu ajutorul schimbării de coordonate

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w + 3\frac{1-\mu^2}{h^2}a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)^2 w = -\frac{p}{2aD}\Delta\Delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)$$

se deduce ecuația

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w + 12\frac{1-\mu^2}{h^2}a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} = -\frac{p}{Da}\Delta\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$$

Luînd pentru w expresia

$$w = \cos n_1 \lambda_1 \alpha \cos n_2 \lambda_2 \beta, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{l_1}, \lambda_2 = \frac{\pi}{l_2}$$

verificăm următoarele condiții de margine: deplasarea nulă pe contur, deoarece deplasarea tangențială este nulă și cea normală rezultă tot nulă pentru $\alpha = l_1$ sau $\beta = l_2$; deformațiile de încovoiere $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ și deci și momentele încovoietoare vor fi nule pentru $\alpha = l_1$ și $\beta = l_2$. Cu alte cuvinte sînt satisfăcute toate cele patru condiții de contur cerute de teoria cu momente în cazul învelitorii articulate de-a lungul marginilor.

Se deduce condiția

$$p = 2aD\left[\Omega + 3\frac{1-\mu^2}{h^2}a^2\frac{1}{\Omega}\right]$$

în care

$$\Omega = \frac{(n_1^2\lambda_1^2 + n_2^2\lambda_2^2)^2}{n_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2}$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}$$

Valoarea efortului critic este valoarea minimă a acestei expresii, valoare ce se obține luînd Ω soluție a ecuației $\frac{dp}{d\Omega} = 0$ și anume $\Omega = \frac{a}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}$.

Se observă fenomenul foarte interesant, că această sarcină critică nu depinde de deschiderile învelitorii, ci doar de grosime și curbură; *) ea este

$$p_{cr} = \frac{8}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}Ea^2h^2.$$

Din aceste motive, sarcina critică nu se poate pune în funcție de deschiderea învelitorii, decît constructiv, datorită faptului că în general pentru anumite deschideri se iau raze de curbură constructiv caracteristice lor. În acest sens, este alcătuit tabloul următor în care sînt dați coeficienții de siguranță ai sarcinii de exploatare față de sarcina critică de flambaj.

Tablou

Sarcina exploatatoare		250 kg/m²	300 kg/m²	350 kg/m²	400 kg/m²
Grosimea		5 cm	7 cm	10 cm	12 cm
l	$2a$				
100	0,007	0,14	0,28	0,41	0,52
90	0,0085	0,29	0,57	1,16	1,67
80	0,010	0,32	0,62	1,28	1,85
70	0,014	0,78	1,52	3,10	4,50
60	0,0175	1,20	2,35	4,80	—
50	0,0225	2,00	3,25	5,5	—

10. Extindere pentru învelitori subțiri în formă de paraboloid hiperbolic cu generatoare oblice

În general sînt mai întrebuințate învelitorile în formă de paraboloid hiperbolic cu generatoare oblice, deoarece ele au o stabilitate mai bună decît cele cu generatoare ortogonale. În acest caz este mai indicat să alegem ca linii coordo-

*) Datorită ipotezelor 1 și 2; valabil doar cînd ambele deschideri sînt suficient de mari.

nate, familiile de parabole de translație ce se obțin luînd în ecuația suprafeței mediane în coordonate carteziene

$$z = \frac{1}{2}(b\alpha^2 - c\beta^2) \tag{10.1}$$

$x = \text{const}$, sau $y = \text{const}$. În acest sistem de coordonate, prima formă fundamentală este

$$ds^2 = (1 = b^2\alpha^2)\, d\alpha^2 - bcd\alpha d\beta + (1 + c^2\beta^2)\, d\beta^2$$

Aceste linii coordonate nu sînt ortogonale, sinusul unghiului format de ele fiind

$$\sin \chi = \frac{\sqrt{1 + b^2\alpha^2 + c^2\beta^2}}{\sqrt{1 + b^2\alpha^2}\sqrt{1 + c^2\beta^2}}$$

Pentru cele ce urmează, vom neglija cantitatea

$$(b^2 + c^2)\, l^2$$

în raport cu unitatea, analog aproximației făcute la punctul 2; cu aceasta vom putea considera liniile coordonate ca fiind ortogonale, curbura $\frac{1}{R_{\alpha\beta}} = 0$. Aproximativ, prima formă fundamentală se va putea scrie astfel

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 .$$

În aproximația enunțată, vom lua pentru curburi expresiile

$$\frac{1}{R_\alpha} = b , \quad \frac{1}{R_\beta} = - c.$$

Pe baza aceleiași aproximații geometrice, se deduce pe o cale mai puțin exactă, în lucrarea [1] o ecuație rezolvantă; aceasta datorită faptului că se consideră $\mu = 0$, neglijîndu-se astfel total fenomenul contracției transversale și în plus ecuațiile continuității deformației, sînt considerate într-o formă mai aproximativă.

Ecuațiile de proiecție și de momente, în aproximația enunțată, prin particularizarea celor din lucrarea [1], se scriu astfel

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - bQ_\alpha = 0 \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{M}_\beta}{\partial_\beta} + cQ_\beta = 0$$

$$[b\mathfrak{M}_\alpha - c\mathfrak{M}_\beta] + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} = 0; \tag{10.2}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + Q_\beta = 0 \qquad \frac{\partial \mathfrak{M}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial 3} - Q_\alpha = 0 .$$

Acestora li se poate asocia sistemul celor trei ecuații de continuitate a deformației, în eforturi

$$\frac{\partial(\mathfrak{M}_\alpha+\mathfrak{M}_\beta)}{\partial x}-(1+\mu)Q_\alpha+\frac{h^2}{3}b\frac{\partial(\mathfrak{N}_\alpha+\mathfrak{N}_\beta)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{M}_\alpha+\mathfrak{M}_\beta)}{\partial\beta}-(1+\mu)Q_\beta+\frac{h^2}{3}c\frac{\partial(\mathfrak{N}_\alpha+\mathfrak{N}_\beta)}{\partial\beta}=0 \qquad (10.3)$$

$$(b-c)(\mathfrak{M}_\alpha+\mathfrak{M}_\beta)-(1+\mu)\cdot[b\mathfrak{M}_\alpha-c\mathfrak{M}_\beta]-\frac{h^2}{3}\Delta(\mathfrak{N}_\alpha+\mathfrak{N}_\beta)=0.$$

Primele două ecuații (10.2) dau eforturile de tăiere în funcție de $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$; cea de-a treia, pe cele de încovoiere. Se obține astfel

$$Q_\alpha=\frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}+\frac{h^2}{3}b\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial x}\right],\quad Q_y=\frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\beta}-\frac{h^2}{3}c\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\beta}\right]$$

$$\mathfrak{N}_\alpha=\frac{1}{b+c}\left[c\mathfrak{N}-\frac{1}{1+\mu}\Delta\mathfrak{M}\right],$$

$$\mathfrak{N}_\beta=\frac{1}{b+c}\left[b\mathfrak{N}+\frac{1}{1+\mu}\Delta\mathfrak{M}\right].$$

Ecuația a treia de echilibru dă eforturile axiale în funcție de $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{M}_\alpha=\frac{1}{b+c}\left[+(b+\mu c)\mathfrak{M}-\frac{h^2}{3}\Delta\mathfrak{N}\right]\frac{1}{1+\mu}$$

$$\mathfrak{M}_\beta=\frac{1}{b+c}\left[-(c+\mu b)\mathfrak{M}+\frac{h^2}{3}\Delta\mathfrak{N}\right]\frac{1}{1+\mu}$$

Prin eliminarea efortului de lunecare între primele două condiții de echilibru, se deduce o primă ecuație în $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$ care marchează dualitatea eforturilor de lunecare

$$c\frac{\partial^2\mathfrak{N}}{\partial\alpha^2}-b\frac{\partial^2\mathfrak{N}}{\partial\beta^2}-\frac{1}{1+\mu}\left[\Delta\Delta\mathfrak{M}+(b+c)\left(b\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\alpha^2}-c\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\beta^2}\right)\right]=0.$$

Eliminînd între primele două ecuații de momente eforturile de torsiune, deducem o a doua ecuație în $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$ care marchează condiția de dualitate a eforturilor de torsiune

$$c\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\alpha^2}-b\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\beta^2}+\frac{h^2}{3(1-\mu)}\left[\Delta\Delta\mathfrak{N}+(b+c)\left(b\frac{\partial^2\mathfrak{N}}{\partial\alpha^2}-c\frac{\partial^2\mathfrak{N}}{\partial\beta^2}\right)\right]=0.$$

Luînd drept necunoscută nouă efortul complex $\mathfrak{S}=\mathfrak{N}-i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{3}{h^2}}\,\mathfrak{M}$, adunînd prima ecuație la cea de-a doua amplificată cu $-i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{3}{h^2}}$ rezultă

o singură ecuație diferențială de ordinul patru, cu coeficienți complecși constanți

$$c\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \alpha^2} - b\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \beta^2} - ih\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left[\Delta\Delta \mathfrak{E} + (b+c)\left(b\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \alpha^2} - c\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \beta^2}\right)\right] = 0 \quad (10.4)$$

Ca și în cazul particular al paraboloidului hiperbolic cu generatoare ortogonale, vom apela la o soluție de forma

$$\mathfrak{E} = \sum C_n e^{+i\lambda_n \alpha} f_n(\lambda_n \beta),$$

soluție care pe două laturi se reduce la o serie Fourier simplă; rezultă ecuația caracteristică de gradul patru

$$c + b\rho^2 + ih\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left[\lambda_n^2(\rho^2-1)(\rho^2-1) - (b+c)(b+c\rho^2)\right] = 0$$

care prin schimbarea de variabilă $\rho^2 = r$, se reduce la o ecuație de gradul doi cu coeficienți complecși

$$c + br + i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left[\lambda_n^2(r-1)^2 - (b+c)(b+cr)\right] = 0$$

Cunoscînd soluția ecuației (10.4), eforturile se deduc imediat prin relațiile ce le leagă de $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$ expuse anterior. Pentru cazul că învelitoarea este referită la generatoare, printr-o schimbare de variabilă care să facă trecerea de la x la y la generatoare, aplicată ecuației (10.4), rezultă o ecuație analogă pentru acest caz.

Stabilitatea se tratează în același mod cum a fost tratată în cazul generatoarelor ortogonale. Se deduce că în ipotezele 1 și 2, ecuațiile de continuitate a deformației rămîn neschimbate, din ecuațiile de echilibru modificîndu-se doar cea de-a treia, deoarece echilibrul se face pe suprafața deformată.

Ca și în cazul particular anterior, ecuația de flambaj ce rezultă este ecuația obișnuită pentru deformări mici, avînd însă parte dreaptă, dată de φ; pentru suprafața referită la linii asimptotice, φ are tot vechea expresie

$$\varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\mathfrak{N}_x + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\mathfrak{N}_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\mathfrak{N}_y$$

În expresia lui φ în cazul solicitării din presiune uniformă, vom lua analog $-p \sin \chi R_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$ datorită acelorași considerente. Revenind la liniile coordonate α și β, se deduce ecuația

$$L(w) = \frac{1}{D}\frac{p}{(b+c)^2}\Delta\Delta\left(b\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - c\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)$$

Lw fiind operatorul ecuației (10.4). Făcînd în ea $b = c = a$ se rededuce ecuația analogă pentru cazul curburilor egale. De altfel modul ei de rezolvare nu se deosebește cu nimic de aceasta.

Rezultă sarcina critică

$$p_{cr} = \frac{2}{\sqrt{3}}E(b+c)^2h^2,$$

care arată că mărind curbura pe o direcție, sarcina critică poate fi amplificată sensibil.

Dacă în ecuație păstrăm pe φ pentru cazul general, luînd $b = 0$ și $c = \frac{1}{R}$ deducem ecuațiile deja cunoscute pentru cilindru circular drept, de flambaj, așa cum au fost deduse în lucrarea [4].

Primită la redacție la 29 iunie 1955.

ТОНКИЕ КРОВЛИ В ВИДЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье автор рассматривает тонкие кровли, имеющие форму гиперболического параболоида, с учетом моментов и срезывающих сил. Уравнения выведены с допущением известной и поддающейся контролю ошибки по сравнению с точными уравнениями упругости тонких кровель.

При помощи этих уравнений даются решения для двух типов кровель, имеющих форму гиперболического параболоида:

а) в виде седла;

б) в виде гиперболического параболоида разрезанного по образующей.

В первой части работы дается также решение для напряжения при равномерной температуре.

Во второй части рассматривается устойчивость этих кровель к нагрузке при равномерной температуре и давлении. Определяюся напряжения и критические нагрузки в этих двух случаях. Указывается на то, что действие температуры должно приниматься во внимание только при чрезмерной жесткости опор, когда нагрузка вызывает продольный изгиб и остается только равномерное давление, которое приблизительно соответствует нагрузке от собственного веса и от снега.

COUVERTURES MINCES EN FORME DE PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur étudie les couvertures minces en forme de paraboloïde hyperbolique, en considérant les moments et les efforts tranchants. Les équations sont établies en admettant une erreur connue et contrôlable, par rapport aux équations exactes de l'élasticité des couvertures minces.

A l'aide de ces équations on donne des solutions pour deux types de couvertures en forme de paraboloïde hyperbolique:

a) la selle;

b) le paraboloïde hyperbolique découpé suivant les génératrices.

En sus, la solution pour la sollicitation à une temperature uniforme est donnée dans la première partie de la Note.

L'objet de la seconde partie est l'étude de la stabilité de ces couvertures dans le cas de la solicitation à des température et pression uniformes; on a déduit les efforts et les charges critiques pour ces deux sollicitations. On montre que l'effet de la température ne doit être considéré que pour le cas d'une rigidité excessive des appuis, la sollicitation qui produit le flambage se réduisant à la pression uniforme. Elle donne, avec une approximation par excès, la sollicitation due au poids propre et à la neige.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Hruban, *Biegetheorie der translation-Flächen*. Acta Technica, 1953, t. VII, fasc. 3—4.
2. A. L. Goldenweizer, *Teoria uprughih tonkih okolicek*. Gostehizdat, Moscova, 1953.
3. V. V. Novojilev, *Teoria tonkih obolicek*. Sudpromghiz, Moscova-Leningrad, 1951.
4. N. Timoschenko, *Théorie de la stabilité élastique*. Ch. B. Béranger, Paris-Liège, 1947.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

STUDII ASUPRA UNOR CARACTERISTICI ALE STRATURILOR OBŢINUTE PRIN ELECTROMETALIZARE

DE

V. MARCU, N. ZELINGHER şi P. FREUND

Metalizarea prin pulverizare, apărută acum vreo 35 de ani, s-a dezvoltat mereu cu aplicaţii tot mai întinse, în diverse domenii:

— Recondiţionarea organelor de maşini, ajunse la limită de uzură, sau a celor cu defecte de turnare sau prelucrare.

— Protecţia suprafeţelor metalice contra coroziunii.

— Tratamente mecanice de suprafaţă, ca de exemplu obţinerea de oţeluri carbon cu calităţi superioare prin acoperirea cu aluminiu.

— Realizarea de piese prin pseudoaliaje, cum ar fi cuzineţii cu plumb-aluminiu.

Recondiţionarea organelor de maşini, ajunse sub cota nominală de funcţionare, constituie una din importantele aplicaţii ale metalizării prin pulverizare. În U.R.S.S., s-au obţinut rezultate remarcabile, în special în recondiţionarea arborilor cotiţi de tractoare.

În R.P.R., problema recondiţionării prin metalizare a organelor de maşini este considerată ca una din soluţiile adecvate pentru repunerea în serviciu a unui mare număr de arbori cotiţi de la tractoarele I.A.R., care au ajuns de la cota nominală a fusurilor de 75 mm, la 72 mm, cotă sub care prevederile oficiale opresc utilizarea lor.

Problema folosirii electrometalizării ca metodă de recondiţionare a pieselor uzate, este astăzi cercetată la noi în ţară de mai multe colective (I.M.A., I.C.M.E.A., Direcţia centrelor mecanice din Ministerul Agriculturii prin Centrul mecanic Ciulniţa etc.).

În articolul de faţă sînt redate o serie de rezultate experimentale obţinute de cercetătorii Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R., referitor la calităţile fizico-mecanice ale stratului obţinut prin electrometalizare, cu materiale fabricate în ţară.

Instalaţia utilizată este compusă din:

1. Aparatul de electrometalizare EM 3, modificat de colectivul I.M.A.

2. Instalaţia de aer comprimat (motocompresor tip Máthyás Rákossi, rezervor de aer comprimat cu o capacitate de 3,5 m^3, şi un filtru de aer).

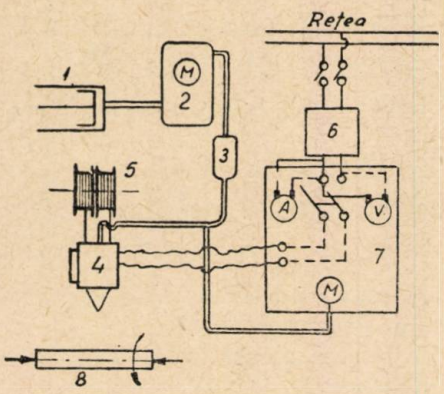
3. Transformatorul de sudură UNIFA, de 150 A.

4. Tabloul de comandă (întrerupător, ampermetru, voltmetru, manometru).

Schiţa instalaţiei este reprezentată în figura 1.

Aparatul de electrometalizare tip EM 3, cu care s-au început experienţele a prezentat numeroase deficienţe, semnalate de altfel şi în literatura tehnică sovietică, din care citãm:

« Exploatarea aparatului EM 3, la o serie de întreprinderi, a arătat o insuficientă siguranţă în funcţionarea capului de pulverizare al aparatului » [1] *).



A. Ampermetru
V. Voltmetru
M. Manometru
1. Motocompresor
2. Rezervor de aer
3. Filtru
4. Electrometalizator
5. Bobine cu sîrmă
6. Transformator
7. Tablou de comandă
8. Piesa de metalizat

Fig. 1

Pentru remedierea acestor deficienţe, s-au făcut diverse încercări din care menţionăm:

— Înlocuirea diuzei de pulverizare, construită iniţial din oţel, cu o diuză din material ceramic sau textolit. Rezultatele obţinute nu au fost satisfăcătoare.

— Schimbarea rolelor pentru avansul sîrmei.

După o altă serie de experienţe variate, pentru remedierea inconvenientelor, s-a trecut la modificarea aparatului iniţial, în genul electrometalizatorului sovietic perfecţionat EM 3 a, cu următoarele perfecţionări:

— Tubul de aducere al aerului comprimat are o diuză cu posibilitate de reglare a distanţei de la aceasta pînă la punctul de încrucişare a sîrmelor.

— Posibilitatea de adaptare a diuzelor cu diferite diametre, ceea ce permite o pulverizare optimă.

Aceste realizări au impus modificări la carcasa aparatului şi a dispozitivului de antrenare al sîrmelor.

S-a păstrat turbina cu aer care prezintă avantajul unei variaţii continue a vitezei de avans a sîrmelor între valorile de 1—3 m/min.

În urma experienţelor făcute, s-a constatat o siguranţă bună în funcţionarea aparatului, ceea ce ne permite recomandarea acestuia pentru utilizarea în industrie **).

*) p. 30.

**) Modificările aparatului au fost executate de tehnicianul A. Luţescu, sub îndrumarea colectivului.

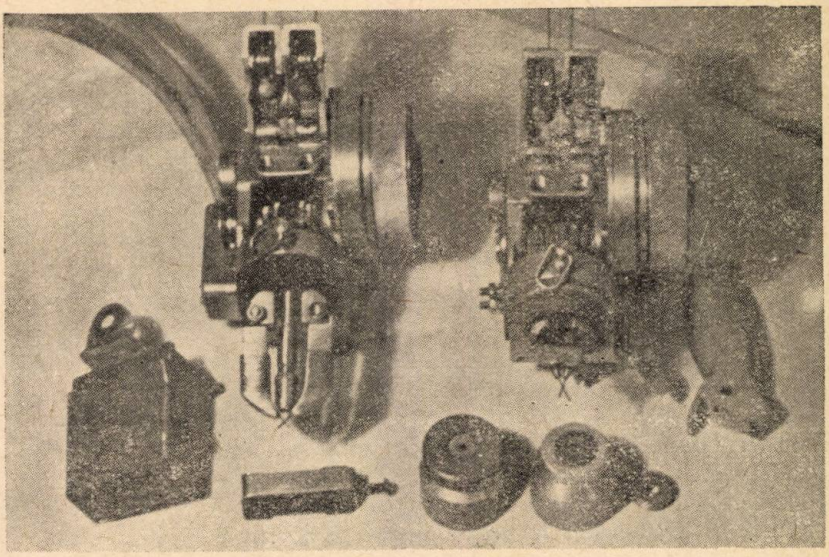


Fig. 2*a*

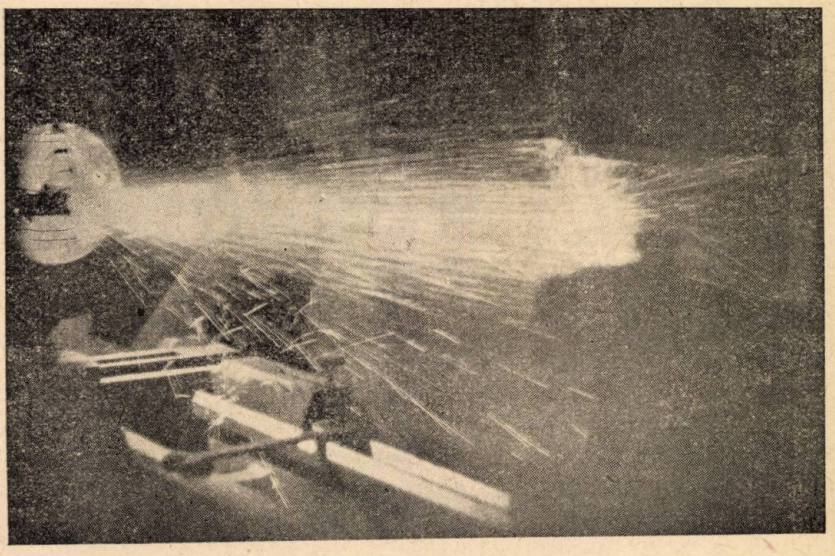


Fig. 2*b*

În figura 2*a* se arată aparatul inițial (dreapta) și cel modificat (stînga), iar în figura 2*b* funcționarea acestuia.

Randamentul aparatului modificat, adică raportul dintre greutatea materialului depus și cel consumat la metalizarea unui fus de 75 mm diametru, a fost de 0,76, pentru parametrii de metalizare expuși în paragraful următor.

Prin productivitatea aparatului înțelegem greutatea materialului pulverizat în unitatea de timp. Astfel, pentru o viteză de avans de 3 m/min, productivitatea aparatului modificat este de 2,21 kg/h, pentru sîrma cu diametrul de 1 mm și de 5 kg/h pentru sîrma cu diametrul de 1,5 mm. Această valoare este superioară productivității unui aparat de aceeași clasă, LK-U (2,5—3 kg/h).

STUDIUL PARAMETRILOR FIZICO-MECANICI AI STRATULUI METALIZAT

Experiențele s-au executat cu următoarele date caracteristice ale instalației, care s-au dovedit a fi optime:

Presiunea aerului comprimat	4,5—5 at
Diametrul diuzei de aer	6 mm
Distanța dintre diuză și piesă	80—100 mm
Viteza de avans a sîrmelor, aprox.	3 m/min
Intensitatea curentului la viteza de avans a sîrmelor de 3 m/min	100 A
Tensiunea de lucru	50 V

CERCETĂRI EXPERIMENTALE

Cercetările experimentale întreprinse au avut următoarele obiective:

— Determinarea calităților fizice, mecanice și chimice ale stratului obținut prin metalizare.

— Stabilirea parametrilor electrici ai procesului de electrometalizare, în funcție de viteza de avans, diametrul și materialul sîrmei.

— Determinarea analitică și experimentală a aderenței stratului metalizat.

— Cunoașterea rezistenței la oboseală a pieselor metalizate și a stratului metalizat.

Colectivul a utilizat ca material de aport, pentru pulverizare, sîrmă de oțel STAS 3685—53, cu diametrul de 1 mm și un conținut de carbon de 0,71%.

Rezultatele obținute au fost următoarele:

1. CALITĂȚI FIZICE

a. Greutate specifică

Sîrma de aport	7,81 g/cm^3
Stratul metalizat	6,3—6,7 »

b. Porozitatea stratului metalizat

Cuprinsă între 10,5—17,1%

c. Granulația

Diametrele particulelor de oțel pulverizat sînt cuprinse în tabloul de mai jos

Tablou

Diametrele particulelor în microni	Procente în greutate %
0— 5	3,7
6— 15	8
16— 21	18
22— 40	14,2
41— 60	10
61— 75	8
76— 90	7,4
91—100	5,4
101—120	4,6
121—150	2,7
151—200	2,6
201—300	7,4
peste 300	8

Din acest tablou rezultă că circa 50% în greutate din pulberea metalică are o granulație cuprinsă între 5—60 μ. Trasînd o diagramă cu valorile de mai sus găsim (fig. 3) curba granulometrică a pulberii metalice.

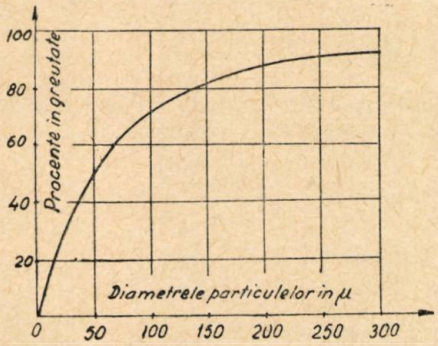


Fig. 3

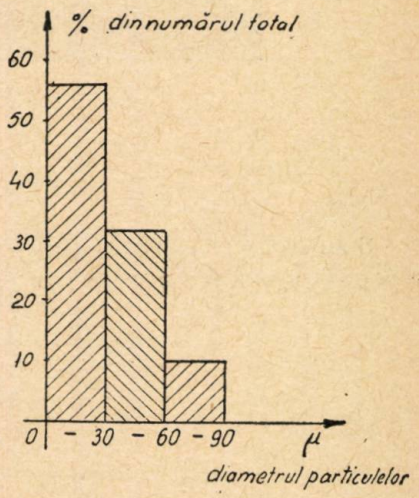


Fig. 4

S-a determinat și procentul numeric al particulelor de diferite diametre, întocmindu-se diagrama indicată în figura 4.

Forma granulelor este sferică, după cum se constată din fotografia reprodusă în figura 5.

d. **Coeficientul mediu de dilatare liniară, între 20°—100°C**

A fost găsit de aproximativ $10 \times 10^{-6}/°C$, comparabil cu cel al fontei.

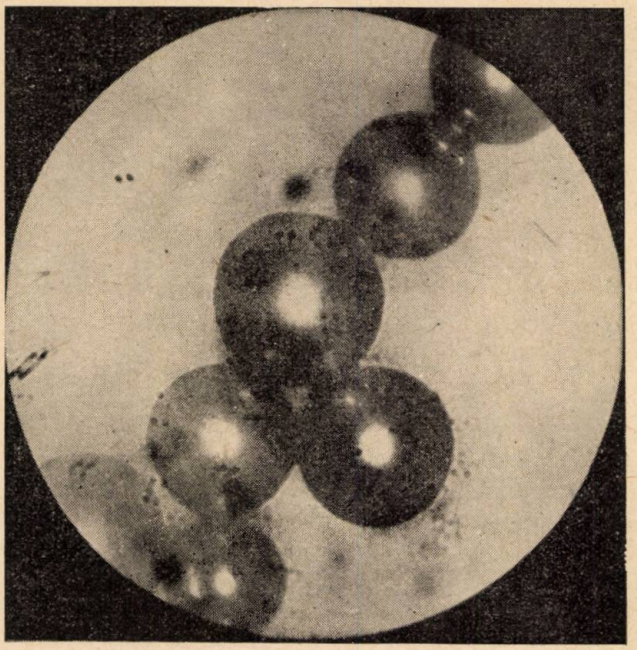


Fig. 5

2. CALITĂȚI MECANICE

S-au realizat în matriță epruvete din pulbere metalică, care au fost supuse la diverse încercări de rezistență, obținîndu-se următoarele rezultate:

a. **Rezistența de rupere la întindere**

$$\sigma_{rt} = 12 - 18 \text{ kgf/mm}^2$$

b. **Rezistența de rupere la compresiune**

$$\sigma_{rc} = 60 \text{ kgf/mm}^2$$

c. **Modulul de elasticitate longitudinal**

$$E = 6\,000 \text{ kgf/mm}^2$$

d. **Alungirea la rupere**

$$\delta = 1\%$$

e. **Duritatea Brinell**

$$H_B \ldots 300-330 \text{ kgf/mm}^2$$

În figura 6, este redată curba caracteristică la întindere a unei epruvete din material pulverizat.

Aceste caracteristici mecanice arată că stratul metalizat se comportă ca o fontă obișnuită (deși are numai 0,38% carbon), cu excepția durității care este

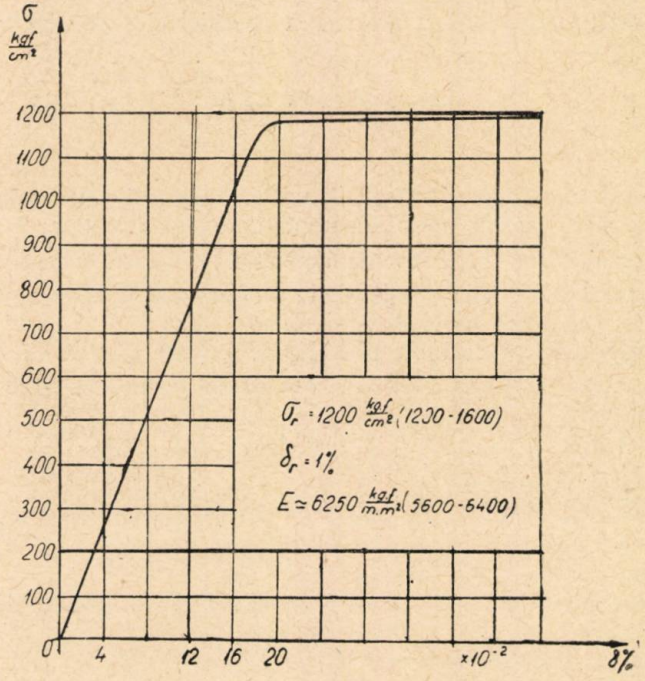


Fig. 6

de circa două ori mai mare, asigurîndu-se astfel o rezistență bună la uzură. La creșterea acestei rezistențe contribuie și porozitatea stratului metalizat care favorizează reținerea uleiului.

3. CONȚINUTUL DE CARBON

Sîrma utilizată, de tipul STAS 3685—53, avea un procent de carbon de 0,71%. După metalizare, s-a găsit în stratul metalizat un procent de carbon de aproximativ 0,38%, ceea ce reprezintă o scădere de 46% în procentul de carbon.

Această constatare confirmă necesitatea de a utiliza o sîrmă cu procent cît mai mare de carbon pentru electrometalizare, spre a mări cît mai mult duritatea stratului metalizat.

4. PARAMETRII ELECTRICI AI METALIZĂRII

Făcînd un bilanţ energetic al diferitelor forme de energii care intervin în procesul de metalizare, constatăm că energia electrică consumată se împarte în următoarele părţi:

a) Energia calorică necesară topirii sîrmelor.

b) Energia calorică consumată pentru încălzirea conului de aer şi diverse pierderi în circuitul electric.

c) Energia consumată pentru acţionarea motorului de avans al sîrmei.

Din aceste trei energii, în cazul aparatelor de electrometalizare, la care avansul sîrmei se face prin intermediul unei turbine, rămîn numai primele două forme ale energiei electrice consumate.

Aplicînd relaţia relativă la conservarea energiei electrice pe baza celor de mai sus, avem

$$E - Q_t - Q_p = 0, \tag{1}$$

unde

E — reprezintă energia electrică, în unităţi calorice, consumată de la reţea;
Q_t — reprezintă căldura necesară pentru topirea sîrmelor;
Q_p — reprezintă căldura consumată pentru încălzirea conului de aer, care îmbracă particulele din jetul de pulbere metalică, precum şi căldura corespunzătoare diverselor pierderi.

Prin urmărirea procesului de pulverizare putem afirma că atît Q_t cît şi Q_p depind de viteza de avans a sîrmei, ceea ce ne permite să scriem

$$Q_t = nlAQ_0, \tag{2}$$

unde

n — este numărul firelor de sîrmă cu care se alimentează aparatul;
l — este lungimea sîrmei topite în unitatea de timp;
A — secţiunea firului de sîrmă;
Q_0 — cantitatea de căldură necesară pentru topirea unităţii de volum din material.

Însemnînd cu φ raportul dintre Q_p şi Q_t putem scrie

$$Q_p = \varphi Q_t \tag{3}$$

Coeficientul φ depinde de presiunea aerului comprimat şi de secţiunea diuzei de aer.

Energia electrică absorbită din reţea, va fi

$$E - kUIt = kRI^2t, \tag{4}$$

unde

k — 0,24;
U — tensiunea de alimentare în volţi;
I — intensitatea curentului de alimentare în amperi;
t — timpul în secunde;
R — rezistenţa ohmică.

Derivînd relația (1) în raport cu timpul, rezultă

$$\frac{dE}{dt} - \frac{dQ_t}{dt} - \frac{dQ_p}{dt} = 0.$$

Ținînd seama de relațiile (2), (3) și (4), putem scrie

$$kRI^2 - (1 + \varphi)\, nAQ_0 v = 0,$$

în care v este viteza de avans a sîrmei.

Rezultă

$$I^2 = \frac{(1 + \varphi)\, nAQ_0 v}{kR}.$$

Ținînd seama de valoarea secțiunii A în funcție de diametrul sîrmei d, rezultă relația finală

$$I = d\sqrt{\frac{(1 + \varphi)\, nQ_0 v\pi}{4kR}} \tag{5}$$

Din această relație rezultă că intensitatea curentului pentru o viteză constantă de avans a sîrmei este o funcție liniară în raport cu diametrul acesteia, iar în cazul cînd viteza de avans variază, pentru un diametru constant, avem o variație parabolică pentru intensitatea I.

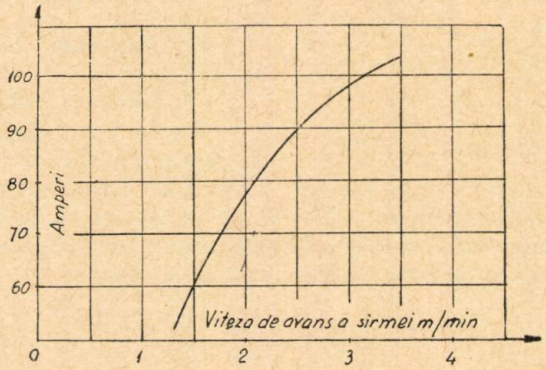


Fig. 7

În cazul aparatului de electrometalizare utilizat avem $n = 2$.

Relația (5) devine

$$I = 2{,}56\, dK_m \sqrt{v}, \tag{6}$$

unde

$$K_m = \sqrt{\frac{(1 + \varphi)\, Q_0}{R}}$$

Constanta K_m cuprinzînd valorile Q_0, φ și R, depinde de specificul instalației. În cazul aparatului utilizat pentru o sîrmă de oțel, valoarea lui K_m este

cuprinsă între 1 550—1 700 dacă considerăm pentru Q_0 valoarea $2{,}24 \times 10^6$ kilocalorii pe m³ (după N e h e n d z i) şi exprimăm pe d în mm, iar pe v în m/min.

Valorile mai ridicate ale lui K_m se referă la viteze de avans mai mari ale sîrmei.

Relaţia (6) de mai sus a fost confirmată prin experienţele făcute, rezultînd diagrama din figura 7.

5. ADERENŢA STRATULUI METALIZAT

Depunerea stratului metalizat de aport pe materialul de bază se face la o temperatură destul de ridicată (cuprinsă între 700°—900°) şi sub presiunea dată de aerul comprimat, fapt care duce la crearea unei aderenţe datorită fretajului şi altor fenomene secundare (de ex. sudură la rece).

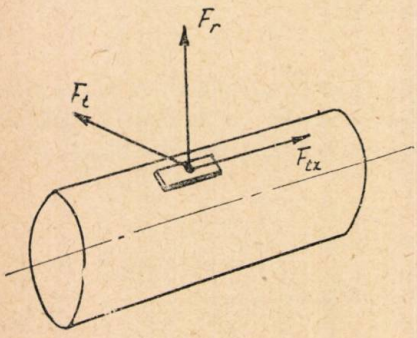


Fig. 8

Prin aderenţă înţelegem forţa necesară pentru desprinderea stratului metalizat de pe suprafaţa piesei de bază.

După direcţia de acţionare a acestei forţe, deosebim următoarele aspecte ale aderenţei (fig. 8):

a) Aderenţa tangenţial-axială, notată cu F_{tx};

b) Aderenţa tangenţială, notată cu F_t;

c) Aderenţa radială, notată cu F_r.

Aceste forţe depind de presiunea de fretaj, de natura materialelor, coeficientul de frecare, coeficientul de dilatare, mărimea şi orientarea asperităţilor de pe suprafaţa de bază.

Forţa de aderenţă F_{tx} va fi deci situată într-un plan perpendicular pe direcţia presiunii de fretaj, iar valoarea ei este dată de relaţia

$$F_{tx} = A\,p\,\mu\,k = A\,p\,\mu',$$

unde

A — suprafaţa de contact;
p — presiunea de fretaj;
μ — coeficientul de frecare;
K — o constantă care depinde de gradul de rugozitate a suprafeţelor;
μ' — coeficientul global de frecare (μK).

Forţa elementară de aderenţă tangenţial-axială dF_{tx} va fi dată de relaţia

$$dF_{tx} = p\,\mu'\,dA,$$

forţă care raportată la suprafaţa elementară dA ne dă forţa de aderenţă unitară, f_{tx} (f_t, f_r)

$$\frac{dF_{tx}}{dA} = \mu'\,p = f_{tx}$$

Încercările făcute s-au ocupat cu aderența tangențial-axială, din care se pot trage concluzii cu privire și la cea tangențială.

În calculele făcute s-au neglijat influențele fenomenelor secundare (sudura la rece) și s-a ținut seama numai de efectul de fretaj.

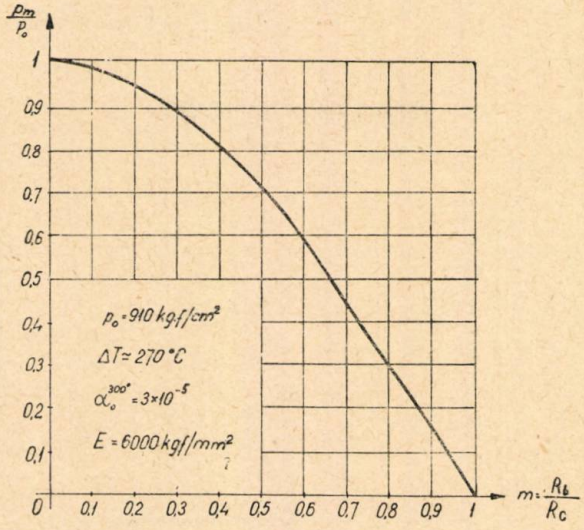


Fig. 9

Pe cale analitică, aplicînd relațiile cunoscute din rezistența materialelor cu privire la fretajul cilindrilor cu pereți groși, rezultă următoarea expresie pentru determinarea presiunii de fretaj

$$p = \frac{E_1 \alpha \Delta T}{\frac{2}{3} + 2 k_E \left(\frac{1}{1 - m^2} - \frac{1}{3} \right)}$$

în care

E_1 — modulul de elasticitate al materialului de bază;

α — coeficientul de dilatare al materialului de aport;

ΔT — diferența între temperatura particulelor pulverizate în momentul depunerii pe piesa de bază și temperatura mediului ambiant;

$k_E = \frac{E_1}{E_2}$ în care E_2 este modulul de elasticitate al stratului metalizat;

$m = \frac{R_b}{R_e}$ raportul între raza R_b, a piesei inițiale de bază, și raza exterioară R_e a piesei metalizate.

Pe baza celor de mai sus s-a reprezentat, în coordonate rectangulare, variația, în funcție de m a valorilor adimensionale: $\frac{p_m}{p_0}$ în care p_m este valoarea presiunii de fretaj corespunzătoare unei valori oarecare a raportului m, iar p_0 valoarea pentru $m = 0$ (fig. 9).

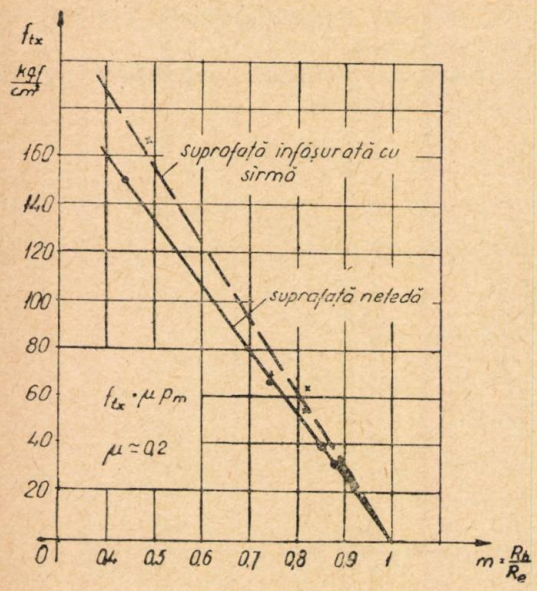


Fig. 10

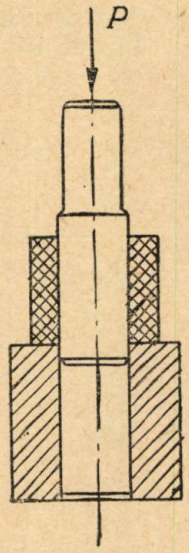


Fig. 11

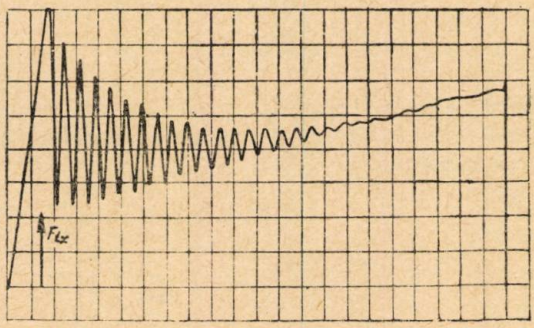


Fig. 12

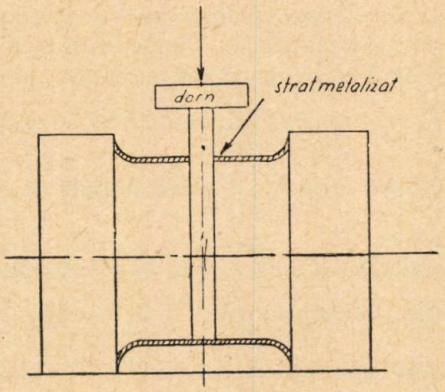


Fig. 13

În cazul experiențelor efectuate, în care $k_E \sim 3{,}5$ avem

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{8(1-m^2)}{8+2{,}5\,m^2}.$$

S-au făcut încercări experimentale pentru a se determina aderența tangențial-axială a stratului metalizat, pe o suprafață cilindrică, în două cazuri și anume:

— metalizarea pe suprafață netedă,

— metalizarea pe suprafață înfășurată cu sîrmă de 0,6 mm diametru și pasul de 2 mm.

Rezultatele găsite sînt redate în diagrama din figura 10, fiind în concordanță cu cele analitice, în intervalul experimentat, care este cel mai frecvent utilizat.

Determinarea aderenței tangențial-axiale (F_{tx}) s-a făcut cu ajutorul unor epruvete cilindrice metalizate în exterior, care au fost supuse la presă, acțiunii unei forțe axiale $P = F_{tx}$ după cum se arată în figura 11.

Redăm în figura 12 curba de variație a forței de aderență, F_{tx} (aderența tangențial-axială) în cursul desprinderii stratului metalizat, oscilațiile curbei fiind datorite amortizorului hidraulic al presei.

Pentru o determinare orientativă a aderenței radiale, s-au făcut încercări pe modele de fusuri, similare celor ale arborilor cotiți de la tractoare. Fusurile au fost metalizate după efectuarea unor găuri transversale (fig. 13) cu diametrul de 10 mm.

După strunjirea stratului metalizat la grosimea de 1,5 mm, s-a introdus un dorn în acea gaură, asupra căruia s-a acționat cu o forță de compresiune, obținîndu-se următoarele rezultate:

— la metalizarea după pregătirea suprafeței de bază prin filetare, forța de aderență radială a fost de 130 kg;

— la metalizarea după pregătirea suprafeței de bază prin înfășurare cu sîrmă, forța de aderență radială a fost de 360 kg. Menționăm că sporul constatat se datorește și forței necesare pentru ruperea sîrmelor de înfășurare din zona asupra căreia acționa dornul.

6. ÎNCERCĂRI LA OBOSEALĂ

O chestiune importantă este aceea a influenței stratului metalizat asupra rezistenței la oboseală a pieselor metalizate.

Literatura tehnică arată că tratamentele mecanice de suprafață, cum este de exemplu lovirea cu alice, sau rularea cu role, tratamentele termice (călirea), sau termochimice (nitrurarea și cementarea) măresc rezistența la oboseală a pieselor tratate [2].

Din contra, unele straturi de acoperire, ca de exemplu cele obținute prin cromaj sau nichelaj, care măresc rezistența la coroziune, au un efect defavorabil asupra rezistenței la oboseală.

Întrucît metalizarea prin pulverizare creează un strat protector, colectivul nu avea nici o indicație, sau documentație, asupra sensului în care metalizarea va influența rezistența la oboseală a arborilor metalizați, mai ales după reducerea diametrului impusă de pregătirea suprafeței în vederea metalizării.

Obiectivele urmărite prin experiențe au fost următoarele:

a. **Determinarea rezistenţei la oboseală a materialului de bază**

Am ales ca material de bază oţelul carbon de calitate OLC 45 (STAS nr. 880—49) cu $\sigma_r = 70 \frac{kgf}{mm^2}$, similar materialului din care sînt confecţionaţi arborii cotiţi de tractor.

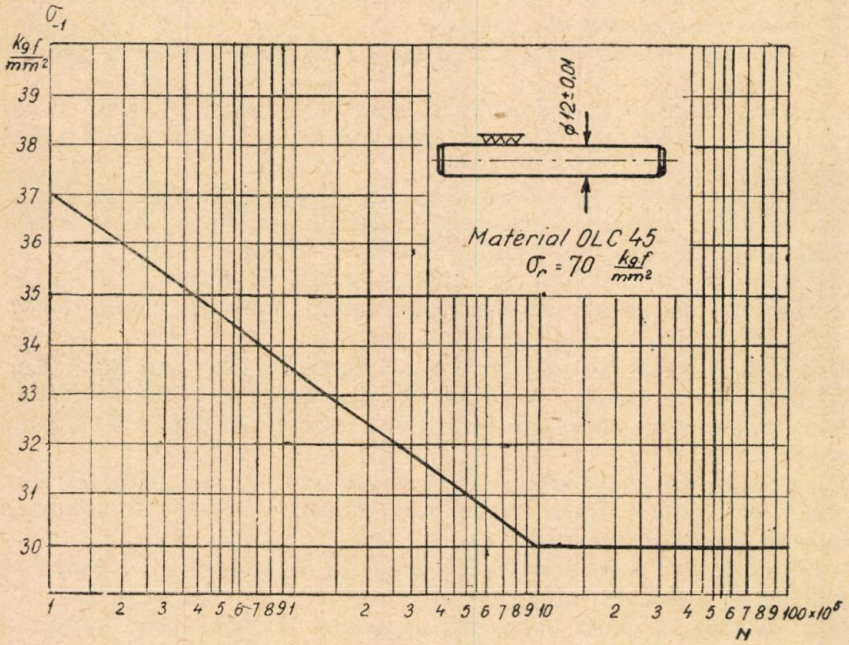


Fig. 14

Epruvetele încercate au forma indicată în figura 14, în care se reprezintă şi curba caracteristică a rezistenţei la oboseală pentru materialul de bază.

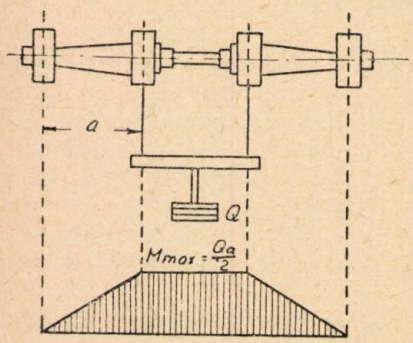


Fig. 15

Încercările s-au făcut la maşina sovietică HY, de încercări la oboseală prin încovoiere pură, după ciclul simetric $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = r = -1$.

Schema de încărcare este redată în figura 15.

În urma încercărilor efectuate, rezistenţa la oboseală a materialului de bază a rezultat

$$\sigma_{-1} = 30 \text{ kgf/mm}^2.$$

Aspectul secţiunii rupte se poate vedea în figurile 16 şi 17, unde se observă că propagarea ruperii la materialul de bază a început de la marginea secţiunii,

continuînd spre centru. La epruveta metalizată nu se observă în mod distinct acest fenomen.

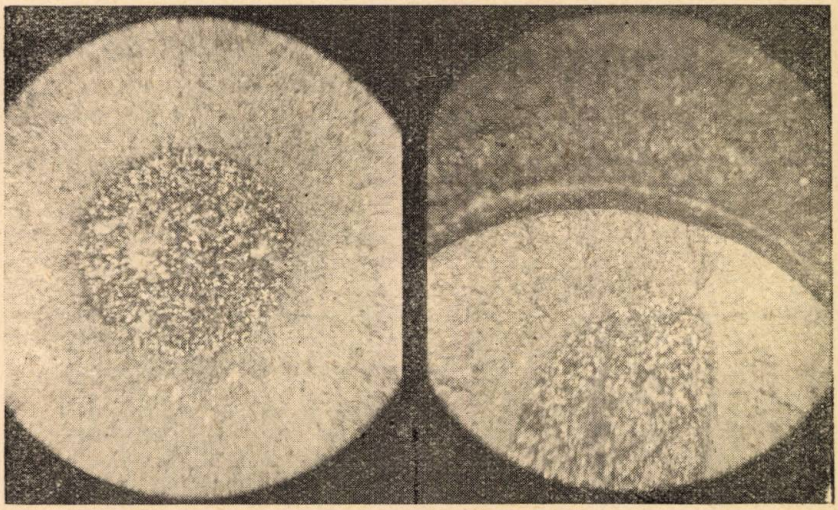


Fig. 16 Fig. 17

b. Influența crestăturilor asupra rezistenței la oboseală

Pentru realizarea aderenței stratului metalizat, suprafața pieselor este pregătită în prealabil prin diverse metode mecanice sau electrice ca: filetare, randalinare, înfășurare cu sîrmă, sablare, puncte de sudură etc.

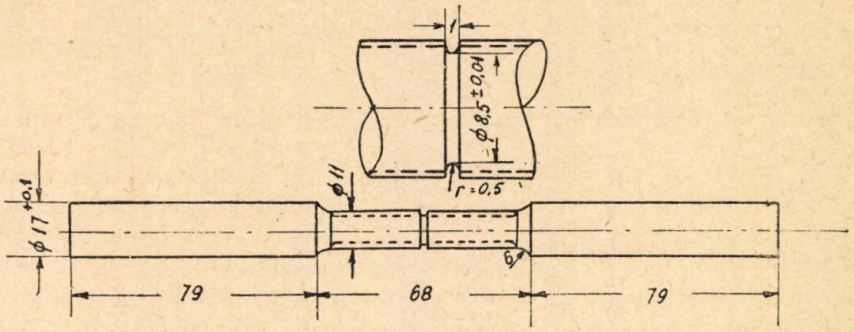


Fig. 18

Aceste pregătiri creează concentratori de tensiune care duc la micșorarea rezistenței la oboseală.

În acest sens am determinat rezistența la oboseală a unor epruvete pregătite în vederea metalizării, care au fost filetate cu un pas de 1 mm și adîncime de 0,5 mm. Ca aspect, filetul a avut o suprafață neregulată, drept urmare a instalării cuțitului la strung sub axul epruvetei.

Pentru localizarea secțiunii de rupere la mijloc, epruveta a fost prevăzută cu un șanț circular, avînd adîncimea de 1,25 mm și lățimea de 1 mm.

Epruvetele încercate sînt arătate în figura 18.

Modulul de rezistenţă, W, introdus în calcule, a fost cel corespunzător secţiunii minime. În urma încercărilor efectuate, rezistenţa la oboseală σ_{-1} a rezultat la 16,6 kgf/mm², iar concentratorul de tensiune introdus a avut valoarea

$$\beta_k = \frac{30}{16,6} = 1,81,$$

care corespunde aproximativ valorilor admise în literatura tehnică [2].

Rezistenţa la oboseală $\sigma_{-1} = 16,6$ kgf/mm², corespunde unui moment de încovoiere capabil:

$$M_{-1} = 100,1 \text{ kg cm.}$$

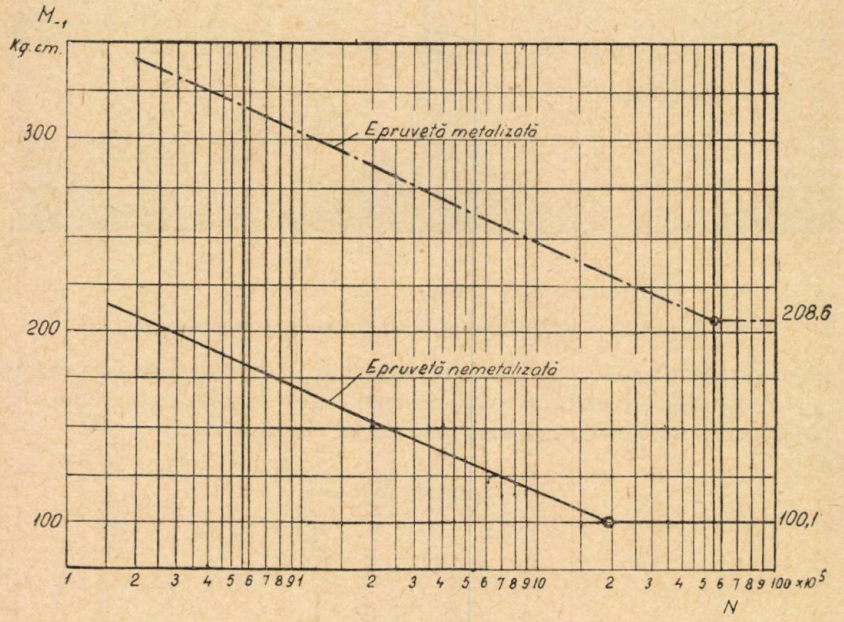


Fig. 19

c. **Influenţa stratului metalizat**

Epruvetele metalizate au fost pregătite ca cele de la punctul b, diametrul exterior al stratului metalizat fiind de 15 ± 0,05 mm.

În urma încercărilor la oboseală efectuate la maşina HY a rezultat un moment capabil

$$M'_{-1} = 208,6 \text{ kg cm.}$$

Comparînd această valoare cu cea precedentă, se constată că un strat metalizat de 2 mm grosime pe rază la epruvetele încercate, produce o dublare a momentului capabil şi deci preia o parte din acest moment.

În figura 19, se arată valorile momentelor capabile pentru cazurile de mai sus.

Dacă am determina eforturile unitare raportînd momentul capabil la modulul de rezistență al secțiunii inițiale, rezultă o valoare a lui $\sigma'_{-1} = 33{,}2$ kgf/mm^2.

De exemplu, o piesă nemetalizată, solicitată de un moment încovoietor de 200 kgcm se rupe după un număr de 28 000 cicli, iar aceeași piesă, metalizată cu un strat de 2 mm pe rază, nu se rupe nici după 10 milioane de cicli, deci rezistă la oboseală.

Lucrările experimentale ne-au obligat să prevedem epruvetele cu un șanț la mijloc, deoarece s-au constatat ruperi la terminarea stratului metalizat, în punctul unde se suprapun trei concentratori de tensiune și anume:

— racorderea,
— începutul filetului,
— terminarea bucșei fretate formate de stratul metalizat.

Semnalăm, cu titlu informativ, că atunci cînd adîncimea șanțului de la mijloc era insuficientă pentru a produce ruperea în această zonă, această rupere se producea la extremitatea stratului metalizat, în punctul de suprapunere a celor trei concentratori.

În acest caz valoarea rezistenței la oboseală era mult inferioară celei corespunzătoare ruperii la mijloc (aprox. 60%). Pentru localizarea ruperii la mijloc, adîncimea șanțului trebuie sporită cînd grosimea stratului metalizat crește.

7. CERCETĂRI METALOGRAFICE

Studiul microscopic a arătat că stratul metalizat este format din particule în formă de solzi, înconjurate în majoritatea cazurilor cu pelicule de oxizi sau silicați.

De asemenea, se remarcă prezența unor pori de forme neregulate și a unor goluri cu forme alungite, rezultate din lipsa de aderență a unora din particulele metalice.

În figura 20 zonele cenușii reprezintă oxizii sau silicații, iar punctele, fîșiile și petele negre porozitățile stratului metalizat.

Figura 21 ne arată în partea de jos o regiune uniformă, reprezentînd metalul de bază, deasupra căruia se observă linia de separație a stratului metalizat, urmată de o structură cu oxizi și porozități.

S-au efectuat și micrografii după atacul chimic al probelor studiate.

În figura 22, se vede o probă după atac cu nital și mărire de 150 ori. S-a constatat în metalul de bază structura cu ferită și perlită, iar în stratul metalizat, se vede o picătură metalică separată de metalul de bază printr-un strat gros de oxizi și silicați.

La măriri mai mari, pînă la 1 600 ori, nu s-au observat alți constituenți decît incluziuni oxidice, după atacul cu reactivi.

CONCLUZII

În urma studiilor și lucrărilor experimentale efectuate, se constată că metalizarea prin pulverizare permite obținerea unui strat de aport de mare duritate și porozitate, ceea ce favorizează o bună rezistență la uzură.

De asemenea, stratul metalizat îmbunătățește rezistența la oboseală. În schimb însă, se constată o mare fragilitate a stratului metalizat.

Aceste constatări permit aplicarea metalizării prin pulverizare la recondiționarea organelor de mașini uzate. Printre acestea menționăm arborii cotiți

Fig. 20

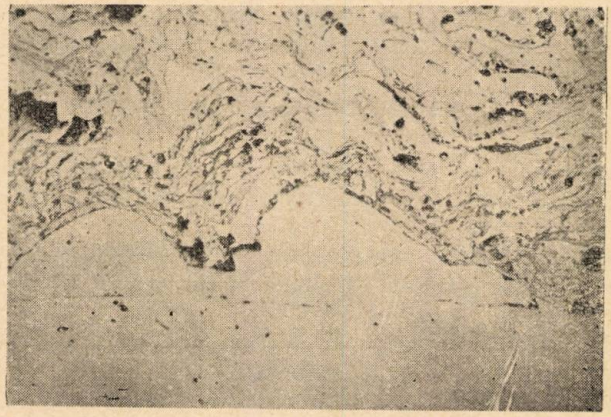


Fig. 21

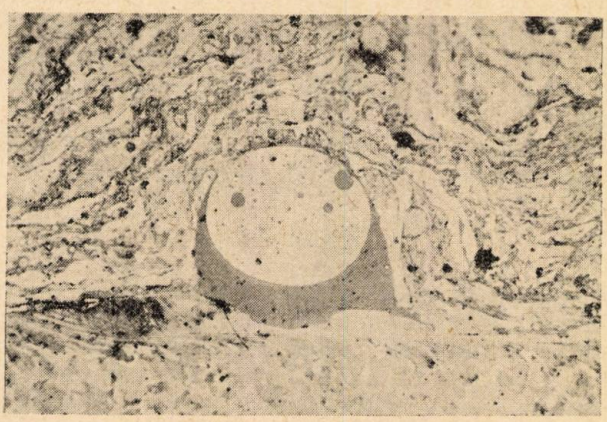


Fig. 22

de la motoare de tractoare sau autovehicule, ale căror fusuri uzate pot fi aduse la cota nominală prin metalizare.

Pentru buna comportare și siguranță în exploatare se impune însă ca această recondiționare să nu se aplice decît la arborii cotiți ajunși la o anumită limită a uzurii, sub care pregătirea prin filetare a suprafeței fusurilor poate compromite rezistența arborilor.

Menționăm de asemenea posibilitățile obținerii unei bune rezistențe la coroziune prin metalizarea cu metale neferoase, cum este cazul unor instalații din industria chimică.

Primită la redacție la 19.I.1956.

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОКРЫТИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ МЕТАЛЛИЗАЦИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Металлизация распылением имеет много преимуществ, включая возможность восстановления изношенных деталей машин и предохранения их от износа.

В РНР этот метод применяется в первую очередь для восстановления коленчатых валов двигателей сельскохозяйственных тракторов, причем в этом вопросе коллектив Института прикладной механики сотрудничает с Министерством земледелия.

В настоящей статье описываются результаты, полученные коллективом и относящиеся к физическим, химическим и механическим качествам слоев, наложенных на образцы при металлизации распыленной сталью. Часть результатов была получена как аналитическим, так и опытным путем, причем было констатировано соответствие между полученными цифрами.

Экспериментальные работы производились аппаратом для электрометаллизации усовершенствованным коллективом.

Из полученных результатов можно отметить следующие:

— удельный вес металлизированного слоя 6,3 — 6,7 г/мл
— пористость 10,5 — 17,1%
— зернистость фракций 5—300 микронов
— сопротивление на растяжение 12—18 кг/кв мм
— сопротивление на сжатие 60 кг/кв мм
— модуль упругости 6 000 кг/кв мм
— удлинение при разрыве 1%
— твердость по Бринеллю 300 — 330 кг/кв мм

Пористость и большая твердость металлизированного слоя придают ему хорошее сопротивление на износ и допускают хорошее смазывание, так как часть масла остается в порах слоя.

Химические анализы добавленного металла и основного слоя показали, что при металлизации сгорает около 46% содержащегося углерода.

Было определено тангенциальное и радиальное сцепление металлизированного слоя с установлением значений для образцов с нарезкой и образцов, изготовленных путем наматывания проволоки.

Равным образом были сделаны испытания на усталость путем изгиба металлизированных образцов, причем было установлено, что металлизация повышает сопротивление усталости.

Металлографическими исследованиями установлено, что металлизированный слой включает окиси и силикаты, способствующие увеличению твердости, а также имеет значительную пористость.

ÉTUDES DE CERTAINES CARACTÉRISTIQUES DES COUCHES OBTENUES PAR L'ÉLECTROMÉTALLISATION

(RÉSUMÉ)

L'article expose les résultats des études faites pour déterminer les qualités physiques, chimiques et mécaniques, obtenues en métallisant des éprouvettes par pulvérisation.

Ce procédé est appliqué, le plus souvent, pour ramener à la cote nominale les manetons usés des villebrequins des moteurs montés sur les tracteurs agricoles.

Les résultats des études ont permis de constater que les couches métallisées possèdent une faible résistance à la traction ainsi qu'un faible allongement. Le module d'élasticité est, environ, le tiers de celui indiqué pour l'acier. Par contre, la résistance à la compression et la dureté ont des valeurs importantes.

Tenant compte de la porosité constatée dans les couches métallisées, qui retient l'huile et améliore le graissage, et de la dureté, on peut affirmer que ces couches ont une bonne résistance à l'usure.

Les essais chimiques ont révélé que le carbone est en partie brûlé par la métallisation et qu'on ne retrouve dans la couche métallisée que 54% environ de la quantité de carbone qui se trouvait dans le métal pulvérisé.

Les essais métallographiques ont établi la présence d'oxydes et de silicates, qui contribuent à augmenter la dureté, ainsi que de nombreuses porosités.

BIBLIOGRAFIE

1. N. V. Katz i E. M. Linnik, *Elektrometallizaţia.* Selhozghiz, Moscova, 1953.
2. Gh. Buzdugan, *Calculul de rezistenţă la solicitări variabile.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
3. A. D. Dvoeglazova, *Vlianie metodov podgotovki poverhnosti pri metallizaţii detalei na ustalostnuiu procinost metalla,* în *Trudî moskoskovo instituta mehanizaţii i elektrifikaţii selskovo hozaistva imeni V. M. Molotova.* Selhozghiz, Moscova, 1954, t. I.
4. I. A. Nehendzi, *Turnarea oţelului.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
5. S. D. Ponomarev şi colaboratori, *Osnovî sovremennîh metodov rasceta na procinost v maşinostroenii.* Maşghiz, Moscova, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR – ELASTICITATE

CONTRIBUŢII LA UTILIZAREA ANALOGIEI CU MEMBRANĂ ÎN CERCETAREA TENSIUNILOR LA TORSIUNE

DE

EDUARD NICOLAU

Analogia care se poate stabili între forma stabilă a suprafeţei unei membrane întinse pe un contur şi aceea a suprafeţei definite de funcţia eforturilor unitare [1] într-o bară răsucită, având secţiunea transversală limitată de un contur similar, a fost enunţată pentru prima dată de L. P r a n d t l [2], în 1903. Această analogie indică posibilitatea de a se studia repartiţia eforturilor unitare şi de a se determina experimental valorile şi orientările lor în cazul acelor secţiuni de bare, la care rezolvarea teoretică este imposibilă sau prea laborioasă.

Se ştie că funcţia eforturilor unitare la torsiune

$$\Phi = G\theta\left(\psi - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) \tag{1}$$

(unde ψ este conjugata armonică a funcţiei φ ce dă deformaţia secţiunii transversale a barei răsucite, G este modulul de elasticitate la lunecare, θ este unghiul de răsucire raportat la unitatea de lungime a barei) satisface următoarele condiţii

$$\Delta\Phi = -2G\theta \tag{2}$$

$$\Phi_c = 0\,. \tag{3}$$

Deci, cunoaşterea funcţiei Φ permite evaluarea eforturilor unitare de lunecare

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,, \tag{4}$$

iar curbele de $\Phi = \text{const.}$ indică direcţiile eforturilor totale de lunecare.

Analogia de membrană se bazează pe faptul că ordonata z a suprafeţei membranei construite pe un contur plan satisface următoarele condiţii

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{p}{A} \tag{5}$$

$$z_c = 0, \tag{6}$$

în care p este diferența presiunilor pe cele două fețe ale membranei, iar A este efortul unitar de întindere a membranei.

Dacă pantele membranei sînt destul de mici, ecuația (5) se poate reduce la

$$\Delta z = -\frac{p}{A} \tag{5'}$$

și deci, sistemul (5'), (6) este analog cu (2), (3).

Eforturile unitare se pot căpăta introducînd pantele membranei, măsurate pe cale experimentală în relațiile de mai jos

$$\tau_{xz} = k\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = -k\frac{\partial z}{\partial x} \tag{7}$$

$$\Phi = k z \tag{8}$$

unde

$$k = zG\theta\frac{A}{p}\,. \tag{9}$$

De asemenea rigiditatea la torsiune a barei de secțiune dată este:

$$\mathfrak{R} = \frac{2kV}{\theta} \tag{10}$$

unde V este volumul închis între membrană și planul conturului.

Deci, pe baza măsurării pantelor membranei și a ordonatelor sau a volumului închis de membrană, se pot evalua eforturile unitare (τ_{xz}, τ_{yz}), curbele de direcție ale eforturilor unitare totale de lunecare (Φ = const.), precum și rigiditatea $\mathfrak{R}$ a unei bare răsucite. Valorile se obțin cu ajutorul relațiilor (7) și (10).

Evaluarea constantei de proporționalitate k $\left(\text{sau a raportului } \frac{p}{A}\right)$ se face cu o membrană auxiliară cu aceleași p și A realizată pe un contur circular. În acest caz, suprafața membranei este sferică, iar ecuația (5) devine

$$\frac{2}{R} = -\frac{p}{A}\,. \tag{11}$$

Dacă considerăm că această membrană corespunde unei bare răsucite cu secțiune circulară, atunci relația (10) va deveni în acest caz

$$\mathfrak{R}_c = \frac{2k_c V_c}{\theta_c}\,, \tag{10'}$$

în care indicele c arată că se referă la un contur circular, și ținînd seama de relația (9) și de faptul că

$$\mathfrak{R}_c = GI_{0c}\,, \tag{12}$$

unde I_{0c} este momentul de inerție polar al secțiunii circulare, rezultă că

$$\frac{p}{A} = \frac{4V_c}{I_{0c}}\,. \tag{13}$$

În concluzie, din relațiile (7), (9), (10) și (13) rezultă că starea de tensiune din bara torsionată va fi dată, în funcție de mărimi determinate experimental prin relațiile

$$\tau_{xz} = G\,\theta\,\frac{I_{0c}}{2V_c}\,\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = G\,\theta\,\frac{I_{0c}}{2V_c}\,\frac{\partial z}{\partial x} \tag{14}$$

$$\mathfrak{M} = G\,I_{0c}\,\frac{V}{V_c}. \tag{15}$$

Precizia metodei. Așa cum s-a arătat mai sus, analogia descrisă este posibilă numai dacă în (5) $\frac{\partial z}{\partial y}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ sînt suficient de mici pentru ca pătratele lor să fie neglijabile în raport cu unitatea. Această neglijare face ca soluția experimentală să fie aproximativă. În legătură cu limitele admisibile pentru pantele

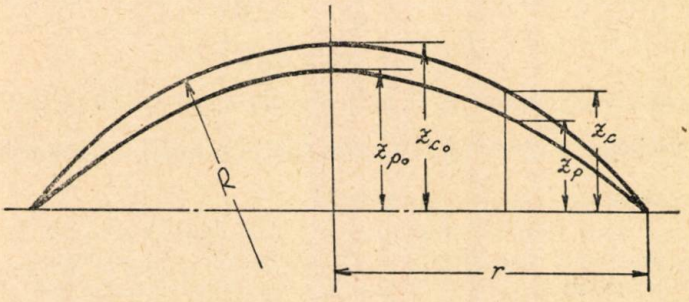


Fig. 1

membranei, există unele indicații în literatură [3], [4] și [5]. R. D. Mindlin și M. Salvadori [6] dau și o justificare analitică, referitoare la bara cilindrică.

Vom studia mai jos erorile care rezultă din această aproximație și vom indica o metodă pentru îmbunătățirea preciziei rezultatelor. În acest scop să comparăm suprafața reală a membranei care satisface ecuația (5) cu suprafața ce o aproximează și care corespunde ecuației (5′). Pentru ușurința calculelor ne vom referi la un contur circular. Este evident că ecuația (5) corespunde unei suprafețe sferice la care

$$\frac{2}{R} = \frac{p}{A}.$$

Referindu-ne la ecuația (5′) reamintim că $\Phi = k\,z$, iar Φ din expresia (1) se anulează pe contur. Rezultă că pentru un contur circular $\psi = \frac{r^2}{2}$, unde r este raza conturului, servindu-ne de (8), (9) și (11), obținem ecuația suprafeței date de funcția Φ sub forma

$$z_p = \frac{1}{2R}(r^2 - \xi^2) \tag{16}$$

unde am notat cu $\xi^2 x^2 + y^2$ (fig. 1). Deci suprafața sferică a fost înlocuită cu suprafața unui paraboloid de revoluție. Ecuația sferei va fi dată de o expresie corespunzătoare, adică

$$z_c = \sqrt{R^2 - \xi^2} - \sqrt{R^2 - r^2} \tag{17}$$

Eroarea relativă care se face la ordonate, măsurînd ordonatele calotei sferice în loc de cele ale suprafeței paraboloidului, va avea forma

$$E_z = \frac{z_c - z_p}{z_p}. \tag{18}$$

Din studiul expresiei (18), rezultă că E_z este extremată numai pentru $\xi = 0$, însă aici ea admite un minim. Valoarea erorii în acest punct este

$$E_{z_0} = \left(\frac{h_c}{r}\right)^2 = \alpha^2, \tag{19}$$

unde

h_c = săgeata calotei sferice,

r = raza cercului de bază.

Valoarea practic maximă are loc în vecinătatea conturului pentru $\xi = r$, unde ea are expresia

$$E_{z_r} = \frac{2h_c^2}{r^2 - h_c^2} = \frac{2\alpha^2}{1 - \alpha^2}. \tag{20}$$

Se dau în tabloul de mai jos valorile erorilor relative minime și maxime (adică la vîrf și în vecinătatea conturului), pentru diferitele mărimi ale raportului $\alpha = \frac{h_c}{r}$ precum și pantele maxime corespunzătoare.

În același mod vom proceda pentru a găsi eroarea maximă asupra pantei, făcută prin înlocuirea suprafeței sferice cu cea a paraboloidului. Se constată astfel că E_z devine minimă pentru $\xi = 0$, neprezentînd o altă extremă pe intervalul $[-r, +r]$. Rezultă că valoarea practic maximă a erorii are loc tot la margine pentru $\xi = \pm r$ și are aceeași expresie ca și în cazul ordonatelor

$$E_{z'_r} = \frac{2h_c^2}{r^2 - h_c^2} \tag{21}$$

Tablou

Valorile erorilor relative la vîrf și în vecinătatea conturului circular, după metoda folosită curent și după metoda propusă

α	E_{z_0}	E_{z_n} / E'_{z_n}	E_v	$E_{z'r}$ / E_{zr}	E_{vr}	γ_{max}
0,0707	0,005	0,01	0,007	0,005	0,002	8°,1
0,100	0,01	0,02	0,013	0,01	0,003	11°,5
0,122	0,015	0,03	0,020	0,015	0,005	13°,8
0,141	0,02	0,041	0,027	0,020	0,007	16°
0,155	0,024	0,05	0,032	0,025	0,008	17°,4
0,173	0,03	0,062	0,040	0,031	0,010	19°,5
0,184	0,034	0,071	0,045	0,036	0,011	20°,6
0,200	0,04	0,083	0,053	0,042	0,013	22°,5
0,209	0,044	0,092	0,059	0,046	0,015	23°,1
0,224	0,05	0,105	0,067	0,053	0,017	25°,2
0,245	0,06	0,128	0,080	0,064	0,020	27°,5
0,265	0,07	0,151	0,093	0,076	0,023	29°,5
0,283	0,08	0,174	0,107	0,087	0,027	31°,5
0,300	0,09	0,198	0,120	0,099	0,030	33°
0,316	0,10	0,222	0,133	0,111	0,033	35°

Valorile erorii pentru diferiți α se găsesc în tabloul dat.

În ceea ce privește eroarea care se face la evaluarea volumului, prin înlocuirea suprafeței sferice cu a paraboloidului, se poate arăta că ea este mai mică. Într-adevăr, pornind de la volumele respective:

pentru suprafața sferică $V_c = \frac{\pi}{6} h_c (3r^2 + h_c^2)$ (22)

pentru paraboloid $V_p = \frac{\pi}{2} h_p r^2$ (23)

obținem pentru eroarea relativă asupra volumului, expresia

$$E_v = \frac{4}{3} E_{z_0} = \frac{4}{3} \alpha^2 . \tag{24}$$

Valoarea erorii asupra volumelor sînt trecute în același tablou.

În concluzie, dacă panta maximă nu depășește 17°,5 sau $\alpha \leqslant 0{,}15$

$$E_{z_0} \leqslant 2{,}4\%,$$

$$E_{z'} \leqslant 5\%,$$

$$E_v \leqslant 3{,}2\%,$$

Să evaluăm acum erorile asupra valorilor caracteristice pentru starea de tensiune. Am văzut că efortul unitar de lunecare este dat de relația

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{I_{0c}}{2V_c} \frac{\partial z}{\partial y} . \tag{14}$$

În această expresie valorile care depind de aproximația analogiei cu membrana sînt: volumul calotei sferice V_c și panta în punctul corespunzător tensiunii τ_{xz}. Deoarece V_c provine de la considerarea unei bare răsucite, de secțiune circulară, recomandăm ca, spre deosebire de indicațiile lucrărilor din acest domeniu, să se utilizeze în loc de V_c — volumul calotei sferice — V_p — volumul paraboloidului construit pe același contur circular — și pe care V_c îl aproximează. Îndepărtăm astfel radical o primă sursă de eroare. Rămîne deci ca eroarea asupra lui τ_{xz} să fie dată numai de panta $\frac{\partial z}{\partial y}$, adică $E_\tau = E_{z'}$.

În ceea ce privește rigiditatea, din examinarea expresiei (15) rezultă că, cu condiția înlocuirii valorii V_c cu V_p — ca mai sus — eroarea asupra rigidității este egală cu eroarea asupra volumului V închis între membrana construită pe profilul în studiu și planul conturului

$$E_{\mathfrak{R}} = E_v = \frac{4}{3} E_{z_0} .$$

În concluzie, ținînd seama de faptul că săgeata parabolei de care avem nevoie la calculul lui V_p se deduce ușor din (19) și are expresia

$$h_p = \frac{h_c}{1 + \alpha^2} \tag{25}$$

în funcție de h_c ordonata maximă măsurată pe calota sferică a membranei și de relațiile (14) și (15), obținem expresiile

$$\tau_{xz} = G\theta r \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial_y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta r \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial x} \tag{14'}$$

$$\mathfrak{R} = Gr \frac{1+\alpha^2}{\alpha} V. \tag{15'}$$

Aplicînd expresiilor de mai sus erorile, ele vor avea forma

$$E_{\tau} = \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \tag{26}$$

$$E_{\mathfrak{R}} = \frac{4}{3}\alpha^2 \tag{27}$$

unde

$$\alpha = \frac{h_c}{r}.$$

Observăm că aici toate valorile au fost date în funcție de α corespunzător conturului circular auxiliar. Această valoare este arbitrar aleasă de către experimentator.

Imbunătățirea preciziei metodei. Pînă aici, analogia s-a bazat pe faptul că efectuînd măsurători asupra unei calote sferice, presupunem că ele sînt valabile pentru un paraboloid, pe care îl căutăm și care are ecuația

$$z_p = \frac{1}{2R}(r^2 - \xi^2). \tag{16}$$

El a fost deci înlocuit cu o calotă sferică obținută experimental printr-o membrană întinsă cu ecuația

$$z_c = \sqrt{R^2 - \xi^2} - \sqrt{R^2 - r^2} \tag{17}$$

unde

$$R = \frac{2A}{p}.$$

Precizia obținută în aceste condiții și studiată mai înainte poate să fie îmbunătățită dacă observăm că sfera membranei aproximează mult mai bine un alt paraboloid care coincide cu ea nu numai pe contur, dar și în vîrf. În acest caz raportul ordonatelor, într-un punct de abscisă ξ va fi

$$\frac{z_c}{z_{pr}} = \frac{\sqrt{R^2 - \xi^2} - \sqrt{R^2 - r^2}}{\frac{h_c}{h_p}\frac{1}{2R}(r^2 - \xi^2)}$$

sau

$$\frac{z_c}{z_{pr}} = \beta \frac{z_c}{z_p} \tag{28}$$

unde

$$\beta = \frac{h_p}{h_c} . \tag{29}$$

Noul paraboloid astfel obținut va diferi de calota sferică într-o mai mică măsură. Eroarea în vîrf va fi nulă, iar eroarea practic maximă va avea loc în vecinătatea conturului pentru $\xi = r$ și va fi dată de expresia

$$E_{zr} = E_{z'r} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} . \tag{30}$$

Comparînd-o cu expresia erorii după vechea metodă (20), se vede că eroarea s-a redus la jumătate (pentru $\xi = r$).

La pante se procedează în același mod și se obține și aici înjumătățirea erorii. Eroarea asupra volumelor este dată de relația

$$E_{vr} = \frac{\alpha^2}{3} \tag{31}$$

și se reduce deci la un sfert din valoarea anterioară.

Pentru a folosi concluziile de mai sus în expresiile stării de tensiune, observăm că se poate înlocui paraboloidul inițial de ecuație

$$z_p = \frac{1}{2R} (r^2 - \xi^2) \tag{16}$$

cu un alt paraboloid de ecuație

$$z_{pr} = \frac{1}{2R_r} (r^2 - \xi^2) \tag{32}$$

unde

$$R_r = \beta R . \tag{33}$$

Aceasta înseamnă că măsurătorile făcute corespund mai bine unei ecuații diferențiale

$$\Delta z = - \frac{p_r}{A} \tag{5''}$$

diferită de aceea pe baza căreia s-a dedus în expresia (10) valoarea constantei de proporționalitate. Dacă ținem seama de relația (33) și (11), rezultă că noua constantă va fi

$$K_r = 2G\theta\beta \frac{A}{p} . \tag{9'}$$

Se poate arăta ușor că, pornind de la relațiile (29), (16) și (17) se deduce pentru β expresia

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha^2} . \tag{34}$$

Ordonata maximă a paraboloidului va fi deci tocmai ordonata maximă a calotei sferice. Expresiile (14) și (15) ale mărimilor care caracterizează starea de tensiune, capătă deci următoarea formă

$$\tau_{xz} = G\theta r \frac{(1+\alpha^2)^2}{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta r \frac{(1+\alpha^2)^2}{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (14'')$$

$$\mathfrak{M} = G \cdot r \frac{(1+\alpha^2)^2}{\alpha} V \qquad (15'')$$

În aceste relații erorile datorite metodei analogiei sînt următoarele

$$E_\tau = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$E_{\mathfrak{M}} = \frac{\alpha^2}{3} \qquad \text{unde } \alpha = \frac{h_c}{r}.$$

În tabloul care se dă au fost trecute și valorile erorilor corectate în modul indicat mai sus. Se vede că în aceste condiții se poate merge la o eroare de maximum 5%, pînă la o pantă maximă de 24°, în loc de 17°,5 cum se impunea după vechea metodă. Avantajul mare pe care-l prezintă modificarea recomandată aici, constă în faptul că atît pantele, cît și ordonatele măsurate, au valori sensibil mai mari și deci permit o mai mare precizie a măsurătorilor experimentale.

Micșorarea erorilor rezultă mai clar din diagrama alăturată (fig. 2).

Aparatul pentru efectuarea măsurătorilor. Pe baza analogiei cu membrana propusă de P r a n d t l s-au construit numeroase tipuri de aparate, unele utilizînd o membrană alcătuită dintr-un film de săpun, altele folosind o membrană de cauciuc. Primii care au construit și au descris un asemenea aparat pentru film de săpun, au fost, A. A. G r i f f i t h și G. I. T a y l o r [7] în 1918. Unele dintre aparatele comunicate în literatură permit măsurarea directă a pantelor, altele măsurarea ordonatelor, altele fotografierea curbelor de nivel sau a curbelor de egală pantă etc.

Aparatul prezentat aici (fig. 3 și 4), construit în cadrul institutului nostru, permite măsurarea ordonatelor membranei și a fost utilizat pentru determinări făcute asupra unei membrane de cauciuc. În prima sa formă, aparatul era alcătuit din dispozitivul propriu-zis pentru măsurătorile asupra membranei *A*. Ulterior, i s-a adăugat și un dispozitiv auxiliar original *B*, pentru controlul constanței presiunii și pentru reglarea fină a ei. Membrana de cauciuc este fixată la partea superioară a cutiei *a* și acoperită cu un capac — din pertinax — fixat cu o ramă metalică și în care este decupat profilul ce se studiază. Mărind presiunea în incinta cutiei, membrana de cauciuc se umflă pe o suprafață limitată de orificiul decupat în capac. Măsurătorile se fac cu un micrometru vertical *b*. Micrometrul este solidar cu un cărucior *c*, dirijat de un șurub milimetric *d*, manevrat de tamburul *e*, astfel că el se poate deplasa paralel cu axul șurubului milimetric. Cadrul de susținere *f* al acestui șurub poate fi deplasat perpendicular pe direcția lui, prin intermediul celui de-al doilea șurub milimetric *g* și a tamburului *h*. Astfel, vîrful micrometrului poate avea deplasări în toate cele trei direcții spațiale.

Dispozitivul *B* cuprinde o cutie cu membrană asemănătoare cu prima *i*, capacul avînd orificiul circular, iar micrometrul *k* amplasat în centrul cercului.

Cele două cutii comunică între ele și deci au aceeași presiune interioară. Micrometrul *k* indică mărimea ordonatei maxime a calotei sferice formate aici și semnalizează imediat variația presiunii interioare. Revenirea la aceeași presiune pentru

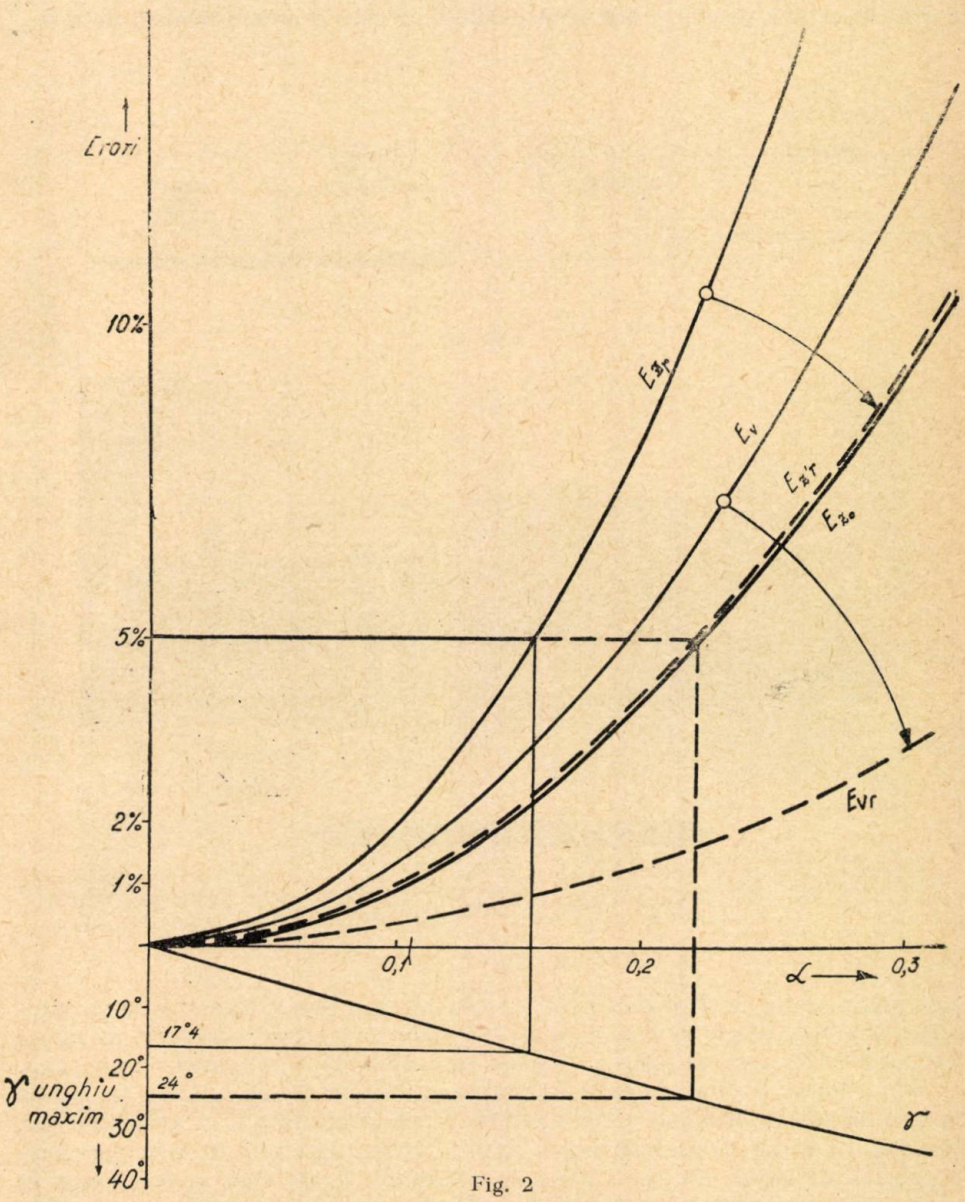


Fig. 2

variații mici se face cu ajutorul dispozitivului de reglare fină a presiunii, alcătuit dintr-o pară de cauciuc *l* presată de un șurub cu plăcuță *m*.

Precizia măsurătorilor. Deplasările vîrfului șurubului micrometric după cele trei direcții se citesc cu o exactitate de 10 μ, putîndu-se aprecia satisfăcător și 1 μ.

Cu această precizie se stabilesc coordonatele fiecărui punct al suprafeței membranei. Momentul contactului dintre vîrful șurubului micrometric și membrană se determină vizual. Au fost efectuate foarte multe determinări din care a rezultat că — în stadiul actual — erorile ce provin din această cauză nu depășesc $\pm 20\mu$, ceea ce înseamnă pentru o ordonată medie de 5 mm o eroare relativă de 0,4%.

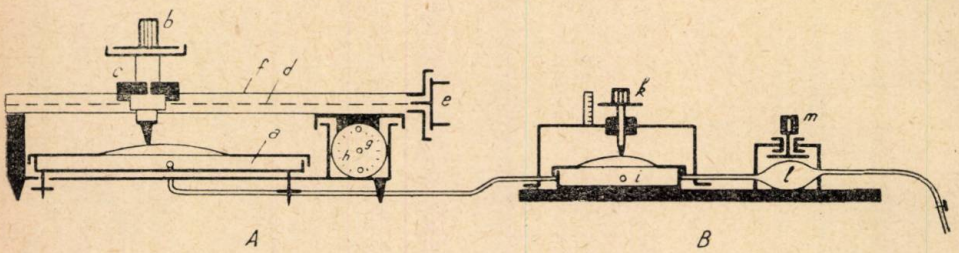


Fig. 3

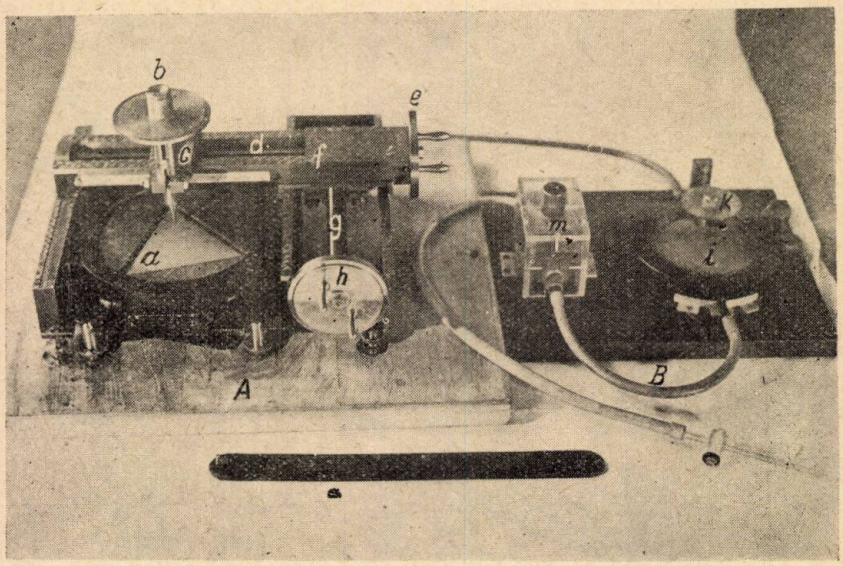


Fig. 4

Dacă ținem seama de faptul că pentru evaluarea pantelor se face diferența ordonatelor și erorile pot fi de sens contrar, înseamnă că eroarea relativă de măsurare este circa 0,8%, ceea ce față de o eroare admisibilă de 4—5% nici nu contează.

Mai rămîne o sursă de erori în utilizarea membranei de cauciuc, în loc de pelicula de săpun. Atît una cît și cealaltă își au dezavantajele și avantajele lor. Principalul neajuns al utilizării cauciucului îl reprezintă faptul că, spre deosebire de pelicula de săpun nu are o tensiune constantă A, așa cum se presupune în teoria analogiei cu membrană. H. L. Supper [8] a demonstrat că, dacă membrana de cauciuc este prea întinsă, astfel ca lungimea să se dubleze în ambele direcții, variațiile tensiunii A sînt, datorită denivelărilor, de ordinul a 2%*).

*) În lucrarea citată este indicată, din pricina unei greșeli de calcul, o variație de 5%.

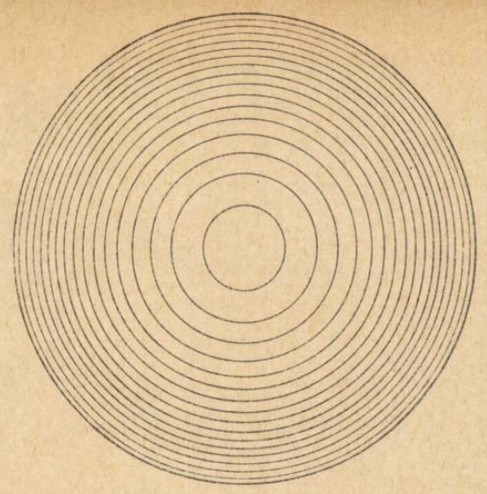


Fig. 5

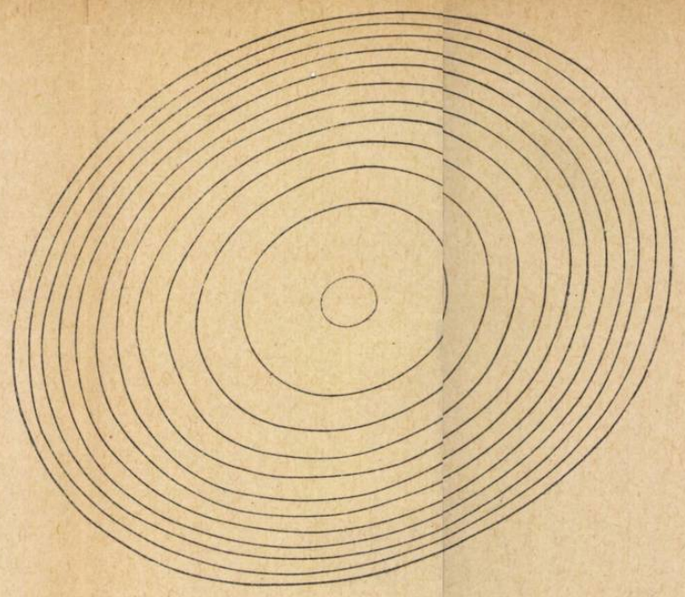


Fig. 6

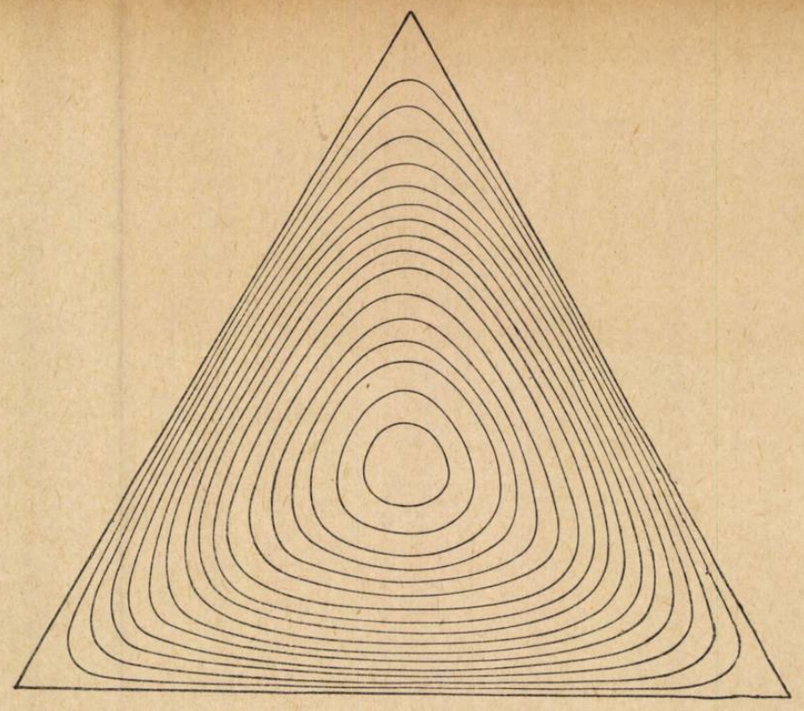


Fig. 7

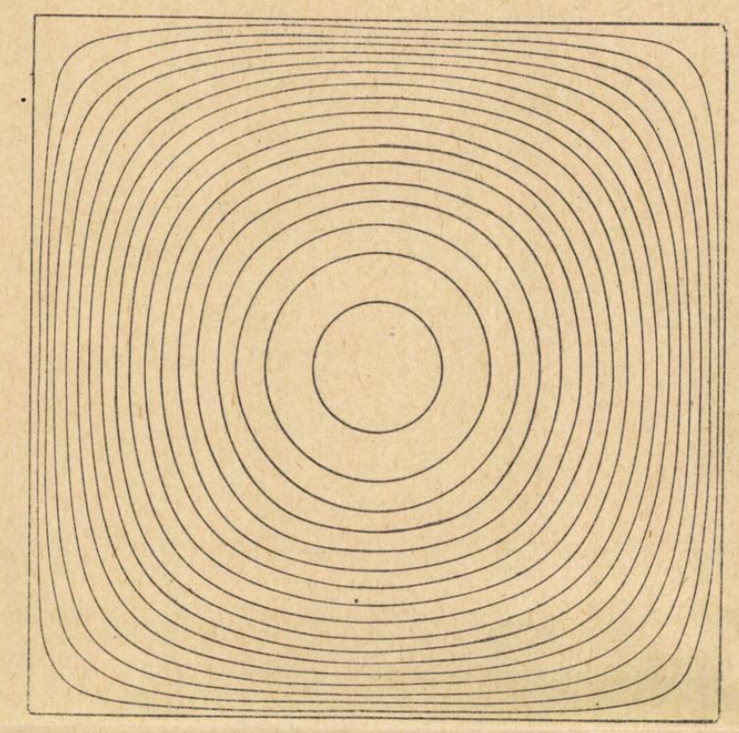


Fig. 8

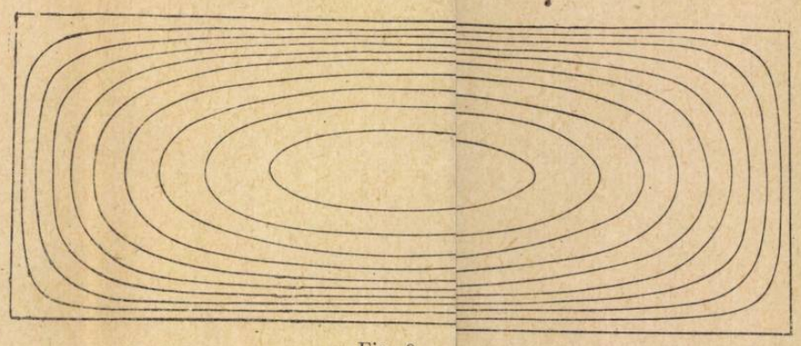


Fig. 9

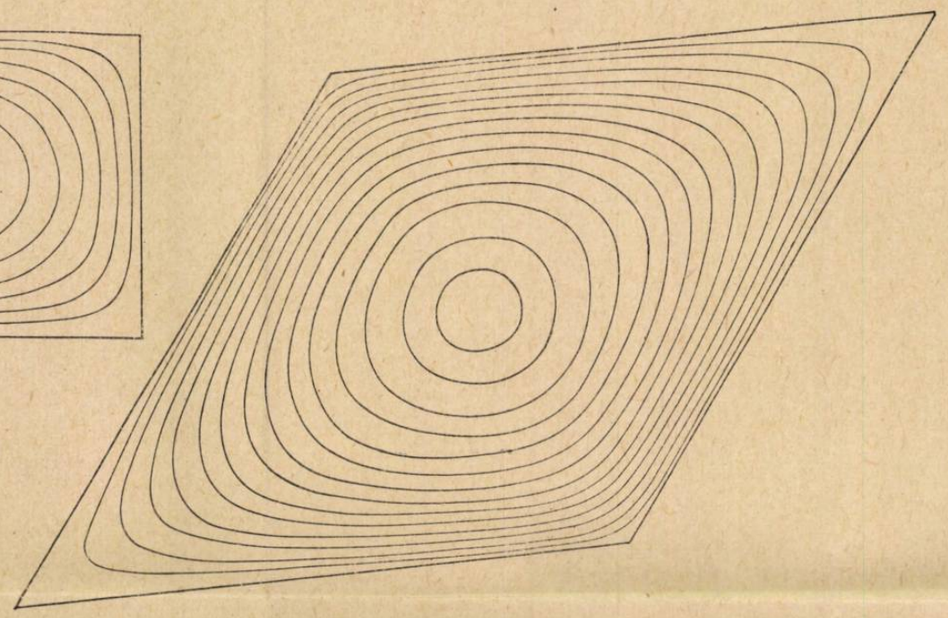


Fig. 10

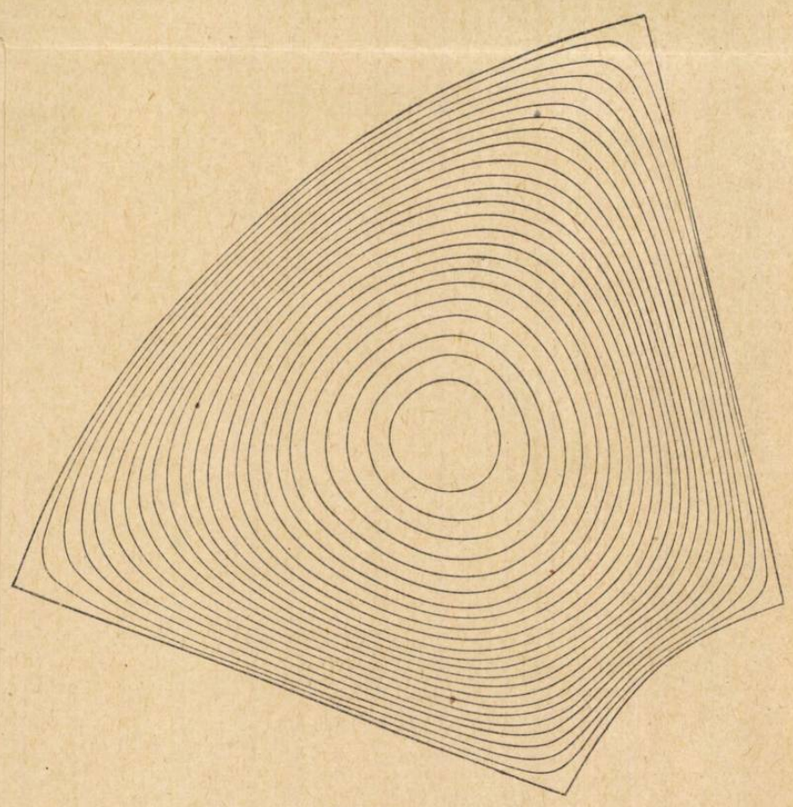


Fig. 11

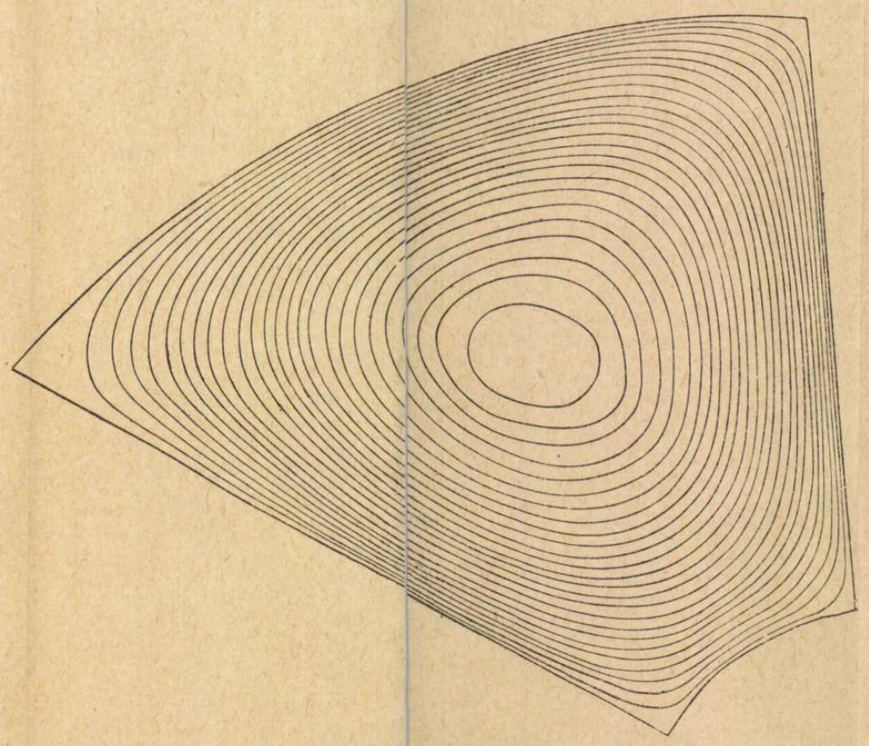


Fig. 12

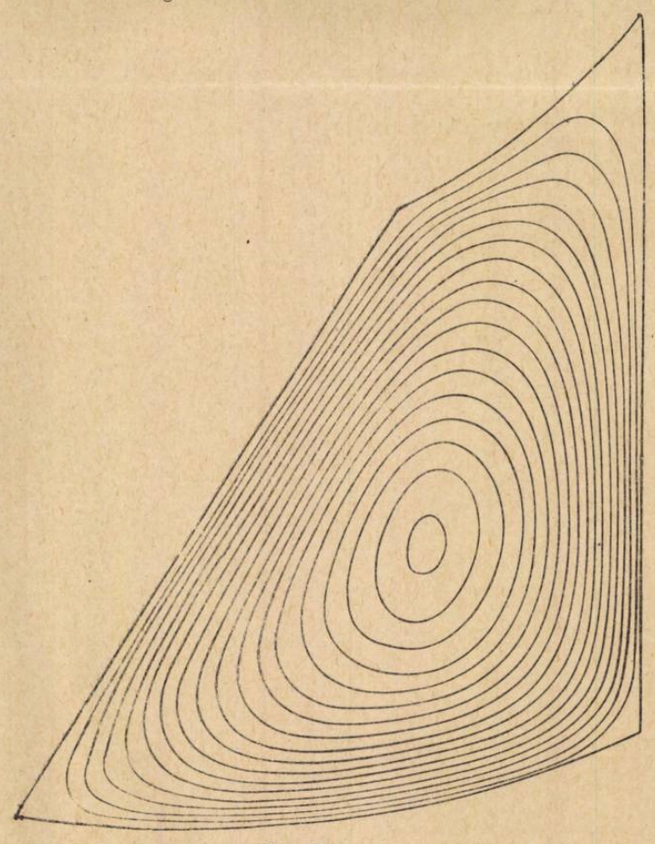


Fig. 13

Principalele avantaje ale membranei de cauciuc față de pelicula de săpun, constau în stabilitatea și durabilitatea ei, ceea ce contribuie la ușurarea procesului experimental de măsurare. În același sens influențează și faptul că se poate folosi un orificiu cu o suprafață mult mai mare. Aceasta permite o mărire a coordonatelor de măsurat și deci o creștere sensibilă a preciziei măsurătorilor.

Determinări experimentale. Cu ajutorul aparatului prezentat aici și ținînd seama de indicațiile făcute în cele studiate mai sus, s-au executat măsurători

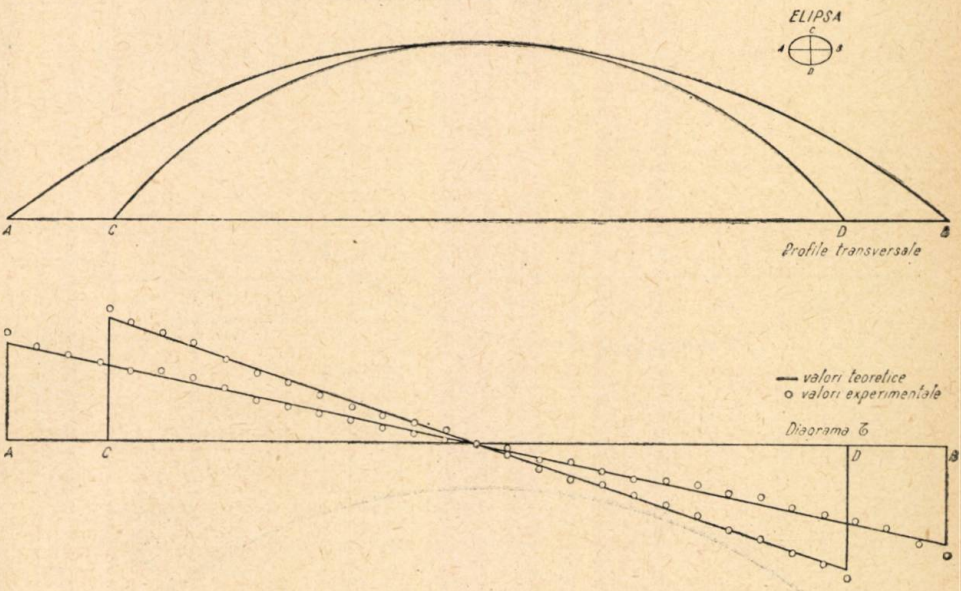


Fig. 14

pentru 9 profile. Curbele de nivel ale membranelor reprezentînd curbele tangente la eforturile de lunecare sînt date în figurile 5—13. Suprafețele orificiilor asupra cărora s-au efectuat măsurătorile au fost de circa 50—70 cm². Ordonatele au fost măsurate pentru fiecare profil în cîte aproximativ 300 de puncte (la intervale de 5 mm), dispuse după o rețea rectangulară. Timpul necesar studierii complete a oricărui profil (cu contur simplu conex) este de 2 ore pentru prelucrarea orificiului în capacul cutiei cu membrană, 3—4 ore pentru măsurarea ordonatelor și 2 ore pentru diagrame și sistematizarea datelor experimentale. Menționăm însă că experiența a arătat că nu sînt necesare atîtea determinări de ordonate, ceea ce permite o reducere a timpului de lucru.

La profilele de forma: triunghi echilateral, elipsă și pătrat, pentru care există soluții teoretice exacte, se dau diagrame comparative, care scot în evidență exactitatea procedeului și că, în linii generale, erorile sînt sub limitele indicate mai sus (fig. 14, 15, 16). Valorile experimentale au fost prelucrate cu relațiile (14″) unde α corespunde membranei circulare auxiliare. Pentru verificarea preciziei la pătrat s-au determinat valorile exacte ale eforturilor după relații date în teoria elasticității, calculîndu-se pentru fiecare din cele 15 puncte cîte 10 termeni ai seriei.

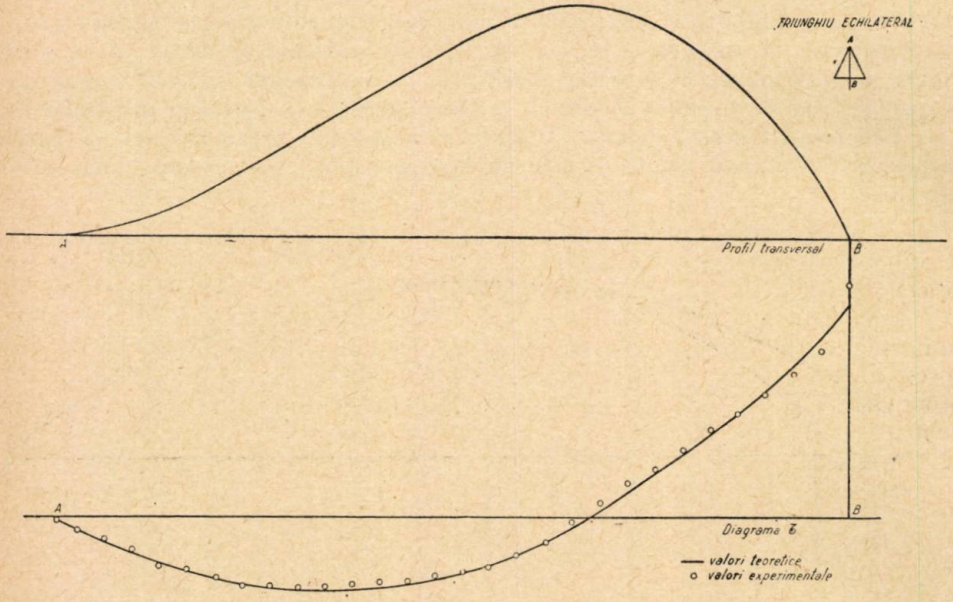

TRIUNGHIU ECHILATERAL
A
B
Profil transversal
Diagrama τ
valori teoretice
valori experimentale

Fig. 15

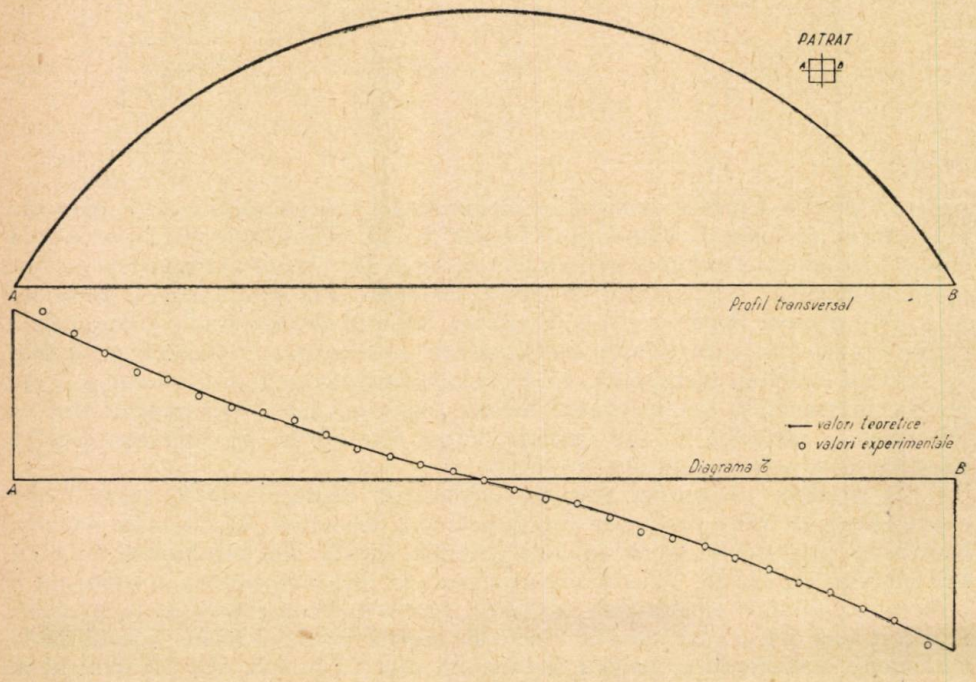

PATRAT
A
B
Profil transversal
valori teoretice
valori experimentale
Diagrama τ

Fig. 16

CONCLUZII

În lucrarea de față se face un studiu al preciziei metodei analogiei cu membrană, se recomandă o modificare a calculului convențional practicat pînă acum, care permite reducerea la jumătate a erorii metodei, se prezintă aparatul dezvoltat în Secția de mecanică generală a Institutului de mecanică aplicată cu ameliorările aduse în ultima vreme, avînd de scop, pe de o parte să permită citirea rapidă a ordonatelor și pe de altă parte să mențină constantă cît mai mult timp curbura suprafeței prin mijlocirea unui dispozitiv adițional original pentru reglajul fin al presiunii. De asemenea, se dau rezultatele măsurătorilor efectuate asupra a 9 profile precum și diagramele comparative cu soluția exactă pentru 3 din aceste profile.

În concluzie, se poate afirma că metoda de studiu și procedeul de lucru așa cum au fost expuse aici asigură obținerea unor rezultate cu erori în limitele corespunzătoare preciziei cerute de orice problemă tehnică. În consecință, s-a programat și început folosirea acestei metode în paralel cu alte metode de analogie pentru diferite probleme din mecanica corpurilor deformabile.

Primită la redacție la 20.I.1956.

К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АНАЛОГИИ С МЕМБРАНОЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор исследует точность метода аналогии с мембраной рекомендуя внести изменение в применяемый до настоящего времени условный расчет, позволяющее на половину сократить ошибки этого метода, и описывает аппарат, разработаный в стране, с усовершенствованиями, внесенными в последнее время, для того чтобы дать возможность, с одной стороны, быстро отсчитывать ординаты, а с другой стороны возможно дольше поддерживать постоянство кривизны поверхности посредством оригинального дополнительного приспособления для точного регулирования давления. Приводятся также результаты измерений 9 профилей и сравнительные диаграммы с точными решениями для 3 из этих профилей.

Автор утверждает, что описываемые им метод исследования и рабочие приемы обеспечивают результаты с ошибками, не выходящими за пределы точности, требуемой любой технической задачей. Вследствие этого, применение данного метода было запланировано и начато параллельно с другими аналогичными методами для решения различных задач механики деформирующихся тел.

CONTRIBUTION À L'APPLICATION DE L'ANALOGIE À MEMBRANE À L'ÉTUDE DES TENSIONS À LA TORSION

(RÉSUMÉ)

Ce travail est consacré à l'étude de la précision de la méthode de l'analogie à membrane. L'auteur recommande une modification du calcul conventionnel en usage à ce jour, modification permettant de réduire à moitié l'erreur de la

méthode. Suit une description de l'appareil, mis au point à la Section de Mecanique générale de l'Institut de Mécanique appliquée, et des améliorations qui y ont été apportées dernièrement, permettant une lecture rapide des ordonnées et, par ailleurs, de maintenir constante, le plus longtemps possible, la courbure de la surface, à l'aide d'un dispositif additionnel, original, de réglage fin de la pression. On trouvera également dans ce travail les résultats des mesures effectuées sur 9 profils ainsi que les diagrammes comparés et la solution exacte, pour 3 des profils ci-dessus.

En conclusion, l'auteur estime que la méthode d'étude et le procédé pratique qu'il a exposés assurent des résultats dont les erreurs ne dépassent pas le degré d'exactitude exigé pour tout problème technique. En conséquence, cette méthode a été portée au programme; parallèlement à d'autres méthodes d'analogie, elle est appliquée à différents problèmes de la mécanique des corps déformables.

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. Filonenco-Borodici, Teoria elasticității. Ed. tehnică, București, 1952.
2. L. Prandtl, *Zur Torsion von prizmatischen Stäben*. Physikalische Zeitschrift, 1903, nr. 4, p. 758.
3. H. Quest, *Eine experimentelle Lösung des Torsionproblems*. Ingenieur-Archiv, 1933, vol. IV, nr. 5, p. 510.
4. K. B. Biezeno i R. Grammel, *Tehniceskaia dinamika*. Moscova-Leningrad, 1950.
5. *** *Maşinostroenie*. Moscova, vol. 1, part. 11, cap. IV.
6. R. D. Mindlin a. M. Salvadori, *Analogies*, în *Handbook of Experimental Stress Analisis*. Ed. M. Heteny, New York, 1950, p. 700.
7. A. A. Griffith a. G. I. Taylor, *The Use of Soap Films in Solving Torsion Problems*. Great Brit. Rep. and Mem. Aeronautical Research Comm (Lond'. Reports and Memoranda, 1917—1918, vol. 3, nr. 333.
8. H. L. Supper, *Photoélasticité et Apsidométrie*. Public. Scient. et Techn. du Min. de l'Air, Paris, 1937, nr. 106.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

ASUPRA UTILITĂŢII CARACTERISTICII $p = f(V)$ LA LAGĂRELE CIRCULARE DE ALUNECARE

DE

GH. VASILCA

În practică, una din condițiile funcționale de bază impuse lagărelor de alunecare, în care are loc o frecare lichidă, este siguranța că, în timpul funcționării în regim continuu, temperatura nu depășește anumită limită. Dacă în lagăr se produce, timp îndelungat, o cantitate de căldură mai mare decît aceea care poate fi evacuată, temperatura lui crește continuu ducînd la gripări și deci la scoaterea din funcțiune. Griparea se poate datora scăderii proprietăților mecanice ale materialului antifricțiune, scăderii viscozității uleiului sub valoarea prin care se asigură portanța necesară în lagăr, acestor efecte împreună, precum și altor cauze.

Stabilitatea termică a lagărului în timpul funcționării se produce, după cum se știe, cînd se realizează echilibru între căldura generată și căldura evacuată prin elementele de construcție ale lagărului și prin lubrifiant.

În cazurile cele mai curent întîlnite în construcția de mașini, a lagărelor de alunecare circulare, echilibrul termic poate fi exprimat prin relația

$$\left(\frac{d \cdot b}{427}\right) f \cdot p \cdot V = Q_e,$$

unde

b/d este alungirea lagărului,
f — coeficientul de frecare din lagăr,
p — presiunea specifică medie în lagăr,
V — viteza periferică a fusului și
Q_e — căldura totală evacuată și împrăștiată în unitate de timp.

Pentru un echilibru termic dat și stabil, concretizat de exemplu prin constanța temperaturii t_c a cuzinetului, relația de mai sus poate fi scrisă sub forma

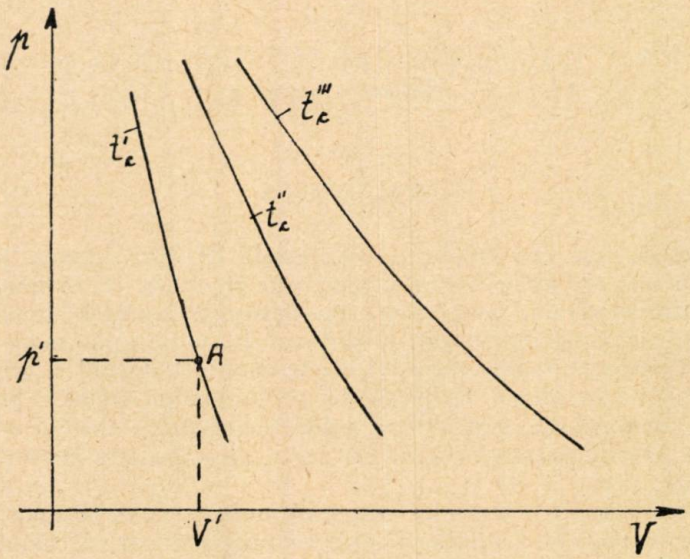
$$f \cdot p \cdot V = \frac{427}{d \cdot b} Q_e = \text{const.}$$

Pentru o altă stare de echilibru, constanta din membrul al doilea ia altă valoare.

Existența coeficientului de frecare f ca parametru variabil, alături de p și V, într-o stare de echilibru termic într-un lagăr de alunecare, este astăzi

pe deplin dovedită. Viscozitatea lubrifiantului, de care depinde f, variază, într-un regim termic dat și pentru aceleași valori ale celorlalte elemente, atît cu presiunea cît și cu viteza.

Caracterizarea stabilității termice a unui lagăr de alunecare prin relația $p.V = \text{const.}$, care se mai practică și în prezent, presupune pentru simplificare $f = \text{const.}$ Această ipoteză conduce, în cele mai multe cazuri, la supradimensionarea peste măsură a lagărelor, iar în alte cazuri la construcții care nu dau satisfacție.



Pentru că materialul antifricțiune influențează și el frecarea în lagăr, cel puțin în anumite regimuri de funcționare, fapt constatat și în trecut, relația $p.V = \text{const.}$ se dă pentru un anumit material. Valorile constantelor au în majoritatea cazurilor mai mult caracterul unor date de exploatare, decît pe acela al unor rezultate obținute prin cercetări experimentale.

În felul acesta s-a căutat să se țină seama la caracterizarea funcțională a lagărelor de alunecare și de proprietățile antifricțiune ale materialelor utilizate în construcția lor.

Apărînd materiale antifricțiune noi, ele se cer a fi introduse în construcția lagărelor atît pentru proprietățile de alunecare, la unele din ele mai favorabile, cît și pentru a înlocui pe acelea obișnuite dar mai greu de procurat.

O dată cu studiile de elaborare se determină la aceste materiale în general proprietățile lor chimice, fizice și mecanice, precum și coeficientul de frecare pe eșantioane simple.

Se pune deci problema ca pentru materialele antifricțiune noi să se aleagă și apoi să se determine acei parametri funcționali, care să ducă pe proiectant la o construcție de lagăr economică, dar și cu siguranța necesară de funcționare, condiții pe care trebuie să le îndeplinească orice organ de la mașinile moderne.

La lagărele circulare, o caracteristică care răspunde în mare măsură acestor cerințe, poate fi considerată

$$p = f(V),$$

corespunzătoare unui regim de funcționare continuu și termic stabil.

În acest caz p este presiunea medie pe suprafața proiectată a lagărului, iar V viteza periferică relativă a suprafețelor de lucru. Curba se determină pe cale experimentală prin varierea unuia din parametri și restabilirea echilibrului termic prin ajustarea celui de-al doilea. Lagărul este alimentat în tot acest timp cu ulei la presiune și temperatură constantă. Drept criteriu pentru aprecierea stabilității termice a lagărului se poate lua temperatura t_c a cuzinetului experimental. La fiecare regim termic stabil t_c'', t_c''', t_c^{IV} etc., corespunde cîte o curbă $p = f(V)$, de forma celor arătate în figură.

Ceilalți parametri experimentali sînt: alungirea lagărului λ, jocul relativ ψ, microgeometria suprafețelor de alunecare, lubrifiantul, condițiile de alimentare cu lubrifiant, suprafața de răcire a corpului cuzinetului, materialul fusului etc.

Caracteristica funcțională $p = f(V)$ prezintă următoarele avantaje din punct de vedere al aplicațiilor practice.

1. CALCULAREA ȘI PROIECTAREA RAPIDĂ A LAGĂRELOR

Lagărele mai puțin pretențioase, de importanță mijlocie și secundară care constituie în construcția de mașini marea majoritate, pot fi calculate și proiectate, pentru un regim termic de funcționare dat sau admis, cu multă ușurință.

Datele proiectului sînt în acest caz: sarcina pe lagăr P, numărul de rotații al fusului, precum și temperatura maximă admisă în cuzinet, impusă de materialul antifricțiune, de lubrifiant, condiții de răcire etc.

Calculînd diametrul d al fusului la rezistență, viteza periferică V' rezultă din turație, iar pentru regimul termic dat, de exemplu t_c', se ia din diagramă p' (punctul A din figură).

Lățimea cuzinetului rezultă astfel imediat din

$$b = \frac{P}{p' \cdot d}.$$

Dacă b conduce la o alungire diferită de aceea corespunzătoare curbei t_c', se variază în mod corespunzător d, sau se lucrează cu o curbă avînd același t_c' însă cu un alt raport b/d. Ceilalți parametri ai lagărului proiectat vor fi admiși în concordanță cu aceia experimentali ai curbei respective.

Pentru lagărele exacte și cu regim de funcționare sever curbele $p = f(V)$ vor servi pentru verificarea calculelor.

2. SIGURANȚA UNEI FUNCȚIONĂRI TERMIC STABILE A LAGĂRELOR

Lagărele calculate sau verificate pe această cale prezintă siguranța că funcționează termic stabil, deoarece curbele $p = f(V)$ includ, iar nu elimină, variația coeficientului de frecare f cu presiunile, vitezele și cu celelalte elemente ale lagărului.

3. ALEGEREA UȘOARĂ A MATERIALELOR, DATELOR DE CONSTRUCȚIE ȘI A UNGERII, OPTIME DIN PUNCT DE VEDERE TEHNIC ȘI ECONOMIC

Datele de proiectare ca sarcina, viteza, regimul termic stabil și altele pot fi realizate cu lagăre din materiale și cu elemente constructive diferite. Dispunînd pentru același regim termic de curbe $p = f(V)$ pentru mai multe materiale antifricțiune, pentru diferiți lubrifianți și condiții de alimentare cu ulei, pentru diferite alungiri, jocuri și alți parametri geometrici, se poate alege curba $p = f(V)$ pentru calcul sau verificare, cu ajutorul căreia se realizează cel mai exact datele proiectului. Se obține astfel soluția optimă din punct de vedere al funcționării, adică tehnică. Dacă se pune accentul mai mult pe latura economică se alege soluția, calitativ tehnic următoare, cu materialul antifricțiune, lubrifiant etc. mai ieftine.

4. DETERMINAREA CARACTERISTICII $p = f(V)$ NU ESTE PREA COSTISITOARE

Lucrările experimentale pentru ridicarea acestor diagrame pot fi efectuate pe mașini relativ simple și utilizînd o aparatură de măsură și control de construcție curentă. Spre deosebire însă de mașinile utilizate în general pentru studii de laborator, la această mașină elementele constructive ale lagărului experimental este de dorit să fie cît mai apropiate de acelea întîlnite în practică. Prin aceasta pot fi realizate cu ușurință, la lagărul proiectat, condițiile de evacuare și împrăștiere a căldurii, existente la lagărul experimental.

5. PE BAZA CARACTERISTICII $p = f(V)$, MATERIALUL ANTIFRICȚIUNE NOU POATE FI INTRODUS DIRECT ÎN PRACTICĂ

Studiile experimentale, din punct de vedere funcțional, asupra materialelor antifricțiune efectuate pînă în prezent și cunoscute, se referă în majoritatea cazurilor la cîte o proprietate luată izolat. Ca de exemplu variația coeficientului de frecare f cu viteza, cu sarcina și cu temperatura. S-a studiat comportarea materialului în condițiile de ungere limită, la viteze foarte mici, la temperaturile maxime de distrugere pe care le poate suporta și altele. Cu ce sarcină poate fi încărcat însă lagărul la o viteză dată, ca să prezinte siguranță de funcționare în condițiile practice, parametrii studiați răspund numai indirect.

Caracteristica $p = f(V)$ redă rezultatul influențelor individuale și reciproce a tuturor parametrilor funcționali ai lagărului. Asupra unui lagăr construit pe aceste baze nu mai apare deci necesar să se facă rezerve în ceea ce privește stabilitatea termică în funcționare. Diferențele inevitabile între elementele lagărului proiectat și ale aceluia experimental, pot conduce la temperaturi de regim stabil realizate puțin diferite. Se pot însă lua cu ușurință măsuri ca aceste abateri să fie în sensul coborîrii temperaturii de regim, mărind astfel și mai mult siguranța de funcționare a lagărului.

Mai trebuie menționat că, reprezentînd stări de funcționare rezultante, relațiile $p = f(V)$ pot servi la verificarea concluziilor studiilor teoretice asupra lubrificației în lagărele de acest fel. Aceasta poate fi considerat ca deosebit de important din punctul de vedere al aplicațiilor în practică a studiilor teoretice.

Determinarea caracteristicilor $p = f(V)$, pentru unele materiale antifricțiune de înlocuire este în curs, rezultatele urmînd a fi publicate ulterior.

Primită la redacție la 19 I. 1956

О ПОЛЕЗНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p = f(V)$ ДЛЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Более полная функциональная характеристика антифрикционных материалов, применяемых для изготовления кольцевых подшипников скольжения, может быть получена из соотношения

$$p = f(V)$$

для данного теплового режима t_c'. Для одного и того же подшипника кривая определяется опытным путем, например путем изменения периферической скорости V и восстановления теплого равновесия ($t_c' = const.$) подбором удельной нагрузки p. Можно также определить кривые для различных антифрикционных материалов, различных удлинений λ, зазоров ψ и т. д. подшипника, для многих видов и условий смазки, а также и для различных тепловых режимов работы. При помощи таких сеток кривых, можно легко, при проектировании, выбрать антифрикционный материал, смазку, геометрические элементы подшипника и т. п., наиболее подходящие с технической и экономической точек зрения. Подшипники, изготовленные на этой основе, гарантируют при соответствующем режиме постоянную работу с термической точки зрения.

SUR L'UTILITÉ DE LA CARACTÉRISTIQUE $p = f(V)$ POUR LES PALIERS CIRCULAIRES DE GLISSEMENT

(RÉSUMÉ)

Une caractéristique fonctionnelle plus complète des matériaux antifriction, utilisés à la construction des paliers circulaires de glissement, peut être obtenue par la relation

$$p = f(V)$$

qui correspond à un régime thermique donné t_c'. Pour un même palier, la courbe est déterminée par voie expérimentale en faisant varier la vitesse périphérique V, par exemple, et en rétablissant l'équilibre thermique ($t_c' = \text{const.}$) par ajustement de la charge spécifique p. On peut déterminer de telles courbes pour différents matériaux antifriction, pour différents allongements λ, jeux ψ, etc. du palier, pour plusieurs lubrifiants et conditions de graissage, ainsi que pour divers régimes thermiques de fonctionnement. A l'aide de semblables réseaux de courbes, on peut aisément choisir, à l'établissement d'un projet, le matériel antifriction, le lubrifiant, les éléments géométriques du palier, etc., les plus indiqués au point de vue technique et économique. Les paliers construits en vertu de ces données offrent la garantie d'avoir, en régime correspondant, un fonctionnement stable du point de vue thermique.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

VIBRAŢII

APLICAREA ANALOGIILOR ELECTRICE LA STUDIUL VIBRAŢIILOR MEDIILOR ELASTICE

DE

AUGUSTIN PETRE

Problema care se punea era de a calcula comportarea unui corp elastic sau a unor sisteme de corpuri elastice supuse la sarcini variabile în timp.

Pentru a limita pentru moment problema, se consideră un singur corp elastic de formă oarecare.

Ecuaţiile care stau la dispoziţie din teoria elasticităţii sînt următoarele:

Ecuaţii de echilibru:

1. ECUAŢIILE LUI NAVIER

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho\left(g_x - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0\,,\\
&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho\left(g_y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = 0\,,\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho\left(g_z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

2. CONDIŢIILE DE SUPRAFAŢĂ

$$\begin{aligned}
p_{xv} &= \sigma_x \cos(vx) + \tau_{xy} \cos(vy) + \tau_{xz} \cos(vz)\,,\\
p_{yv} &= \tau_{yx} \cos(vx) + \sigma_y \cos(vy) + \tau_{yz} \cos(vz)\,,\\
p_{zv} &= \tau_{zv} \cos(vx) + \tau_{zy} \cos(vy) + \sigma_z \cos(vz)\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ecuaţiile geometrice ţinînd seama de ecuaţiile fizice (legea generalizată a lui Hooke) scrise sub forma Mitchell, ţinînd seama şi de forţele masice, sînt

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{1-\mu}\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\rho\frac{\partial X}{\partial x},$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{1-\mu}\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\rho\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{1-\mu}\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\rho\frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

$$\nabla^2\tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x} = -\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right), \qquad (3)$$

$$\nabla^2{}_{xy} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = -\rho\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

unde $X = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g_x$, iar $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon$.

$$Y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - g_y$$

$$Z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - g_z,$$

Rezolvarea acestor ecuații, pe cale matematică este foarte grea și nu se cunosc soluții decît în cîteva cazuri cu totul particulare.

Pentru soluționare, calea matematică fiind grea, se poate utiliza calea fizică. Va trebui pentru aceasta să se construiască un sistem fizic analog care să asculte de aceleași ecuații matematice ca și sistemul elastic considerat.

În ceea ce privește posibilitatea de aplicare a mărimilor perturbatoare și a măsurii mărimii ce reprezintă soluția ecuațiilor de mișcare a sistemului perturbat, cea mai comodă analogie este cea electrică.

Construirea modelului elastic pe cale electrică prezintă însă unele dificultăți.

Mărimile din elasticitate se reprezintă matematic prin tensori de ordinul II pe cînd cele din electricitate se reprezintă prin tensori de ordinul I. Va trebui să se facă o contracție în ecuațiile electricității pentru a le aduce la forma matematică de aceeași natură cu cea electrică corespunzătoare.

Pentru aceasta se vor face operații analoge celor ce s-au făcut pentru a se obține ecuațiile elasticității, respectiv se va scrie echilibrul unui element foarte mic al corpului nostru elastic considerat, element considerat ca punct material. Pentru asigurarea echilibrului va trebui să se introducă legături electrice între acest element și cele vecine în direcțiile axelor de coordonate. Fără a trece la ecuațiile diferențiale se poate construi echivalentul electric al acestui element modelînd ecuațiile de mișcare a acestuia în trei direcții. Teoretic se poate lua acest element oricît de mic, rezultînd în consecință un număr mare de circuite echivalente. Practic se va opri la un element suficient de mic pentru a avea o precizie tehnică și totuși îndeajuns de mare pentru a nu intra un număr prea mare de astfel de elemente în compunerea corpului considerat.

Ecuațiile cu derivate parțiale din teoria elasticității sînt astfel înlocuite cu un sistem de ecuații cu diferențe.

Ecuațiile cu diferențe puteau fi deduse și direct din ecuațiile teoriei elasticității prin înlocuirea derivatei prin rapoarte de diferențe.

De exemplu:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 2\,\frac{\dfrac{\Delta_x\theta_{i,j,k}}{\Delta x_i} - \dfrac{\Delta_x\theta_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}},$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 2\,\frac{\dfrac{\Delta_y\theta_{i,j,k}}{\Delta y_j} - \dfrac{\Delta_y i,j-1\,k}{\Delta y_{j-1}}}{\Delta y_j - \Delta y_{j-1}}. \qquad (4)$$

— — — — — — — — —

Se observă însă că unele tipuri de diferențe obținute, respectiv cele provenind din derivate de forma $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}$ nu corespund nici unei legături ce asigură echilibrul elementului finit în direcția celor trei axe x, y, și z.

Prezența acestor termeni ce reprezintă variația într-o direcție a variației funcției în altă direcție, necesită introducerea de legături suplimentare diagonale.

Explicația fizică a necesității acestor legături se poate face imediat observînd că termenii de această formă intervin în legătură cu componentele tangențiale a tensorului eforturilor unitare sau cu cele de lunecare în tensorul deformațiilor.

Rețeaua formată, ca și coordonatele carteziene sau cele curbilinii ortogonale, avînd puncte materiale în noduri, nu este suficientă pentru a reda proprietățile elastice ale unui corp. O astfel de rețea de legături elastice nu poate prelua solicitări ce ar produce în continuu eforturi unitare tangențiale.

Trebuie deci să se folosească o rețea ce leagă punctele materiale cu cel puțin o legătură mai mult decît cele paralele cu axele de coordonate și astfel dispuse încît orice solicitare să poată fi preluată fără a se produce local solicitări infinite în legături sau deformații indefinite care să nu poată fi implicate de dispoziția legăturilor. Vor trebui deci introduse în plus pentru starea spațială de efort unitar trei legături diagonale suplimentare în cele trei plane de coordonate formate de celelalte legături.

Corpul considerat de masă continuă în spațiu se găsește astfel descompus într-un număr de puncte materiale legate prin legături elastice. Timpul ca variabilă independentă, rămîne mai departe ca variabilă independentă.

În ceea ce privește construirea sistemului analogic propriu-zis cu observațiile de mai sus se poate face prin metodele clasice.

Se poate lua drept coordonate generalizate în sensul lui Lagrange sarcinile electrice Q, așa cum a făcut Maxwell. În acest caz rolul vitezei generalizate îl are curentul, iar rolul forței generalizate P îl are tensiunea.

Un alt sistem de analogii electromecanice se poate forma folosind drept coordonate generalizate, fluxurile magnetice $\psi = \int u\,dt$.

În acest caz rolul vitezei îl are tensiunea $u = \dfrac{d\psi}{dt}$, iar rolul forței generalizate îl are curentul i.

Ehivalența sistemului mecanic cu cel electric are loc dacă ecuațiile de mișcare sînt identice. Aceasta are loc dacă în primul rînd operațiile asupra variabilei sînt

aceleași și constantele sînt aceleași. În privința operatorilor analitici s-a văzut că se poate realiza echivalența. În privința constantelor, în electricitate avem rezistențe, capacități și inductanțe. În circuitele mecanice elementele analoge sînt: frecarea, masa și elasticitatea.

Pentru a putea construi rețeaua echivalentă celei mecanice trebuie întîi să se construiască circuitele mecanice. Pentru aceasta se va observa că sursele mecanice de forță sînt compuse atît din acțiune cît și din reacțiune lucrînd ca un dipol. Viteza se consideră ca viteză relativă de deplasare a capetelor. Frecarea vîscoasă se reprezintă tot printr-un dipol iar forța de frecare este proporțională cu viteza relativă a elementului considerat. Elasticitatea și masa se reprezintă și

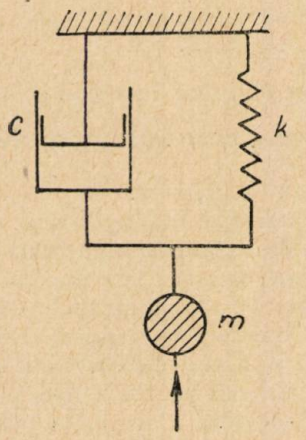


Fig. 1

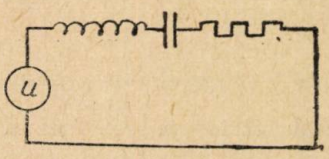


Fig. 2

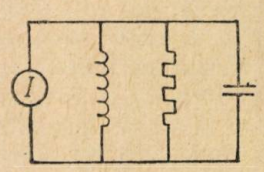


Fig. 3

ele prin dipoli. În cazul masei un punct este fix, de exemplu, dacă este legat de pămînt. Elementele maselor nu pot fi legate decît în paralel, unul din capete fiind la pămînt.

Ecuația de mișcare a unei mase dintr-un asemenea sistem mecanic (fig. 1) este:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + \frac{1}{k}u = F(t), \tag{5}$$

respectiv suma forțelor este egală cu zero.

În modelul electric (fig. 2) suma tensiunilor fiind egală cu zero, rezultă:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = u(t). \tag{6}$$

Celălalt sistem de analogie spune că suma curenților dintr-un nod este egală cu zero

$$C\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L}\psi = I(t). \tag{7}$$

În acest sistem (fig. 3) schema este perfect analogă cu cea mecanică.

Condițiile pentru similitudine se obțin transformînd ecuațiile de mai sus în ecuații adimensionale.

Este interesant de remarcat că măsura timpului din model poate fi diferită de măsura timpului din sistemul mecanic.

Se pune problema în cazul considerat de a reprezenta o rețea spațială. Rețeaua electrică analogică utilizînd dipoli nu poate da dispoziția nodurilor în spațiu. Timpul rămîne ca variabilă, însă spațiul nu.

Pentru a rezolva problema se va ține seama de efectul unui nod în plan. În legăturile ce alcătuiesc nodul există forțe. Aceste forțe vor trebui să fie în echilibru. De aici rezultă relații între ele. Totdeauna o forță introdusă de o legătură plus forța masică exterioară, se va transforma într-un anumit raport în celelalte legături. Această schimbare a forțelor într-un raport constant și cunoscut se poate face pentru analogicul electric cu ajutorul transformatorilor. Se poate utiliza, în funcție de analogia folosită, fie transformatori de tensiune, fie transformatori de curent.

Pentru a verifica precizia metodei, va trebui să se modeleze un corp ale cărui ecuații de mișcare se pot integra și se cunoaște soluția, să se construiască rețeaua analogică și să se soluționeze apoi ecuațiile de mișcare a rețelei care îl reprezintă. Comparînd rezultatele se poate vedea aproximația făcută.

Se consideră de exemplu o bară de secțiune și masă constantă pe toată lungimea ei. Modurile normale de vibrații ale acestei bare sînt cunoscute. În ceea ce privește condițiile de rezemare, bara s-a presupus încastrată la un capăt și liberă la celălalt.

Deoarece se urmăresc modurile de vibrații proprii pentru a se putea găsi frecvențele de rezonanță, se va ține seama numai de forțe masice.

Într-o deformație arbitrară a barei, forțele masice produc în general o stare spațială de efort unitar.

Întrucît prin ipoteză nu se depășește limita de proporționalitate a materialului, respectiv avînd de-a face cu ecuații liniare, principiul superpoziției este valabil.

Se poate considera deci că starea spațială de efort unitar rezultă din suprapunerea a trei stări plane de efort unitar în planele xoy, xoz și yoz [3] *).

Se alege ca axa x axa barei iar y și z axele principale ale secțiunei ei.

Pentru simplificarea calculelor se prespune că bara are o secțiune circulară.

Reprezentarea ei prin rețea se face în felul următor. Se descompune bara într-o serie de cuburi mici. Presupunem masa acestor cuburi concentrată în centrele de greutate. Introducem pentru preluarea eforturilor unitare normale prin suprafețe, legături elastice normale la suprafața elementului. Introducem pentru preluarea eforturilor unitare tangențiale legături elastice diagonale.

Se aproximează masa barei, de exemplu prin 20 de puncte materiale ca în figura 4. În acest caz punctele materiale vor reprezenta masa unui volum mărginit de patru forțe plane și una cilindrică (suprafața barei).

Ca moduri de vibrație care dau frecvențele cele mai joase sînt fundamentale și primele armonice în vibrații laterale și fundamentale și primele armonice în vibrațiile de răsucire.

În aceste cazuri neavînd componente τ_x putem să ne dispensăm de legăturile diagonale din planele paralele cu zoy.

Suprapunînd efectele rezultă frecvențele proprii pentru cazul general.

*) § 23, asupra adunării tensorilor.

Se consideră în primul rînd vibrațiile laterale ale barei. Considerînd bara cu masa continuă frecvența fundamentală este

$$f = \frac{3{,}515}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_z g}{A\gamma l^4}} . \tag{8}$$

Rețeaua ce aproximează bara, pentru vibrații laterale respectiv pentru problema plană se vede în plan ca în figura 5. Masele din noduri sînt suma

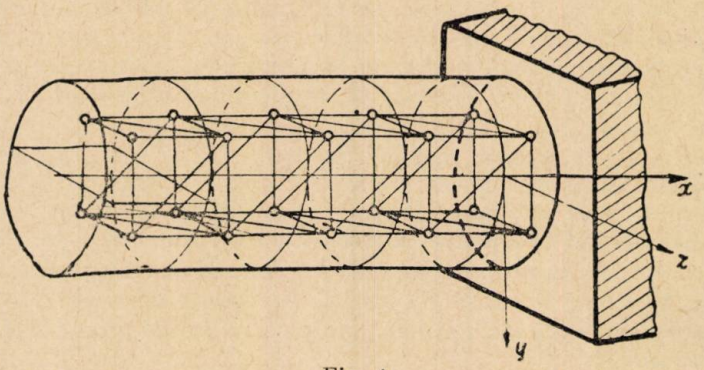


Fig. 4

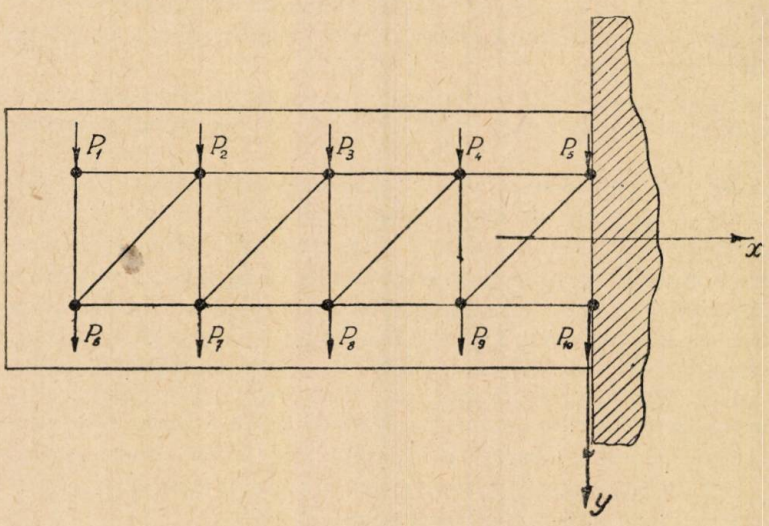


Fig. 5

maselor ce se proiectează în plan pe acestea. Sînt distincte astfel numai 10 puncte materiale.

Se notează cu k_1, k_2, k_3 respectiv elasticitatea legăturilor orizontale, verticale și diagonale. Elasticitatea se măsoară în cm/kg.

Se presupune că asupra nodurilor lucrează forțe arbitrare masice P_1, $P_2 \ldots P_{10}$.

Forțele care acționează asupra legăturilor sînt următoarele

Legătura	Forțele
1—6	P_1
2—7	$P_1 + P_6 + P_2$
3—8	$P_1 + P_6 + P_2 + P_7 + P_3$
4—9	$P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4$
1—2	—
2—3	$\dfrac{P_1 + P_6}{\operatorname{tg}\alpha}$
3—4	$\dfrac{P_1 + P_6 + P_2 + P_7}{\operatorname{tg}\alpha}$
4—5	$\dfrac{P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8}{\operatorname{tg}\alpha}$
6—7	$\dfrac{P_1 + P_6}{\operatorname{tg}\alpha}$
7—8	$\dfrac{P_1 + P_6 + P_2 + P_7}{\operatorname{tg}\alpha}$
8—9	$\dfrac{P_1 + P_6 + P_2 + P_7 + P_3 + P_8}{\operatorname{tg}\alpha}$
9—10	$\dfrac{P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4+P_9}{\operatorname{tg}\alpha}$
2—6	$\dfrac{P_1 + P_6}{\sin\alpha}$
3—7	$\dfrac{P_1 + P_6 + P_2 + P_7}{\sin\alpha}$
4—8	$\dfrac{P_1 + P_6 + P_2 + P_7 + P_3 + P_8}{\sin\alpha}$
5—9	$\dfrac{P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4+P_9}{\sin\alpha}$

Energia potențială înmagazinată prin deformație de sistem sub sistemul de sarcini $P_1 - P_{10}$ va fi $\sum \dfrac{P_i^2 k_i}{2}$ respectiv luînd $\alpha = 45^\circ$ rezultă

$$V = \frac{k_1}{2}[2(P_1+P_6)^2 + 2(P_1+P_6+P_2+P_7)^2 + 2(P_1+P_6+P_2+P_7+ + P_3+P_8)^2 + (P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4+P_9)^2] + + \frac{k_2}{2}[P_1^2 + (P_1+P_6+P_2)^2 + (P_1+P_6+P_2+P_7+P_3)^2 + + (P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4)^2] + + k_3[(P_1+P_6)^2 + (P_1+P_6+P_2+P_7)^2 + (P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+ + P_8)^2 + (P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4+P_9)^2] \tag{9}$$

Deformațiile sub forțe sînt $y_i = \dfrac{\partial V}{\partial P_i}$ respectiv

$$y_1 = k_1(7P_1 + 7P_6 + 5P_2 + 5P_7 + 3P_3 + 3P_8 + P_4 + P_9) + + k_2(4P_1 + 3P_6 + 3P_2 + 2P_7 + 2P_3 + P_4 + P_8) + + k_3(8P_1 + 8P_6 + 6P_2 + 6P_7 + 4P_3 + 4P_8 + 2P_4 + 2P_9),$$

$$
\begin{aligned}
y_6 &= k_1(7P_1+7P_6+5P_2+5P_7+3P_3+3P_8+P_4+P_9)+\\
&+k_2(3P_1+3P_6+3P_2+2P_7+2P_3+P_4+P_8)+\\
&+k_3(8P_1+8P_6+6P_2+6P_7+4P_3+4P_8+2P_7+2P_9),\\
y_2 &= k_1(5P_1+5P_6+5P_2+5P_7+3P_3+3P_8+P_4+P_9)+\\
&+k_2(3P_1+3P_6+3P_2+2P_7+2P_3+P_8+P_4)+\\
&+k_3(6P_1+6P_6+6P_2+6P_7+4P_3+4P_8+2P_4+2P_9),\\
y_7 &= k_1(5P_1+5P_6+5P_2+5P_7+3P_3+3P_8+P_4+P_9)+\\
&+k_2(2P_1+2P_6+2P_2+2P_7+2P_3+P_8+P_4)+\\
&+k_3(6P_1+6P_6+6P_2+6P_7+4P_3+4P_8+2P_4+2P_9)\\
y_3 &= k_1(3P_1+3P_6+3P_2+3P_7+3P_3+3P_8+P_4+P_9)+\\
&+k_2(2P_1+2P_6+2P_2+2P_7+2P_3+P_8+P_4)+\\
&+k_3(4P_1+4P_6+4P_2+4P_7+4P_3+4P_8+2P_4+2P_9),\\
y_8 &= k_1(3P_1+3P_6+3P_2+3P_7+3P_3+3P_8+P_4+P_9)+\\
&+k_2(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4)+\\
&+k_3(4P_1+4P_6+4P_2+4P_7+4P_3+4P_8+2P_4+2P_9),\\
y_4 &= k_1(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4+P_9)+\\
&+k_2(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4)+\\
&+k_3(2P_1+2P_6+2P_2+2P_7+2P_3+2P_8+2P_4+2P_9)\\
y_9 &= (k_1+2k_3)(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8+P_4+P_9).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Din relațiile anterioare se obține

$$
\begin{aligned}
y_1-y_6 &= k_2P_1,\\
y_2-y_7 &= k_2(P_1+P_6+P_2),\\
y_3-y_8 &= k_2(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3),\\
y_4-y_9 &= k_2(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8),\\
y_6-y_2 &= 2(k_1+k_3)(P_1+P_6),\\
y_7-y_3 &= 2(k_1+k_3)(P_1+P_6+P_2+P_7),\\
y_8-y_4 &= 2(k_1+k_3)(P_1+P_6+P_2+P_7+P_3+P_8).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

De aici rezultă forțele funcție de deformații

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{y_1-y_6}{k_2},\\
P_6 &= \frac{y_6-y_2}{2(k_1+k_3)}-\frac{y_1-y_6}{k_2},\\
P_2 &= \frac{y_2-y_7}{k_2}-\frac{y_6-y_2}{2(k_1+k_3)},\\
P_7 &= \frac{y_7-y_3}{2(k_1+k_3)}-\frac{y_2-y_7}{k_2},\\
P_3 &= \frac{y_3-y_8}{k_2}-\frac{y_7-y_3}{2(k_1+k_3)},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$P_8 = \frac{y_8 - y_4}{2(k_1 + k_3)} - \frac{y_3 - y_8}{k_2},$$

$$P_4 = \frac{y_4 - y_9}{k_2} - \frac{y_8 - y_9}{2(k_1 + k_3)},$$

$$P_9 = \frac{y_9}{2(k_1 + k_3)} - \frac{y_4 - y_9}{k_2}.$$

Energia potențială înmagazinată prin deformația scrisă funcție de deformații este

$$V = k_1\left[\left(\frac{y_6 - y_2}{2(k_1 + k_2)}\right)^2 + \left(\frac{y_7 - y_3}{2(k_1 + k_3)}\right)^2 + \left(\frac{y_8 - y_4}{2(k_1 + k_3)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\ \frac{y_9}{k_1 + 2k_3}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{k_2}{2}\left[\left(\frac{y_1 - y_6}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_7}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_8}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{y_4 - y_9}{k_2}\right)^2\right] + \tag{13}$$
$$+ k_3\left[\left(\frac{y_6 - y_2}{2(k_1 + k_3)}\right)^2 + \left(\frac{y_7 - y_3}{2(k_1 + k_3)}\right)^2 + \left(\frac{y_8 - y_4}{2(k_1 + k_3)}\right)^2 + \left(\frac{y_9}{k_1 + 2k_3}\right)^2\right].$$

Se consideră parametri variabili săgețile y_i și se scriu ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i} \tag{14}$$

unde

$$E = \sum \frac{m y_i'^2}{2}, \tag{15}$$

$$m y_1'' + \frac{y_1 - y_6}{k_2} = 0,$$

$$m y_6'' + \frac{y_6 - y_2}{2(k_1 + k_3)} - \frac{y_1 - y_6}{k_2} = 0,$$

$$m y_2'' + \frac{y_2 - y_7}{k_2} - \frac{y_6 - y_2}{2(k_1 + k_3)} = 0,$$

$$m y_7'' + \frac{y_7 - y_3}{2(k_1 + k_3)} - \frac{y_2 - y_7}{k_2} = 0,$$

$$m y_3'' + \frac{y_3 - y_8}{k_2} - \frac{y_7 - y_3}{2(k_1 + k_3)} = 0, \tag{16}$$

$$m y_8'' + \frac{y_8 - y_4}{2(k_1 + k_3)} - \frac{y_3 - y_8}{k_2} = 0,$$

$$m y_4'' + \frac{y_4 - y_9}{k_2} - \frac{y_8 - y_4}{2(k_1 + k_3)} = 0,$$

$$m y_9 + \frac{y_9}{2(k_1 + k_3)} - \frac{y_4 - y_9}{k_2} = 0.$$

Luînd soluții de forma

$$y_i = \lambda_i \sin pt, \tag{17}$$

notînd

$$\frac{1}{m k_2} = A; \quad \frac{1}{2m(k_1 + k_3)} = B; \quad \frac{1}{m(k_1 + 2k_3)} = C, \tag{18}$$

rezultă

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 (A - p^2) = 0,\\
&\lambda_6 (A + B - p^2) - A\lambda_1 - B\lambda_2 = 0,\\
&\lambda_2 (A + B - p^2) - B\lambda_6 - A\lambda_7 = 0,\\
&\lambda_7 (A + B - p^2) - A\lambda_2 - B\lambda_3 = 0,\\
&\lambda_3 (A + B - p^2) - B\lambda_7 - A\lambda_8 = 0,\\
&\lambda_8 (A + B - p^2) - A\lambda_3 - B\lambda_4 = 0,\\
&\lambda_4 (A + B - p^2) - B\lambda_8 - A\lambda_9 = 0,\\
&\lambda_9 (A + B - p^2) - B\lambda_4 = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Matricea sistemului se poate scrie sub forma

$$\| \beta \| = \| \alpha \| - p^2 \| 1 \| \tag{20}$$

unde

$$\| \beta \| = \begin{Vmatrix}
A-p^2 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-A & A+B-p^2 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -B & A+B-p^2 & -A & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -A & A+B-p^2 & -B & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -B & A+B-p^2 & -A & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -A & A+B-p^2 & -B & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & A+B-p^2 & -A\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & A+C-p^2
\end{Vmatrix} \tag{21}$$

iar

$$\| \alpha \| = \begin{Vmatrix}
A & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-A & A+B & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -B & A+B & -A & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -A & A+B & -B & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -B & A+B & -A & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -A & A+B & -B & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & A+B & -A\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & A+C
\end{Vmatrix} \tag{22}$$

Valorile proprii ale matricei $\|\alpha\|$ sînt rădăcinile ecuației caracteristice ale matricei $\|\alpha\|$, iar ecuația caracteristică a matricei $\|\alpha\|$ se obține egalînd cu zero determinantul matricei $\|\beta\|$

$$\begin{vmatrix} A-p^2 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A & A+B-p^2 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & A+B-p^2 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & A+B-p^2 & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B & A+B-p^2 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A & A+B-p^2 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & A+B-p^2 & -A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & A+C-p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Să presupunem că toate legăturile între elemente au aceeași constantă elastică

$$k_1 = k_2 = k_3 = k\,. \quad (24)$$

În acest caz notînd

$$4\,k\,m\,p^2 = q \quad (25)$$

se obține

$$\begin{vmatrix} 4-q & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4-q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4-q & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4-q & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4-q & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4-q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-q & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 5{,}33-q \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

Se observă că determinantul de sus se poate reduce la unul de ordinul IV prin operațiile următoare:

Primul rînd se împarte cu $4-q$.
Rîndului al doilea i se adaugă rîndul întîi înmulțit cu 4.
Rîndului al treilea i se adaugă rîndul al doilea înmulțit cu $(5-q)$.
Rîndului al patrulea i se adaugă rîndul al doilea înmulțit cu (-4).
Rîndului al cincilea i se adaugă rîndul al patrulea înmulțit cu $(5-q)$.
Rîndului al șaselea i se adaugă rîndul al patrulea înmulțit cu (-4).
Rîndului al șaptelea i se adaugă rîndul al șaselea înmulțit cu $(5-q)$.
Rîndului al optulea i se adaugă rîndul al șaselea înmulțit cu (-4).

Se obține astfel

$$\begin{vmatrix} (5-q)^2 - 4^2\frac{5-q}{4-q} - 1 & -4 & 0 & 0 \\ -4(5-q) + 4^3\frac{5-q}{4-q} & (5-q)^2-1 & -4 & 0 \\ 4^2(5-q)^2-4^4\frac{5-q}{4-q} & -4(5-q)^2 & (5-q)^2-1 & -4 \\ -4^3(5-q) + 4^5\frac{1}{4-q} & 4^2(5-q) & 4(5-q) & 5{,}33-q \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

Dezvoltînd determinantul ecuația caracteristică este

$$\left[(5-q)^2 + 4^2\frac{5-q}{4-q} - 1\right]\{(5{,}33-q)[(5-q)^4 - 18(5-q)^2+1] -$$

$$-4^2(5-q)[(5-q)^2 - 17]\} - 4^2\left|(5-q)^2 + 4^2\frac{5-q}{4-q}\right|\{[(5-q)^2-1](5{,}33-q) +$$

$$+4^2(5-q) - 4^4\} - 4^4\left[(5-q)^2 + \frac{5-q}{4-q}\right](5{,}33-q) = 0. \quad (28)$$

Prin încercări se găsește soluția cea mai mică

$$q = 0{,}052. \quad (29)$$

Valoarea proprie cea mai mică, va fi

$$p^2 = \frac{0{,}052}{4km}. \quad (30)$$

Pentru a determina constanta elastică k a rețelei se pune condiția ca bara continuă și aceeași bară aproximativă prin rețea să aibă deformații identice fiind solicitate static.

Deoarece este nevoie de o singură relație pentru a determina pe k se aplică condiția de deformație numai în secțiunea unde aceasta este maximă, respectiv la capătul barei aproximată prin rețea. Această secțiune, după cum se observă din figura 5 se găsește la distanță de 0,5 a de capătul liber, unde a este pasul rețelei.

Ecuația fibrei medii deformate a barei continue luînd ca origine încastrarea este

$$y = \frac{Pl^3}{24\,EI_z}\left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x^3}{l^3} + 6\frac{x^2}{l^2}\right). \quad (31)$$

În cazul considerat P devine 9 P, l devine 4,5 a și luînd $x = 4a$ se obține

$$y = 87{,}03\frac{Pa^3}{EI_z} \quad (32)$$

Din relațiile (10) săgeata în aceeași secțiune a barei aproximată prin rețea este

$$\frac{y_6 + y_1}{2} = 87{,}5\ kP. \tag{33}$$

Egalînd cele două săgeți se obține

$$87{,}5\ kP = 87{,}03 \frac{Pa^3}{EI_z},$$

de unde

$$k = 0{,}994 \frac{a^3}{EI_z} \cdot \tag{34}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Frecvența proprie a barei continue (8) devine

$$f = \frac{0{,}087}{\pi} \sqrt{\frac{EI_z g}{A\gamma a^4}} \cdot \tag{35}$$

Frecvența proprie a aceleiași bare aproximată prin rețea devine

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0{,}052}{4k\,m}}.$$

Introducînd valoarea lui k din relația (34) și deoarece $m = \frac{Aa}{2} \frac{\gamma}{g}$ se obține

$$f = \frac{0{,}0808}{\pi} \sqrt{\frac{EI_z g}{A\gamma a^4}}. \tag{36}$$

Eroarea în privința frecvenței este deci de circa 7,5% în minus.

Se observă că în soluția exactă nu s-a ținut seama de deformația prin forfecare, pe cînd în aproximarea prin rețea s-a ținut seama de aceasta ($k_3 \neq 0$).

Se poate constata ușor însă că alegerea unui raport arbitrar între constantele electrice nu are efect însemnat asupra frecvențelor proprii fundamentale.

Inițial s-a presupus că toate constantele elastice au aceeași valoare.

Considerînd cazul în care $k_3 = 0$ iar $k_1 = k_2$, din relația (33) se obține

$$\frac{y_6 + y_1}{2} = 47{,}5\ k_1 P. \tag{33'}$$

Săgeata barei continue, ținînd seama numai de încovoiere, este dată de relația (32) și egalînd aceste relații rezultă

$$k_1 = k_3 = 1{,}835 \frac{a^3}{EI_z} \cdot \tag{37}$$

Din relația (9) energia în bara aproximată prin rețea considerînd $k_1 = k_2 = k_3$ este

$$V = 280\ k\ P^2 \tag{38}$$

Introducînd constanta k determinată în relația (34) se obține

$$V = 279 \frac{a^3}{EI_2} P^2. \tag{39}$$

Punînd condiția $k_3 = 0$ se obține

$$V = 160\ kP^2. \tag{40}$$

Introducînd constanta k determinată în relația (39) se obține

$$V = 293 \frac{a^3}{EI_2} P^2. \tag{41}$$

Comparînd relațiile (39) și (41) se observă că variind constanta k_3 între 0 și o valoare egală cu k_1 energia potențială variază cu circa 7%. Se observă deci că pentru determinarea frecvențelor proprii fundamentale raportul între k_3 și celelalte constante elastice nu influențează prea mult aceasta.

O dată constantele elastice determinate, rămîne să se determine și pasul cel mai rațional al rețelei. Pentru a se ține seama și de efectul momentelor de inerție a masei barei în vibrații transversale trebuie ca momentul de inerție axial al secțiunii barei de masă repartizată să fie același ca și în cazul maselor concentrate.

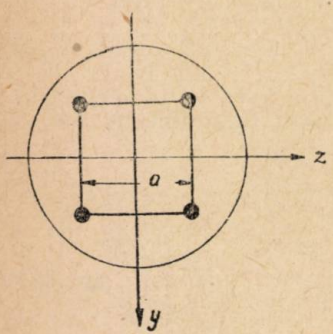


Fig. 6

În cazul considerat pentru secțiune circulară se obține în continuu

$$J_z = \frac{\gamma}{g} a \frac{\pi d^4}{64}.$$

În rețea (fig. 6)

$$J_z = 4 \frac{\gamma}{g} a \frac{A}{4} a^2.$$

Egalînd cele două valori se obține

$$a = \frac{d}{4}. \tag{42}$$

Stabilirea valorilor maselor concentrate nu prezintă nici o dificultate.

O dată, toate constantele fiind stabilite se poate trece fără nici o dificultate la construirea rețelei electrice care să asculte de legi identice cu ale corpului elastic aproximat prin rețea.

Se poate utiliza oricare din analogiile amintite.

Utilizînd de exemplu primul sistem de analogii, analogicul electric va fi ca în figura 7.

Introducerea forțelor exterioare se face prin introducerea de tensiuni în paralel cu capacități, tensiuni proporționale cu componentele forței pe direcția respectivă.

Rămîne a se calcula în continuare vibrațiile de răsucire a barei considerate (fig. 8).

Se notează cu k_1 și k_3 respectiv elasticitatea legăturilor axiale și diagonale ale sistemului. Presupunem, lucrînd asupra celor cinci secțiuni în care sînt concentrate forțele, cinci cupluri arbitrare M_1 M_2 M_3 M_4 și M, ultimul fiind suma celor patru.

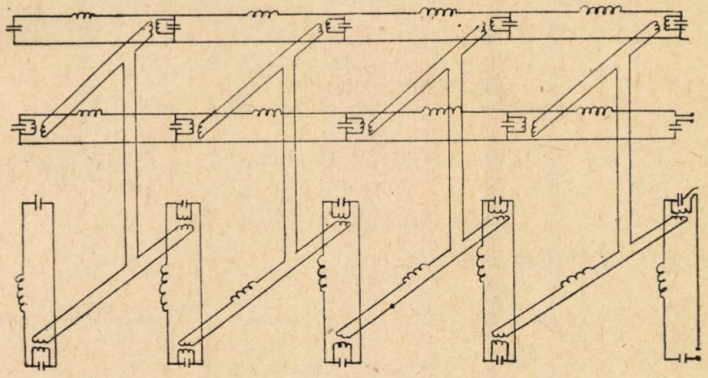


Fig. 7

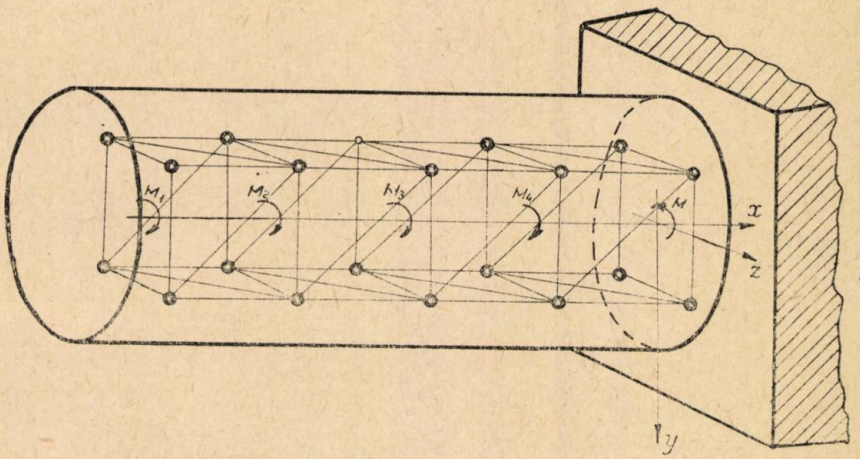


Fig. 8

Forțele din barele axiale sînt respectiv de la stînga la dreapta

$$\frac{M_1}{2a};\ \frac{M_1+M_2}{2a};\ \frac{M_1+M_2+M_3}{2a};\ \frac{M_1+M_2+M_3+M_4}{2a}, \tag{43}$$

iar în diagonale

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{M_1}{a};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{M_1+M_2}{a};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{M_1+M_2+M_3}{a};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{M_1+M_2+M_3+M_4}{a}. \tag{44}$$

Energia potențială înmagazinată prin deformație de sistem este

$$\sum\frac{M_i\theta_i}{2} \quad \text{sau} \quad \sum\frac{P_i k_i}{2},$$

respectiv

$$V = \frac{k_1}{2}\left\{4\left[\left(\frac{M_1}{2a}\right)^2+\left(\frac{M_1+M_2}{2a}\right)^2+\left(\frac{M_1+M_2+M_3}{2a}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{M_1+M_2+M_3+M_4}{2a}\right)^2\right]\right\}+\frac{k_3}{2}\left\{8\left[\left(\frac{M_1}{2a}\right)^2+\left(\frac{M_1+M_2}{2a}\right)^2+\right.\right. \tag{45}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{M_1+M_2+M_3}{2a}\right)^2+\left(\frac{M_1+M_2+M_3+M_4}{2a}\right)^2\right]\right\},$$

$$V=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)[M_1^2+(M_1+M_2)^2+(M_1+M_2+M_3)^2+ \tag{46}$$
$$(M_1+M_2+M_3+M_4)^2].$$

Deformațiile sub momente sînt

$$\theta_1=\frac{\partial V}{\partial M_1}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)[2M_1+2(M_1+M_2)+2(M_1+M_2+M_3)+$$
$$+2(M_1+M_2+M_3+M_4)],$$
$$\theta_2=\frac{\partial V}{\partial M_2}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)\left[2(M_1+M_2)+2(M_1+M_2+M_3)+\right. \tag{47}$$
$$\left.+2(M_1+M_2+M_3+M_4)\right],$$
$$\theta_3=\frac{\partial V}{\partial M_3}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)[2(M_1+M_2+M_3)+2(M_1+M_2+M_3+M_4)],$$
$$\theta_4=\frac{\partial V}{\partial M_4}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)[2(M_1+M_2+M_3+M_4)],$$

de unde

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)M_1,$$
$$\frac{\theta_2-\theta_3}{2}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)(M_1+M_2), \tag{48}$$
$$\frac{\theta_3-\theta_4}{2}=\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)(M_1+M_2+M_3),$$

de unde

$$M_1=\frac{\theta_1-\theta_2}{2\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)},$$
$$M_2=\frac{\theta_2-\theta_3}{2\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)}, \tag{49}$$
$$M_3=\frac{\theta_3-\theta_4}{2\left(\frac{k_1}{2a^2}+\frac{k_3}{a^2}\right)}.$$

Energia de deformație este

$$V = \frac{a^2}{2(k_1 + 2k_3)}[(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2 + (\theta_3 - \theta_4)^2 + \theta_4^2)]. \qquad (50)$$

Se consideră ca parametri variabili rotirile θ și se pot scrie ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad \text{unde } E = \sum \frac{J_1 \theta'^2}{2}. \qquad (51)$$

Notînd J_1 momentul de inerție pentru un element, se obține

$$\begin{aligned}
&J_1 \theta_1' + \frac{a^2}{k_1 + 2k_2}(\theta_1 - \theta_3) = 0, \\
&J_1 \theta_2'' + \frac{a^2}{k_1 + 2k_2}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_1 + \theta_2) = 0, \\
&J_1'' \theta_3' + \frac{a^2}{k_1 + 2k_2}(\theta_3 - \theta_4 - \theta_2 + \theta_3) = 0, \\
&J_1 \theta_4'' + \frac{a^2}{k_2 + 2k_2}(\theta_4 - \theta_3 + \theta_4) = 0.
\end{aligned} \qquad (52)$$

Notînd

$$\frac{a^2}{J_1(k_1 + 2k_3)} = B, \qquad (53)$$

se obține

$$\begin{aligned}
&\theta_1'' + B(\theta_1 - \theta_2) = 0, \\
&\theta_2'' + B(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) = 0, \\
&\theta_3'' + B(2\theta_3 - \theta_2 - \theta_4) = 0, \\
&\theta_4'' + B(2\theta_4 - \theta_3) = 0.
\end{aligned} \qquad (54)$$

Luînd soluții de forma

$$\theta_i = \lambda_i \sin pt, \qquad (55)$$

se obține

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(B - p^2) - B\lambda_2 = 0, \\
&\lambda_2(2B - p^2) - B\lambda_1 - B\lambda_3 = 0, \\
&\lambda_3(2B - p^2) - B\lambda_2 - B\lambda_4 = 0, \\
&\lambda_4(2B - p^2) - B\lambda_3 = 0.
\end{aligned} \qquad (56)$$

Matricea sistemului se poate scrie sub forma

$$\| \beta \| = \| \alpha \| - p^2 \| 1 \|, \qquad (57)$$

unde

$$\| \beta \| = \begin{Vmatrix} B-p^2 & -B & 0 & 0 \\ -B & 2B-p^2 & -B & 0 \\ 0 & -B & 2B-p^2 & -B \\ 0 & 0 & -B & 2B-p^2 \end{Vmatrix} \tag{58}$$

iar

$$\| \alpha \| = \begin{Vmatrix} B & -B & 0 & 0 \\ -B & 2B & -B & 0 \\ 0 & -B & 2B & -B \\ 0 & 0 & -B & 2B \end{Vmatrix} \tag{59}$$

Valorile proprii ale matricei $\| \alpha \|$ se obțin din condiția

$$\begin{vmatrix} B & -B & 0 & 0 \\ -B & 2B & -B & 0 \\ 0 & -B & 2B & -B \\ 0 & 0 & -B & 2B \end{vmatrix} = 0 \tag{59'}$$

Dezvoltînd determinantul, ecuația caracteristică devine

$$(B-p^2)\,[(2B-p^2)^2 - 2B^2\,(2B-p^2)] + B\,[-B\,(2B-p^2)^2 + B^2]. \tag{60}$$

Notînd

$$2 - \frac{p^2}{B} = q, \tag{61}$$

se obține

$$q^4 - q^3 - 3q^2 + 2q - 1 = 0. \tag{62}$$

Prin încercări se obține soluția cea mai mică

$$q = 1{,}88. \tag{63}$$

Rezultă deci

$$p^2 = (2 - 1{,}88) = 0{,}12\,B. \tag{64}$$

Pentru determinarea lui B trebuie să se calculeze constantele elastice. Pentru aceasta se pune condiția ca deformațiile sistemului ce aproximează să fie aceleași cu ale sistemului aproximat.

Se obține astfel pentru rețea

$$\theta_1 = \left(\frac{k_1}{2a^2} + \frac{k_3}{a^2}\right) 8M_1, \tag{65}$$

iar pentru bară

$$\theta = \frac{M_1 l}{GI_p} = \frac{M_1 4a}{GI_p}, \tag{66}$$

de unde

$$k_1 + 2k_3 = \frac{a^3}{GI_p}. \tag{67}$$

Introducînd această expresie în (61) se obține

$$B = \frac{GI_p}{J_1 a} . \tag{68}$$

Frecvența proprie fundamentală va fi

$$f = \frac{0{,}346}{2\pi} \sqrt{\frac{GI_p}{J_1 a}} . \tag{69}$$

Frecvența proprie pentru bara de masă continuă este

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3GI_p}{Jl}} . \tag{70}$$

În cazul considerat $l = 4{,}5\ a$; $J = 4\ J_1$, iar frecvența devine

$$f = \frac{0{,}407}{2\pi} \sqrt{\frac{GI_p}{J_1 a}} . \tag{71}$$

Se observă și de această dată că aproximarea prin rețea conducea la frecvențe ușor mai mici decît în realitate.

Pentru a determina pasul optim al rețelei, trebuie să se pună condiția ca momentul de inerție polar a barei de masă continuă să fie același și în cazul barei aproximate prin rețea (fig. 9)

$$\frac{\gamma}{g} a \frac{\pi d4}{32} = 4 \frac{A}{4} a \frac{\gamma}{g} r^2 ,$$

de unde

$$r = \frac{d}{2\sqrt{2}} . \tag{72}$$

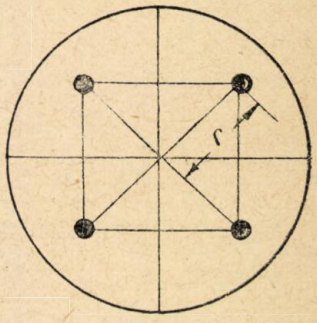


Fig. 9

Se observă că această valoare conduce la același pas de rețea ca și la bara în vibrații laterale.

O dată stabilită rețeaua și toate constantele, construirea analogicului electric nu prezintă nici o dificultate.

Utilizînd de exemplu al doilea sistem de analogii acesta se poate reprezenta ca în figura 10.

Introducerea forțelor exterioare se face prin introducerea de curenți în serie cu inductanțele, curenți proporționali cu componentele forței pe direcția respectivă.

Din calculele expuse se poate constata că cu toate că s-a luat o rețea formată dintr-un număr foarte mic de puncte, totuși în privința fundamentalelor erorile sînt mici. Evident, luînd un număr mai mare de puncte, erorile se micșorează și mai mult.

În plus rețeaua folosită și sistemul de analogii adoptat prezintă și alte avantaje.

În primul rînd se poate ține seama direct și de deformațiile la forfecare și mărind precizia se poate studia direct pe model efectul acestora.

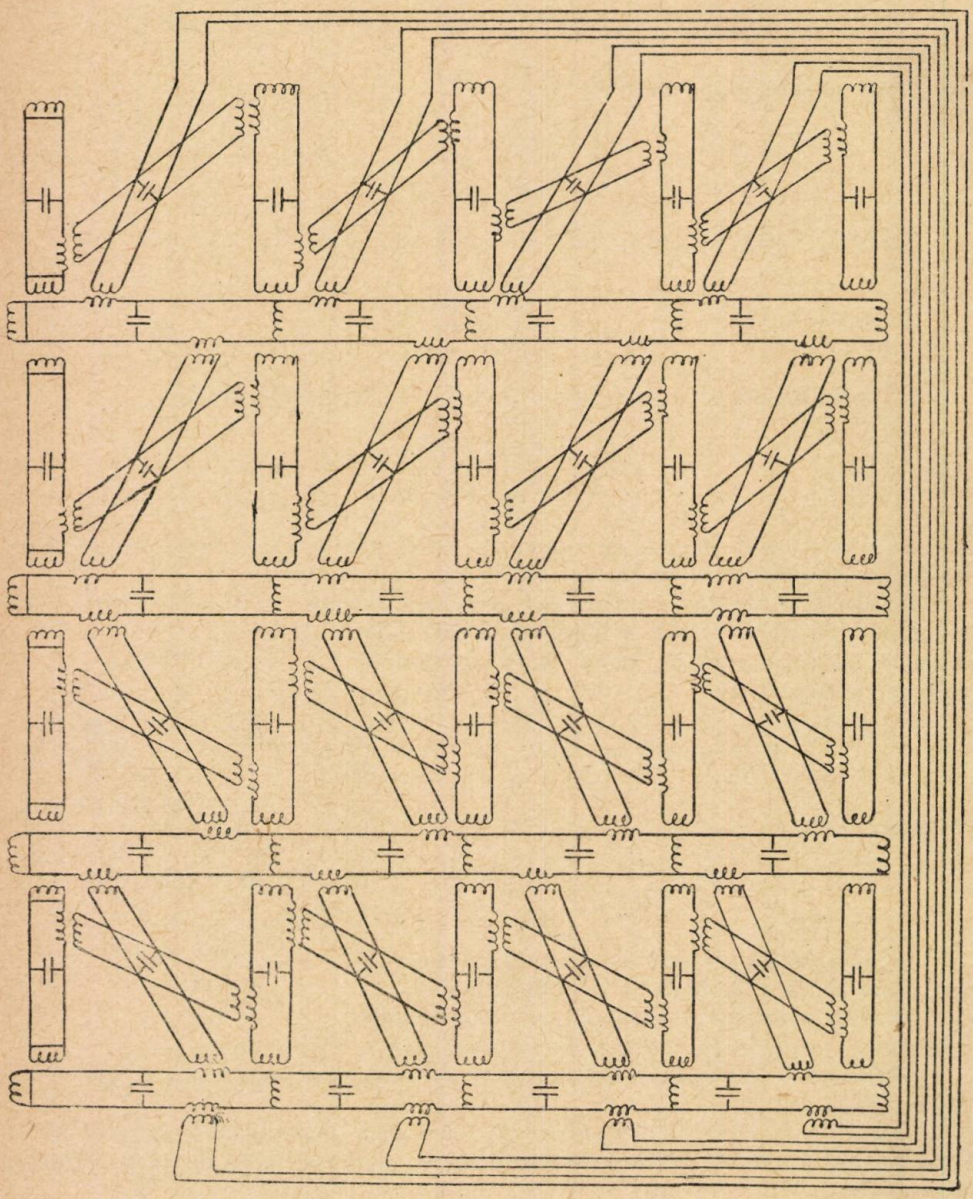


Fig. 10

În al doilea rînd, prin această modelare se ține seama și de efectul momentelor de inerție în vibrații laterale.

De asemenea modelarea citată ținea seama de momentul de girație al barei și introduce și efectul acestuia în vibrații complexe.

Nedepărtîndu-se de forma fizică a corpului elastic și ținînd seama de proprietățile reale ale acestuia, modelarea se poate efectua ușor și se pot studia pe cale analogică vibrații complexe de corpuri oarecare cu condiții la limită date.

Primită la redacție la 24.I.1956

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВИБРАЦИЙ УПРУГИХ СРЕД

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье рассматривается возможность решения задач, относящихся к вибрации упругих сред, пользуясь аналогиями в области электричества.

Упругая среда заменяется прежде всего сетью упруго связанных материальных точек. Для этого существует два пути. Первым путем является преобразование дифференциальных уравнений равновесия в уравнения с конечными разностями, учитывая уравнения геометрические и физические, а также поверхностные условия. Полученным уравнениям соответствует искомая система материальных точек. Другим более простым путем является непосредственный вывод уравнений с конечными разностями тем же способом, каким были выведены указанные дифференциалбные уравнения, но исходя не из бесконечно малого элемента, а из конечного.

Упругое тело, разложенное таким образом на упруго связанные материальные точки, должно быть принято за образец, по которому должна быть найдена соответственная электрическая система, подчиняющаяся тем же математическим уравнениям. Главным затруднением было представление величин из области упругости, являющихся тензорами II порядка, величинами электрическими, являющимися тензорами I порядка. Задача была решена путем введения трех диагональных упругих связей, что обосновано как математически, так и физически.

Автор указывает затем возможность пользоваться как образцом системой, полученной методами вычисления постоянных.

Далее рассматривается частный случай, в котором дифференциальные уравнения можно интегрировать и известны решения.

Затем производятся вычисления, связанные с этим приближенным примером при помощи сети для определения ошибки метода. Вычисление производилось не электрическим путем, а непосредственно математическим как для боковых вибраций, так и для вибраций при кручении.

Констатируется, что несмотря на то что выбрано очень небольшое число точек, то есть соответственно очень редкая сеть, ошибка все же не велика (10 — 15%). При увеличении числа точек, то есть при уменьшении клеток сети, ошибка, очевидно, становится еще меньше.

Далее показывается способ учитывания эффекта, производимого срезывающими силами, моментами инерции, моментами кругового движения, а также поверхностными условиями.

Не отдаляясь от физической формы упругого тела и учитывая его действительные свойства, это последнее может быть легко использовано как модель, и при помощи указанного метода можно исследовать по аналогии сложные вибрации любых тел при данных граничных условиях.

APPLICATION DES ANALOGIES ÉLECTRIQUES À L'ÉTUDE DES VIBRATIONS DES MILIEUX ÉLASTIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, on étudie la possibilité de résoudre les problèmes des vibrations des milieux élastiques, par des analogies électriques.

En premier lieu, le milieu élastique est remplacé par un réseau de points matériels élastiquement assemblés. Deux voies peuvent servir à cet effet. La première consiste à transformer les équations différentielles d'équilibre en tenant compte tant des équations géométriques et physiques, que des conditions de surface exprimées par des équations aux différences finies. Aux équations ainsi obtenues correspond le système de points matériels cherché. Une autre voie, plus simple, est celle qui établit directement les équations aux différences finies, de la même manière dont on a déduit les équations différentielles citées ci-dessus mais en partant, non d'un élément infini, petit, mais d'un élément fini.

Ainsi décomposé en points matériels élastiquement assemblés, le corps élastique doit être modelé, c'est-à-dire qu'il faut trouver un système électrique obéissant aux mêmes équations mathématiques. La principale difficulté consiste à représenter les valeurs d'élasticité, qui sont des tenseurs de 2e ordre, par des valeurs électriques, qui sont des tenseurs de 1er ordre. Le problème a été résolu en introduisant trois assemblages diagonaux élastiques; solution motivée au point de vue mathématiques aussi bien que physique.

On expose ensuite les possibilités de modelage du système obtenu et les méthodes de calcul des constantes.

On traite ensuite un cas particulier pour lequel les équations différentielles peuvent être intégrées et dont on connaît les solutions.

On calcule ensuite cet exemple, approximé par le réseau, pour déterminer une erreur de méthode. Le calcul n'a pas été effectué par voie électrique, mais directement par voie mathématique, tant pour les vibrations latérales que pour les vibrations de torsion.

On a constaté que, bien qu'on ait choisi un très petit nombre de points, en fait un réseau très grossier, l'erreur n'est pas grande (10—15%). En augmentant le nombre des points, respectivement en diminuant le pas de réseau, l'erreur diminue évidemment encore plus.

On montre ensuite comment on peut tenir compte de l'effet des forces de cisaillement, de l'effet des moments d'inertie, de l'effet des moments de giration, ainsi que des conditions de surface.

Si l'on ne s'éloigne pas de la forme physique du corps élastique et si l'on tient compte de ses propriétés réelles, on peut facilement en effectuer le modelage et, à l'aide de la méthode présentée, on peut étudier, par voie d'analogie, des vibrations complexes de corps quelconques dans des conditions à la limite données.

BIBLIOGRAFIE

1. Gelfond A. O., *Iscislenie konecinih raznostei.* Gosudarstvennoe izdatelstvo tehnico-teoreticeskoi literaturi, Moscova-Leningrad, 1952.
2. Gutenmacher I. I., *Elektriceskie modeli.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1949.
3. Kocin N. E., *Calcul vectorial şi introducere în calculul tensorial.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
4. Olson G., *Dynamikal analogie.* Londra, 1947.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

VARIAŢIA ADERENŢEI DINTRE BETON ŞI ARMĂTURĂ ÎN FUNCŢIE DE LUNGIMEA DE ANCORAJ

DE

M. WEISSENBERG şi S. CIUNGU

I. Dintre numeroşii factori care influenţează valoarea rezistenţei ce se opune lunecării armăturii în beton, rezistenţa de aderenţă, face parte şi lungimea de ancoraj.

Se menţionează în literatura de specialitate [5], [6] şi [10] că rezistenţa medie de aderenţă este cu atît mai mică, cu cît lungimea de ancoraj este mai mare. În ceea ce priveşte cauzele acestei scăderi precum şi eventuale relaţii valorice între lungimea de ancoraj şi rezistenţa medie de aderenţă, ele au fost puse în legătură cu variaţia eforturilor unitare de aderenţă în lungul barei de armătură.

II. Asupra acestei repartiţii a eforturilor unitare de aderenţă, au fost emise o serie de ipoteze, din care s-au prelucrat de către unii cercetători relaţii cantitative; s-au efectuat de asemenea şi unele verificări experimentale, destul de reduse ca număr.

— Astfel, prof. M. H a n g a n, bazîndu-se pe relaţia dintre deplasarea armăturii în beton şi efortul unitar de aderenţă, propune, pentru diferite încărcări progresive, tipurile de repartizare a aderenţei din figura 1; iar drept curbă care să exprime legătura dintre efortul unitar de aderenţă şi abscisa respectivă, înainte de generalizarea lunecării, admite relaţia propusă de prof. K a y s e r *(Aufanspannungen in Eisenbeton*, Beton und Eisen, 1936, nr. 1),

$$\tau = \tau_0 \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^m \right],$$

cu m variabil pentru diferite valori ale încărcării (fig. 2).

— V. I. M u r a ş e v [8] admite, pentru grinzile supuse la încovoiere, o epură a eforturilor unitare de aderenţă de forma arătată în figura 3. În calcule însă, el introduce tot o valoare medie, prin luarea în considerare a coeficientului de umplere ω', respectiv a valorii $\omega'\tau$.

— S. A. D m i t r i e v [4], într-un studiu în care se pune accentul pe comportarea armăturii trase la rece întrebuinţată în elemente precomprimate, admite următoarele ipoteze: efortul ce se opune lunecării armăturii este proporţional cu coeficientul de frecare dintre beton şi armătură, ψ, şi cu presiunea radială dintre beton şi armătură; presiunea radială este considerată ca fiind formată

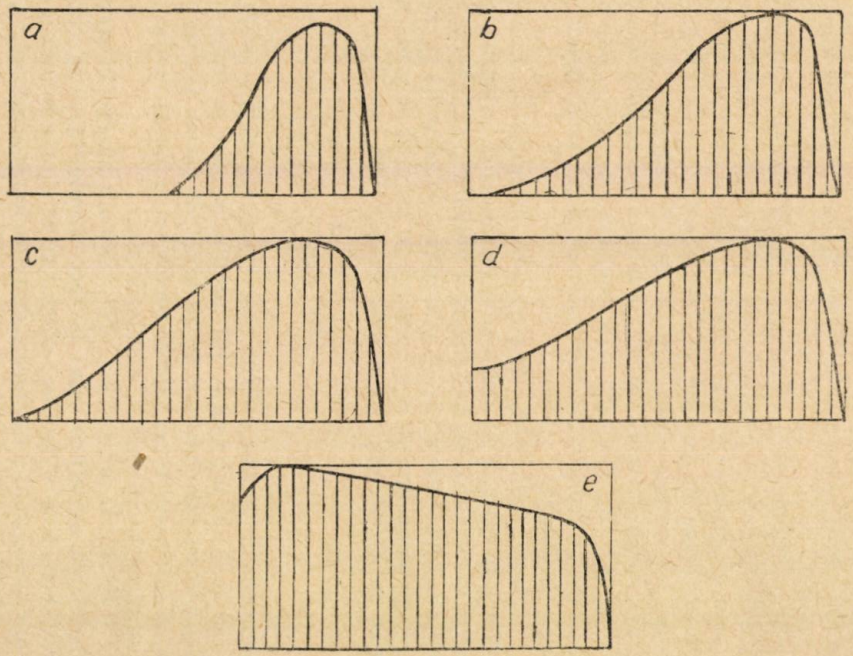


Fig. 1

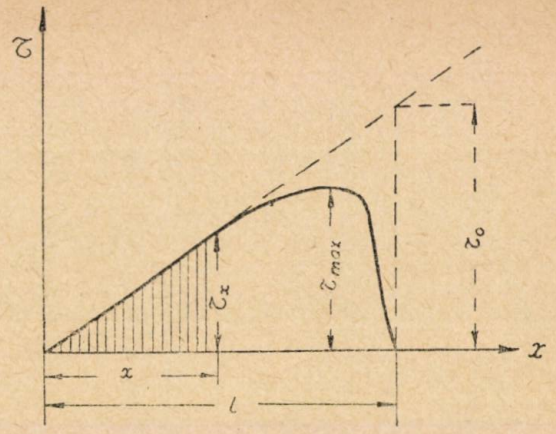


Fig. 2

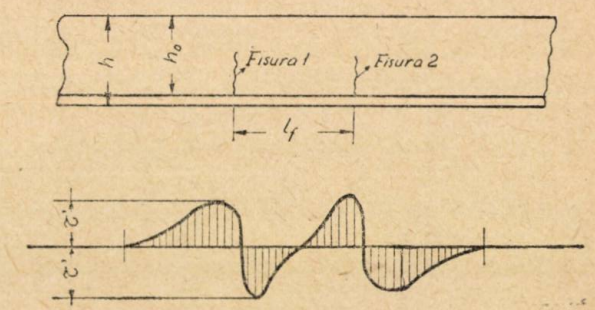


Fig. 3

dintr-o parte constantă în lungul barei (datorită contracției betonului și altor proprietăți ale lui) și o parte variabilă, considerată proporțională cu deformațiile barei de armătură datorită încărcării elementului cu sarcini exterioare.

Calculele efectuate pe baza acestor ipoteze au dus la stabilirea unor formule mai complicate pentru cazul armăturii pretensionate, formule care se reduc, în cazul armăturii nepretensionate, la relația

$$\tau = \tau_2 \, e^{-\frac{n}{d}(l-x)} \, ^{*)},$$

în care τ este efortul unitar de aderență într-o secțiune oarecare, τ_2 este efortul unitar la capătul liber al barei;

$$n = \frac{4 \psi \xi \mu_t E_b}{E_a},$$

ξ fiind un coeficient ce depinde de calitatea betonului, de dimensiunile probei, de starea de tensiune a betonului etc., iar μ_t fiind coeficientul de contracție transversală a betonului; l și x sînt lungimile notate pe figura 4.

— A. Bichara [2], bazîndu-se pe încercări proprii, precum și ale lui Douglas, Mac Henry și W. I. Walker *(Laboratory measurements of stress distribution in Reinforced Concrete*, Journ. of Amer. Concr. Institute, 1948), trasează diferite curbe de distribuție a eforturilor unitare de aderență în lungul barei, în diferite condiții de încărcare. Deducerea eforturilor unitare de aderență s-a făcut pe baza tensiunilor măsurate în diferite puncte ale barei de armătură, cu ajutorul unor tensometre electrice. Pentru a permite lipirea «mărcilor», armăturile erau alcătuite din două jumătăți.

A. Bichara evaluează de asemenea, pe baza unor considerente teoretice și experimentale valoarea efortului unitar maxim de aderență în cazul unei grinzi încovoiate cu fisuri.

Încercări în care s-a măsurat efortul unitar din armătură cu ajutorul unor tensometre electrice lipite însă pe bare subțiri de armătură de rezistență superioară (cu întreruperea adeziunii pe porțiunea pe care era lipită marca), au fost făcute de F. Siemonsen și A. Spring [11].

— L. P. Brice [3], bazîndu-se în special pe încercările făcute de A. Bichara, emite ipoteza că rezistența la lunecarea armăturii în beton poate fi considerată ca o rezistență de natura frecării, respectiv ca un efort unitar constant în lungul barei. Efortul din armătură, în cazul unor încărcări repetate, ar avea o repartizare în lung ca în figura 5.

III. Neajunsul principal al indicațiilor existente pînă în prezent asupra repartizării în lung a eforturilor unitare de aderență este faptul că ele nu țin seama în general de aspectele diferite ale fenomenului la diferite valori ale efortului unitar din armătură.

Într-adevăr, așa cum arată K. V. Mihailov [7], rezistența totală ce se opune lunecării armăturii în beton este rezultatul suprapunerii a trei factori: *încleierea* pietrei de ciment de armătură, *frecarea* dintre beton și armătură și *încleștarea* betonului în neregularitățile suprafeței armăturii; rolul predominant avîndu-l, în cazul oțelului beton obișnuit, cel de-al treilea factor.

*) S. A. Dmitriev menționează că o expresie analogă este dată de I. A. Nilender în *Construcții de beton armat. Proprietățile mecanice ale betonului și betonului armat*, ONTI, 1935 (Ghidul proiectantului de construcții industriale, vol. IV).

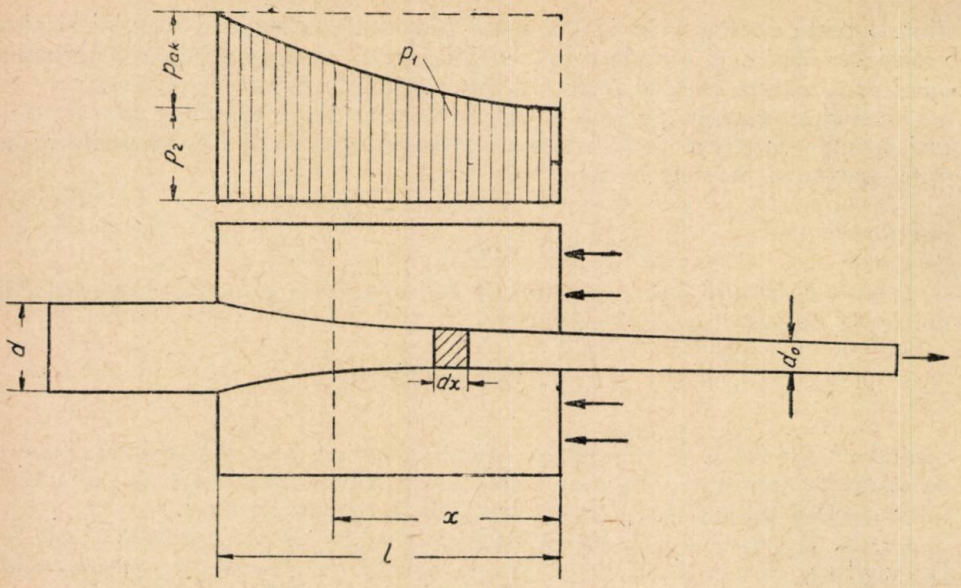

p_{ak}
p_2
p_1
d
dx
d_0
x
l

Fig. 4

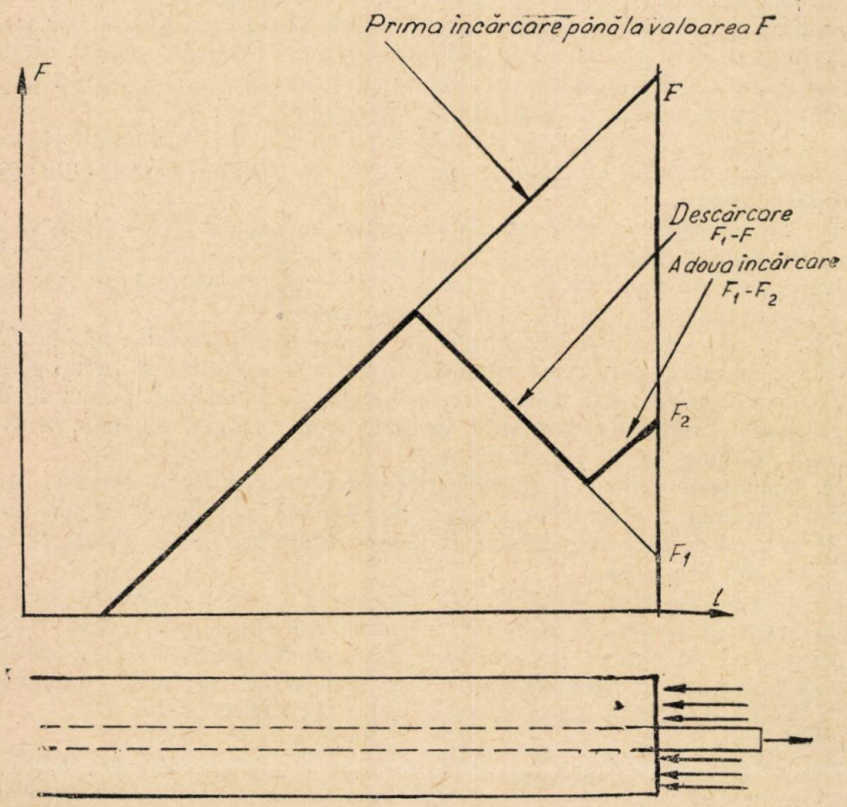

Prima încărcare până la valoarea F
F
F
Descărcare
F_1-F
A doua încărcare
F_1-F_2
F_2
F_1
l

Fig. 5

În ceea ce privește variația în timpul încărcării, B i c h a r a menționează destul de just existența a trei stadii de comportare pentru oțelurile de beton obișnuite:

— un stadiu *elastic*, în care betonul urmărește deformațiile armăturii și se încarcă pe baza unei relații liniare între deformații și eforturi unitare;

— un stadiu *elasto-plastic*, în care betonul urmărește deformațiile armăturii, dar se încarcă din ce în ce mai puțin;

— un stadiu *de frecare*, în care armătura se deplasează față de stratul înconjurător de beton, ce se mai opune numai prin frecare la această deplasare (nu mai acționează nici *încleierea*, nici *încleștarea*).

Extinderea mai mare sau mai mică a acestor stadii este desigur în funcție de o serie întreagă de factori, dintre care cei mai importanți sînt starea de tensiune a betonului și natura suprafeței armăturii. Astfel, spre exemplu, pentru armăturile cu suprafață lucie, primele două stadii sînt epuizate mult mai repede decît în cazul armăturilor din oțel beton obișnuit.

Trebuie remarcat că prof. M. H a n g a n [5], completînd ipoteza acad. prof. N. V a s i l e s c u - K a r p e n [12] și [13], a menționat încă din 1938 existența celor trei cauze ale aderenței și a dat o descriere a modului cum se produce deplasarea armăturii în beton, de la începutul lunecării și pînă la lunecarea totală a barei.

În lumina datelor verificate experimental, arătate mai sus, rezultă unele lipsuri ale ipotezelor existente pînă în prezent în legătură cu repartizarea în lung a eforturilor unitare de aderență. Astfel:

Ipoteza prof. M. H a n g a n ne dă o imagine justă asupra modului cum variază repartizarea eforturilor unitare de aderență în timpul creșterii încărcării. Pe porțiunea în care bara intră în beton, creșterea efortului unitar de aderență se face însă în realitate în mod diferențiat după valoarea efortului din armătură, așa cum arată încercările experimentale [2]. De asemenea estimarea valorică a eforturilor unitare de aderență în lungul barei este foarte greu de făcut pe baza formulei propusă de K a y s e r, din cauza nesiguranței în privința valorii lui *m*. Formula nu este valabilă decît cel mult pînă la începutul lunecării la capătul exterior.

Formula lui S. A. D m i t r i e v are o justificare teoretică acceptabilă, pentru cazul sîrmelor trefilate cu suprafață lucie (în special cînd ele sînt pretensionate) și pentru momentul lunecării lor. În cazul barelor de oțel beton obișnuit și în general pentru orice fel de bare înainte de lunecarea lor, fenomenul este mai complex, celelalte cauze ale aderenței în afara frecării își au rolul lor și ca urmare schema distribuției în lung a eforturilor unitare de aderență nu corespunde cu cea propusă de S. A. D m i t r i e v.

Ipoteza lui L. P. B r i c e este simplă și ușor de aplicat. Ea corespunde acceptabil cu realitatea, așa cum arată și B i c h a r a, după începerea lunecării. Admiterea unui efort unitar de aderență constant în tot timpul încărcării elementului nu corespunde însă cu realitatea. Verificările experimentale menționate de B r i c e se referă fie la un număr prea redus de puncte măsurate, unite convențional prin linii drepte, fie la condiții speciale (de ex., eforturi remanente după încărcări pînă la $\sigma_a = 2470$ kg/cm^2).

Este de menționat că și clasificarea dată de B i c h a r a diferitelor stadii de comportare în legătură cu aderența, prezintă lipsuri în ceea ce privește în special explicarea lor prin introducerea așa-numitului fenomen de *etiraj*.

IV. Ipotezele și încercările făcute pînă în prezent permit să se încerce o generalizare a relațiilor de repartizare a eforturilor unitare de aderență în lungul barei:

a) O primă relaţie utilizată este egalitatea dintre efortul cedat de armătură şi cel preluat de beton prin intermediul aderenţei, pe fiecare element infinitezimal de lungime

$$A_f \, d\sigma_a = \tau u \, dx. \tag{1}$$

în care A_f este secţiunea armăturii,
σ_a — efortul unitar din armătură în secţiunea respectivă;
τ — efortul unitar de aderenţă în secţiunea respectivă,
u — perimetrul armăturii,
x — abscisa secţiunii considerate.

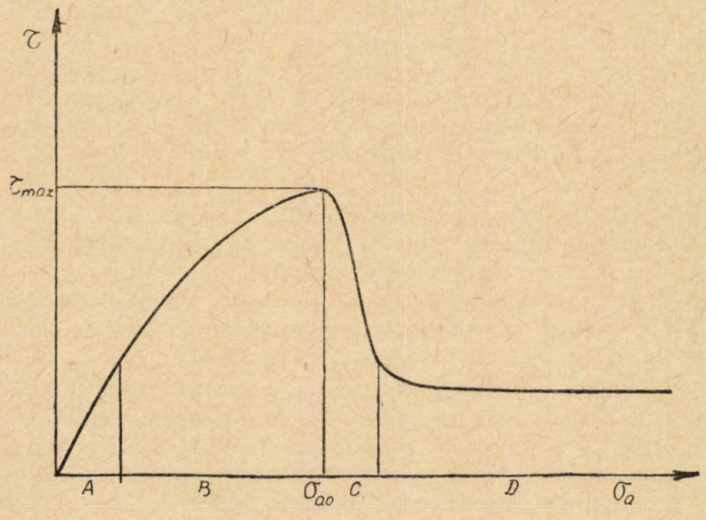


Fig. 6

Pentru barele rotunde de diametru D, relaţia (1) poate fi exprimată sub forma

$$\tau = \frac{D}{4} \cdot \frac{d\sigma_a}{dx} \tag{1'}$$

b) Pentru a doua relaţie, care exprimă variaţia lui τ în funcţie de σ_a, se propune ca formă generală o curbă de tipul celei din figura 6.

— o scurtă zonă A, aproape elastică;

— o zonă B, în care betonul urmăreşte, datorită menţinerii tuturor cauzelor aderenţei, deformaţiile armăturii dar nu îşi sporeşte proporţional şi efortul, din cauza comportării vîscos-plastice a betonului după teoria lui A. E. Seikin sau din cauza apariţiei microfisurilor în beton, după teoria lui O. I. Berg [1] şi [9];

— o zonă C, în care după atingerea lui τ_{max}, bara începe să lunece în beton, efortul unitar τ scăzînd rapid;

— o zonă D, în care, după înfrîngerea rezistenţelor suplimentare datorite unor încleştări locale în timpul primelor deplasări, efortul unitar τ tinde să se stabilizeze la o valoare corespunzătoare numai efectului frecării.

Importanța relativă a diferitelor zone variază în funcție de diferiți parametri și în primul rînd în funcție de natura suprafeței armăturii și de calitatea betonului.

Această relație generală între τ și σ_a este însă modificată din cauza influențelor locale la intrarea barei de armătură în beton (capătul de la care se exercită efortul sau marginea fisurii). Într-adevăr, ca urmare a concentrărilor de efort din aceste puncte, se produc ruperi ale legăturii dintre beton și armătură, respectiv deplasări relative ale armăturii față de beton. Efortul unitar de aderență este limitat numai la valoarea dată de frecare și el crește treptat spre interiorul elementului, pînă într-un punct în care ajunge la o valoare destul de ridicată pentru a împiedica lunecarea armăturii.

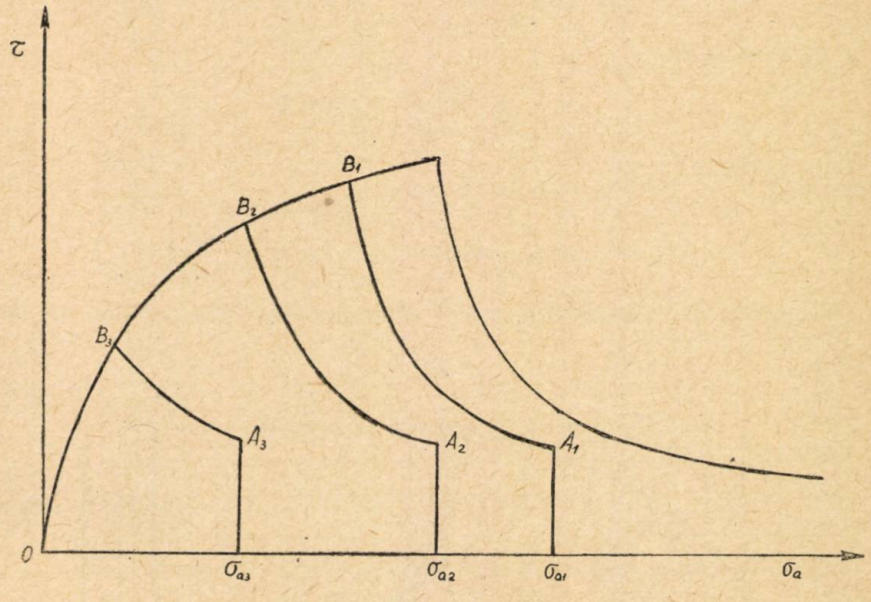


Fig. 7

Schematizarea acestui fenomen se face admițîndu-se ipoteza unei creșteri de aceeași natură a eforturilor unitare de aderență în zona în care se produc lunecările, fie că este vorba de lunecarea totală a barei, fie că este vorba de lunecări locale. Aceasta se obține luînd în considerare o serie de curbe obținute prin translație din curba inițială pentru zona C și D (fig. 7).

În acest mod, dacă efortul unitar din armătură la intrarea în beton (capătul de la care se exercită efortul) este spre exemplu σ_{a1}, relația dintre σ_a și τ este reprezentată de curba A_1B_1O, iar dacă acest efort unitar este σ_{a2}, relația este reprezentată de curba A_2B_2O.

V. Pentru nevoile calculului, s-a procedat în felul următor (pentru oțel beton obișnuit și beton cu ciment portland):

a) Curba generală $\tau - \sigma_a$ a fost considerată formată din două ramuri:

— ramura I, cuprinzînd zonele A și B, trece prin punctele ($\sigma_a = 0$, $\tau = 0$), ($\sigma_a = \sigma_{a0}$, $\tau = \tau_{max}$) și ($\sigma_a = 0{,}1\ \sigma_{a0}$, $\tau \cong 0{,}35\ \tau_{max}$);

— ramura II, cuprinzînd zonele C și D, trece prin punctele ($\sigma_a = \sigma_{a0}$, $\tau = \tau_{max}$), ($\sigma_a = 2\sigma_{a0}$, $\tau = 0{,}2\ \tau_{max}$) și tinde asimptotic spre dreapta $\tau = 0{,}1\tau_{max}$.

Translatarea pentru luarea în considerare a influenţelor locale se face în aşa fel încît τ la intrarea în beton să varieze între aproximativ 0,2 τ_{max} pentru $\sigma_{ai} = 2\,\sigma_{a0}$ (σ_{ai} = efortul unitar în armătură la intrarea în beton) şi aproximativ 0,3 τ_{max} pentru valorile cele mai mici ale lui σ_{ai}.

Pentru uşurinţa calculului, s-au utilizat curbele valorilor fără dimensiuni $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{a0}}$ şi $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_{max}}$.

Relaţiile întrebuinţate sînt

— pe ramura I,

$$\bar{\tau} = \frac{5\bar{\sigma}}{4\bar{\sigma} + 1}, \tag{2}$$

— pe ramura II,

$$\bar{\tau} = \frac{0{,}9}{8(\bar{\sigma} + \alpha) - 7} + 0{,}1, \tag{3}$$

în care $\alpha = \frac{0{,}075}{\bar{\sigma}_i}$ pentru $\bar{\sigma}_i \geqslant 1{,}5$ şi

$$\alpha = 1{,}4 - 0{,}9\,\bar{\sigma}_i, \text{ pentru } \bar{\sigma}_i \leqslant 1{,}5; \left(\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{a0}}\right).$$

În figura 8 sînt reprezentate aceste curbe, pentru diferite valori ale lui $\bar{\sigma}_i$.

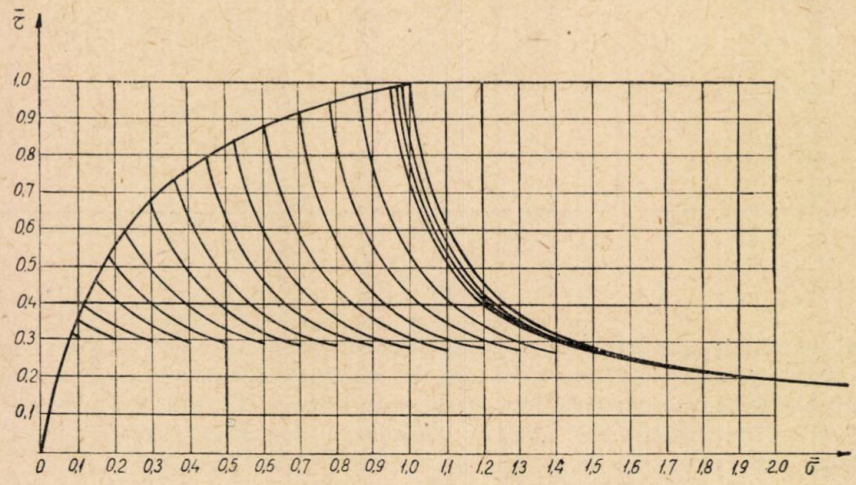


Fig. 8

b) Cu aceste elemente, se pot exprima relaţiile dintre eforturile unitare din armătură şi abscisa x a secţiunii respective precum şi dintre eforturile unitare de aderenţă şi abscisa x (fig. 9).

Într-adevăr, înlocuind pe (3) în (1'), integrînd şi ţinînd seamă de faptul că pentru $x = 0$, $\sigma = \bar{\sigma}_i$, respectiv $\bar{\tau} = \bar{\tau}_i$, se obţine pe ramura II

$$x = 10\,A\left[(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_i) - \frac{9}{8}\ln\frac{8(\bar{\sigma} + \alpha) + 2}{8(\bar{\sigma}_i + \alpha) + 2}\right], \tag{4}$$

respectiv

$$x = -\frac{90A}{8}\left[\frac{10(\bar{\tau}-\bar{\tau}_i)}{(10\bar{\tau}-1)(10\bar{\tau}_i-1)} + \ln\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_i}\cdot\frac{10\bar{\tau}_i-1}{10\bar{\tau}-1}\right], \tag{5}$$

în care

$$A = \frac{\sigma_{a0}}{\tau_{max}}\cdot\frac{D}{4}.$$

La fel, înlocuind pe (2) în (1'), integrînd și punînd, pentru $x = 0$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{inters}$ respectiv $\bar{\tau} = \bar{\tau}_{inters}$, se obține pe ramura I

$$x = \frac{A}{5}\left[4(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}_{inters}) + \ln\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{inters}}\right]; \tag{4'}$$

respectiv

$$x = \frac{A}{5}\left[\frac{5(\bar{\tau}-\bar{\tau}_{inters})}{(5-4\bar{\tau})(5-4\bar{\tau}_{inters})} + \ln\frac{\bar{\tau}(5-4\bar{\tau}_{inters})}{\bar{\tau}_{inters}(5-4\bar{\tau})}\right]. \tag{5'}$$

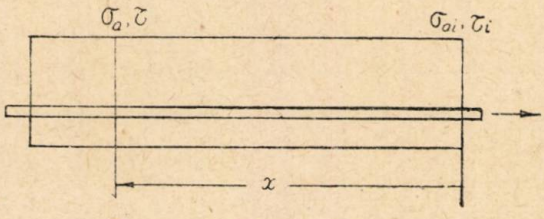


Fig. 9

Valoarea lui $\bar{\sigma}_{inters}$ poate fi determinată prin eliminarea lui $\bar{\tau}$ între (2) și (3)

$$\bar{\sigma}_{inters} = \frac{183-184\alpha+\sqrt{(175-184\alpha)^2+3\,680}}{368} \tag{6}$$

iar $\bar{\tau}_{inters}$ se determină prin înlocuirea valorii aflate pentru $\bar{\sigma}_{inters}$ în (2) sau (3).

În figurile 10 și 11 sînt reprezentate variația lui $\bar{\sigma}$ în funcție de $\frac{x}{A}$ și respectiv lui $\bar{\tau}$ în funcție de $\frac{x}{A}$ pentru diferite valori ale lui $\bar{\sigma}_i$, respectiv $\bar{\tau}_i$.

c) Trebuie remarcat că ipotezele puse la baza studiului și în consecință formulele stabilite sînt valabile în forma dată numai în cazul în care bara de armătură este trasă sau împinsă în beton sau în sfîrșit în cazul unui element de beton armat supus la încovoiere cu moment încovoietor constant.

În cazul în care momentul încovoietor variază în lungul elementului, trebuie aduse anumite corecțiuni care să țină seama de această variație. Într-adevăr, în porțiunea în care există lunecări ale armăturii, se produce o egalizare a eforturilor unitare din armătură (dacă nu se ia în considerare aderența datorită frecării); în porțiunea în care nu există lunecări, scăderea de efort unitar $d\sigma_a$, pe lungimea infinitezimală dx, se datorește atît cedării unei părți din efort prin aderență,

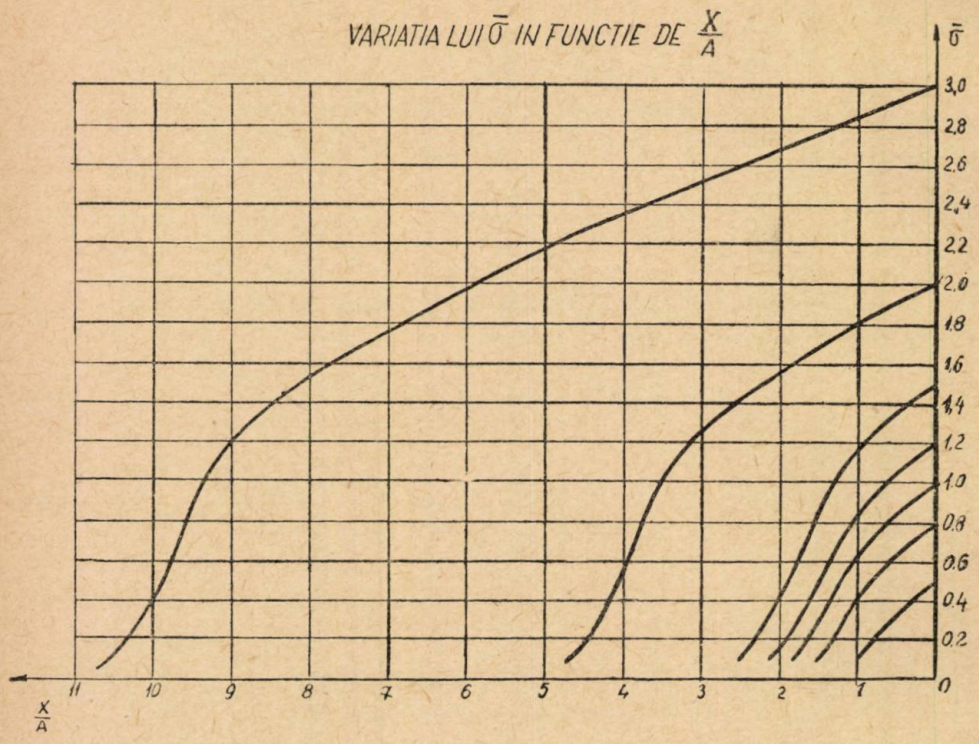

VARIATIA LUI $\bar{\sigma}$ IN FUNCTIE DE $\frac{X}{A}$
$\bar{\sigma}$
3,0
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$\frac{X}{A}$

Fig. 10

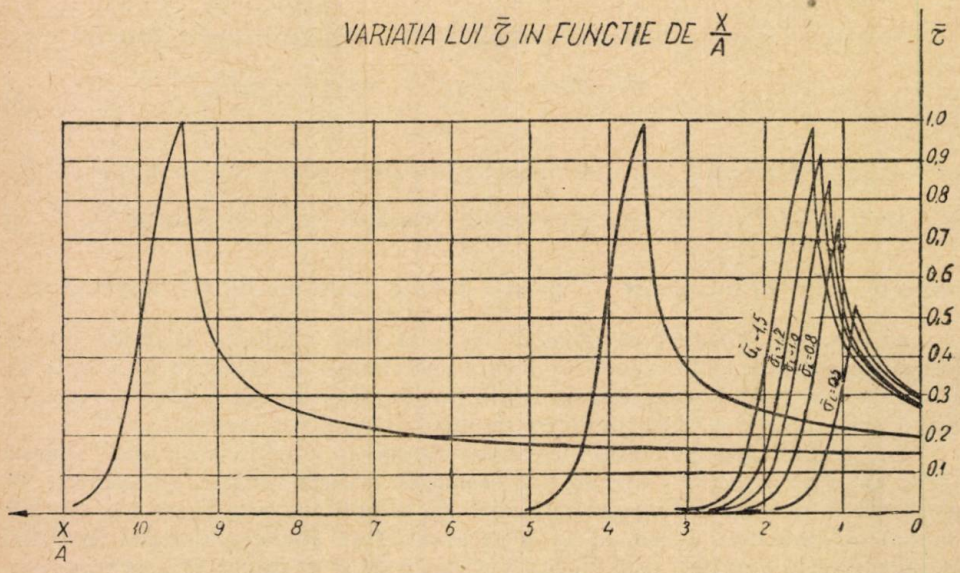

VARIATIA LUI $\bar{\tau}$ IN FUNCTIE DE $\frac{X}{A}$
$\bar{\tau}$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$\frac{X}{A}$
$\bar{\sigma}=1,5$
$\bar{\sigma}=1,2$
$\bar{\sigma}=1,0$
$\bar{\sigma}=0,8$
$\bar{\sigma}=0$

Fig. 11

cît și micșorării efortului din armătură datorită scăderii momentului pe aceeași lungime infinitezimală.

VI. Pentru a se verifica valabilitatea ipotezelor făcute s-au efectuat în 1955, în cadrul Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R., un număr însemnat de încercări asupra unor elemente experimentale.

Elementele au fost supuse la încovoiere, după o schemă ca în figura 12. Ele prezentau cîte un gol în partea inferioară, spre ambele capete, pentru montarea aparatelor *). Pe elementele experimentale au fost așezate microcomparatoare pentru a măsura deplasările relative ale armăturii față de beton în timpul încărcării (fig. 12), precum și *mărci* ale unui tensometru electric pentru măsurarea directă a eforturilor unitare din armătură, după egalizarea produsă prin lunecări.

În figurile 13 și 14 sînt arătate elemente experimentale în timpul încercării.

Au fost încercate elemente executate cu betoane de marcă variind în general între 150 și 300 kg/cm². Armăturile utilizate au fost OL 38, cu diametru de 12 și 20 mm; oțel tras (coardă de pian), cu diametrul 5 mm; precum și oțel cu profil periodic, cu două bavuri răsucite în spirală (diametrul armăturii fără bavuri 7,6 mm).

Lungimile de ancoraj au fost variate de la 5 *d* la 12 *d* pentru OL 38, de la 40 *d* la 200 *d* pentru oțelul tras și de la 7 *d* la 20 *d* pentru oțelul cu profil periodic.

Au fost încercate cîte 4 elemente din fiecare tip, precum și cuburi și prisme pentru stabilirea rezistențelor betonului din fiecare șarjă. Au fost eliminate unele rezultate foarte depărtate de medie.

Rezultatele încercărilor sînt centralizate în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Nr.	R kg/cm²	Oțel		l_a, cm	$R_{a,\,med}$ kg/cm²
		calit.	∅, mm		
1	145	OL 38	12	5,6	13,1
2	136	»	12	10,0	18,7
3	145	»	12	11,8	21,8
4	136	»	12	15,2	18,6
5	247	»	12	7,5	31,1
6	250	»	12	14,8	28,8
7	169	»	12	8,2	19,8
8	126	»	12	14,6	17,8
9	173	»	20	14,3	10,3
10	184	»	20	25,0	14,0
11	275	Oțel tras	5	20,1	10,6
12	269	»	5	29,5	10,4
13	253	»	5	49,5	9,3
14	255	»	5	94,9	7,5
15	235	Profil periodic	7,6	5,1	43,2
16	163	»	7,6	8,0	27,0
17	215	»	7,6	9,8	27,1
18	215	»	7,6	14,6	23,8
19	286	»	7,6	5,1	47,0
20	331	»	7,6	9,6	39,6
21	324	»	7,6	14,6	34,6

*) O metodă asemănătoare a fost utilizată de Arthur P. Clark, *Bond of Concrete Reinforcing Bars, Journ. of Amer. Concr. Institute*, noiembrie 1949, nr. 3, p. 161—184.

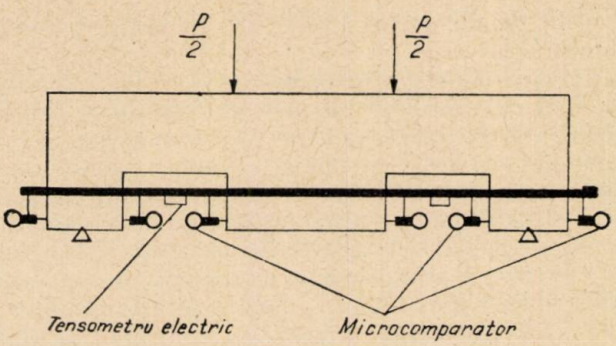


Fig. 12

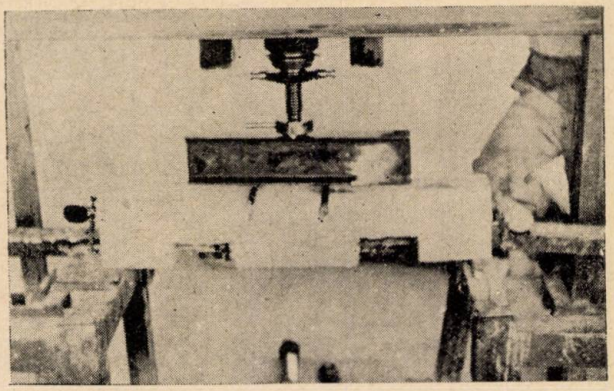


Fig. 13

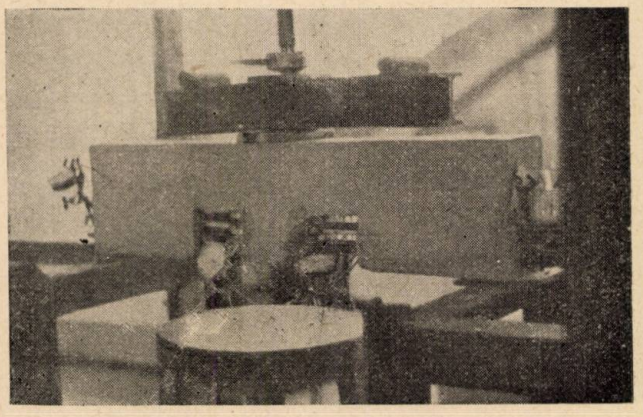


Fig. 14

Rezistența medie de aderență a rezultat din împărțirea efortului maxim din armătură, în momentul generalizării lunecării de-a lungul întregii bare, la suprafața laterală a armăturii înglobate în beton.

Pentru a se putea compara rezultatele măsurătorilor cu datele de calcul, trebuia reprezentată relația dintre lungimea de ancoraj și rezistența medie de aderență rezultată din calcul. Pentru a se putea lua în considerare influența caracteristicilor fizico-mecanice ale materialelor, s-a reprezentat relația dintre $\frac{l_a}{A}$ și $\frac{R_{a,\,med}}{\tau_{max}} = \frac{A_{\bar{\sigma}i}}{l_a}$; lungimea de ancoraj necesară a fost calculată ca x-ul punctului în care ramura II intersectează ramura I (considerîndu-se că momentul

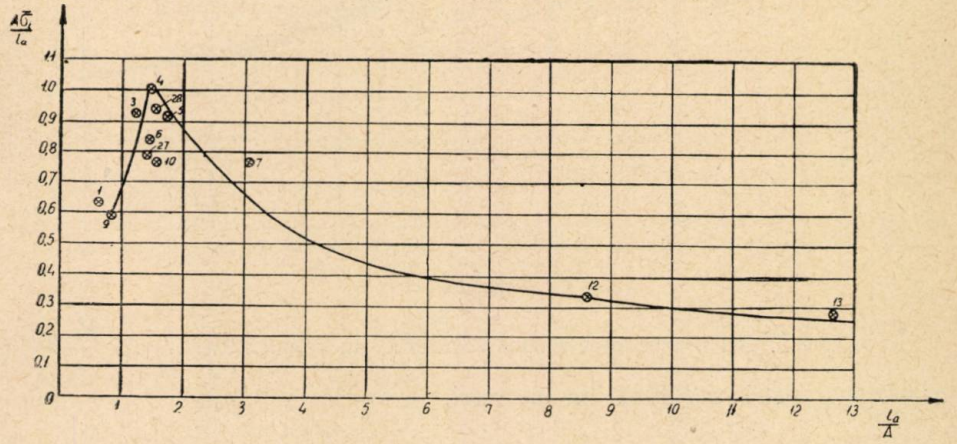


Fig. 15

generalizării lunecării corespunde tocmai momentului în care, la capătul barei opus celui în care se exercită efortul, apare un efort unitar de aderență egal cu τ_{inters}).

În figura 15 este reprezentată curba rezultată din calcul și punctele rezultate din încercări, pentru OL 38 și oțelul tras. S-au admis următoarele valori: $\sigma_{a0} = 600$ kg/cm² și $\tau_{max} = 0{,}1 \ldots 0{,}15$ R (R = marca betonului; pentru OL 38, ⌀ 12, $\tau_{max} = 0{,}15$ R; pentru OL 38, ⌀ 20, $\tau_{max} = 0{,}1$ R; pentru oțel tras $\tau_{max} = 0{,}12$ R).

Pentru oțelul cu profil periodic, scăderea efortului unitar de aderență în zona C nu este atît de rapidă ca pentru oțelul rotund; în consecință au fost alese alte curbe pe ramura II și anume

$$\bar{\tau} = \frac{0{,}8}{4(\bar{\sigma} + \alpha) - 3} + 0{,}2, \tag{7}$$

în care, pentru

$$\bar{\sigma}_i \geqslant 1{,}5, \quad \alpha = \frac{0{,}15}{\bar{\sigma}_i},$$

iar pentru

$$\bar{\sigma}_i \leqslant 1{,}5, \quad \alpha = 1{,}3 - 0{,}8\ \bar{\sigma}$$

(s-a pus curbei generale condiția ca să tindă asimptotic către $\bar{\tau} = 0{,}2$ și să treacă prin punctul $\bar{\sigma} = 1{,}2$; $\bar{\tau} \simeq 0{,}65$). Curbele sînt arătate în figura 16.

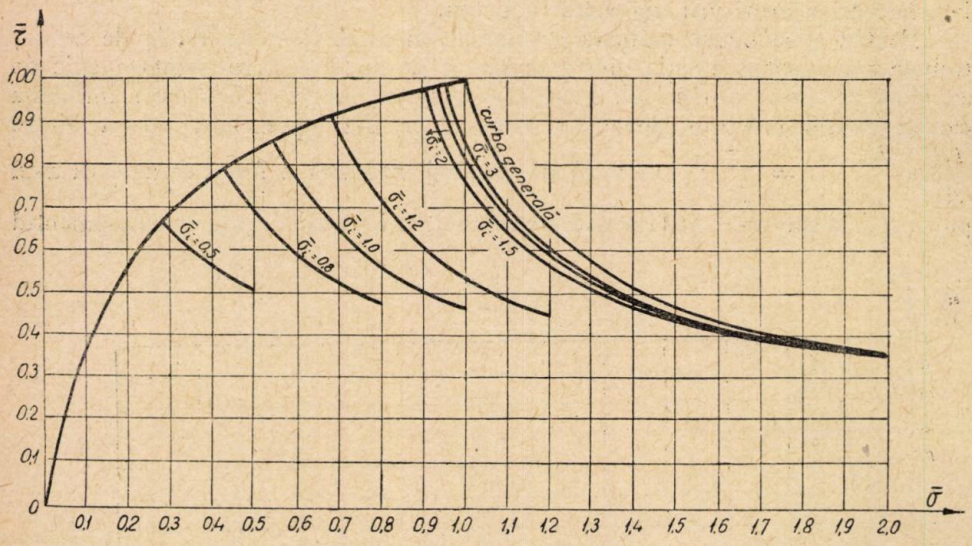


Fig. 16

În figura 17 s-a reprezentat relația rezultată din calcul între $\frac{l_a}{A}$ și $\frac{R_{a,\,med}}{\tau_{max}}$, precum și punctele rezultate din încercări.

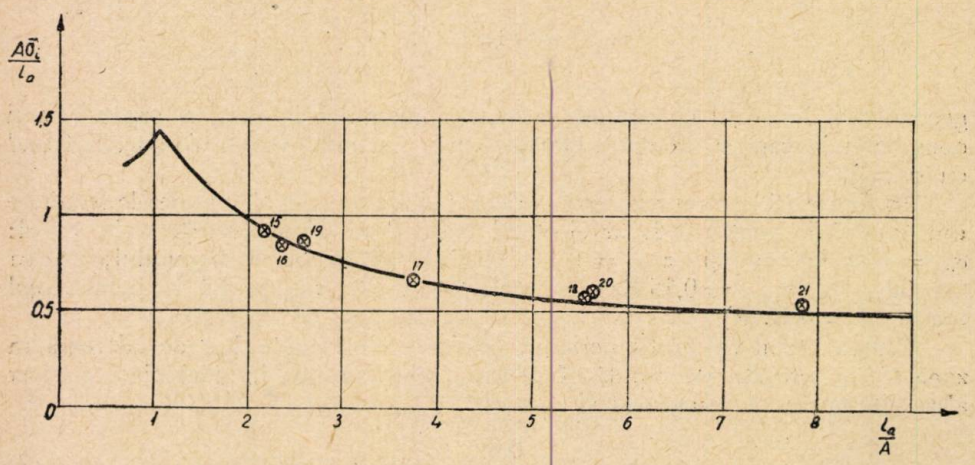


Fig. 17

S-a mai făcut o comparație între datele rezultate din calcul și unele încercări efectuate de A. B i c h a r a (s-au luat $\sigma_{a0} = 850$ kg/cm², întrucît în element existau și alte armături longitudinale și etrieri; $\tau_{max} = 30$ kg/cm² $= 0{,}1$ R, fiind o bară groasă).

Comparația este arătată în figura 18.

VII. Verificările experimentale au arătat valabilitatea ipotezelor făcute asupra repartizării în lung a eforturilor unitare de adeziune.

Din punct de vedere calitativ, s-a pus în evidență în mod clar influența simțitoare a concentrărilor locale la intrarea armăturii în beton (prin aceasta se explică și fenomene ca variația efortului unitar maxim de aderență în cazul încărcărilor diferite). Ca urmare a acestor influențe locale, s-a pus în evidență faptul că, deși în majoritatea cazurilor obișnuite din practică, rezistența medie de

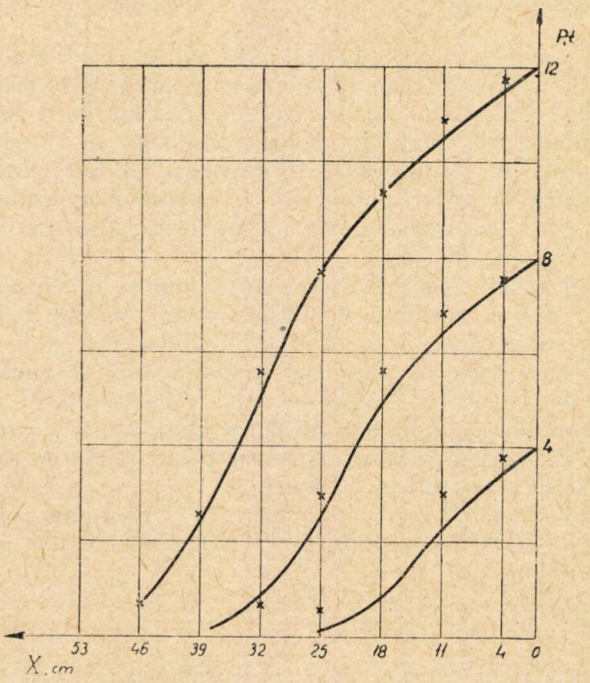


Fig. 18

adeziune crește o dată cu micșorarea lungimii de ancoraj, există și anumite cazuri în care rezistența medie de adeziune descrește o dată cu micșorarea lungimii de ancoraj. Aceasta se întîmplă în cazul unor lungimi de ancoraj reduse (la oțel rotund, aproximativ pentru $\frac{l_a}{A} < 1{,}3$; la oțel cu profil periodic, aproximativ pentru $\frac{l_a}{A} < 1$; fig. 15 și 17). Explicația fizică a fenomenului este următoarea:

La intrarea armăturii în beton, valoarea efortului unitar de aderență este redusă din cauza influenței concentrării de efort; dacă lungimea de ancoraj este mică, el nu are timp să crească decît puțin spre capătul liber, media rezistenței de aderență rămînînd destul de scăzută *).

*) Pentru oțelul cu profil periodic, lungimile de ancoraj de la care reducerea lui l_a duce și la o reducere a lui R_a mediu sînt mai mici decît la oțelul rotund, influențele locale fiind mai puțin extinse.

Pe baza ipotezelor făcute, se poate de asemenea face o analiză unitară a variaţiei eforturilor unitare de aderenţă atît în timpul lunecărilor parţiale, cît şi în timpul lunecărilor generalizate.

Din punct de vedere cantitativ, curbele propuse pentru relaţia $\bar{\sigma} - \bar{\tau}$ au corespuns destul de bine cazurilor analizate. Alura curbei, mărimile valorilor importante precum şi influenţele diferiţilor factori luaţi în considerare au dat aproximări satisfăcătoare. Se menţionează că aproximările sînt în general mai sensibile în regiunea punctului de întoarcere al curbei $\frac{l_a}{A} \rightarrow \frac{R_{a,\,med}}{\tau_{max}}$.

Pentru σ_{a0}, 600 kg/cm² s-a dovedit a fi o valoare acceptabilă în cazul elementelor încercate la I.M.A. Această valoare trebuie sporită în cazuri ca cel menţionat, al existenţei etrierilor (A. B i c h a r a recomandă valori între 600 şi 1000 kg/cm²). τ_{max} are o variaţie mai largă. În cazurile studiate, au corespuns valori între 0,1 şi 0,2 din marcă. Factorii care influenţează cel mai puternic valoarea lui τ_{max} sînt diametrul şi calitatea armăturii. Creşterea diametrului reduce sensibil valoarea lui τ_{max}; de asemenea cu cît suprafaţa armăturii este mai lucie, cu atît se reduce valoarea lui τ_{max}.

Studiul întreprins poate fi extins prin luarea în considerare a variaţiei momentului şi deci a efortului de întindere din elementele încovoiate; prin stabilirea unor valori pentru σ_{a0} şi τ_{max}, ţinînd seama şi de influenţele parametrilor lăsaţi la o parte în prezentul studiu (starea de tensiune din beton şi armătură, influenţa reacţiunii de pe reazeme, raportul dintre dimensiunile barei şi cele ale betonului înconjurător, influenţa compoziţiei mineralogice a cimentului utilizat). Pe baza ipotezelor arătate se poate studia de asemenea repartiţia efortului unitar de aderenţă între fisuri.

Se consideră însă că asemenea concretizări amănunţite trebuie să se facă numai pe baza unor cazuri specifice, de materiale speciale care urmează a fi studiate în ansamblu.

Primită la redacţie la 24.I.1956

ИЗМЕНЕНИЕ СЦЕПЛЕНИЯ БЕТОНА С АРМАТУРОЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДЛИНЫ АНКЕРОВКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследование основывается на 2 гипотезах в связи с изменением унитарных напряжений сцепления вдоль стержня арматуры в том случае, когда внешнее напряжение не изменяется.

а) Часть напряжения, отдаваемая арматурой на бесконечно малой длине, равна части напряжения, передаваемой бетону сцеплением.

б) Между унитарным напряжением в арматуре и унитарным напряжением сцепления существует общее соотношение типа, показанного на рисунке 6.

В статье приводятся математические выражения как для общего соотношения, так и для особых случаев соотношений, получающихся при учете перерывов сцепления при входе арматуры в бетон.

Из соотношений, выражающих гипотезы *а*) и *б*), выводится соотношение, выражающее изменение унитарного напряжения сцепления по длине стержня. Для проверки гипотез на опыте были испытаны на изгиб

балки с обнаженными участками арматуры для установки приборов. Для измерения относительных сдвигов между бетоном и арматурой применялись микрокомпараторы, а для измерения напряжений в арматуре при входе стержня в бетон применялись электрические тензометры.

Результаты испытаний соответствуют данным, полученным на основании указанных выше гипотез.

VARIATION DE L'ADHÉRENCE DU BÉTON À L'ARMATURE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ANCRAGE

(RÉSUMÉ)

Cette étude repose sur deux hypothèses ayant trait à la variation des efforts unitaires d'adhérence le long de la barre d'armature, dans le cas où l'effort extérieur ne varie pas.

a) La quantité d'effort cédée par l'armature sur une longueur infinitésimale est égale à la quantité d'effort transmise par adhérence au béton.

b) Entre l'effort unitaire dans l'armature et l'effort unitaire d'adhérence il existe une relation générale du type de celle de la figure 6. On recommande dans ce travail, tant pour la relation générale que pour les relations particulières, des expressions mathématiques que l'on obtient en prenant en considération les interruptions d'adhérence qui ont lieu à l'entrée de l'armature dans le béton.

Des relations qui expriment les hypothèses *a* et *b*, on tire la relation qui exprime la variation de l'effort unitaire d'adhérence le long de la barre.

Pour la vérification expérimentale de ces hypothèses, des essais ont été effectués sur des poutres soumises à la flexion, dont des portions de l'armature avaient été mises à découvert en vue de la fixation des appareils. Des micro-comparateurs ont servi à mesurer les déplacements relatifs entre le béton et l'armature; les efforts unitaires dans l'armature, à l'entrée de la barre dans le béton, ont été déterminées à l'aide de tensiomètres électriques.

Les résultats des essais ont correspondu aux données obtenues par l'application des hypothèses indiquées.

BIBLIOGRAFIE

1. Berg O. I., *K voprosu o procinosti i plasticinosti betona*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 1950, t. LXX, nr. 4, p. 617.
2. Bichara A., *Étude du problème de l'adhérence dans le béton armé*, Cahiers du Centre scientifique et technique du bâtiment, 1951, nr. 12 și 13. Caietele 116 și 127.
3. Brice L. P., *Adhérence des barres d'acier dans le béton*, Annales de l'Institut technique du batiment et des travaux publics, 1951, martie-aprilie, nr. 179, p. 1.
4. Dmitriev S. A., *Soprotivlenie skoljeniu v betone predvaritelno napriajennoi holodnotianutoi armaturî*, Isledovania obicinîh i predvaritelno napriajennîh jelezobetonnîh construcții. Gosstroiizdat, Moscova, 1949.
5. Hangan M., *Contracția betonului și influența sa asupra aderenței*. Teză de doctorat. Politehnica din București, 1938.
6. Ivianski A. M. și Ovecikin A. M., *Construcții de beton armat și de zidărie*. Editura Căilor Ferate, București, 1953.
7. Mihailov K. V., *Șteplenie armaturî s betonom*, Isledovanie jelezo-betonnîh construcții, Gosstroiizdat, Moscova, 1952.

8. Muraşev V. I., *Trescinoustoicivosti, jestkosti i procinosti jelezobetona*, Maşstroiizdat, Moscova, 1950.
9. Nicolau V. şi colaboratori, *Introducere în teoria betonului*, E.S.A.C., Bucureşti, 1954, vol. I.
10. Sahnovski C. V., *Construcţii de beton armat*, E.M.C., Bucureşti, 1954, vol. I.
11. Siemonsen F. şi Spring A., *Haftung und Reibung zwischen Stahl und Beton*, Beton und Stahlbeton, martie 1953.
12. Vasilescu-Karpen N., *Despre cauza aderenţei dintre beton şi armătură în construcţiile de beton armat*, Bul. Acad. Rom., Secţia ştiinţifică, 7 iulie 1919, nr. 1—2, t. XVII.
13. — *Aderenţa dintre oţel şi beton în betonul armat*, Bul. Acad. Rom., Secţia ştiinţifică, sept. 1946, nr. 4, t. XXIX.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

CONSIDERAŢII ASUPRA CALCULULUI GRINZILOR CONTINUE DIN BETON PRECOMPRIMAT

DE

I. DUMITRESCU

Experienţa de proiectare şi execuţie cîştigată, precum şi verificarea comportării în practică a construcţiilor precomprimate, o dată cu progresul tehnicii construcţiilor, au creat condiţiile ca să se pună problema lărgirii domeniului de aplicare a betonului precomprimat. În ultimul timp s-a acordat o atenţie din ce în ce mai mare construcţiilor continue din beton precomprimat, dovedindu-se în fapt că principiul precomprimării poate fi folosit nu numai în construcţii static determinate ci şi în sisteme de bare static nedeterminate ca grinzi continue, grinzi de cadre sau cadre întregi simple şi etajate.

În lucrarea de faţă ne propunem să prezentăm cîteva consideraţii asupra problemelor ridicate de calculul grinzilor continue de beton precomprimat, probleme legate de comportarea deosebită a construcţiilor static nedeterminate precomprimate.

În primul rînd este bine să fie precizate noţiunile elementare referitoare la calculul secţiunilor şi la caracteristicile de comportare ale grinzilor continue din beton precomprimat.

1. După cum se ştie, la grinzile continue dimensionarea se face ţinîndu-se seama de momentele date, de curba momentelor maxime şi minime. Este necesar ca prin dimensionare să se asigure coeficienţii de siguranţă necesari la fisurare şi rupere pentru aceste solicitări maxime sau minime. Cum calculul la fisurare se face considerîndu-se construcţia în stadiul elastic, pentru ori ce secţiune a grinzii trebuie să se îndeplinească următoarele condiţii:

$$M_f \geqslant M_{f\,\max},$$

$$M_f' \leqslant M_{f\,\min},$$

unde $M_{f\,\max}$, $M_{f\,\min}$ — sînt momentele de calcul la fisurare,

M_f — momentul de apariţie al fisurilor în secţiunea dată sub acţiunea momentului maxim,

M_f' — momentul de apariţie al fisurilor în secţiunea dată sub acţiunea momentului minim.

Adoptînd pentru determinarea momentului de fisurare formula

$$M_f = W_r (\sigma_{b1} + \gamma R_t),$$

unde W_r — momentul de rezistență al secțiunii reduse, ținînd seama de slăbirea ei prin golul pentru fasciculele de armătură,

σ_{b1} — efortul unitar de precomprimare, ținînd seama de pierderile din curgerea lentă și contracția betonului și din curgerea lentă a armăturii,

R_t — limita de rupere a betonului la întindere,

γ — coeficient care ține seama de plasticitate la ruperea betonului întins,

se ajunge la următoarele condiții

$$M_{f\,\max} - W_r \gamma R_t \leqslant \frac{W_r}{W_0} N_{pr} (h_s + e), \tag{1}$$

$$M_{f\,\min} + W_r' \gamma R_t \geqslant \frac{W_r'}{W_0'} N_{pr} (- h_i + e). \tag{2}$$

Valorile limită, minimă pentru N_{pr} și maximă pentru e, se obțin în forma

$$N_{pr} = \frac{\beta' A - \beta' B}{\beta\beta' (h_s + h_i)}, \tag{3}$$

$$e = \frac{\beta h_s B + \beta' h_i A}{\beta' A - \beta B} \tag{4}$$

unde am notat

W_0 — momentul de rezistență al secțiunii de beton ținînd seama de slăbirea ei prin golul lăsat pentru fasciculele de armătură (în cazul calculului momentului M_f),

W_r' — ca la W_r (în cazul calculului momentului M_f'),

W_0' — ca la W_0 (în cazul calculului momentului M_f'),

N_{pr} — proiecția orizontală a forței de precomprimare,

h_i — distanța de la centrul de greutate la marginea inferioară a sîmburelui central pentru secțiunea de beton slăbită prin golul lăsat pentru fasciculele de armătură,

h_s — distanța de la centrul de greutate la marginea superioară a sîmburelui central pentru secțiunea de beton slăbită,

e — excentricitatea armăturii,

$$\beta = \frac{W_r}{W_0}, \qquad \beta' = \frac{W_r'}{W_0'},$$

$$A = M_{f\,\max} - W_r \gamma R_t, \qquad B = M_{f\,\min} + W_r' \gamma' R_t.$$

Din formulele (3) (4) rezultă că

a) ignorînd influența neglijabilă a raportului $\frac{\beta'}{\beta}$ valoarea forței de precomprimare este direct proporțională, iar valoarea excentricității este invers proporțională cu diferența $A-B$;

b) valoarea maximă a excentricității este limitată de momentul minim.

Dacă valoarea excentricității obținută din formula (4) este mai mare decît excentricitatea maximă posibilă pentru secțiunea dată, nu mai este necesar ca în calcule să se țină seama de momentul minim.

În acest caz se ia ca excentricitate excentricitatea maximă a secțiunii și forța de precomprimare se determină numai din condiția (1). Aceasta se realizează pentru anumite raporturi între momentul minim și maxim, și anume pentru acelea care satisfac condiția

$$\frac{B}{A} \geqslant \frac{\beta'}{\beta} \frac{e_{\max} - h_i}{e_{\max} + h_s},$$

sau

$$\frac{M_{f\min}}{M_{f\max}} \geqslant \frac{\beta'}{\beta} \frac{-h_i + e_{\max} - \dfrac{\gamma' R_t W_r'}{\beta' N_{pr}}}{h_s + e_{\max} + \dfrac{\gamma R_t W_r}{\beta N_{pr}}}.$$

Termenii β', β, h_s, h_i depind numai de caracteristicile geometrice ale secțiunii, dar $\frac{\gamma' R_t W_r'}{\beta' N_{pr}}$ și $\frac{\gamma R_t W_r}{\beta N_{pr}}$ depind de marca betonului și forța de precomprimare.

Făcînd o serie de transformări și ținînd seama că

$$\frac{\gamma R_t W_r}{\beta N_{pr}(e + h_s)} = \frac{\gamma R_t}{\sigma_{b1}}$$

se obține pentru raportul limită expresia

$$\frac{M_{f\min}}{M_{f\max}} = \frac{\dfrac{\beta'}{\beta} \dfrac{e - h_i}{e + h_s} - \dfrac{\gamma R_t}{\sigma_{b1}}}{1 + \dfrac{\gamma R_t}{\sigma_{b1}}} = a.$$

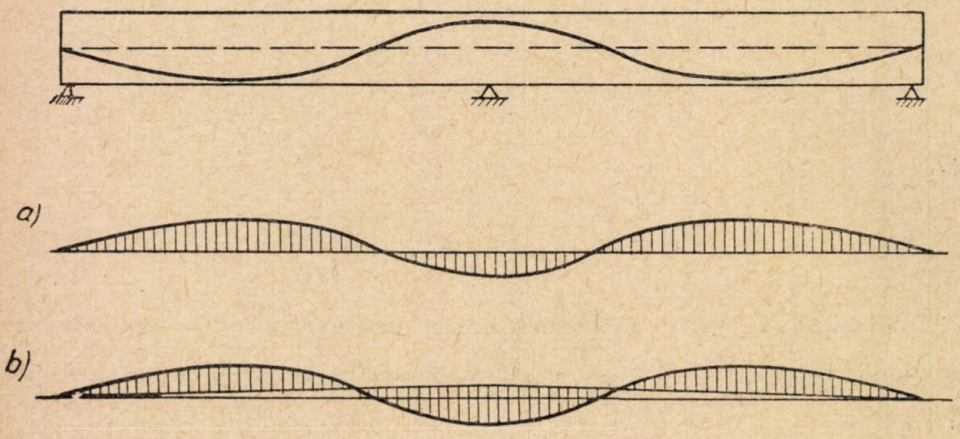
Valoarea raportului limită este cu atît mai mică, cu cît sînt mai mari valorile lui h_s, h_i, $\frac{\gamma R_t}{\sigma_{b1}}$.

Pentru un anumit tip de secțiune și un beton de anumită marcă se poate ușor calcula valoarea limită a raportului $\frac{M_{f\min}}{M_{\max}}$.

În cazul grinzilor cu armătură postîntinsă simplu rezemate momentul minim este cel din greutatea proprie și raportul dintre el și momentul maxim

este în general suficient pentru a permite utilizarea excentricității maxime în secțiunea cea mai solicitată și deci nu intervine în calculul de dimensionare. La grinzile continue din sarcina utilă pot apare momente de semne contrarii, în așa fel încît trebuie luate în considerație atît momentele maxime cît și cele minime. În același timp prezența momentelor de continuitate face să se schimbe raportul $\frac{M_{max}}{M_{min}}$ și să trebuiască să fie luat în considerație momentul minim, chiar dacă valoarea lui $\frac{M_{min}}{M_{max}}$ este mai mare decît valoarea limită.

2. În grinzile continue din beton precomprimat epura momentelor de precomprimare produse de întinderea armăturii satisface condițiile de conti-



a) epura momentelor $N_{pr}e$

b) -"- -"- de precomprimare $M_{pr} = N_{pr}e + C$

Fig. 1

nuitate. Deci momentul de precomprimare într-o secțiune oarecare nu mai este egal cu produsul dintre forța de precomprimare și excentricitatea respectivă ca în cazul grinzii simplu rezemate, ci este dat de expresia

$$M_{pr_x} = N_{pr_x}\, e_x + C_x$$

unde C_x reprezintă momentul de continuitate din secțiunea x (fig. 1).

În cazul cînd epura de momente $N_{pr}\, e$ satisface singură condițiile de continuitate, momentul de continuitate este nul. Prin urmare, în grinda continuă momentul de precomprimare într-o anumită secțiune depinde de poziția cablului în tot lungul grinzii. În felul acesta apare în calculul grinzilor continue problema nouă a asigurării momentelor de precomprimare necesare prin alegerea unui traseu de cablu adecvat.

În concluzie:

Ca o urmare a continuității, în calculul grinzilor continue de beton precomprimat trebuie să se ia în considerație epura momentelor date de curba momentelor

maxime și minime precum și momentele de continuitate ce iau naștere prin întinderea armăturii.

În rezolvarea problemelor ridicate de calculul grinzilor continue de beton precomprimat se disting două direcții:

a) Se dau dimensiunile grinzii, expresia traseului armăturii (h și N_{pr} constante) în funcție de valorile excentricității armăturii în secțiunile periculoase luate ca parametrii și se determină aceste valori ca și mărimea forței de precomprimare din condiția realizării rezistențelor admisibile în secțiunile respective. În aceasta constă metoda prof. G. Magnel.

b) Pe baza calculului secțiunilor se găsesc toate datele caracteristice: dimensiunile secțiunii, forța de precomprimare și excentricitatea ei în secțiunile periculoase (h și N_{pr} constante).

Se alege pentru armătură acel traseu care asigură realizarea excentricităților cerute de calcul. Aceasta este soluția inginerului M. Y. Guyon.

Oricare ar fi metoda de calcul folosită, este necesar ca ea să fie aplicată cu discernămînt. Pentru aceasta se impune cunoașterea unor anumite considerente generale care ne vor permite să tragem cîteva concluzii asupra principalelor probleme de calcul și constructive.

De folos în cercetarea ce ne-am propus-o este clasificarea grinzilor după natura eforturilor pe baza cărora se face dimensionarea.

În acest sens se disting 3 categorii:

1) Caracteristicile secțiunii și ale precomprimării se determină pe baza curbei momentelor maxime (în valoare absolută) în toate cîmpurile și pe toate reazemele. În acest caz pentru toate secțiunile periculoase se realizează condiția $\frac{M_{min}}{M_{max}} \geqslant a$, a reprezentînd valoarea limită a raportului dintre momentul minim și cel maxim, care solicită secțiunea și pentru care forța de precomprimare poate avea excentricitatea maximă, iar calculul se face ținîndu-se seama numai de momentul maxim. După cum s-a văzut, această valoare depinde de caracteristicile geometrice ale secțiunii $\left(\frac{h_i}{e_{max}}, \frac{h_s}{e_{max}}\right)$ și de marca betonului.

2) În unele secțiuni $\frac{M_{min}}{M_{max}} \geqslant a$ și dimensionarea secțiunilor se face pe baza momentului maxim, iar în altele $\frac{M_{min}}{M_{max}} \leqslant a$ și în calcul se ține seama și de momentul minim, care limitează valoarea maximă a excentricității în secțiunile respective.

3) În toate secțiunile grinzii $\frac{M_{min}}{M_{max}} \leqslant a$ și calculele trebuie să se facă pe baza învelitorii momentelor maxime și minime. Excentricitatea forței de precomprimare rezultă în toate secțiunile mai mică sau cel mult egală cu excentricitatea maximă.

Vom considera pe rînd 2 categorii extreme.

$\frac{M_{min}}{M_{max}} \geqslant a$ *în toate secțiunile periculoase.* În acest caz în nici o secțiune critică, momentul de precomprimare nu este necesar să fie mai mic decît $N_{pr}\, e_{max}$. Dacă greutatea proprie este mare (condiția de greutate proprie limitează valoarea maximă a excentricității în secțiunile în care sarcina utilă are o influență redusă

asupra momentului minim) este posibil ca valoarea momentului de precomprimare să poată depăși pe $N_{pr}\ e_{max}$.

În același timp dat fiind că M_{max} este cel care determină caracteristicile secțiunii și ale precomprimării, M_{pr} necesar variază aproximativ direct proporțional cu M_{max} (în valoare absolută). Cum M_{max} variază în lungul grinzii, luînd valori diferite în fiecare cîmp și pe fiecare reazem, există interesul ca să se obțină o variație corespunzătoare și pentru M_{pr}, cu utilizarea lui e_{max} în toate deschiderile în cîmp și pe reazem. Aceasta se poate realiza prin variația secțiunii grinzii sau a secțiunii armăturii. În cazul unei secțiuni a grinzii și a armăturii constante prin momente de continuitate se poate realiza o variație corespunzătoare a momentelor de precomprimare, fără însă a se utiliza e_{max} în

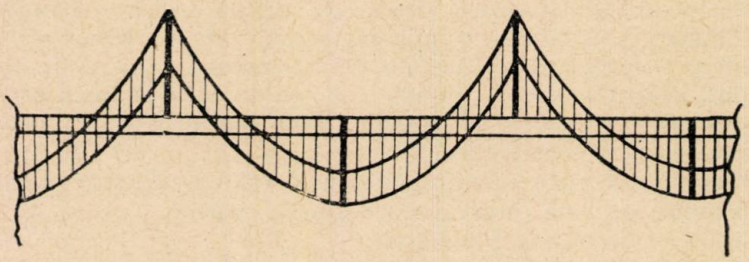


Fig. 2

cîmpuri. Dacă este necesar a se obține o înălțime de construcție redusă în cîmp se pot utiliza ambele mijloace.

Pentru a pune mai bine în evidență influența momentelor de continuitate în scopul de a putea trage concluzii asupra posibilității utilizării lor, le vom considera ca niște momente exterioare care se sumează cu momentele maxime și minime date de sarcinile exterioare (fig. 2). În acest fel apare clar că, datorită momentelor de continuitate se poate obține schimbarea epurii de momente pe baza căreia se face dimensionarea. În același timp se poate trage concluzia că dimensionarea secțiunilor poate fi influențată de momentele de continuitate numai dacă dimensionarea se face pe bază de momente maxime (în valoare absolută), deci dacă în secțiunile care determină dimensionarea, există relația $\frac{M_{min}}{M_{max}} \geqslant a$. Dacă calculul secțiunilor se face pe baza momentelor minim și maxim din secțiune, cum valoarea forței de precomprimare este determinată de diferența dintre momentul maxim și cel minim, influența momentului de continuitate dispare din calculul ei.

O a doua consecință a existenței momentului de continuitate constă în faptul că datorită lui se schimbă raportul dintre momentul minim și maxim în secțiuni; avem acum $\frac{M^r_{min} - C^r}{M^r_{max} - C^r}$ pe reazem și în cîmp $\frac{M^c_{min} + C^c}{M^c_{max} + C^c}$. Aceasta înseamnă că în cîmp raportul dintre momentul minim și maxim crește datorită momentului de continuitate, deci se îndepărtează de limita a, iar pe reazem acest raport scade, apropiindu-se sau depășind limita a.

La aceleași concluzii puteam ajunge considerînd momentul de continuitate ca un moment ce se sumează cu momentul M_{pr}. Într-adevăr prin momentele

de continuitate, momentul M_{pr} se poate schimba într-un sens sau altul în diferitele secțiuni ale grinzii. Există astfel posibilitatea de a obține în anumite secțiuni momentul de precomprimare mai mare decît $N_{pr} \cdot e_{max}$ (fig. 3). Acest fapt poate fi utilizat numai dacă în secțiunile respective acest lucru este permis de momentul minim.

Pornind de la cunoașterea acestor elemente se poate rezolva problema, cînd și în ce măsură pot fi utilizate momente de continuitate în cazul sarcinilor permanente preponderente $\left(\frac{M_{min}}{M_{max}} \leqslant a \text{ în secțiunile periculoase}\right)$.

În primul rînd ne vom ocupa de grinzile continue cu secțiunea grinzii și a armăturii constante cu secțiune simetrică față de axa orizontală și vom stabili care este valoarea optimă a momentului de continuitate admis în acest caz.

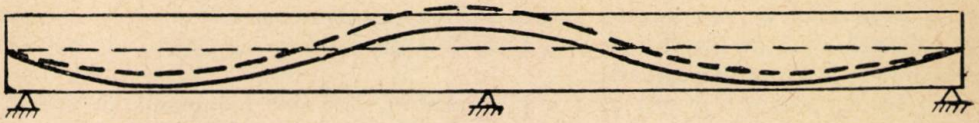


Fig. 3

O primă condiție ce trebuie să fie îndeplinită este aceea ca momentul de continuitate să reducă la maximum posibil diferența dintre momentele din diferitele cîmpuri și de pe diferitele reazeme.

$$\ldots = M^r_{max_n} - C^r_n = M^c_{max_{n-1}} + \alpha'_n C^r_{n-1} + \alpha_n C^r_n = M^c_{max_{n+1}} + \alpha'_{n+1} C^r_n + \\ + \alpha_{n+1} C^r_{n+1} = \ldots$$

C^c_n — momentul de continuitate din cîmpul n (în valoare absolută),

C^r_n — momentul de continuitate de pe reazemul n (în valoare absolută),

$$\alpha_n = \frac{C^c_n}{C^r_n}, \qquad \alpha'_n = \frac{C^c_n}{C^r_{n-1}},$$

M_{max} este considerat tot în valoare absolută.

La încărcări simetrice, pentru grinda cu două deschideri se obține o valoare unică

$$C^r_1 = \frac{M^r_{max_1} - M^c_{max_1}}{\alpha + 1}$$

Pentru grinda cu trei deschideri se obțin două valori care ne dau limitele între care variază momentul de continuitate optim. La grinda cu patru deschideri se obțin două valori limită pentru fiecare dintre momentele căutate.

A doua condiție ce trebuie să fie îndeplinită este aceea ca raportul $\frac{M^{rn}_{min} - C^r_n}{M^{rn}_{max} - C_n}$ să fie egal cu valoarea limită a, caracteristică pentru secțiunea respectivă, adică excentricitatea armăturii să fie excentricitatea maximă admisă de secțiune.

Această condiție limitează valoarea maximă a momentului de continuitate prin valoarea momentului minim de calcul.

Se vede că momentul de continuitate admis este cu atît mai mare cu cît raportul $\frac{M^r_{min}}{M^r_{max}}$ este mai departe de valoarea limită a. Deci momentul de conti-

nuitate poate fi utilizat la reducerea momentului de pe reazem numai în măsura în care o permite raportul $\frac{M^r_{\min}}{M^r_{\max}}$. Dacă acest raport este egal cu a — momentul de continuitate este limitat la 0 (cădem iar peste concluzia că momentele de continuitate pot fi folosite ca avînd influență statică numai în cazul 1). Bineînțeles că este vorba de un moment de continuitate care să permită reducerea înălțimii grinzii la minimul posibil — momentul optim. Dacă momentul de continuitate este mai mic decît cel dat de condiția 2 nu se utilizează mărirea momentului de precomprimare permisă de raportul $\frac{M_{\min}}{M_{\max}}$. Dacă momentul de continuitate este mai mare, nu este asigurat coeficientul de siguranță la fisurare din momentul minim.

Momentul de continuitate optim pentru grindă se ia cel mai mic dintre momentele date de condiția 1 și 2. Care condiție hotărăște e funcție de natura sarcinilor și de forma secțiunii.

Așadar pentru o grindă dată se poate stabili, care sînt momentele de continuitate optime pentru fiecare reazem. Cunoscînd aceste momente se definește epura momentelor la care se face dimensionarea. Dimensiunile secțiunii și forța de precomprimare sînt determinate de secțiunea cea mai solicitată, iar limitele între care poate varia excentricitatea, se determină pentru fiecare secțiune. Se pune problema cum se poate obține însă traseul de cablu care să producă momentele de continuitate necesare. Pentru aceasta se caută o epură de momente. $N_{pr} \cdot e$ care să se găsească între limitele necesare și care să satisfacă condițiile

$$\cdots S^{n-1}_{n} N_{pr} e + S^{n+1}_{n+1} N_{pr} e = S^{n-1}_{nC} + S^{n+1}_{n+1C} \cdots$$

S^{n-1}_{nM} — momentul static al suprafeței de momente M din cîmpul n față de reazemul $n-1$,

S^{n+1}_{n+1M} — momentul static al suprafeței de momente M din cîmpul $n+1$ față de reazemul $n+1$.

Grinzile continue precomprimate cu secțiunea betonului și armăturii constante sînt cu atît mai indicate cu cît este mai apropiat momentul de continuitate de valoarea dată de condiția 1.

Dacă momentul de continuitate este determinat de condiția 2 și prin urmare este mai mic decît cel dat de condiția 1, se obțin soluții cu cîmpurile supradimensionate. Deci iată că natura sarcinilor limitează cîmpul de aplicabilitate al acestui sistem.

Chiar în cazul că momentele de continuitate sînt cele optime (din condiția 1) înălțimea în cîmp a secțiunii este mai mare decît în cazul în care variația momentului de precomprimare se obține fără moment de continuitate, pentru că ea este determinată de momentul $M^c_{\max} + C^c$.

Totodată, din motive constructive, și anume dificultățile de întindere ale cablului cu unghiuri mari de deviere pe mai multe deschideri, este limitată posibilitatea de aplicare a soluției cu secțiune și armare constante la grinzile cu 2—3 deschideri.

Variația momentelor de precomprimare corespunzătoare momentelor maxime exterioare se mai poate obține și prin variația secțiunii sau a armării. Și în acest caz, dacă există încă o insuficientă corespondență între momentele $N_{pr}\ e$

și momentele exterioare, se pot admite momente de continuitate care sînt de asemenea limitate de niște condiții de natura celor dinainte. Condiția 1 exprimă în acest caz că momentele exterioare de calcul la care s-au sumat momentele de continuitate, sînt egale cu momentele capabile de fisurare ale secțiunilor de pe reazeme și din cîmpuri. Ca aceasta să se poată realiza, trebuie să existe anumite relații între momentele capabile de fisurare ale grinzii.

De exemplu pentru grinda cu două deschideri, condiția 1 se scrie

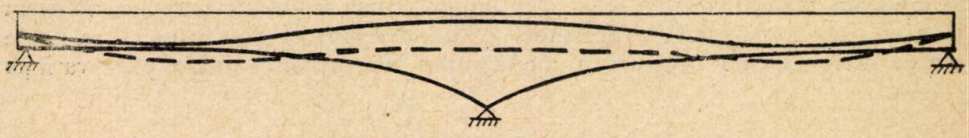


Fig. 4

$$M^c_{\max} + \alpha C = A$$
$$M^r_{\max} + C = B$$

considerăm momentul C cu valoarea lui algebrică fiindcă necorespondența dintre momentele exterioare și momentele de fisurare capabile, notate cu A și B, poate fi într-un sens sau altul.

Aceste condiții se realizează simultan numai dacă între A și B există relația

$$M^r - \frac{M^c_{\max}}{\alpha} = B - \frac{A}{\alpha}$$

și pentru C se obține expresia

$$C = \frac{A - M^c_{\max}}{\alpha} = M^r_{\max} - B\,.$$

Așadar, chiar în cadrul condiției 1, realizarea momentului optim este în funcție de relația dintre A și B. Dacă relația necesară nu este satisfăcută, se obțin două valori între care poate varia momentul optim de continuitate (pentru grinda cu două deschideri). Cu cît momentele $N_{pr}\,e$ sînt mai apropiate de momentele de precomprimare necesară, cu atît momentele de continuitate utile rezultate din condiția 1 sînt mai mici.

Condiția 2 se menține identică cu cea din cazul precedent. În concluzie apare clar că este mult mai greu de realizat o grindă continuă cu momente de continuitate *utile*, în cazul cînd secțiunea sau armătura variază. Momente de continuitate în afara valorilor date de condiția 1 și 2 sînt neeconomice. Așadar, cînd se urmărește utilizarea la maximum a materialelor este indicat să se realizeze grinzi cu armătură sau secțiune variabilă fără momente de continuitate.

Momentele de continuitate pot apare utile în cazul cînd este necesar a se obține o înălțime de construcție în cîmp cît mai redusă. Prin momente de continuitate negative, a căror valoare maximă este funcție de raportul dintre sarcina utilă și cea permanentă, se obține reducerea momentului exterior în cîmp (fig. 4).

Grinzi pentru care $\frac{M_{\min}}{M_{\max}} < a$ *în toate secțiunile.* Ceea ce caracterizează aceste grinzi este faptul că în toate secțiunile excentricitatea forței de precom-

primare trebuie să fie mai mică decît excentricitatea maximă a secțiunii și că în calculul de dimensionare — în determinarea forței de precomprimare — factorul determinant este diferența $\beta' A - \beta B$ care diferă puțin de valoarea expresiei $M_{max} - M_{min}$. În această expresie au o influență comparativ foarte redusă atît momentele de continuitate cît și momentele din sarcina permanentă (influența lor apare numai datorită coeficienților de siguranță diferențiați — dacă sînt). Cercetînd valoarea lui $M_{max} - M_{min}$ pentru diferite deschideri de grinzi în cazul încărcării cu sarcină uniformă sau cu forțe în mijlocul deschiderilor se constată că ea nu variază sensibil în lungul grinzii și nici nu-și reduce valoarea prin mărirea numărului de deschideri. Ținînd seama și de faptul că se poate obține orice variație necesară a momentului de precomprimare prin variația

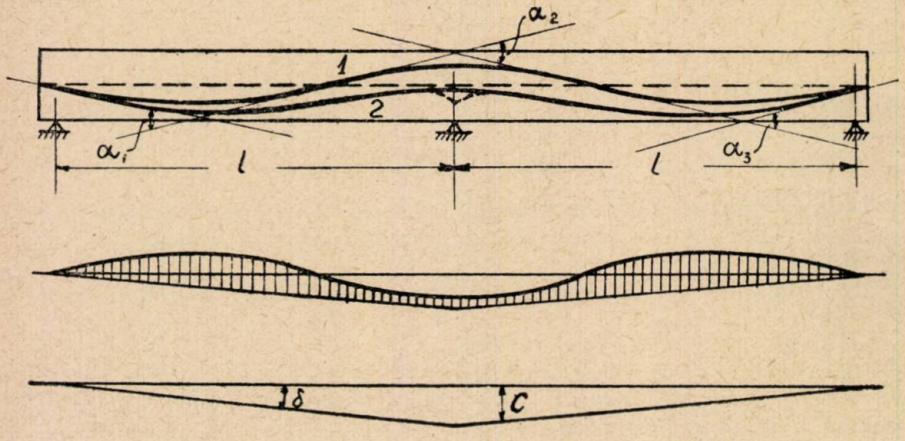


Fig. 5

excentricității, care în nici o secțiune nu trebuie să depășească excentricitatea maximă, în cazul sarcinilor utile preponderente *se impune soluția grinzilor continue cu înălțime constantă și armare constantă în lungul grinzii.*

A fost stabilit că momentele de continuitate la această categorie de grinzi nu oferă nici un avantaj din punct de vedere static, pentru că în nici o secțiune nu este permis a avea $M_{pr} > N_{pr}\ e_{max}$.

Momentele de continuitate au însă o influență de altă natură și anume permit reducerea unghiurilor de curbură ale cablului. Este cunoscut că întinderea armăturii în grinzile continue de beton precomprimat prezintă dificultăți din cauza forțelor de frecare. Acestea sînt cu atît mai mari, cu cît este mai mare unghiul total de curbură al cablului și coeficientul de frecare $[N_\alpha = N_0 e^{-f\alpha}]$. Pentru micșorarea frecării se caută a se influența acești doi termeni, de care depinde valoarea ei. Un coeficient de frecare redus se obține prin măsuri constructive privind alcătuirea cablului și a mijloacelor de izolare de beton. Un traseu comod de armătură cu unghiuri de curbură acceptabilă se obține prin utilizarea momentelor de continuitate.

Într-adevăr, să presupunem că epurei momentelor de precomprimare M_{pr} cerută de dimensionare îi corespunde traseul 1 de armătură, care nu provoacă în grindă nici un moment de precomprimare (fig. 5). Există relația $N_{pr} \cdot e = M_{pr}$. Suma unghiurilor de curbură este $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Epurei M_{pr} i se poate adăuga o epură de momente de continuitate. Noii epuri îi corespunde un traseu

nou — 2 — care provoacă în grindă aceleași momente de precomprimare, dar pentru care suma unghiurilor de curbură este egală cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2\delta$, unde

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{C^r}{N_{pr}\, e}$$

Cum cablul nu poate ieși din grindă se vede că momentul de continuitate economic (care nu cere mărirea secțiunii) este limitat de condiția ca în nici o secțiune $M_{pr} + C$ să nu fie mai mare decît $N_{pr}\, e_{max}$. În consecință o reducere sensibilă a unghiurilor de curbură prin momentul de continuitate, fără a mări h peste cel cerut de calcul, este posibilă numai în cazul unor sarcini utile mari.

În concluzie, în ceea ce privește influența momentelor de continuitate asupra calculului la fisurare al grinzilor continue de beton precomprimat, trebuie subliniate următoarele:

1. Momentele de continuitate pot fi folosite pentru a realiza corespondența necesară între epura momentelor de precomprimare și cea a momentelor de calcul la fisurare numai în cazul unor sarcini permanente preponderente. Pentru fiecare caz se pot determina valorile momentelor de continuitate care permit soluția cea mai economică.

2. Cînd calculul la fisurare se face pe baza momentelor maxim și minim momentele de continuitate pot fi folosite pentru reducerea unghiurilor de curbură a cablurilor, cu scopul de a obține un traseu mai comod la întinderea armăturii.

Cele expuse mai sus se referă numai la o parte din aspectele care trebuie luate în considerație la calculul grinzilor continue de beton precomprimat. O nouă serie de probleme o ridică necesitatea de a asigura securitatea construcției la rupere din momente maxime și minime. Apare necesară lămurirea pe cale experimentală a posibilităților utilizării unui calcul la rupere, ținînd seama de deformații plastice. Aceasta cu atît mai mult cu cît, în marea majoritate a cazurilor, calculul elastic arată că o grindă suficient asigurată la fisurare are unele secțiuni subdimensionate iar altele supradimensionate la rupere. Numai luarea în considerație a adaptării construcției în urma dezvoltării deformațiilor plastice permite o apreciere justă a capacității ei de rezistență.

Primită la redacție la 24.I.1956

К РАСЧЕТУ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО БЕТОНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе рассматривается вопрос в каких случаях и в каких пределах могут быть использованы статически неопределенные моменты в предварительно напряженных неразрезных балках.

Показывается, что статически неопределенные моменты неразрезной балки могут быть использованы для достижения необходимого соответствия между эпюрой моментов предварительного напряжения и эпюрой расчетных моментов только при преобладающих постоянных нагрузках. Для каждого положения можно определить значения статически неопределенных моментов неразрезной балки, допускающие наиболее экономичное решение. В частности для балок с постоянным

сечением бетона и арматуры при помощи статически неопределенных моментов неразрезной балки можно получить гораздо более выгодные решения, чем при их отсутствии.

Когда расчет на трещинообразование делается на основании наибольшихи наменьших моментов, статически неопределенные моменты неразрезной балки могут быть использованы для уменьшения углов кривизны кабелей с целью получения очертания арматуры более удобного при ее натяжении.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES POUTRES CONTINUES EN BÉTON PRÉCONTRAINT

(RÉSUMÉ)

Ce travail traite du problème suivant: dans quels cas et entre quelles limites les moments de continuité qui prennent naissance dans les poutres continues précontraintes peuvent-ils être utiles?

On montre que, pour réaliser la correspondance nécessaire entre l'épure des moments de précontrainte et celle des moments du calcul à la fissuration, les moments de continuité ne peuvent être utilisés que dans le cas de charges permanentes prépondérantes. Pour chaque situation, on peut déterminer les valeurs des moments de continuité permettant d'obtenir la solution la plus économique. C'est, en particulier, dans le cas des poutres dont les sections du béton et de l'armature sont constantes qu'on peut obtenir, à l'aide des moments de continuité, des solutions bien plus avantageuses que sans ces moments.

Lorsque le calcul à la fissuration est effectué en raison des moments maximum et minimum, les moments de continuité peuvent être utilisés pour réduire les angles de courbure des câbles, dans le but d'obtenir un tracé plus commode à la tension de l'armature.

BIBLIOGRAFIE

1. Dumitrescu I., *Isledovanie nerazreznih predvaritelno napriajionnih jelezobetonnih balok.* Disertație, 1953.
2 Guyon M. Y., *Étude sur les poutres continues et sur certains systèmes hyperstatiques en béton précontraint.* Paris, 1945.
3. Magnel G., *Cours de béton armé. Béton précontraint.* Gand, 1948, vol. III.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 2, 1956

TEHNICA PRELUCRĂRII MATERIALELOR

STUDIUL PRESIUNILOR SPECIFICE PE SUPRAFAŢA DE CONTACT ÎN PROCESUL DE LAMINARE

DE

M. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU

În studiul şi proiectarea laminoarelor un punct principal îl constituie cunoaşterea forţelor ce iau naştere în timpul procesului de laminare, între valţuri şi materialul ce trebuie prelucrat. Apare deci necesitatea de a se pătrunde în intimitatea acestui fenomen, studiindu-se factorii care influenţează direct sau indirect repartiţia presiunilor specifice din zona de deformare.

Începînd încă din anul 1850, au apărut în literatura de specialitate o serie de lucrări teoretice asupra repartiţiei presiunii specifice pe suprafaţa de contact, dintre care amintim:

1. Teoria lui Grashof şi Codron, potrivit căreia presiunea specifică este proporţională cu viteza de micşorare a înălţimii secţiunii materialului de laminat.

2. Teoria lui Blass, conform căreia presiunea specifică este proporţională cu deformaţia produsă.

3. Teoria lui Fink, care susţine că presiunea specifică este constantă în toate punctele arcului de contact.

4. Teoria Redzevici-Belevici, care are la bază ipoteza că presiunea specifică depinde simultan atît de mărimea reducerii de secţiune cît şi de viteza de deformare.

5. Analogia hidrodinamică a laminării ce apare în lucrările lui Meşcerschii şi Targ.

Ipotezele ce stau la baza acestor teorii cuprind fenomenul numai parţial şi de aceea ele au fost abandonate fiind socotite nesatisfăcătoare datorită rezultatelor cu totul aproximative ce s-au obţinut cu ele.

Teoria modernă asupra studiului repartizării presiunii specifice pe suprafaţa de prindere analizează condiţiile de echilibru ale unui element infinit mic de material ce trece prin zona de deformare dintre cilindrii laminorului. Acest fel de a trata problema este adoptat în lucrările noi de specialitate [1] şi [2].

Rezolvarea teoretică a acestei probleme s-a făcut pînă în prezent pe baza următoarelor premise:

1. În ceea ce priveşte deformaţiile materialului, se neglijează cele în sens transversal direcţiei de laminare, deoarece acestea sînt foarte mici în raport cu celelalte.

2. Se admite că există alunecare între cilindrii laminorului şi materialul laminat, diferiţii autori presupunînd că există frecare uscată, deci coeficientul de frecare constant, alţii frecare lichidă sau alţii alunecare parţială cu forţe de frecare constante.

3. Pentru simplificarea calculelor, se consideră că în zona arcului de prindere cilindrul se deformează după o parabolă sau după coarda arcului respectiv. Aceste ipoteze sînt justificate în cazul arcurilor de prindere mici.

Consecinţa acestor premise variate este faptul că se obţin rezultate diferite, prin aplicarea uneia sau alteia dintre ele.

În studiul de faţă tratăm cazul alunecării cu frecare uscată, pentru coeficientul de frecare μ = constant, pe considerentul că acest fenomen este mai des întîlnit în procesul de laminare. De asemenea ţinînd seama de robusteţea cilindrilor de laminor şi de rigiditatea lor, considerăm că deformaţiile ce survin sînt prea mici pentru ca arcul de prindere să devină arc de parabolă şi în nici un caz linie dreaptă. Aceasta reiese şi din însăşi felul cum sînt repartizate presiunile specifice pe arcul de prindere, care indică clar că această deformaţie nu poate duce la formele arătate.

Scriind condiţiile de echilibru, se obţine (fig. 1)

$$\sigma_x\, dh_x + h_x\, d\sigma_x - 2\, p_x\, (\operatorname{tg}\varphi \mp \mu)\, dx = 0, \tag{1}$$

în care

σ_x = tensiunea normală medie [kg/mm^2],
p_x = presiunea specifică exercitată de cilindru asupra metalului laminat [kg/mm^2],
μ = coeficientul de frecare,
φ = unghiul la centru al elementului infinit mic considerat.

Semnul minus se referă la zona de întîrziere, semnul plus la zona de avans.

În relaţia de echilibru, legătura dintre presiunea specifică p_x exercitată de cilindru asupra metalului laminat şi tensiunea σ_x se face cu ajutorul ecuaţiei plasticităţii dedusă pe baza celei de-a patra ipoteze a stării de tensiune limită. Se consideră

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = k_f, \tag{2}$$

unde

σ_1, σ_2, σ_3 = tensiunile normale principale [kg/mm^2],
k_f = limita de curgere la întindere simplă a materialului laminat [kg/mm^2].

Se admite că tensiunea principală medie de laminare este

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \tag{3}$$

Introducînd (3) în (2) se obţine

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\, k_f = 1{,}15\, k_f = k. \tag{4}$$

Admiţînd că tensiunile principale din suprafaţa elementară analizată sînt tensiunile verticale şi orizontale, σ_1 şi σ_3, se poate scrie

$$\sigma_1 = \left(p_x dx \pm \mu p_x \frac{dx}{\cos\varphi} \sin\varphi \right) \frac{1}{dx} = p_x (1 \pm \mu \operatorname{tg}\varphi) \tag{5}$$

Se consideră de asemenea că

$$\sigma_3 = \sigma_x \,. \tag{6}$$

Se admite o variație liniară de-a lungul axei x, a funcției

$$k = f(x) = k_1 - \frac{k_1 - k_0}{l} x = k_0 \left(\psi - \frac{\psi - 1}{l} x \right), \tag{7}$$

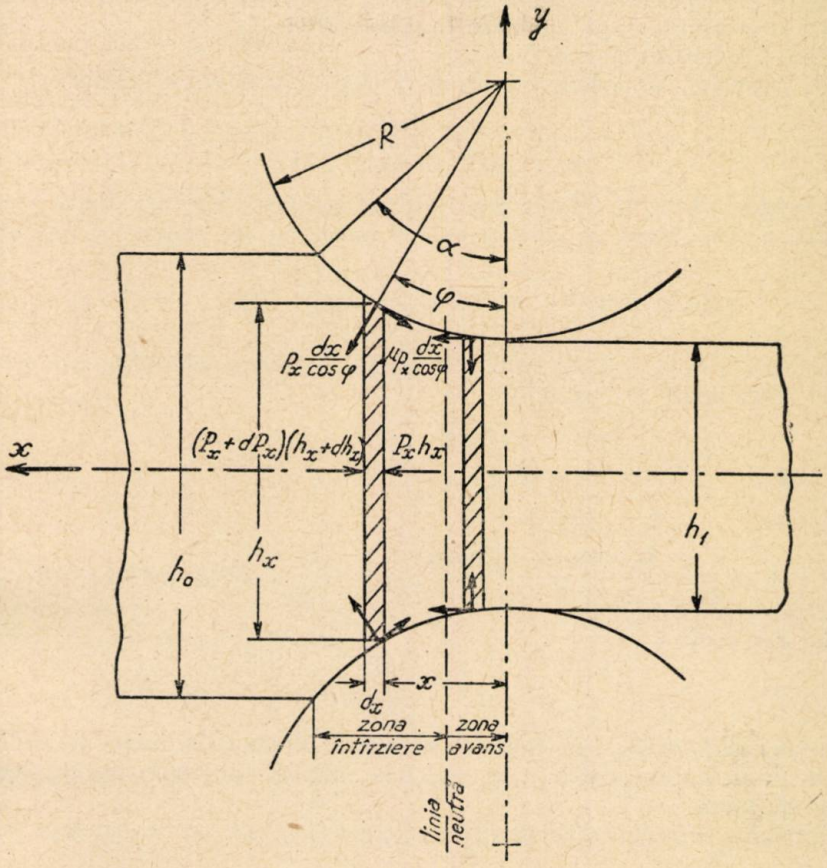


Fig. 1

în care am notat

$$\psi = \frac{k_1}{k_0} \,. \tag{8}$$

Cu ajutorul considerațiilor geometrice (fig. 1) se obține

$$l = \frac{h_0 - h_1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\Delta h}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \tag{9}$$

$$x = \frac{h_x - h_1}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \tag{10}$$

unde

l = proiecţia arcului de prindere [mm],
α = unghiul de prindere,
h_0 = grosimea materialului de laminat la intrarea între cilindri [mm],
h_1 = grosimea după laminare [mm].
Δh = reducerea liniară [mm].

De asemenea consideraţii geometrice (fig. 1) conduc la relaţiile

$$x = R\sin\varphi, \tag{11}$$

$$h_x = 2R(1 - \cos\varphi) + h_1. \tag{12}$$

Introducînd în (4) valorile (6)...(12) se stabileşte legătura dintre presiunea specifică p_x, exercitată de cilindri asupra metalului de laminat şi tensiunea σ_x

$$p_x(1 \pm \mu\operatorname{tg}\varphi) - \sigma_x = k_0\left(\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h} 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right). \tag{13}$$

Înlocuind în (1) valorile (11), (12) şi (13), cu derivatele respective se obţine ecuaţia diferenţială a tensiunii

$$\frac{d\sigma_x}{d\varphi} + \frac{\sin\varphi - \dfrac{(\operatorname{tg}\varphi \mp \mu)\cos\varphi}{1 \pm \mu\operatorname{tg}\varphi}}{1 - \cos\varphi + \delta}\sigma_x + \\ + \frac{(-k_0)(\operatorname{tg}\varphi \mp \mu)\cos\varphi}{(1 \pm \mu\operatorname{tg}\varphi)(1 - \cos\varphi + \delta)}\left(\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h} 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right) = 0, \tag{14}$$

în care s-a notat

$$\delta = \frac{h_1}{2R} \tag{15}$$

Se constată că expresia (14) este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I. Semnul de deasupra pentru μ se referă la zona de întîrziere, cel de dedesubt la zona de avans.

Problema se reduce la rezolvarea ecuaţiei (14) care are următoarea soluţie:

$$\sigma_x = \left[\exp\left(-\int \frac{\sin\varphi - \dfrac{(\operatorname{tg}\varphi \mp \mu)\cos\varphi}{1 \pm \mu\operatorname{tg}\varphi}}{1 - \cos\varphi + \delta} d\varphi\right)\right]\left\{C - \right. \\ - \int\left[\exp\int \frac{\sin\varphi - \dfrac{\operatorname{tg}\varphi \mp \mu)\cos\varphi}{1 \pm \mu\operatorname{tg}\varphi}}{1 - \cos\varphi + \delta} d\varphi\right] \cdot \\ \left. \cdot \left[\frac{(-k_0)(\operatorname{tg}\varphi \mp \mu)\cos\varphi}{(1 \pm \mu\operatorname{tg}\varphi)(1 - \cos\varphi + \delta)}\left(\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h} 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right)\right] d\varphi\right\}, \tag{16}$$

unde C este constanta de integrare.

Detaliind calc lele se obține:
— pentru zona de întîrziere

$$I=\int \frac{\sin\varphi-\frac{(\operatorname{tg}\varphi-\mu)\cos\varphi}{1+\mu\operatorname{tg}\varphi}}{1-\cos\varphi+\delta}\,d\varphi=\frac{\mu}{\delta+2}\,M\ln\left[(\delta+2)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+\right.$$

$$\left.+\delta\right]-2\mu N\ln\left(a-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+2\mu S\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-b\right)+ \tag{17}$$

$$+\frac{2\mu}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\,T\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\delta+2}{\delta}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

unde s-a notat

$$\left.\begin{aligned} a&=\mu+\sqrt{1+\mu^2},\\ b&=\mu-\sqrt{1+\mu^2},\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} M&=-\frac{(\delta+2)\,\mu}{\Delta_n},\\ N&=\frac{1}{2}\,\frac{(\delta+1)\sqrt{\mu^2+1}-\mu}{\Delta_n},\\ S&=\frac{1}{2}\,\frac{(\delta+1)\sqrt{\mu^2+1}+\mu}{\Delta_n},\\ T&=\frac{\delta+1}{\Delta_n},\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\Delta_n=\delta(\delta+2)\,(\mu^2+1)+1; \tag{20}$$

— pentru zona de avans

$$I^*=\int \frac{\sin\varphi-\frac{(\operatorname{tg}\varphi+\mu)\cos\varphi}{1-\mu\operatorname{tg}\varphi}}{1-\cos\varphi+\delta}\,d\varphi=-\frac{\mu}{\delta+2}\,M^*\ln\left[(\delta+2)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+\delta\right]+$$

$$+2\mu N^*\ln\left(b^*-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)-2\mu S^*\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-a^*\right)- \tag{21}$$

$$-\frac{2\mu T^*}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\delta+2}{\delta}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

unde s-a notat

$$\left.\begin{aligned} a^*&=-(\sqrt{\mu^2+1}+\mu),\\ b^*&=\sqrt{\mu^2+1}-\mu,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} M^* &= \frac{8\sqrt{\mu^2+1}\,\mu(\delta+2)}{\Delta_n^*}, \\ N^* &= \frac{4[\delta+1+\mu b^*+(\delta+2)\mu^2]}{\Delta_n^*}, \\ S^* &= \frac{4[\delta+1+\mu a^*+(\delta+2)\mu^2]}{\Delta_n^*}, \\ T^* &= \frac{8\sqrt{\mu^2+1}\,(\delta+1)}{\Delta_n^*}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\Delta_n^* = 2\sqrt{\mu^2+1}\,[\delta^2+2(\delta+2)(\delta+1)+\delta(\delta+2)(1+4\mu^2)]. \tag{24}$$

Valorile expresiei

$$\exp\left[\pm\int\frac{\sin\varphi-\dfrac{(\operatorname{tg}\varphi\mp\mu)\cos\varphi}{1\pm\mu\operatorname{tg}\varphi}}{1-\cos\varphi+\delta}\,d\varphi\right],$$

se calculează deci exact, erorile sistematice datorite calculelor numerice putînd fi reduse sub o limită dorită.

Formulele (17) şi (21) sînt funcţiuni de μ şi δ, δ fiind funcţie de h_1 — dimensiunea de ieşire a laminatului şi D — diametrul cilindrilor de laminare.

Pentru rezolvarea expresiei (16) înlocuim funcţia

$$\left[\exp\int\frac{\sin\varphi-\dfrac{(\operatorname{tg}\varphi\mp\mu)\cos\varphi}{1\pm\mu\operatorname{tg}\varphi}}{1-\cos\varphi+\delta}\,d\varphi\right]\frac{(\operatorname{tg}\varphi\mp\mu)\cos\varphi}{(1\pm\mu\operatorname{tg}\varphi)(1-\cos\varphi+\delta)},$$

cu o serie de puteri. În domeniul care interesează laminarea ($0<\varphi\leqslant$ aprox 30^0) putem reţine din această serie primii cinci termeni, care aproximează bine funcţia dată.

Deci pentru zona de întîrziere considerăm

$$(-\exp I)\frac{(\operatorname{tg}\varphi-\mu)\cos\varphi}{(1+\mu\operatorname{tg}\varphi)(1-\cos\varphi+\delta)}\approx\sum_{n=0}^{4}u_n\varphi^n \tag{25}$$

şi pentru zona de avans

$$(-\exp I^*)\frac{(\operatorname{tg}\varphi+\mu)\cos\varphi}{(1-\mu\operatorname{tg}\varphi)(1-\cos\varphi+\delta)}\approx\sum_{n=0}^{4}u_n^*\varphi^n. \tag{26}$$

În acest caz ecuaţia (16) se poate scrie astfel:

— pentru zona de întîrziere

$$\sigma_x=[\exp(-I)]\left[C-k_0\int\left(\sum_{n=0}^{4}u_n\varphi^n\right)\left(\psi-\frac{\psi-1}{\Delta h}2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right)d\varphi\right]; \tag{27}$$

— pentru zona de avans

$$\sigma_x=[\exp(-I^*)]\left[C^*-k_0\int\left(\sum_{n=0}^{4}u_n^*\varphi^n\right)\left(\psi-\frac{\psi-1}{\Delta h}2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right)d\varphi\right], \tag{28}$$

de unde se obține final pentru zona de întîrziere

$$\sigma_x = [\exp(-I)]\left\{C - k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{u_n}{n+1}\varphi^{n+1} + \right.$$
$$\left. + 2R\,k_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left[u_n\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right]\right\} \tag{29}$$

și pentru zona de avans

$$\sigma_x = [\exp(-I^*)]\left\{C^* - k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{u_n^*}{n+1}\varphi^{n+1} + \right.$$
$$\left. + 2R\,k_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left[u_n^*\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right]\right\}. \tag{30}$$

Considerînd cazul general al laminării cu întindere, constantele se determină punînd condițiile la limită, astfel ca la intrare în zona de deformare ($\varphi = \alpha$) tensiunea să fie σ_0 și la ieșirea dintre cilindrii laminorului ($\varphi = 0$) tensiunea să aibă valoarea σ_1. Deci vom avea

$$C = \frac{\sigma_0}{[\exp I]_{\varphi=\alpha}} + k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{u_n}{n+1}\alpha^{n+1} -$$
$$- 2Rk_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left[u_n\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right]_{\varphi=\alpha} \tag{31}$$

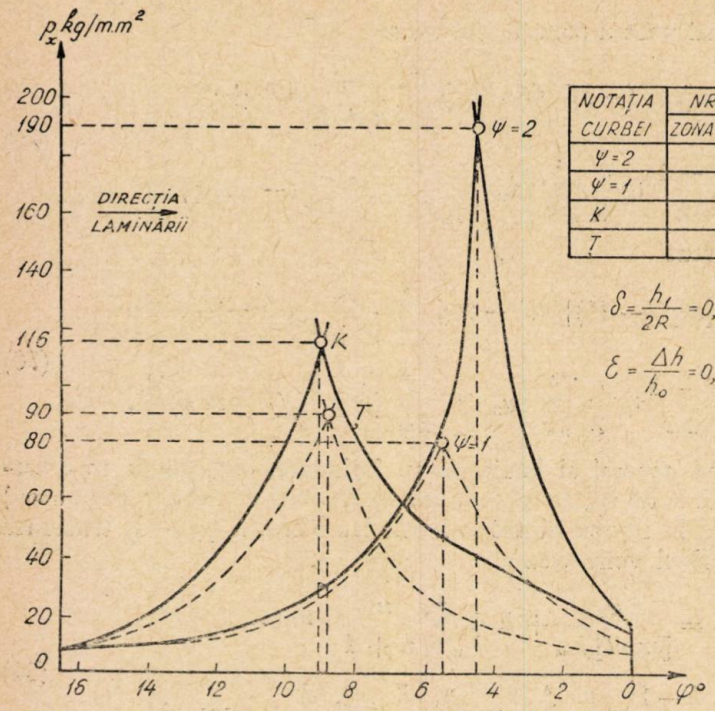
$$C^* = \frac{\sigma_1}{[\exp I^*]_{\varphi=0}} - 2Rk_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left[u_n^*\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right]_{\varphi=0} \tag{32}$$

Introducînd în expresia (11) respectiv relațiile (29) și (30), obținem final legea de variație a presiunilor specifice, pentru zona de întîrziere

$$p_x = \frac{1}{1+\mu\operatorname{tg}\varphi}\left\{k_0\left(\psi - \frac{\psi-1}{\Delta h}2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right) + \right.$$
$$+ [\exp(-I)]\left[C - k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{n_n}{n+1}\varphi^{n+1} + \right. \tag{33}$$
$$\left.\left. + 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}k_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\sum_{n=0}^{4} + \left(u_n\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right]\right\}$$

și pentru zona de avans

$$p_x = \frac{1}{1-\mu\operatorname{tg}\varphi}\left\{k_0\left(\psi - \frac{\psi-1}{\Delta h}2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right) + \right.$$
$$+ [\exp(-I^*)]\left[C^* - k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{u_n^*}{n+1}\varphi^{n+1} + \right. \tag{34}$$
$$\left.\left. + 2R\,k_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left(u_n^*\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right)\right]\right\}.$$

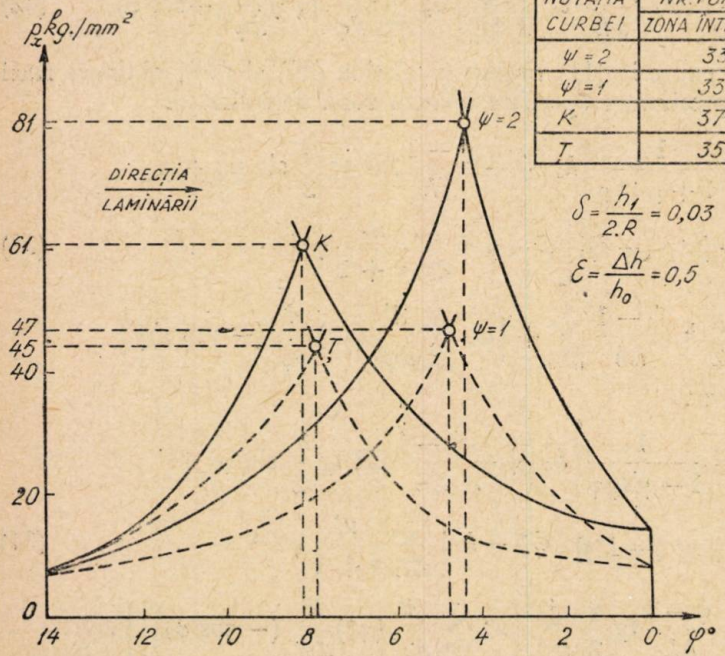


NOTAȚIA CURBEI	NR. FORMULEI DE CALCUL	
	ZONA ÎNTÎRZIERE	ZONA AVANS
ψ=2	33	34
ψ=1	33	34
K	37	38
T	35	36

$$\delta = \frac{h_1}{2R} = 0{,}02$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0} = 0{,}667$$

Fig. 2



NOTAȚIA CURBEI	NR. FORMULEI DE CALCUL	
	ZONA ÎNTÎRZIERE	ZONA AVANS
ψ=2	33	34
ψ=1	33	34
K	37	38
T	35	36

$$\delta = \frac{h_1}{2.R} = 0{,}03$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0} = 0{,}5$$

Fig. 3

APLICAȚII NUMERICE

Pentru cazul unui laminor duo cu diametrul cilindrilor $D = 600$ mm se consideră laminarea cu următorii parametri constanți: $\mu = 0{,}6$; $h_0 = 36$ mm, în cazurile

$$\Delta h = 66{,}5\%, \quad h_1 = 12 \text{ mm}, \quad \delta = 0{,}02,$$
$$\Delta h = 50\%, \quad h_1 = 18 \text{ mm}, \quad \delta = 0{,}03$$
$$\Delta h = 33{,}3\%, \quad h_1 = 24 \text{ mm}, \quad \delta = 0{,}04.$$

Calculul presiunilor specifice s-a făcut după formulele propuse (33) și (34) considerînd $\psi = 1$ și $\psi = 2$; $k_0 = 8{,}63$ kg/mm^2; $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$. Pentru compararea rezultatelor, presiunile specifice s-au mai calculat cu formulele lui Țelicov [1] pentru $\psi = 1$, pentru zona de întîrziere

$$p_x = \frac{k_0}{\lambda}\left\{\left[\left(1 - \frac{\sigma_0}{k_0}\right) - 1\right]\left(\frac{h_0}{h_x}\right)^{\lambda} + 1\right\} \tag{35}$$

și pentru zona de avans

$$p_x = \frac{k_0}{\lambda}\left\{\left[\left(1 - \frac{\sigma_1}{k_0}\right) + 1\right]\left(\frac{h_x}{h_1}\right)^{\lambda} - 1\right\} \tag{36}$$

și formulele lui Koroliov [2] pentru $\psi = 2$, pentru zona de întîrziere

$$p_x = k_0 \frac{\lambda - 1}{\lambda}\left\{\left[1 + \frac{\psi - 1}{\varepsilon(\lambda + 1)}\right]\left(\frac{h_0}{h_x}\right)^{\lambda} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda - 1}\left[\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h}\left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1} h_x - h_1\right)\right]\right\} - \sigma_0\left(\frac{h_0}{h_x}\right)^{\lambda} \tag{37}$$

și pentru zona de avans

$$p_x = k_0 \frac{\lambda + 1}{\lambda}\left\{\left(\psi - \frac{\psi - 1}{\lambda - 1}\right)\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{h_x}{h_1}\right)^{\lambda} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\lambda + 1}\left[\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h}\left(\frac{2\lambda}{\lambda - 1} h_x - h_1\right)\right]\right\} - \sigma_1\left(\frac{h_x}{h_1}\right)^{\lambda}, \tag{38}$$

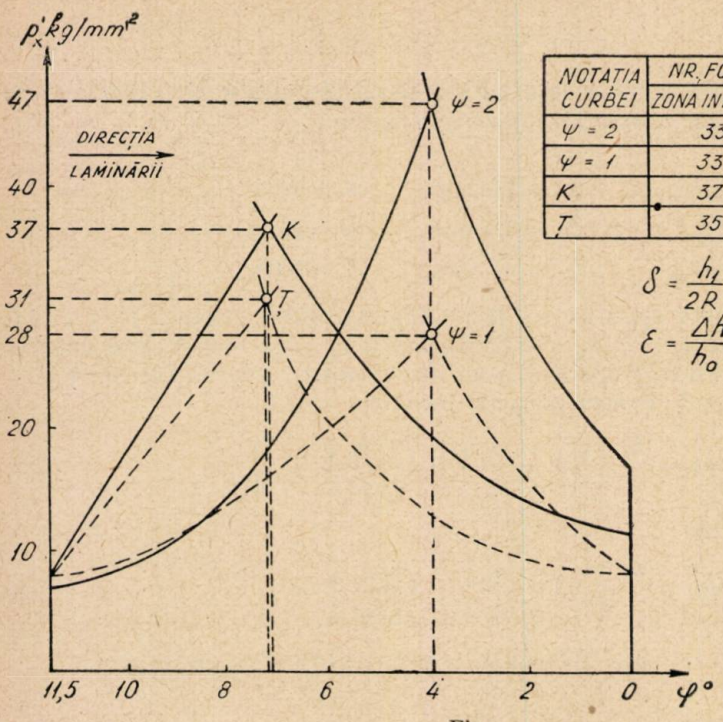
unde s-a notat

$$\lambda = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0}; \quad \Delta h = h_0 - h_1.$$

Aceste formule (35), (36), (37) și (38) sînt recomandate de autorii lor pentru cazul laminării cu reduceri mari și mijlocii, unde eroarea față de repartiția reală a presiunilor specifice este mai mică. Acest considerent ne-a făcut să alegem regimul tehnologic de laminare indicat mai sus.

Repartiția presiunilor specifice făcută după formulele citate, sînt prezentate în diagramele din figurile 2, 3 și 4.

În aceste diagrame se vede alura curbelor ce reprezintă variația presiunii specifice pe suprafața de contact, curbele zonei de întîrziere și ale zonei de



NOTAȚIA CURBEI	NR. FORMULEI DE CALCUL	
	ZONA ÎNTÎRZIERE	ZONA AVANS
ψ = 2	33	34
ψ = 1	33	34
K	37	38
T	35	36

$$\delta = \frac{h_1}{2R} = 0{,}04$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0} = 0{,}333$$

Fig.

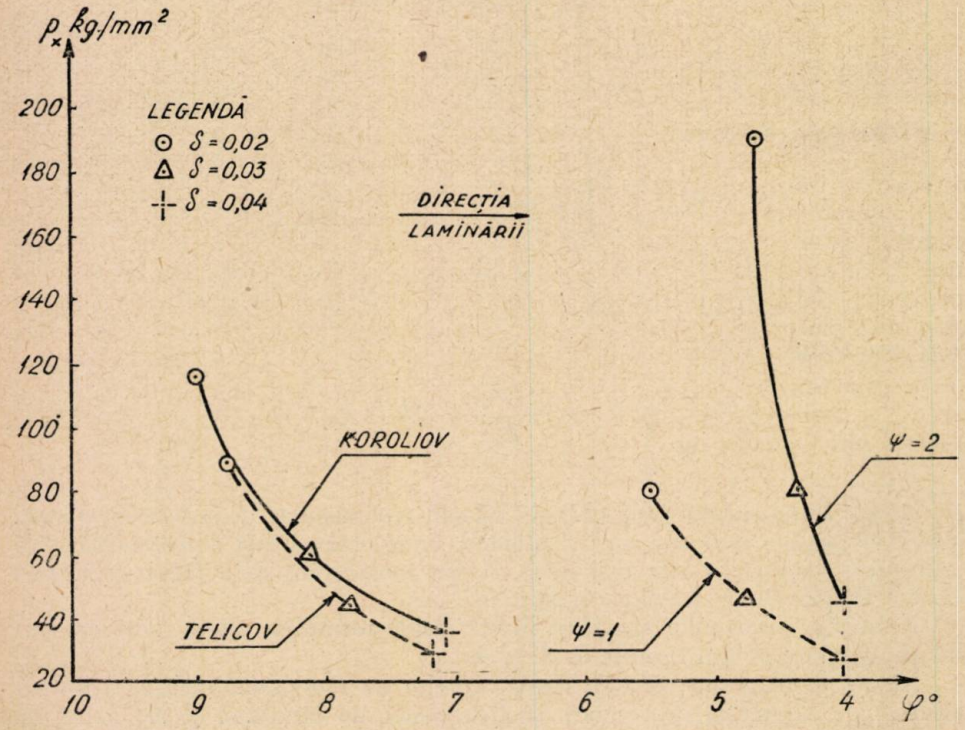


Fig. 5

avans a căror intersecție determină linia neutră, unde teoretic, între metalul laminat și cilindru nu există alunecare și unde presiunea specifică atinge valori maxime.

Se constată că presiunea specifică, pentru exemplele alese, calculată cu formulele propuse (33) și (34) capătă valori diferite în comparație cu presiunile specifice calculate cu formulele din literatură (35), (36), (37) și (38).

Pentru exemplele numerice calculate, se constată cu ajutorul diagramelor că efortul rezultant de laminare obținut cu formulele (35), (36), (37) și (38) dau diferențele arătate în tabloul nr. 1, în comparație cu formulele propuse (33) și (34).

Tabloul nr. 1

δ	ψ	Formulele (35) și (36)	Formulele (37) și (38)
0,02	1	+14,8%	—
	2	—	+5,2%
0,03	1	−2%	—
	2	—	−13,2%
0,04	1	+1,6%	—
	2	—	−5,8%

Se mai constată să linia neutră este deplasată spre ieșirea materialului dintre cilindrii laminorului; în diagrama alăturată (fig. 5) se văd curbele de presiune maximă, deci curbele de zonă neutră, pe baza celor trei exemple tratate.

Se poate spune deci că diferențele ce apar sînt de două feluri și anume: în repartiția presiunilor specifice cît și în rezultanta lor. Aceste diferențe atrag după sine variații în valoarea momentelor de laminare ce intră în calculul organelor laminorului. Rezolvarea propusă în această lucrare ține seama de ansamblul fenomenului de laminare, acceptîndu-se în toată desfășurarea ei aproximația că deformațiile cilindrului de laminor sînt neglijabile în calculul presiunilor specifice. Această ipoteză pentru confirmare necesită executarea unor experiențe justificative pe un laminor experimental. În decursul studiului s-a desprins ca necesar să se cerceteze zona de intrare și ieșire a materialului precum și fenomenul ce ia naștere în zona neutră. Aceste probleme vor forma obiectul altor studii.

Primită la redacție la 10.I.1956

ИССЛЕДОВАНИЕ УДЕЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ПРОКАТКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье рассматривается распределение удельных давлений прокатки в случае скольжения с сухим трением.

Главные выводы, лежащие в основе работы, следующие:

— деформации прокатного валка на участке дуги захвата невелики и ими можно пренебречь, что приводит к распределению удельных давлений по дуге круга.

— предел текучести материала в зоне деформации изменяется линейно.

— деформации прокатываемого материала в направлении перпендикулярном направлению прокатывания, относительно невелики и ими можно пренебречь.

Расчеты сделаны с учетом члена $\mu \operatorname{tg} \varphi$ который имеет непосредственное влияние на распределение и величину удельных давлений.

Для решения выражения (16) производятся замены, указаниые в формулах (25) и (26), позволяющие получить хорошую степень приближения. Конечный результат дан в соотношениях (33) и (34).

Были сделаны приближенные расчеты для того, чтобы выявить разницу между предлагаемыми и существующими формулами расчета, причем результаты показаны на рисунках 2,3,4,5 и в таблице 1.

ÉTUDE DES PRESSIONS SPÉCIFIQUES SUR LA SURFACE DE CONTACT AU COURS DU PROCESUS DE LAMINAGE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on étudie la répartition des pressions spécifiques de laminage dans le cas du glissement à frottement sec.

Les hypothèses les plus importantes sur lesquelles ce travail repose sont les suivantes:

— les déformations du cylindre du laminoir dans la zone de l'arc d'accrochage sont petites et peuvent être négligées, ce qui entraine une répartition des pressions spécifiques sur un arc de cercle;

— la limite d'écoulement du matériel dans la zone de déformation varie linéairement;

— les déformations du matériel à laminer sur une direction perpendiculaire au sens de laminage sont relativement petites et peuvent être négligées.

Les calculs ont été faits sans négliger le terme $\mu \operatorname{tg} \varphi$ qui a une influence directe sur la répartition et la grandeur des pressions spécifiques.

Pour résoudre l'expression (16), on effectue les substitutions indiquées dans les formules (25) et (26) qui permettent une bonne approximation. Le résultat final est donné par les relations (33) et (34).

On a effectué des calculs approximatifs permettant de mettre en évidence les différences qui existent entre les formules de calcul proposées et les formules existantes. Les résultats de ces calculs sont rendus par les figures 2, 3, 4 et 5, ainsi que sur le tableau nº 1.

BIBLIOGRAFIE

1. A. I. Ţelikov, *Instalaţii de laminoare.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
2. A. A. Koroliov, *Noviie issledovania deformaţii metalla pri prokatke.* Maşghiz, Moscova, 1953.
3. Romulus Miculescu, *Laminoare.* Curs. Ed. politehnică, Bucureşti, 1951.
4. A. I. Cijikov, *Laminarea.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
5. * * * *Maşinostroenie.* Maşghiz, Moscova, 1949, vol. 8.

N. E. KOCIN, *Calculul vectorial şi introducere în calculul tensorial* Ed. tehnică, Bucureşti 1954, 440 pag.

De un preţios ajutor în cercetarea diferitelor probleme de elasticitate, plasticitate, mecanica fluidelor, probleme de mişcări ale diferitelor mecanisme în plan şi spaţiu şi a altor probleme similare, este lucrarea lui N. E. K o c i n: *Calculul vectorial şi introducere în calculul tensorial.* Lucrarea cuprinde patru capitole şi anume: *Algebra vectorială, Analiza vectorială, Tensori ortogonali afini* şi *Elemente ale teoriei generale a tensorilor.*

În cadrul primului capitol se dau noţiuni generale cu privire la definiţia vectorilor precum şi la operaţiile care se pot efectua cu ei, se cercetează problema transformării componentelor unui vector la trecerea de la un sistem de coordonate la altul. În încheierea primului capitol se tratează despre produsul vectorial, proprietăţile acestuia, făcîndu-se numeroase aplicaţii în statică şi cinematică.

Capitolul al doilea cercetează probleme de analiza vectorială şi anume: despre vectorii variabili, derivarea unui vector în raport cu un argument scalar, derivarea unui vector raportat la un sistem de coordonate mobil; despre funcţiile de argument variabil, cîmpul scalar şi vectorial. În continuare se cercetează gradientul cu proprietăţile sale, divergenţa şi rotorul unui vector. Se fac aplicaţii la diferite probleme de mecanica fluidelor. Ceea ce este deosebit în lucrarea de faţă este tratarea problemelor ţinîndu-se seama de fenomenul fizic. În felul acesta cercetătorul are posibilitatea să urmărească modul în care se aplică diferitele probleme ale calculului vectorial la probleme din mecanica mediilor continui etc.

Capitolul al treilea studiază problema tensorilor ortogonali afini indicîndu-se proprietăţile acestor tensori. Un loc important în cadrul capitolului despre tensorii ortogonali afini îl ocupă problema tensorilor simetrici şi a derivării unui tensor în raport cu un argument scalar. În încheierea capitolului autorul prezintă o serie de aplicaţii ale tensorilor în teoria elasticităţii.

Ultimul capitol al lucrării este închinat elementelor din teoria generală a tensorilor. După ce se dă definiţia generală a vectorului şi tensorului, autorul trece la enunţarea noţiunilor de bază din algebra tensorială ca de pildă: operaţia de înmulţire a unui tensor cu un scalar, adunarea a doi tensori, produsul tensorilor etc. O atenţie deosebită se dă teoremei de clasificare a tensorilor. Teorema de clasificare a tensorilor serveşte la stabilirea caracterului tensorial al diferitelor mărimi. Autorul cercetează apoi problema tensorului fundamental, a ecuaţiilor diferenţiale ale liniilor geodezice, simbolurile lui Christoffel şi proprietăţile lor. Se fac apoi cîteva aplicaţii la problemele hidromecanicii.

Lucrarea lui N. E. K o c i n pune la îndemîna cercetătorilor un instrument extrem de folositor pentru rezolvarea unor probleme teoretice generale de elasticitate, hidro şi aeromecanică etc.

Adrian Lezer

A. I. LURIE, *Prostranstvennîe zadaci teorii uprugosti* (Probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii). Gostehizdat, Moscova, 1955, 429 pag.

În orice curs general de teoria elasticităţii, problemele spaţiale sînt — de obicei — tratate ca un capitol introductiv care permite trecerea la cazuri particulare importante: probleme plane, probleme axial simetrice, plăci (probleme bidimensionale sau care se reduc la două dimensiuni). Se mai tratează răsucirea barelor de secţiune oarecare, cîteodată şi încovoierea şi foarte sumar problemele semispaţiului sau problemele de contact (de obicei ca probleme axial simetrice).

De aceea cartea lui L u r i e, al cărui nume ne era cunoscut datorită multor lucrări publicate pînă în prezent, vine să umple un gol resimţit în literatura de specialitate.

Volumul este împărțit în 8 capitole.

Capitolul 1, intitulat *Ecuațiile de bază ale teoriei matematice a elasticității*, cuprinde cele trei aspecte ale unei probleme de elasticitate: statica eforturilor, geometria deformațiilor și relațiile de natură fizică (empirică). Autorul se limitează la teoria liniară a elasticității (ecuațiile lui Navier, relațiile lui Cauchy, legea generalizată a lui Hooke) indicînd numai posibilitățile de apariție a neliniarității [1]) (geometrică sau fizică). Se dau rezultatele atît în coordonate carteziene cît și în coordonate curbilinii oarecare, folosindu-se simbolismul vectorial și tensorial. Se indică metodele generale de rezolvare a problemelor elasticității: metoda deplasărilor, insistîndu-se asupra rezultatelor date de P a p k o v i c i și N e u b e r, și metoda eforturilor, căutîndu-se legătura care există între diferitele funcții de tensiune [2]) ce se pot introduce. Se arată apoi cum se poate lua în considerare influența forțelor masice și a variației de temperatură.

Capitolul 2 este intitulat *Mediul elastic nelimitat și semispațiul elastic*. Se examinează acțiunea uneia sau mai multor sarcini concentrate, într-un mediu nelimitat, și se folosesc aceste rezultate pentru a trece la sarcini distribuite. Apoi se studiază problema semispațiului acționat de sarcini concentrate sau repartizate. Menționăm faptul că autorul nu se limitează numai la probleme axial simetrice. Totdeodată se studiază și cazul unei sarcini concentrate în interiorul semispațiului precum și echilibrul unui con elastic.

În capitolul 3, *Echilibrul stratului elastic*, se studiază mediul mărginit de două plane paralele. Se arată cum se poate ataca problema și cum se introduc funcțiile de eforturi. Se insistă asupra solicitărilor axiale și a solicitărilor de încovoiere. Se indică influența forțelor masice și a variațiilor de temperatură.

Capitolul 4, intitulat *Echilibrul plăcii groase*, se ocupă de solicitările axiale și de încovoiere, ale plăcii. Se studiază problema omogenă (în care nu se pun condiții în eforturi pe secțiunile transversale de contur) și problema neomogenă (în care se pun asemenea condiții) pentru un contur oarecare. Autorul se ocupă apoi de placa circulară și de influența variației de temperatură.

Capitolul 5, intitulat *Probleme spațiale de contact*, cuprinde în special problema deformării semispațiului sub acțiunea matrițelor. Se folosesc mult coordonatele eliptice. Autorul se preocupă și de comprimarea corpurilor elastice [3]) (problema lui Hertz).

Capitolul 6 este intitulat *Deformația sferei elastice încărcată simetric* iar capitolul 7 *Deformația cilindrului circular elastic încărcat metric*. Autorul se preocupă întîi de cazul general al corpurilor de revoluție și trece apoi la cele două probleme menționate mai sus. Se iau în considerare atît soluții elementare polinomiale, cît și soluții mai generale, bazate pe dezvoltări în serie sau integrale Fourier.

În capitolul 8, intitulat *Problema generală a echilibrului sferei elastice*, autorul se preocupă de cazul unei sfere cu solicitări oarecare pe contur în eforturi sau deplasări. Se ia în considerare și sfera cu gol interior (domeniu dublu conex).

În general lucrarea cuprinde, pe lîngă chestiuni cunoscute, foarte multe rezultate personale ale lui A. I. L u r i e, publicate în decurs de 15 ani, precum și rezultate noi. Din această cauză cartea nici nu are capitole speciale cu privire la răsucirea sau încovoierea barei de secțiune oarecare.

Fiecare capitol se termină cu un paragraf în care se trece în revistă dezvoltarea istorică a problemei respective, precum și cele mai importante lucrări publicate. Aceste date sînt foarte folositoare pentru cel care vrea să se preocupe de o anumită problemă.

Acest volum constituie o continuare fericită a lucrărilor clasice ale lui S. P. T i m o ș e n k o, L. S. L e i b e n z o n sau P. F. P a p k o v i c i. Scrisă la un nivel științific foarte ridicat, lucrarea utilizează cele mai moderne metode de analiză și calcul. Ea constituie un îndreptar prețios, un material de bază pentru cei care studiază starea de efort și de deformație a corpurilor masive; prin problemele noi pe care le pune, credem că ea poate da multe sugestii de cercetare științifică sau subiecte pentru dizertațiile aspiranților în științe tehnice.

P. P. Teodorescu

---

[1]) Pentru aspectele neliniare se poate cerceta de pildă V. V. N o v o j i l o v : *Osnovî nelineinoi teorii uprugosti* (Bazele teoriei neliniare a elasticității), Gostehizdat, Moscova, 1948.

[2]) În legătură cu această problemă deosebit de importantă menționăm monografia lui I. A. K r u t k o v, *Tenzor funkții napriajenii i obșcie rešenia v statike teorii uprugosti* (Tensorul funcției eforturilor și rezolvarea generală în statica teoriei elasticității), Izd. Akad. Nauk, 1949, precum și un articol recent al lui K. M a r g u e r r e, *Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitäts heorie*, Z.A.M.M., 1955, vol. 35, c. 6/7, iunie/iulie, p. 242.

[3]) Pentru asemenea probleme menționăm lucrarea lui I. I. Ș t a e r m a n: *Kontaknaia zadacia teorii uprugosti* (Probleme spațiale ale teoriei elasticității), Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1949.

RECTIFICARE

La nr. 1 1956 al revistei aducem următoarele rectificări:

La sumarul în limba rusă, rîndul 15, în loc de Н. ЦИПЕЙ se va citi Н. ТИПЕЙ; în rîndul 24 cuvintele «на усталость» se elimină.

La articolul *Încercări pe modele cu pulvarizarea fluidelor* de Mincio Popov, între p. 10—21 de cîte ori revine cuvîntul «vină» se va citi «vînă»; la p. 11, rîndul 6 de jos, în loc de « descris mai sus» se va citi « Descris mai sus (permiţînd 25 000 imagini pe secundă) » ; la p. 12, rîndul 3, în loc de «subpresiuni» se va citi « Depresiuni »; la p. 13, rîndul 8 de jos, în loc de $\vec{v}$ grad este corect $(\vec{v}$ grad); la p. 18, rîndul 6, în loc de 10^{-4}s m² se va citi 10^{-4}hg s/m².

La lucrarea *Asupra stabilităţii dinamice a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative* de Al. Marinescu, la p. 37, relaţiile (14), în loc de

$$w_1 = w\left(1 + \Gamma\frac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{tg}^2 i\right)$$

$$w_2 = w\left(1 - \Gamma\frac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{tg}^2 i\right)$$

se va citi

$$w_1 = w\left(1 + \frac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{tg}^2 i\right)$$

$$w_2 = w\left(1 - \frac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{tg}^2 i\right)$$

La articolul *Asupra combinării prăjinilor în pompajul de adîncime din industria de petrol, după criterii de rezistenţă la oboseală* de D. Bodnărescu, la p. 121, rîndul 1 şi 2 de jos, în loc de « ASIT-PETROL şi GAZE, 1956, nr. 5 » se va citi « Conferinţă ţinută la ASIT-Ploieşti, mai 1955 ».

La lucrarea *Flambajul barelor drepte prin şoc axial* de Augustin Petre, la p. 177, figura 3 trebuie rotită cu 90°.

La lucrarea *O metodă pentru simplificarea consolidării podurilor metalice* de T. Revici, la p. 195, formula (12), în loc de $\sigma_{tef} \geqslant \ldots$ se va citi $A_{tef} \geqslant \ldots$; la p. 200, rîndul 19, în loc de « contraîncărcăturilor » se va citi « contra vînturilor ».

La lucrarea *Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate* de Dan Pavelescu, la p. 271, rîndul 6, în loc de « studiul » se va citi « stadiul »; la pag. 280, rîndul 13 de jos, în loc de « descărcarea » se va citi « descreşterea ».

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
311	(20)	$\cdots \int_{y=h_1}^{y=1/B_1} \cdots$	$\cdots \int_{Y=h_1}^{Y=1/B_1} \cdots$
312	(24)	$\cdots \left(b - \frac{}{2B} \right) \cdot$	$\cdots \left(b - \frac{1}{2B} \right) \cdot$
313	(29)	$\int_{\overline{OAO'}} udz = \int_{\overline{OAO'}} ud \frac{\zeta}{\sqrt{1+B\zeta^2}} = -i \int_{\overline{OAO'}} fd \frac{x}{\sqrt{1-B^2x^2}} \cdot$	$\int_{\overline{OAO'}} udz = -i \int_{\overline{OAO'}} fd \frac{x}{\sqrt{1-B^2x^2}} \cdot$
314	7 de sus	C_{l_2}	C_{l2}
314	(35)	$\cdots C_{l_2} = \cdots$	$\cdots C_{l2} = \cdots$
315	(36)	$\cdots \frac{\cdots}{\sqrt{\cdots (Y-h_1)}},$	$\cdots \frac{\cdots}{\sqrt{\cdots (Y+h_1)}},$
315	(38)	$\cdots C_{l_2} = \cdots$	$\cdots C_{l2} = \cdots$
315	14 de jos	C_{z_1}	C_{z1}
316	(46)	$f(x) = \cdots$	$f(\chi) = \cdots$
317	(55)	$\cdots \int^{1/B} \cdots$	$\cdots \int_{l}^{1/B} \cdots$
318	1, 3 și 5 de jos	$\cdots R_e \cdots$	$\cdots Re \cdots$
319	(62)		
319	(64)	$\cdots \frac{K^2}{\sqrt{h_1^2+l^2}}\Big],$	$\cdots \frac{K_2}{\sqrt{h_1^2+l^2}}\Big],$
320	2 de sus	α cu γ, l cu h,	α cu $-\gamma$, l cu $-h$, respectiv γ cu $-\alpha$, h cu $-l$,

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
320	(71)	$\cdots \frac{\cdots}{2(1-l^2B^2)^{4/2}} \cdots$	$\cdots \frac{\cdots}{2(1-l^2B^2)^{3/2}} \cdots$
324	11 de jos	$T_0^{'}$	T_0
325	(7)	$\cdots (R^2 + \cdots$	$\cdots (R'^2 + \cdots$
325	(10)	$\cdots \sqrt{u_1^2 - (1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \varphi^2}$,	$\cdots \sqrt{u_1^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \varphi^2}$,
325	13 de sus	flăcărilor	flăcării
326	(14)	$\eta_1^2 U = \cdots$	$\eta_1^2 (U) = \cdots$
329	6 de jos	$\cdots = \text{cst.} \cdots$	$\cdots = \text{ct.} \cdots$
332	(38)	$-1)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdots$	$-1)\Big]^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdots$
347	(46)	$_{B'} = \cdots$	$t_{B'} = \cdots$
363	(10)	$\cdots \frac{kg}{k_t} \cdots$	$\cdots \frac{k_g}{k_t} \cdots$
388	(12)	$\cdots \frac{\cdots}{\log \frac{r}{r_s}}$,	$\cdots \frac{\cdots}{\log \frac{r_c}{r_s}}$,
395	(1)	$P \cong 2 S_1 \text{co} \cong \text{s} \alpha 2 S_1$,	$P \cong 2 S_1 \cos \alpha \cong 2 S_1$,
409	(40)	$S' = \cdots$	$S_i^{'} = \cdots$
415	(1)	$\cdots = X \varphi (z) \cdots$	$\cdots = \chi \varphi (z) \cdots$
415	(3)	$X \gamma \cdots$	$\chi \gamma \cdots$
415	12 de jos	$X = \cdots$	$\chi = \cdots$
417	(8)	$\cdots - \psi (z) = \cdots$	$\cdots - \overline{\psi (z)} = \cdots$
418	8 de sus	$a_2 = \frac{(A_2^{''} + \gamma_1) \cdots}{\cdots}$	$a_2 = \frac{(A_2^{''} + \bar{\gamma}_1) \cdots}{\cdots}$
421	4 » »	Mihăilescu	Mihailescu
425	(7)	$G (g\xi, g\eta, gz)$	$G (g_\xi, g_\eta, g_z)$
425	(8)	$X = g\xi, Y = g\eta, Z = gz.$	$X = g_\xi, Y = g_\eta, Z = g_z.$
425	(9)	$\cdots (n_\eta \xi d\eta, \cdots$	$\cdots (n_{\eta\xi} d\eta, \cdots$
425	4 de jos	$d\xi, d\eta,$	$d\xi\, d\eta,$
426	(3.11)	$\cdots \frac{\partial t_\eta}{\partial_\eta} \cdots$	$\cdots \frac{\partial t_\eta}{\partial \eta} \cdots$

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
426	(5.11)	$-t\eta - ct\,\xi = 0\,.$	$-t_\eta - ct_\xi = 0\,.$
426	(3.12)	$\cdots + z \cdots$	$\cdots + Z \cdots$
427	6 de jos	d_η	$d\eta$
430	(27)	$\cdots \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$	$\cdots \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}$
431	(33)	$\varepsilon_\xi = \cdots + 2\,n_{\xi\eta})\,,$	$\varepsilon_\xi = \cdots + 2\,\mathfrak{c}\,n_{\xi\eta})\,,$
432	(40)	$m_x = \cdots 2\,m_{\xi\eta})\,;$	$m_x = \cdots 2\,\mathfrak{c}\,m_{\xi\eta})\,;$
432	(41)	$\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \cdots 2\,m_{\xi\eta})\,,$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \cdots 2\,m_{\xi\eta})\,,$	$\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \cdots 2\,\mathfrak{c}\,m_{\xi\eta})\,,$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \cdots 2\,\mathfrak{c}\,m_{\xi\eta})\,,$
433	(42)	$\cdots \left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \cdots\right.$	$\cdots \left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \cdots\right.$
433	(44)	$\cdots \dfrac{\partial^2 U}{\mathfrak{c}_\xi \partial_\eta}\,,$	$\cdots \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\,,$
433	(45)	$\cdots \dfrac{\partial^4 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0\,,$	$\cdots \dfrac{\partial^4 U}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0\,,$
434	(48)	$\gamma^4 = \cdots$	$\gamma = \cdots$
435	(55)	$\cdots f^{(4)}\,,$	$\cdots f^4 = 0\,,$
436	(63)	$\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \lambda^2 \cdots$	$\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \lambda^4 \cdots$
437	(71)	$u n_{3,4} = \cdots$	$n_{3,4} = \cdots$
441	(101)	$\cdots (b\rho + \omega_1) \cdots (b\rho + \omega_2).$	$\cdots (b\rho + \omega_1) \cdots (b\rho + \omega_2).$
449	16 de sus	rezemare timpane.	rezemare pe timpane.
451	4 de jos	$\cdots \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial_y}$	$\cdots \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}$
451	7 » »	$\cdots \dfrac{\partial}{\partial_y} \cdots$	$\cdots \dfrac{\partial}{\partial y} \cdots$
455	7 » »	$n_{cr}\,cr = 6$	$n_{cr} = 6$
458	21 de sus		d vine 23
458	23 » »		» 25
458	25 » »		» 21
460	3 de jos	$\cdots \dfrac{\partial \mathfrak{R}_\beta}{\partial_\beta} \cdots$	$\cdots \dfrac{\partial \mathfrak{R}_\beta}{\partial \beta} \cdots$
462	5 de sus	$\cdots \sum C_n\, e^{+i\lambda_{n\alpha}} \cdots$	$\cdots \sum C_n\, e^{+i\lambda\, n^\alpha} \cdots$

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
470	1 de jos	$\dot{E} = 6\,000$	$E = 6250$
472	(4)	$\mathrm{E} - kUIt = \cdots$	$\mathrm{E} = kUIt^2 = \cdots$
474	12 de jos	$\cdots \mu k = \cdots$	$\cdots \mu K = \cdots$
486	(9)	$k = zG \cdots$	$k = 2G \cdots$
487	7 de sus	$\frac{\partial z}{\partial y}$	$\frac{\partial z}{\partial x}$
487	4 de jos	$\xi^2 x^2 + y^2$	$\xi^2 = x^2 + y^2$
490	(14′)	$\cdots \frac{\partial z}{\partial_y}$,	$\cdots \frac{\partial z}{\partial y}$,
501	11 de sus	t_c'', t_c'', t_c'	t_c', t_c'', t_c'''
503	8 » » și 12 de jos	t_c'	t_c
506	6 de sus	$\cdots = \varepsilon.$	$\cdots = \varepsilon_v.$
518	(39) și (41)	$\cdots \frac{a^3}{EI_2} P^2.$	$\cdots \frac{a^3}{EI_z} P^2.$
521	9 de sus	$J_1'' \theta_3'' \cdots$	$J_1 \theta_3'' \cdots$
521	10 » »	$\cdots \frac{a^2}{k_2 + 2k_2} \cdots$	$\cdots \frac{a^2}{k_1 + 2k_2} \cdots$
523	7 » »	$1 = 4{,}5\,a;$	$l = 4{,}5\,a;$
525	4 » »	*1956*	*1954*
539	1 de jos	$\cdots 0{,}8\,\sigma$	$\cdots 0{,}8\,\bar{\sigma}_i$
546	(2)	$\cdots W_r' \gamma R_l \geqslant \cdots$	$\cdots W_r' \gamma' R_l \geqslant \cdots$
546	(3)	$N_{pr} = \frac{\beta' A - \beta' B}{\cdots}$	$N_{pr} = \frac{\beta' A - \beta B}{\cdots}$
548	6 de sus	$\frac{M_{\max}}{M_{\min}}$	$\frac{M_{\min}}{M_{\max}}$
551	7 de jos	$\frac{M_{\min}^{r\,n} - C_n^r}{M_{\max}^{rn} - C_n}$	$\frac{M^r_{\min_n} - C_n^r}{M^r_{\max_n} - C_n}$
563	(33)	$\cdots \frac{n_n}{n+1} \cdots$	$\cdots \frac{u_n}{n+1} \cdots$

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL VII
IULIE — SEPTEMBRIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL VII
IULIE – SEPTEMBRIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică.

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numă ul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VII, nr. 3 Iulie-septembrie 1956

SUMAR

AEROMECANICĂ Pag.

E. CARAFOLI şi L. DUMITRESCU, Rezistenţa de undă a unei clase de aripi delta subţiri dublu-conice, cu incidenţa variabilă, în curent supersonic . . 581

N. PATRAULEA şi E. LARISCH, Aripi de anvergură infinită suflate 599

T. OROVEANU, Cercetări asupra scurgerii unui curent de aer printr-un strat de cereale cu aplicaţii la ventilaţia cerealelor din silozuri. 605

AL. MARINESCU, Stabilitatea dinamică în zbor vertical ascendent şi la punct fix, a două tipuri frecvente de elicopter 617

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

AUREL BELEŞ şi MIRCEA MIHAILESCU, Ecuaţiile de echilibru în coordonate oblice la învelitorile subţiri de grosime constantă 631

P. P. TEODORESCU, O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii 655

CONST. C. POPOVICI, O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor. Partea I 677

N. S. PÎRVULESCU, Rezistenţa la încovoiere a prăjinilor grele încărcate axial cu o parte din greutatea proprie 697

CL. TANASICIUC, Tensometrul rezistiv 729

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra calculului lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze, compuse din suprafeţe plane 741

GH. VASILCA şi P. FREUND, Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare 773

VIBRAŢII

S. RĂUTU şi M. IFRIM, În legătură cu calculul frecvenţelor vibraţiilor proprii ale cadrelor etajate 785

RECENZII 799

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра и пр.).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным да ным продлемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соотв тствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно на русском и французском языках. Резюме должно в среднем, составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Букарест ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VII, № 3 Июль-сентябрь 1956

СОДЕРЖАНИЕ

АЭРОДИНАМИКА

Стр.

Е. КАРАФОЛИ и Л. ДУМИТРЕСКУ, Волновое сопротивление одного класса тонких треугольных двухконусных крыльев с переменным углом атаки в сверхзвуковом потоке 581

Н. ПАТРАУЛЯ и Е. ЛАРИШ, Дутые крылья с бесконечным размахом 599

Т. ОРОВЯНУ, Исследование протекания воздушной струи сквозь слой зерна применительно к проветриванию зерна в силосах 605

А. МАРИНЕСКУ, Динамическая устойчивость при восходящем вертикальном полете и висении двух часто встречающихся типов вертолетов 617

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

А. БЕЛЕШ и М. МИХЭИЛЕСКУ, Уравнения равновесия в косых координатых для тонких кровель неизменной толщины 631

П. П. ТЕОДОРЕСКУ, Метод приближения условий на контуре в плоской задаче упругости 655

К. К. ПОПОВИЧ, Общая теория метода распределения напряжений Часть I 677

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Сопротивление на изгиб тяжелых буровых штанг при осевой нагрузке, являющейся частью собственного веса 697

К. ТАНАСИЧУК, Тензометр с проволочными датчиками 729

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расчете смазываемых газами бесконечно удлиненных подшипников, состоящих из плоских поверхностей 741

Г. ВАСИЛКА и П. ФРЕУНД, Экспериментальные исследования некоторых антифрикционных материалов—заменителей для подшипников скольжения 773

ВИБРАЦИИ

С. РЭУТУ и М. ИФРИМ, О расчете частот собственных колебаний ярусных рам 785

РЕЦЕНЗИИ 799

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.,

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment:

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énérgie éolienne).

— Construction mécanique (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces).

— Tehnique d smesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation de l'ultrason et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique du sol, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliograhiques, seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VII, n° 3 Juillet-septembre 1956

SOMMAIRE

AÉROMÉCANIQUE Page

E. CARAFOLI et L. DUMITRESCU, Trainée d'onde pour une classe d'ailes delta minces doublement coniques, à incidence variable, en courant supersonique 581

N. PATRAULEA et E. LARISCH, Ailes d'envergure infinie soufflées 599

T. OROVEANU, Recherches sur l'écoulement d'un courant d'air à travers une couche de céréales. Applications à la ventilation des céréales en silos . . 605

AL. MARINESCU, La stabilité dynamique de deux types fréquents d'hélicoptères, en vol vertical ascendant et en vol à point fixe 617

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX—ÉLASTICITÉ

AUREL BELEŞ et MIRCEA MIHAILESCU, Les équations d'équilibre en coordonnées obliques pour les voiles minces d'épaisseur constante 631

P. P. TEODORESCU, A method of approximation of the boundary conditions for the plane problem of the elasticity 655

CONST. C. POPOVICI, Une théorie générale de la méthode de distribution des moments. I-ère partie 677

N. S. PÎRVULESCU, La résistance à la flexion des tiges lourdes axialement chargées d'une fraction du poids propre 697

GL. TANASICIUC, Le tensomètre résistif 729

LUBRIFICATION, FROTTEMENT, USURE

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur le calcul des paliers d'allongement infini, lubrifiés aux gaz, composés de surfaces planes 741

GH. VASILCA et P. FREUND, Études expérimentales sur certains matériaux antifriction de substitution pour les paliers lisses 773

VIBRATIONS

S. RĂUTU et M. IFRIM, A propos du calcul des fréquences des vibrations propres des cadres étagés 785

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 799

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician E. CARAFOLI — redactor responsabil; academician N. PROFIRI; A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.; C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.; R. BOGDAN; N. TIPEI; M. ARCAN.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

AEROMECANICĂ

REZISTENŢA DE UNDĂ A UNEI CLASE DE ARIPI DELTA SUBŢIRI DUBLU-CONICE, CU INCIDENŢA VARIABILĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC

DE

E. CARAFOLI şi L. DUMITRESCU

A. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

1. Introducere

Lucrarea de faţă reprezintă completarea unor studii anterioare [1], [2] şi [3] asupra aripilor delta dublu-conice şi caracteristicilor lor aerodinamice.

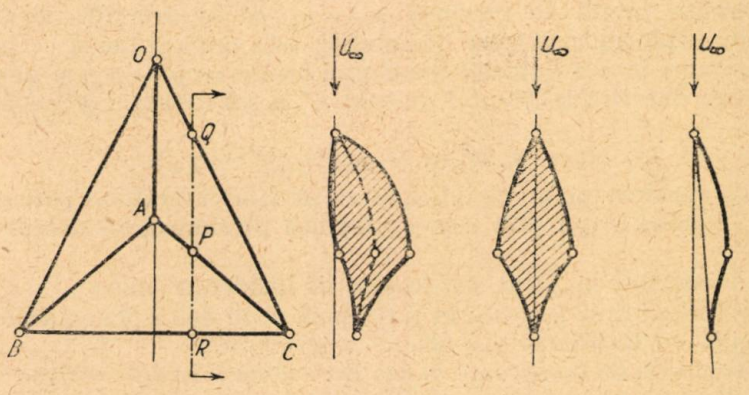


Fig. 1

După cum s-a arătat [1], dacă ne menţinem în cadrul ipotezei perturbaţiilor mici, o aripă delta groasă şi cu incidenţă variabilă poate fi descompusă, din punctul de vedere al efectelor unei scurgeri supersonice asupra ei, într-o aripă *simetrică groasă*, şi un *schelet* subţire cu incidenţa variabilă (fig. 1).

Rezistenţa de undă a aripii simetrice a fost studiată anterior [2]. Acţiunea aerului asupra scheletului se traduce printr-o portanţă [3] şi o rezistenţă; calculul acesteia din urmă formează obiectul prezentei lucrări.

2. Acțiunea curentului de aer asupra scheletului aripii

Să considerăm o secțiune prin schelet, paralelă cu direcția curentului neperturbat U_∞ (fig. 2).

În cuprinsul lucrării vom numi *scheletul la incidența nulă*, scheletul așezat astfel încît planul bordurilor sale de atac și de fugă să fie paralel cu direcția curentului neperturbat. Față de acest plan, un element de

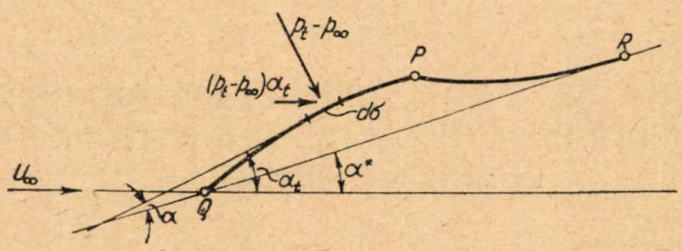


Fig. 2

suprafață $d\sigma$ a scheletului, are o *incidență locală*, pe care o vom nota cu α. În cazul general, planul bordurilor de atac și de fugă ale scheletului posedă și el o incidență față de curentul U_∞ ; o vom numi *incidența globală a scheletului* și o vom nota cu α^*. Cu aceste notații, incidența totală α_t a elementului $d\sigma$ se scrie

$$\alpha_t = \alpha + \alpha^*. \tag{1}$$

Diferența totală de presiune $p_t - p_\infty$ ce se exercită pe elementul $d\sigma$ și care, conform ipotezelor liniarizării, este proporțională cu incidența, se descompune în cea datorită incidenței locale $\alpha : p - p_\infty$, și în diferența de presiune datorită incidenței globale α^* a scheletului : $p^* - p_\infty$, avînd deci

$$p_t - p_\infty = (p - p_\infty) + (p^* - p_\infty). \tag{2}$$

Acest rezultat poate fi interpretat în felul următor : potențialul de mișcare în jurul aripii (din care se deduce presiunea) se descompune în două :

— potențialul în jurul scheletului la incidența nulă ;

— potențialul de mișcare în jurul unei aripi delta plane, avînd o incidență egală cu incidența globală α^* a scheletului.

Toate mărimile referitoare la cea de-a doua mișcare, vor purta în cele ce urmează un asterisc. Astfel, viteza axială de perturbație datorită primului potențial va fi notată cu u, iar cea datorită celui de-al doilea potențial cu u^*.

3. Rezistența de undă a scheletului

Proiecția pe orizontală a forței ce se exercită pe un element de suprafață $d\sigma$ are expresia

$$dR_t = 2(p_t - p_\infty)\,\alpha_t d\sigma = 2[(p - p_\infty) + (p^* - p_\infty)](\alpha + \alpha^*)\,d\sigma =$$
$$= 2[(p - p_\infty)\,\alpha + (p - p_\infty)\,\alpha^* + (p^* - p_\infty)\,\alpha + (p^* - p_\infty)\,\alpha^*]\,d\sigma. \tag{3}$$

Rezistența aripii rezultă prin integrare pe întreaga suprafață a aripii.

Coeficientul unitar de rezistență a scheletului C_{xt} se obține împărțind rezistența totală R_t la $\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 S$, unde ρ_∞ și U_∞ sînt respectiv densitatea și viteza curentului neperturbat, iar S este aria aripii.

Dacă ținem seama de relațiile

$$p - p_\infty = -\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 \, 2 \frac{u}{U_\infty}, \tag{4}$$

$$p^* - p_\infty = -\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 \, 2 \frac{u^*}{U_\infty}, \tag{5}$$

obținem, din (3)

$$C_{xt} = C_{xA} + C_{xB} + C_{xC} + C_{xD}, \tag{6}$$

unde

$$C_{xA} = -\frac{4}{S} \iint_S \frac{u}{U_\infty} \alpha \, d\sigma, \tag{7}$$

$$C_{xB} = -\frac{4}{S} \alpha^* \iint_S \frac{u}{U_\infty} \, d\sigma = \alpha^* C_{zt}, \tag{8}$$

$$C_{xC} = -\frac{4}{S} \iint_S \frac{u^*}{U_\infty} \alpha \, d\sigma, \tag{9}$$

$$C_{xD} = -\frac{4}{S} \alpha^* \iint_S \frac{u^*}{U_\infty} d\sigma = \alpha^* C_z^*. \tag{10}$$

Acești patru coeficienți, în conformitate cu cele de mai sus, își găsesc interpretări fizice simple, și anume:

C_{xA} este coeficientul unitar de rezistență a scheletului la incidența nulă;

C_{xB} provine din proiecția pe orizontală a portanței scheletului la incidența nulă, avînd în vedere că, față de orizontală, întregul schelet are incidența α^*;

C_{xC} provine din însumarea rezistențelor elementare datorite acțiunii potențialului aripii delta plane (care produce presiunea p^*), asupra scheletului aripii reale;

C_{xD} este coeficientul de rezistență al aripii delta plane cu incidența α^*.

Dintre aceștia, coeficientul C_{xB} se deduce ușor din lucrarea citată [3], iar C_{xD} constituie un rezultat clasic; urmează să calculăm, pentru determinarea completă a rezistenței unei aripi delta cu incidența variabilă, valorile coeficienților C_{xA} și C_{xC}.

B. CALCULUL COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ A SCHELETULUI LA INCIDENȚA NULĂ, C_{xA}

1. Acțiunea curentului asupra scheletului

Referindu-ne la figura 3, vom reaminti că scurgerea în jurul unei aripi delta dublu-conice se poate descompune în două mișcări conice [1]: una cu vîrful în O, care se întinde pe întreaga aripă, și alta cu vîrful în A,

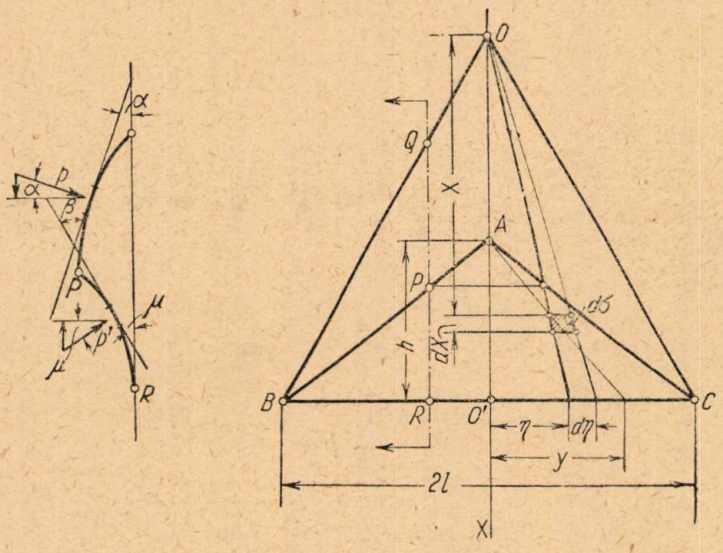


Fig. 3

a cărei acțiune se exercită numai în aval, în interiorul conului Mach respectiv.

Vom admite în cele ce urmează o lege de variație a incidenței scheletului, în conformitate cu lucrările anterioare, după expresia

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 + (m - 1) \frac{|y|}{l} \right]. \tag{11}$$

Aici, α_0 este incidența scheletului pe axa OX, iar m este raportul dintre incidența la bordul de atac și α_0.

1.1. Viteza axială de perturbație

Cele două mișcări definite mai sus produc viteze axiale de perturbație pe care le vom nota cu u și u'. Aceste viteze au fiecare expresii diferite, după cum bordurile de atac ale aripii din față (sau din spate) sînt supersonice sau subsonice, adică dacă depășesc sau nu deschiderea conului Mach respectiv. Se disting următoarele cazuri (fig. 4):

a. Atît aripa din față, cît și cea din spate, au bordurile de atac supersonice;

b. aripa din față are bordurile de atac subsonice, iar cea din spate, supersonice;

c. ambele aripi au bordurile de atac subsonice.

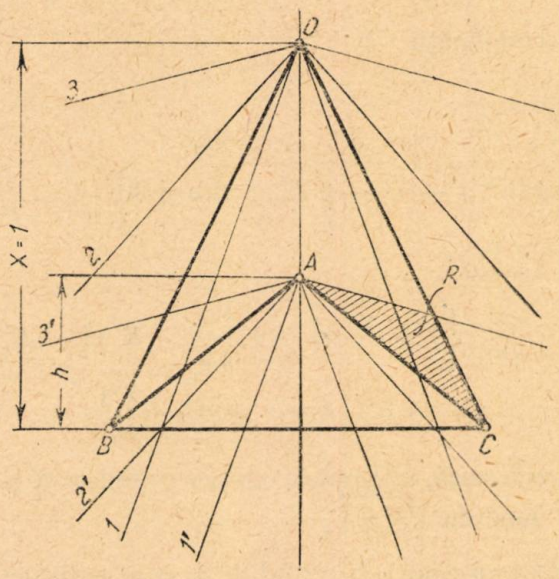


Fig. 4

În lucrarea [3] s-au dedus expresiile vitezelor pentru fiecare caz în parte, obținîndu-se următoarele rezultate:

a) Pentru aripa din față, în cazul bordurilor de atac supersonice, viteza axială de perturbație are expresia

$$u = -\frac{2m\alpha_0 U_\infty}{\pi B} Re\left[u_1 + \frac{m-1}{m} u_2\right], \tag{12}$$

Aici am notat

$$n = \frac{1}{Bl}, \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}). \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{y}{l}, \tag{14}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}}, \tag{15}$$

$$u_2 = \sqrt{n^2-1} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}} + \sqrt{n^2-\lambda^2} \ln \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}} - n \operatorname{arg\,ch} \frac{n}{\lambda} - i\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-\lambda^2}. \tag{16}$$

b) Pentru aripa din față, în cazul bordurilor de atac subsonice, expresia vitezei axiale de perturbație este

$$u = \omega u_3 + \frac{2(m-1)\alpha_0 U_\infty n}{\pi B} \operatorname{Re}\left[u_4 + \frac{1}{n} \operatorname{arg\,th} \frac{1}{n} \cdot u_5\right], \tag{17}$$

cu următoarele semnificații

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \tag{18}$$

$$u_4 = \operatorname{arg\,th}\sqrt{1-\lambda^2} - \sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{n^2}} \operatorname{arg\,th}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{n^2(1-\lambda^2)}}, \tag{19}$$

$$u_5 = \sqrt{1-\lambda^2}, \tag{20}$$

$$\omega = -\frac{\alpha_0 U_\infty}{nBE'}\left\{1 + \frac{2}{\pi}(m-1)\left[\frac{\pi}{2} + K'(1-E) + (K'-E')\left(K - n \operatorname{arg\,th}\frac{1}{n}\right)\right]\right\}. \tag{21}$$

În formula precedentă, integralele eliptice complete K și E au modulul $\frac{1}{n}$, iar K' și E' modulul $\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}$.

c) Pentru mișcarea conică cu vîrful în A, care se întinde pe aripa din spate, viteza de perturbație axială u' are aceeași expresie, indiferent de faptul dacă bordurile de atac AB și AC sînt supersonice sau subsonice [3]; se obține

$$u' = -\frac{1}{h} u(nh, \lambda), \tag{22}$$

în care $u(nh, \lambda)$ are expresia din formula (12), înlocuindu-se însă n prin nh.

1.2. Rezistența de undă

Să considerăm secțiunea QPR prin aripă (fig. 3). Incidența unui element de suprafață de pe partea anterioară a aripii fiind α, iar pe partea posterioară μ, vom pune

$$\beta = \alpha + \mu. \tag{23}$$

În aceste condiții, așa cum s-a arătat în [1], efectul primei mișcări conice (cu vîrful în O) asupra aripii, se traduce prin coeficienții de rezistență C_{x1} și C_{x2}

$$C_{x1} = -\frac{8}{l}\int_{OO'C}\frac{u}{U_\infty}\alpha\,d\sigma = -4\int_0^1 \frac{u}{U_\infty}\alpha\,d\lambda, \tag{24}$$

$$C_{x2} = \frac{8}{l}\iint_{AO'C}\frac{u}{U_\infty}\beta\,d\sigma = 8\int_0^1 \frac{u}{U_\infty}d\lambda\int_{X_0}^1 \beta X\,dX, \tag{25}$$

unde s-a notat

$$X_0 = \frac{1-h}{1-h\lambda}. \tag{26}$$

Cea de-a doua mișcare conică (cu vîrful în A — figura 3) produce rezistențele C'_{x1} și C'_{x2} :

$$C_{x1} = \frac{8}{l} \iint\limits_{AO'C} \frac{u'}{U_\infty} \beta \, d\sigma = 4h \int_0^1 \frac{u'}{U_\infty} \beta \, d\lambda, \tag{27}$$

$$C'_{x2} = -\frac{8}{l} \iint\limits_{AO'C} \frac{u'}{U_\infty} \alpha \, d\sigma = -\frac{8}{h} \int_0^1 \frac{u'}{U_\infty} d\lambda \int_{1-h}^1 \alpha[X-(1-h)] \, dX. \tag{28}$$

În sfîrșit, în cazul cînd conul Mach cu vîrful în A acoperă o regiune R din suprafața anterioară a aripii (fig. 4), trebuie adăugată și o rezistență de interferență C_{xi}, avînd expresia :

$$C_{xi} = -\frac{8}{h} \int_1^{nh} \frac{u'}{U_\infty} d\lambda \int_{1-h}^{X_1} \alpha[X-(1-h)] \, dX, \tag{29}$$

cu

$$X_1 = \frac{(1-h)\lambda}{\lambda - h}. \tag{30}$$

Coeficientul de rezistență a scheletului la incidența nulă devine atunci

$$C_{xA} = C_{x1} + C_{x2} + C'_{x1} + C'_{x2} + C_{xi}. \tag{31}$$

În cele ce urmează, vom calcula acești coeficienți în diferitele cazuri ce apar.

2. Cazul bordurilor de atac supersonice ($n < 1$)

În acest caz, viteza axială de perturbație a scheletului este aceeași ca pentru aripa simetr că groasă, care a fost studiată anterior [2]. De aceea, și rezistența de undă va avea aceeași valoare ; dăm mai jos rezultatele, fără demonstrații.

2.1. Coeficientul C_{x1}

Acest coeficient are expresia

$$C_{x1} = \frac{8 m\alpha_0^2}{\pi B} \operatorname{Re}\left\{ I_{11} + \frac{m-1}{m} [(I_{12} + I_{14}) m + (I_{13} - I_{14})] \right\}, \tag{32}$$

unde s-au introdus următoarele notații

$$I_{11}(n) = \int_0^1 u_1 \, d\lambda = \arcsin \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

$$I_{12}(n) = \int_0^1 \lambda u_1 \, d\lambda = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2 - 1} + \frac{\operatorname{arg\,ch} n}{\sqrt{n^2 - 1}}\right),$$

$$I_{13}(n) = \int_0^1 u_2 \, d\lambda = \sqrt{n^2 - 1} \ln n - n \operatorname{arg\,ch} n - \arcsin \frac{1}{n} -$$

$$- i \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{n^2 - 1} + n^2 \arcsin \frac{1}{n}\right) + \int_0^1 \sqrt{n^2 - \lambda^2} \ln \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2}} \, d\lambda, \qquad (33)$$

$$I_{14}(n) = \int_0^1 \lambda u_2 \, d\lambda = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{n^2 - 1} - n + \frac{2}{3}\sqrt{(n^2 - 1)^3} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} n^3\right) \operatorname{arg\,ch} n - \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{3} - \frac{2}{3}\left(n^3 \ln 2n + \sqrt{(n^2 - 1)^3} \ln 2\sqrt{n^2 - 1}\right) +$$

$$\left. + i \frac{\pi}{3}\sqrt{(n^2 - 1)^3}\right].$$

2.2. Coeficientul C_{x2}

Pentru calculul acestui coeficient, se efectuează în prealabil prima parte a integralei duble din (28), obținîndu-se

$$\int_{X_0}^1 \beta X \, dX = -\frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{h}\left[F_1 + (m - 1) F_2\right], \qquad (34)$$

unde

$$F_1(h, \lambda) = \left(\frac{1 - h}{1 - h\lambda}\right)^2 - 1, \qquad (35)$$

$$F_2(h, \lambda) = h(1 - h)^2 \lambda\left[\ln\left(\frac{(1 - h)\lambda}{1 - h\lambda}\right)^2 + \frac{3 - 2h\lambda}{(1 - h\lambda)^2} - \frac{3 - 2h}{(1 - h)^2}\right].$$

Cu aceste notații, coeficientul C_{x2} se scrie

$$C_{x2} = \frac{1}{h}\frac{8m\alpha_0^2}{\pi B} \operatorname{Re}\left\{I_{21} + \frac{m - 1}{m}\left[(I_{22} + I_{24})\, m + (I_{23} - I_{24})\right]\right\} \qquad (36)$$

unde

$$I_{21}=\int_0^1 u_1F_1\,\mathrm{d}\lambda=\frac{1-h}{1+h}\left[\frac{\ln n+h\,\operatorname{arg\,ch} n}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2h^2-1}}\operatorname{arg\,th}\frac{\sqrt{n^2h^2-1}}{n-nh+\sqrt{n^2-1}}\right]-$$

$$-\left[\arcsin\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}}\right],$$

$$I_{22}=\int_0^1 u_1F_2\,\mathrm{d}\lambda\ ,\quad I_{23}=\int_0^1 u_2F_1\,\mathrm{d}\lambda\ ,\quad I_{24}=\int_0^1 u_2F_2\,\mathrm{d}\lambda. \tag{37}$$

2.3. Coeficientul C'_{x1}

În baza celor arătate mai sus, coeficientul C'_{x1} se deduce din C_{x1}, prin înlocuirea lui n cu nh și prin împărțirea rezultatului la h, obținînd astfel

$$C'_{x1}=\frac{1}{h}\frac{8m\alpha_0^2}{\pi B}\operatorname{Re}\left\{I'_{11}+\frac{m-1}{m}\left[(I'_{12}+I'_{14})\,m+(I'_{13}-I'_{14})\right]\right\}, \tag{38}$$

unde

$$I'_{1k}=I_{1k}(nh),\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{39}$$

2. 4. Coeficientul C'_{x2}

Pentru calculul coeficientului C'_{x2} se calculează în prealabil prima parte a integralei duble, care figurează în (27)

$$\int_{1-h}^1 \alpha\,[X-(1-h)]\,\mathrm{d}X=\frac{1}{2}\,\alpha_0h^2\,[1-(m-1)\,F_3\lambda], \tag{40}$$

cu notația

$$F_3(h)=\frac{(1-h)^2}{h^3}\left[\ln\,(1-h)^2+\frac{h\,(2-3\,h)}{(1-h)^2}\right]. \tag{41}$$

Rezultă

$$C^x{}_2=\frac{8m\alpha_0^2}{\pi B}\operatorname{Re}\left\{I'_{21}+\frac{m-1}{m}\left[(I'_{22}+I'_{24})\,m+(I'_{23}-I'_{24})\right]\right\}, \tag{42}$$

unde s-au pus de asemenea

$$I'_{21}=-I'_{11},\quad I'_{22}=F_3\cdot I'_{12},\quad I'_{23}=-I'_{13},\quad I'_{24}=F_3\cdot I'_{14}. \tag{43}$$

Rezultatele din formulele (32), (36), (38) și (42), introduse în (31), rezolvă problema propusă. Remarcăm că în acest caz, coeficientul C_{x4} nu are sens.

Vom nota cu θ grosimea maximă relativă a aripii, care este legată de incidența la centru α_0 prin relația

$$\theta=\alpha_0\,(1-h) \tag{44}$$

și vom reprezenta grafic variația rezistenței scheletului, sub forma coefi-

cientului $\frac{C_{xA}B}{4\theta^2}$. În diagramele din figura 5 este dată această variație, pentru cazul bordurilor de atac supersonice.

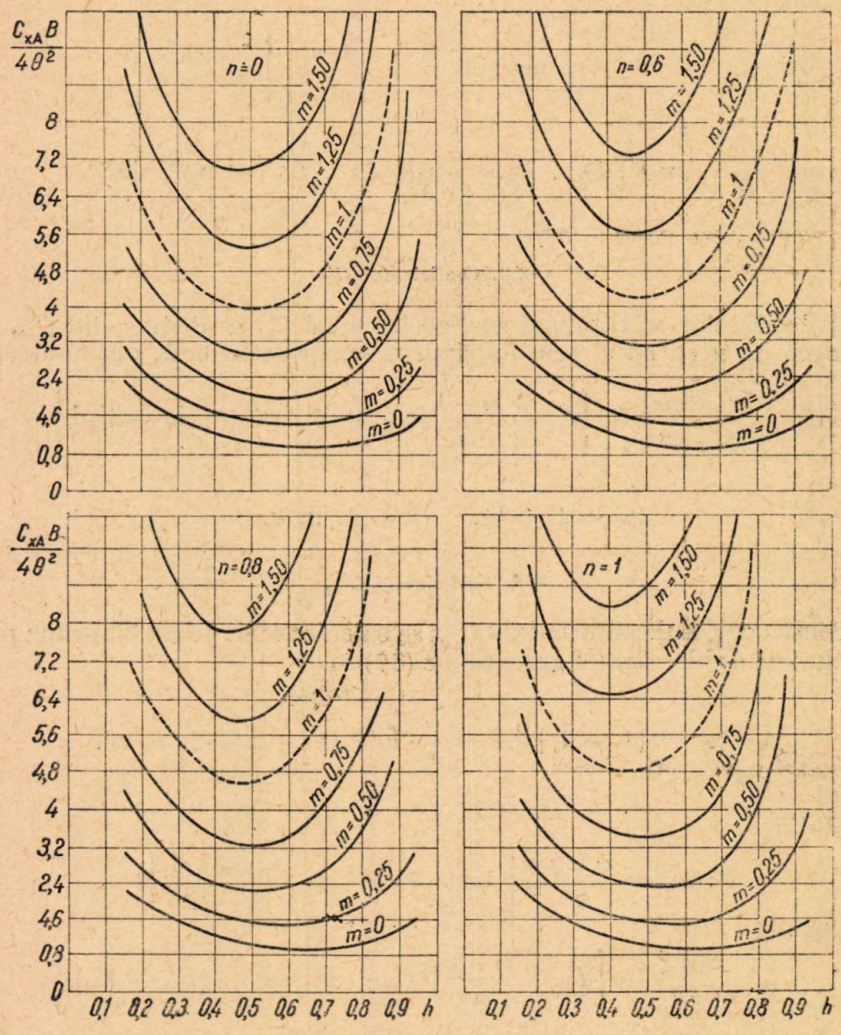


Fig. 5

3. Cazul bordurilor de atac subsonice ($n > 1$)

În cazul cînd scheletul aripii are bordurile de atac subsonice, viteza axială de perturbație pe aripa din față, u, are expresia (17). Pe aripa din spate însă, viteza u' are aceeași expresie ca și în cazul prec dent ($n < 1$) [3]. În aceste condiții, coeficienții C_{x1} și C_{x2} se scriu diferit, dar C'_{x1} și C'_{x2} au aceleași formule ca mai sus (bineînțeles cu alte valori numerice), și anume (36) și (42).

3.1. Coeficientul de rezistență C_{x1}

Vom introduce expresia unghiului α, dată de (11), în formula care dă coeficientul C_{x1}, și vom scoate în evidență coeficientul de portanță a scheletului, C_z, determinat într-o lucrare anterioară [3]

$$C_{x1} = -4\alpha_0 \int_0^1 \frac{u}{U_\infty} [1 + (m-1)\lambda]\, d\lambda =$$

$$= -\alpha_0 C_z - 4\alpha_0 (m-1) \int_0^1 \frac{u}{U_\infty} \lambda\, d\lambda. \tag{45}$$

Coeficientul C_z are valoarea

$$C_z = -\frac{2\pi\omega}{U_\infty} - \frac{\alpha_0 (m-1)}{B} n \left[2 - \frac{n^2-1}{n} \ln \frac{n+1}{n-1}\right], \tag{46}$$

unde ω este o constantă dată de formula (21). Rezultă, prin integrare :

$$C_{x1} = -\alpha_0 C_z - 4\alpha_0 (m-1) \left\{ \frac{\omega}{U_\infty} I_{31} + \frac{2(m-1)\alpha_0 n}{\pi B} \operatorname{Re} \left[I_{41} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{n} \arg \operatorname{th} \frac{1}{n} \cdot I_{51} \right] \right\}. \tag{47}$$

Integralele din formula precedentă au expresiile

$$I_{31} = \int_0^1 u_3 \lambda\, d\lambda = 1,$$

$$I_{41} = \int_0^1 u_4 \lambda\, d\lambda = \frac{1}{6} \left(1 - n^2 \ln \frac{n^2}{n^2-1} \right),$$

$$I_{51} = \int_0^1 u_5 \lambda\, d\lambda = \frac{1}{3}. \tag{48}$$

3.2. Coeficientul de rezistență C_{x2}

Acest coeficient, pentru cazul bordurilor de atac subsonice, ținînd seama de formulele (25) și (34), se scrie astfel

$$C_{x2} = -\frac{4\alpha_0}{h} \int_0^1 \frac{u}{U_\infty} [F_1 + (m-1) F_2]\, d\lambda \tag{49}$$

(F_1 și F_2 fiind date de relațiile (34)) sau, introducînd viteza u din (17)

$$C_{x2} = -\frac{4\alpha_0}{U_\infty h} \operatorname{Re} \left\{ \omega I_{32} + \frac{2(m-1)\alpha_0 U_\infty n}{\pi B} \left(I_{42} + \frac{1}{n} \arg \operatorname{th} \frac{1}{n} \cdot I_{52} \right) + \right.$$

$$\left. + (m-1) \left[\omega I_{33} + \frac{2(m-1)\alpha_0 U_\infty n}{\pi B} \left(I_{43} + \frac{1}{n} \arg \operatorname{th} \frac{1}{n} \cdot I_{53} \right) \right] \right\}. \tag{50}$$

În formula de mai sus, semnificațiile integralelor care figurează, sînt

$$I_{32} = \int_0^1 u_3 F_1 \, d\lambda, \quad I_{42} = \int_0^1 u_4 F_1 \, d\lambda, \quad I_{52} = \int_0^1 u_5 F_1 \, d\lambda,$$
$$I_{33} = \int_0^1 u_3 F_2 \, d\lambda, \quad I_{43} = \int_0^1 u_4 F_2 \, d\lambda, \quad I_{53} = \int_0^1 u_5 F_2 \, d\lambda. \tag{51}$$

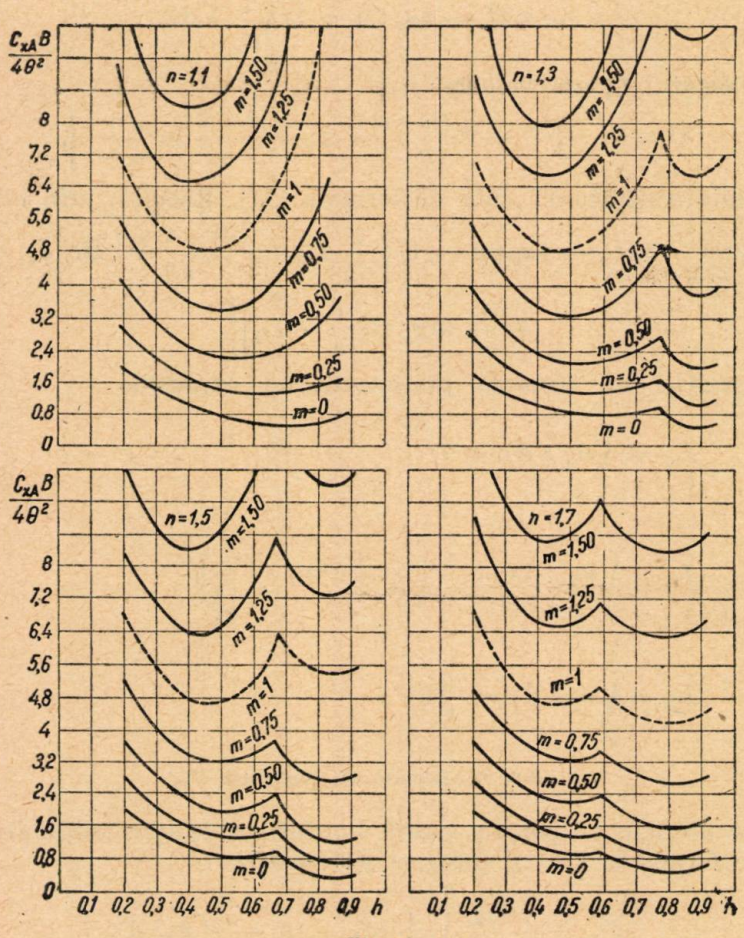


Fig. 6

3.3. Coeficientul de rezistență datorită interferenței, C_{xi}

În cazul în care bordurile de atac ale aripii din spate sînt subsonice, ($nh > 1$), există o interferență a mișcării conice din spate asupra aripii din față.

Întrucît viteza u' pe aripa din spate este aceeași la schelet ca și la aripa groasă simetrică, coeficientul de rezistență datorită interferen-

ței C_{xi} are aceeași expresie pentru schelet ca și pentru aripa groasă [2] și [3].

Acest coeficient se obține cu ajutorul formulei (29) în care, dacă se calculează prima parte a integralei duble, se obține

$$\int_{1-h}^{X_1} \alpha\,[X-(1-h)]\,dX = \frac{1}{2}\,\alpha_0 h^2\,[F_4-(m-1)F_5], \tag{52}$$

cu notațiile

$$F_4=\left(\frac{1-h}{h-\lambda}\right)^2,\quad F_5=\frac{(1-h)^2}{h^3}\left[\ln\left(\frac{\lambda-h}{\lambda}\right)^2+\frac{h(2\lambda-3h)}{(\lambda-h)^2}\right]\lambda. \tag{53}$$

Rezultă pînă la urmă

$$C_{xi}=\frac{8m\alpha_0^2}{\pi B}\left\{I_{i1}+\frac{m-1}{m}[(I_{i2}+I_{i4})m+(I_{i3}-I_{i4})]\right\}. \tag{54}$$

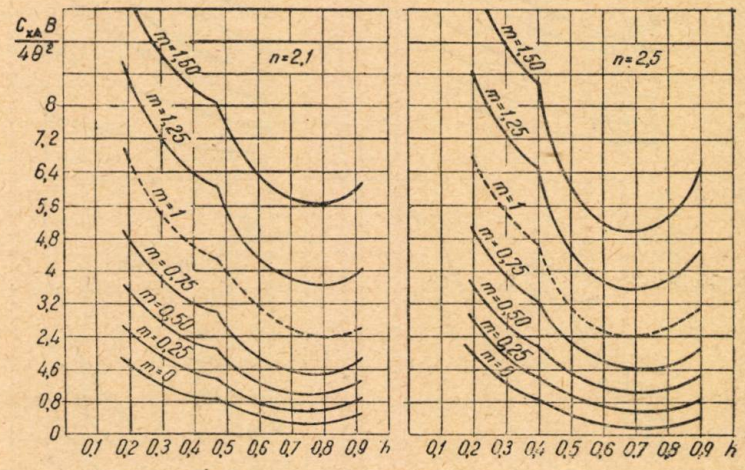


Fig. 7

Integralele respective reprezintă următoarele expresii:

$$I_{i1}=-\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_1' F_4\,d\lambda=-\frac{1-h}{1+h}\left[\frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arg\,th}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}\,\frac{nh-1}{nh+1}}\right],$$

$$I_{i2}=\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_1' F_5\,d\lambda,\quad I_{i3}=-\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_2' F_4\,d\lambda, \tag{55}$$

$$I_{i4}=\operatorname{Re}\int_1^{nh} u_2' F_5\,d\lambda.$$

În aceste condiții, coeficientul de rezistență a scheletului la incidența nulă, C_{xA}, pentru cazul bordurilor de atac subsonice, se calculează cu ajutorul formulei (31), în care C_{x1} se înlocuiește din formula (47), C_{x2} din (50), iar C'_{x1} și C'_{x2} rămîn cu aceleași expresii ca și pentru cazul bordurilor de atac

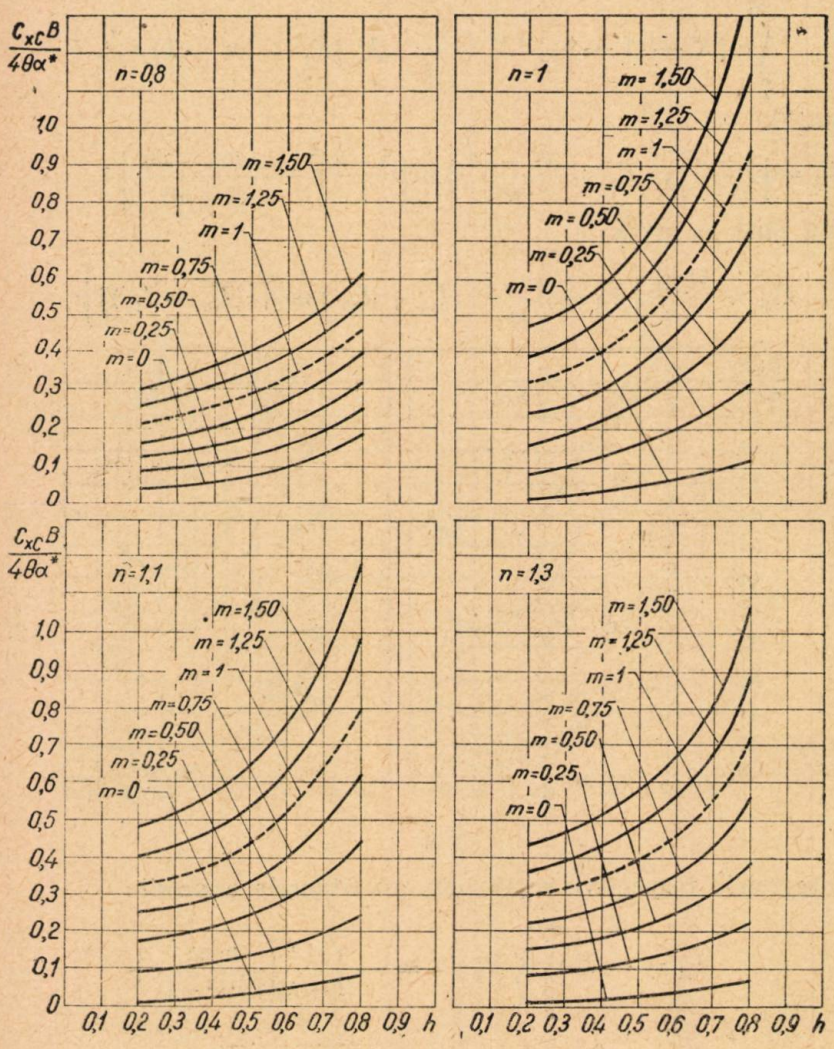


Fig. 8

supersonice, și anume (38) și respectiv (42); în cazul cînd și bordurile de atac ale aripii din spate sînt subsonice ($nh > 1$), se adaugă și coeficientul de interferență C_{xi}, din (54). În diagramele din figurile 6 și 7 s-a reprezentat variația coeficientului $\frac{C_{xA}B}{4\theta^2}$ ca funcție de parametrii n (deschiderea aripii față de conul Mach), h (profunzimea aripii din spate) și m (raportul dintre incidența aripii la bordul de atac și incidența la centru α_0).

C. CALCULUL COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ A SCHELETULUI, DATORIT POTENȚIALULUI ARIPII DELTA PLANE, C_{xC}

Viteza axială de perturbație în cazul mișcării în jurul unei aripi delta plane este cunoscută. Ea rezultă însă și ca un caz particular al formulelor

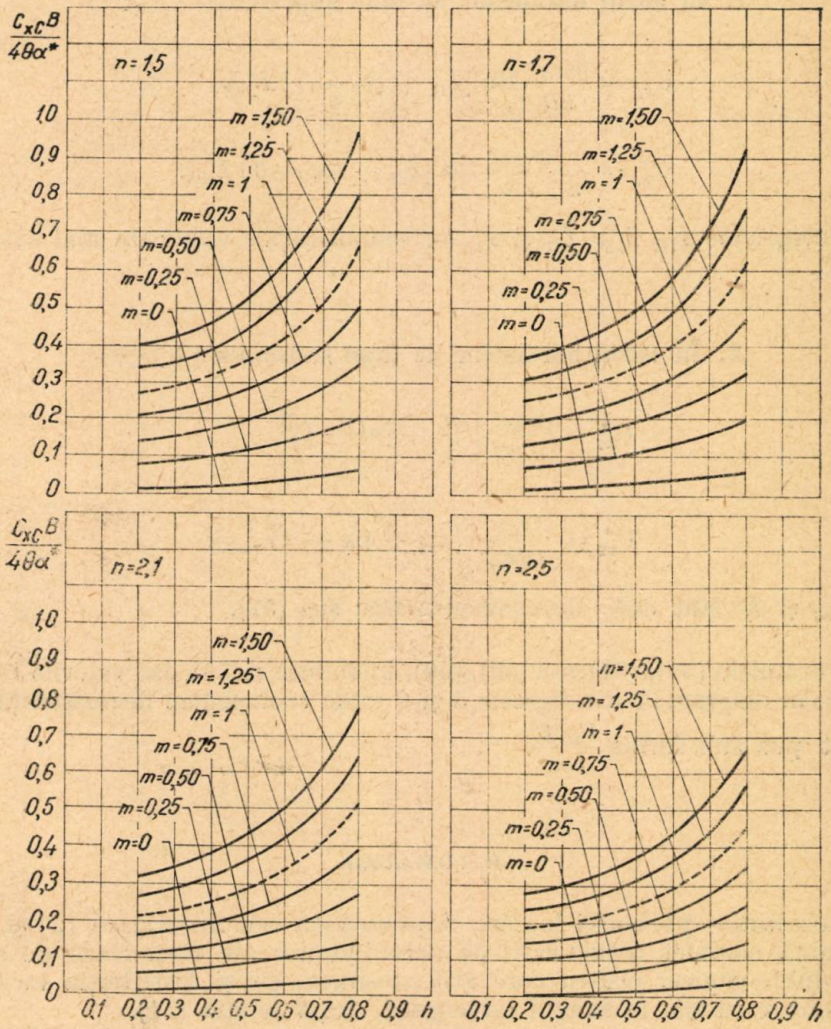


Fig 9

(12) și (17), care dau viteza de perturbație pentru aripa cu variație de incidență, dacă se ia în formula (11), $m = 1$. În acest caz, incidența α_0 se înlocuiește cu incidența α^* a întregei plăci plane, iar formulele (12) și (17) se scriu în mod corespunzător.

Acțiunea acestei viteze de perturbație pe partea anterioară și pe cea posterioară a aripii are drept efect apariția rezistenței C_{xC}

$$C_{xC} = C^*_{x1} + C^*_{x2}, \tag{56}$$

unde C_{x1}^* şi C_{x2}^* au aceleaşi expresii ca şi C_{x1} şi C_{x2} din formulele (24) şi (25), în care însă se înlocuieşte u prin u^*. În acelaşi sens trebuie modificate şi formulele (32) şi (36). Se obţine astfel:

1. În cazul bordurilor de atac supersonice ($n < 1$)

$$C_{x1}^* = \frac{8\alpha_0 \alpha^*}{\pi B} \operatorname{Re} [I_{11} + (m-1) I_{12}], \tag{57}$$

$$C_{2x}^* = \frac{1}{h} \frac{8\alpha_0 \alpha^*}{\pi B} \operatorname{Re} [I_{21} + (m-1) I_{22}]. \tag{58}$$

Integralele I_{11}, I_{12}, I_{21} şi I_{22} au semnificaţiile explicate mai sus (33) şi (37).

2. În cazul bordurilor de atac subsonice ($n > 1$)

$$C_{x1}^* = \frac{4\alpha_0 \alpha^*}{nBE'} \left[\frac{\pi}{2} + (m-1) \right], \tag{59}$$

$$C_{x2}^* = \frac{4\alpha_0 \alpha^*}{hnBE'} [I_{32} + (m-1) I_{33}], \tag{60}$$

I_{32}, I_{33} şi E' sînt date de asemenea mai sus (51).

Formulele (56), (57) sau (59), (60), introduse în (56), dau valorile reprezentate în diagramele din figurile 8 şi 9 unde coeficientul de rezistenţă C_{xC} a fost pus sub forma $\frac{C_{xC} B}{4\theta\alpha^*}$.

D. CONCLUZII

Rezultatele prezentei lucrări, împreună cu cele anterioare [2] şi [3], determină complet caracteristicile aerodinamice ale unei clase de aripi delta dublu-conice, pentru care atît grosimea, cît şi distribuţia incidenţelor sînt variabile în lungul anvergurii, după relaţia (11).

În acest scop, s-a calculat pe de o parte portanţa, iar pe de altă parte rezistenţa acestor aripi. Calculul rezistenţei a pus în evidenţă trei elemente contributive: rezistenţa datorită grosimii aripii, rezistenţa scheletului la incidenţa nulă şi efectul unei incidenţe globale a întregii aripi. Rezistenţa totală se obţine prin însumare, în conformitate cu ipoteza perturbaţiilor mici.

Este de remarcat că incidenţa şi grosimea aripii la bordurile de atac ale aripii au o influenţă importantă asupra caracteristicilor aerodinamice.

Primit la redacţie la 22 decembrie 1955

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ТОНКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ДВУХКОНУСНЫХ КРЫЛЬЕВ С ПЕРЕМЕННЫМ УГЛОМ АТАКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Настоящая работа дополняет предыдущие результаты [1], [2], [3], касающиеся треугольных двухконусных крыльев с переменными углом атаки и толщиной. Было определено волновое сопротивление средней линии профиля подобных крыльев, построенных по методу, изложенному в [1], придерживаясь рамок гипотезы мелких возмущений. В этих условиях действие сверхзвукового потока на крыло может быть разложено на :

— коэффициент волнового сопротивления средней линии профиля при нулевом угле атаки C_{xA};

— проекцию на горизонталь несущей силы средней линии профиля, имея в виду, что угол атаки всей средней линии профиля равен α^*—C_{xB};

— сопротивление, оказываемсе дейсвием на среднюю линию профиля обтекания вокруг плоского треугольного крыла с углом атаки α^*, результатом чего является коэффициент C_{xC};

— коэффициент сопротивления плоского треугольного крыла с углом атаки $\alpha^* — C_{xD}$.

Из вышеуказанных коэффициент C_{xB} непосредственно определяется [3], а C_{xD} известен.

Коэффициент C_{xA} был вычислен для двух случаев :

1. Когда передние кромки крыла сверхзвуковые; в этом случае выражение аксиальнсй скорости возмущения на средней линии профиля то же что и для толстого крыла (12). Сопротивление определяется формулами (32), (36), (38) и (42) и представлено на диаграммах рис. 5.

2. Когда передние кромки крыла дозвуковые; в этом случае аксиальной скорости возмущения на переднем крыле соответствует выражение (17), а сопротивление выводится из формул (38), (42), (47), (50) и (54). Изменения его представлены на рис. 6 и 7.

Коэффициент C_{xC} выводится из (57), (58), (59) и (60) и представлен на диаграммах рис. 8 и 9.

Из приведенных результатов видно, что угол атаки передней кромки крыла обладает существенным влиянием на аэродинамические характеристики.

TRAINÉE D'ONDE POUR UNE CLASSE D'AILES DELTA MINCES DOUBLEMENT CONIQUES, À INCIDENCE VARIABLE, EN COURANT SUPERSONIQUE

(RÉSUMÉ)

Le présent travail est un complément des travaux antérieurs [1], [2], [3], concernant les ailes delta doublement coniques, ayant l'épaisseur et l'incidence variables. On y détermine la traînée d'onde du squelette de ces ailes, engendrées par la méthode développée en [1], en se maintenant

dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. En ces conditions, l'action d'un courant supersonique autour de l'aile peut être décomposée comme suit :

— Le coefficient de traînée d'onde du squelette à l'incidence nulle, C_{xA} ;

— La projection sur l'horizontale de la portance du squelette en tenant compte du fait que l'aile entière a une incidence α^*, — C_{xB} ;

— La traînée résultant de l'action exercée sur le squelette, par les perturbations engendrées par une aile delta à l'incidence α^*, — C_{xC} ;

— Le coefficient de traînée de l'aile delta plane à l'incidence α^*,— C_{xD}.

Parmi ces coefficients, C_{xB} se déduit aisément de [3], tandis que C_{xD} est classique.

Le calcul du coefficient de traînée C_{xA} a été fait en deux cas :

1) Le cas où les bords d'attaque de l'aile sont supersoniques ; la vitesse de perturbation possède alors la même expression que pour l'aile épaisse (12). La traînée se déduit des formules (32), (36), (38) et (42) étant représentée par la figure 5.

2) Le cas où les bords d'attaque sont subsoniques ; ici la vitesse de perturbation sur l'aile avant a l'expression (17), et la traînée résulte des formules (38), (42), (47), (50) et (54) (figures 6, 7).

Le coefficient C_{xC} este donné par (57), (58), (59) et (60) (figures 8, 9).

Des résultats présentés, on constate la grande influence qu'a l'incidence de l'aile aux bords d'attaques sur ses caractéristiques aérodynamiques.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Asupra portanței și rezistenței aripii triunghiulare la viteze supersonice.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 5—6, mai-iunie 1954, p. 261.
2. E. Carafoli și M. Ionescu, *Rezistența aripilor triunghiulare dublu-conice cu pantă variabilă.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, 1954, p. 285.
3. E. Carafoli și L. Dumitrescu, *Asupra aripii delta subțiri dublu-conice cu incidența variabilă, în curent supersonic.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, 1955, p. 237.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

AEROMECANICĂ

ARIPI DE ANVERGURĂ INFINITĂ SUFLATE

DE

N. PATRAULEA şi E. LARISCH

1. Ipoteze generale

Se studiază mişcarea unui fluid incompresibil în jurul unui profil subţire AB, în prezenţa unui suflu. Această problemă este legată de realizarea hipersustentaţiei. Se consideră o schemă care este analogul plan al elicei în canal.

Suflul este reprezentat prin suprafaţa permeabilă activă M_0M; la străbaterea ei presiunea suferă saltul δp. Ea se comportă deci asemănător discului unei elici. Vom presupune pentru simplificare δp constant pe M_0M. Astfel, vîrtejurile libere, care se desprind din spatele suprafeţei permeabile, sînt concentrate în două pînze NM şi N_0A care se întind pînă la infinit aval.

Luînd profilul subţire şi incidenţa mică, putem aplica teoria mişcărilor cu dîre aproape rectilinii [1] şi [2]. Liniile N_0A şi NM le vom trata deci ca drepte şi densitatea de vîrtej γ_0 constantă de-a lungul lor. De fapt, la mari distanţe în aval, dîra ia direcţia vitezei de la infinit amonte, care face cu coarda profilului unghiul α. Considerăm însă că este mai potrivit a lua direcţia dîrei paralelă cu coarda profilului deoarece vitezele pe profil sînt influenţate de partea din dîră vecină cu acesta.

Problema, în modul expus mai sus, este analogă celei a profilelor cu volet permeabil de intrados, care a fost studiată de noi anterior [3]. Metoda folosită aici este diferită şi poate fi utilizată şi pentru tratarea cazului care a făcut obiectul acelui studiu.

2. Cîmpul de viteze

Trebuie să găsim mişcarea în jurul profilului AB (fig. 1) în prezenţa suflului, conceput ca mai sus. Vom presupune pentru simplificarea calculului că stratul de vîrtejuri N_0B se prelungeşte pînă la bordul de atac A, cu aceeaşi intensitate γ_0. Mişcarea care o căutăm este definită de viteza

$$w_0(z) = u_0 - iv_0, \qquad (1)$$

indusă de sistemul de vîrtejuri cunoscute astfel completat, peste care se suprapune un cîmp necunoscut

$$w_1(z) = u_1 - iv_1, \tag{2}$$

regulat în exteriorul profilului.

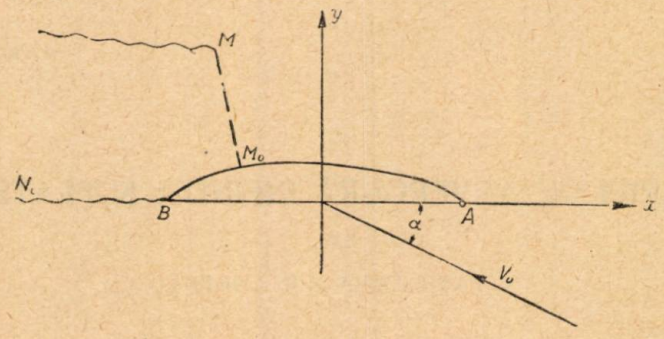


Fig. 1

Condiţiile la limită impuse funcţiei w_1 sînt următoarele.

În dreptul profilului viteza rezultantă este tangentă la scheletul acestuia, de pantă m

$$\frac{v_0 + v_1}{u_0 + u_1} = m. \tag{3}$$

De asemenea

$$w_1(\infty) = 0 \tag{4}$$

şi

$$w_1(B) < \infty\,. \tag{5}$$

Relaţia (5) exprimă condiţia lui Jukovski.

Pe baza ipotezelor făcute condiţia (3) poate fi pusă pe coarda profilului. Componentele v sînt acum continue la traversarea coardei profilului, aşa că (3) poate fi înlocuită prin

$$w_1^+(x) + w_1^-(x) = -2i\,Im\,[e^{im} w_0(x)], \tag{6}$$

cu

$$w_0(x) = \frac{w_0^+(x) + w_0^-(x)}{2} \tag{7}$$

şi

$$w_0(z) = -V_0 e^{i\alpha} + \frac{i\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{z - A}{z - M}. \tag{8}$$

Tăietura funcţiei în (8) este linia MNN_0A, iar determinaţia este aleasă astfel că logaritmul se anulează la ∞ în exteriorul tăieturii [4]. Ecuaţia

(6) este o problemă Hilbert pentru funcția $w_1(z)$. Vom da rezolvarea ei după N. Mushelișvili.

Luăm coarda profilului de lungime 2 și alegem sistemul de axe cu originea în mijlocul corzii și axa OX paralelă cu ea.

Soluția canonică*) a problemei (6) cu condițiile suplimentare (4) și (5) este

$$X(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}. \tag{9}$$

Se vede ușor că

$$\frac{w_1^+}{X^+} - \frac{w_1^-}{X^-} = -2i\,Im\,[e^{im}\,w_0(x)].$$

Soluția problemei (6) cu aceleași condiții suplimentare este deci

$$w_1(z) = -\frac{X(z)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Im\,(e^{im}\,w_0)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}. \tag{10}$$

Funcția

$$w(z) = w_0(z) + w_1(z), \tag{11}$$

unde w_0 este dat de (8), iar w_1 de (10) dă soluția căutată. Din formula (10) se deduce, prin aplicarea formulelor lui Plemelj, densitatea distribuției vîrtejurilor pe profil

$$\gamma_1(x) = w_1^-(x) - w_1^+(x) = \frac{X^+(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Im\,(e^{im}w_0)\,dt}{X^+(t)\,(t-x)}, \tag{12}$$

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x). \tag{13}$$

3. Calculul reacțiunilor aerodinamice

Vom da expresiile rezultantei și ale momentului rezultant.

Autoacțiunea vîrtejurilor legate este nulă. Rămîne de calculat efectul cîmpului

$$w'(z) = -V_0 e^{i\alpha} + \frac{i\gamma_0}{2\pi}\ln\frac{z+1}{z-M}, \tag{14}$$

asupra vîrtejurilor (13).

Forța rezultantă este

$$R' = -i\rho\int_{-1}^{1} w'(x)\,\gamma(x)\,dx = -i\rho\gamma_0\int_{-1}^{1} w'(x)\,dx - i\rho\int_{-1}^{1} w'(x)\,\gamma_1(x)\,dx. \tag{15}$$

*) Se numește astfel soluția problemei omogene corespunzătoare.

Pentru calculul ultimului termen, vom considera integrala

$$I = \int_c w'(z)\, w_1(z)\, dz, \tag{16}$$

pe conturul din figura 2.

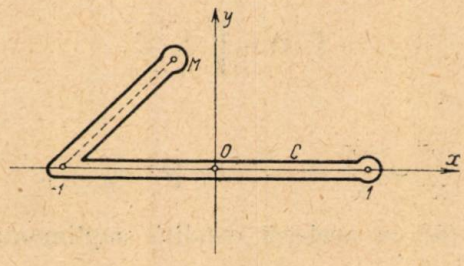


Fig. 2

Funcția $w_1(z)$ (2) are o tăietură pe segmentul $(-1, 1)$; funcția $w'(z)$ — pe segmentul $(-1, M)$, deci

$$I = \int_{-1}^{1} (w_1^+ - w_1^-)\, w'\, dx + \int_{-1}^{M} w_1 (w'^- - w'^+)\, dz. \tag{17}$$

Din (12) și (14) rezultă

$$I = \int_{-1}^{1} \gamma_1 w'(x)\, dx - \gamma_0 \int_{1}^{M} w_1(z)\, dz. \tag{18}$$

Integrala (16) poate fi calculată prin reziduul în punctul de la ∞

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_c \left(-V_0 e^{i\alpha} + \frac{i\gamma_0}{2\pi} \ln \frac{z+1}{z-M} \right) X(z) \int_{-1}^{1} \frac{Im\,(e^{im} w_0)\, dt}{X^+(t)\,(t-z)} =$$

$$= -2V_0 e^{i\alpha} \int_{-1}^{1} \frac{Im\,(e^{im} w_0)\, dt}{X^+(t)}. \tag{19}$$

Combinînd (15) și (19) se obține

$$R' = +2i\rho\gamma_0 V_0 e^{i\alpha} - i\rho\gamma_0 \int_{-1}^{M} w_1(z)\, dz +$$

$$+ i\rho \int_{-1}^{1} \left(2V_0 e^{i\alpha} + \frac{\gamma_0}{\pi} \int_{-1}^{M} \frac{X(z)\, dz}{t-z} \right) \frac{Im\,(e^{im} w_0)\, dt}{X^+(t)}. \tag{20}$$

În interiorul suflului presiunea este crescută față de scurgerea potențială cu cantitatea

$$\delta p = \frac{\rho\gamma_0}{2} (\gamma_0 + 2V_0), \tag{21}$$

așa că rezultanta este

$$R = R' + \frac{i\rho\gamma_0}{2}(\gamma_0 + 2V_0)(\mathrm{Re}M + 1). \tag{22}$$

Vom repeta acum același procedeu pentru calculul momentului

$$M' = \rho\mathrm{Re}\int_{-1}^{1} x\gamma(x)\, w'(x)\, \mathrm{d}x. \tag{23}$$

Considerăm pentru aceasta integrala

$$I = \int_{c} zw'(z)\, w_1(z)\, \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} x\gamma_1(x)\, w'(x)\, \mathrm{d}x - \gamma_0 \int_{-1}^{M} xw_1(x)\, \mathrm{d}x. \tag{24}$$

Calculînd reziduul în punctul de la ∞ se obține

$$I = 2\int_{-1}^{1} \frac{Im(e^{im}w_0)}{X^+(t)}\left[-V_0 e^{i\alpha}(2+t) + \frac{i\gamma_0(1+M)}{2\pi}\right]\mathrm{d}t, \tag{25}$$

de unde

$$M' = \rho\mathrm{Re}\left\{\gamma_0\int_{-1}^{M} xw_1(x)\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{Im(e^{im}w_0)}{X^+}\left[-2V_0 e^{i\alpha}(2+t) + \frac{i\gamma_0(1+M)}{\pi} + \frac{\gamma_0}{\pi}\int_{-1}^{M}\frac{zX(z)}{z-t}\right]\mathrm{d}t\right\} \tag{26}$$

și

$$M = M' + \frac{\rho\gamma_0}{2}(\gamma_0 + 2V_0)\frac{(\mathrm{Re}\,M+1)(\mathrm{Re}\,M-1)}{2}. \tag{27}$$

Primit la redacție la 24 martie 1956

ДУТЫЕ КРЫЛЬЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ РАЗМАХОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

На основании теории движений с почти прямолинейным следом исследуется движение вокруг тонкого профиля в присутствии проницаемой поверхности. Эта поверхность может быть воздушной струей или проницаемым щитком. Путем решения соответственной краевой задачи находится поле скоростей. Далее даются формулы для аэродинамических сил.

AILES D'ENVERGURE INFINIE SOUFFLÉES

(RÉSUMÉ)

On étudie le mouvement autour d'un profil mince en présence d'une surface perméable active. Les conditions à la limite sont basées sur la théorie des mouvements à sillage presque rectiligne [1].

Les auteurs arrivent à des formules donnant les réactions aérodynamiques.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Patraulea, *Teoria mişcărilor cu dîră aproape rectilinie.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. VII, nr. 1, 1955, p. 139.
2. — *Aerodinamica suprafeţelor permeabile.* Ed. Acad. R.P.R., 1956.
3. N. Patraulea şi E. Larisch, *O teorie a profilelor de aripă cu volet de intrados permeabil.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 4, aprilie 1955, p. 639.
4. N. Mushelişvili, *Singularnîe integralnîe uravnenia.* Gostehizdat, Moscova, 1946.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

AEROMECANICĂ

CERCETĂRI ASUPRA SCURGERII UNUI CURENT DE AER PRINTR-UN STRAT DE CEREALE CU APLICAŢII LA VENTILAŢIA CEREALELOR DIN SILOZURI

DE

T. OROVEANU

Problema pusă în acest studiu are ca obiect determinarea rezistenţei pe care un strat de cereale, sau de materiale cu structură similară o opune la trecerea unui curent de aer. Scopul studiului este ca, pe baza rezultatelor obţinute să se dea metode de calcul pentru instalaţiile de ventilare a cerealelor sau altor materiale astfel depozitate. Amintim că necesitatea unei asemenea ventilări se impune pentru a se înlătura cauzele care ar putea conduce la alterarea cerealelor.

Cercetarea a cuprins două faze şi anume una experimentală în care s-a căutat dependenţa între pierderea de sarcină şi viteză la trecerea unui curent de aer printr-un strat de cereale şi alta teoretică în care s-au tratat unele exemple, pe baza rezultatelor experimentale.

A. Partea experimentală *)

După cum am amintit mai sus, experienţele executate au avut ca scop găsirea dependenţei dintre pierderea de presiune şi viteză la un curent de aer care traversează un strat de cereale.

Dispozitivul experimental a fost alcătuit dintr-un tub de secţiune dreptunghiulară (fig. 1) în interiorul căruia se află o zonă limitată de doi pereţi verticali permeabili (din plasă de sîrmă). Această zonă, prevăzută cu două orificii de umplere (A şi B) şi unul de golire (C), formează camera de experienţă (E).

Curentul de aer s-a realizat cu ajutorul unui ventilator centrifugal care debita aerul într-o cameră de uniformizare (L) situată în amonte de zona experimentală.

*) Această parte a lucrării a fost executată de tov. C. Popescu şi N. Cămărăşescu.

Pentru a se studia problema în condiții apropiate de cele reale, a fost necesar să se lucreze cu viteze de filtrare mici sub 1 m/s. Din lipsa unui alt aparat suficient de sensibil, măsurarea vitezelor s-a făcut cu ajutorul

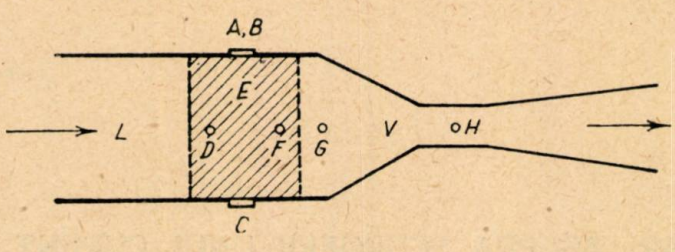


Fig. 1

unui tub Venturi (V) montat în aval de camera de experiență. Cele două prize de presiune statică ale tubului (G și H) au fost legate la un minimetru „Askania", realizîndu-se astfel determinarea vitezelor.

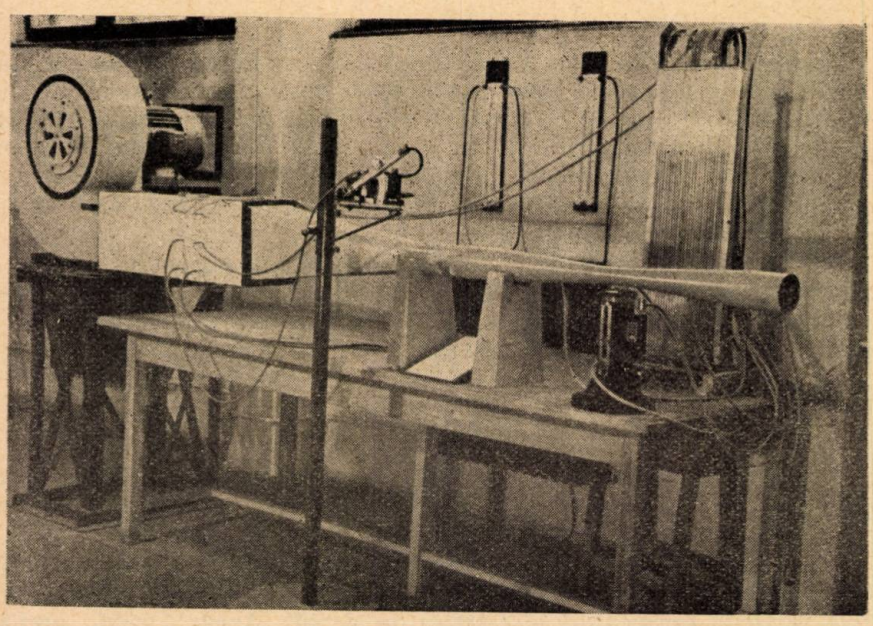


Fig. 2

Pierderea de presiune în stratul de cereale a fost citită direct pe scara unui micromanometru cu alcool legat la două prize (D și F) situate în peretele camerei de experiență la distanța de 110 mm între ele.

Variația vitezei a fost realizată cu ajutorul unei diafragme care permite modificarea suprafeței orificiului de aspirație al ventilatorului.

Ansamblul instalației este arătat în figura 2.

Experiențele au fost făcute cu grîu, porumb și mazăre, în straturi de 150 mm grosime. Rezultatele sînt prezentate în tabloul alăturat și în graficul din figura 3, unde s-a luat în abscisă viteza în metri pe secundă, iar în ordonată pierderea de presiune în mm coloană de apă.

Tablou

Rezultatele experiențelor

Grîu		Porumb		Mazăre	
V m/s	Δp mm	V m/s	Δp mm	V m/s	Δp mm
0,34	58,9	0,37	44,6	0,50	27,2
0,36	62	0,40	50	0,56	33,5
0,38	70,8	0,50	63,2	0,63	38
0,44	81	0,60	76,9	0,70	43,1
0,50	93	0,69	90	0,78	51,5
0,52	96,1	0,76	104,1	0,83	56
0,56	108	0,82	110,3	0,92	64,1
0,60	113,6	0,85	114,5	0,99	70
0,65	119	0,88	119	1,04	72,9
0,66	123,1	0,92	129,1	1,09	80
0,67	124,9	0,98	137,5	—	—
0,69	131	1,03	146	—	—
0,73	141,9	1,06	153,8	—	—
0,76	150	—	—	—	—

Calculul vitezelor a fost făcut luîndu-se pentru tubul Venturi coeficientul 0,93, valoare care a fost dedusă pe baza unor experiențe, executate anterior cu acesta. Valorile vitezelor trecute în tablou sînt cele corespunzătoare camerei de experiență (vitezele de filtrare).

După cum se poate observa din figura 3, rezultatele experiențelor indică pentru toate cele trei cazuri o dependență liniară a vitezei de filtrare de căderea de presiune, care poate fi exprimată deci cu ajutorul legii lui Darcy

$$v = \frac{k_f}{\gamma} \frac{\Delta p}{\Delta l}, \qquad (1)$$

k_f fiind coeficientul de filtrare, iar γ greutatea specifică a aerului. Acest rezultat permite un studiu teoretic al problemei cu ajutorul unor metode simple și bine cunoscute.

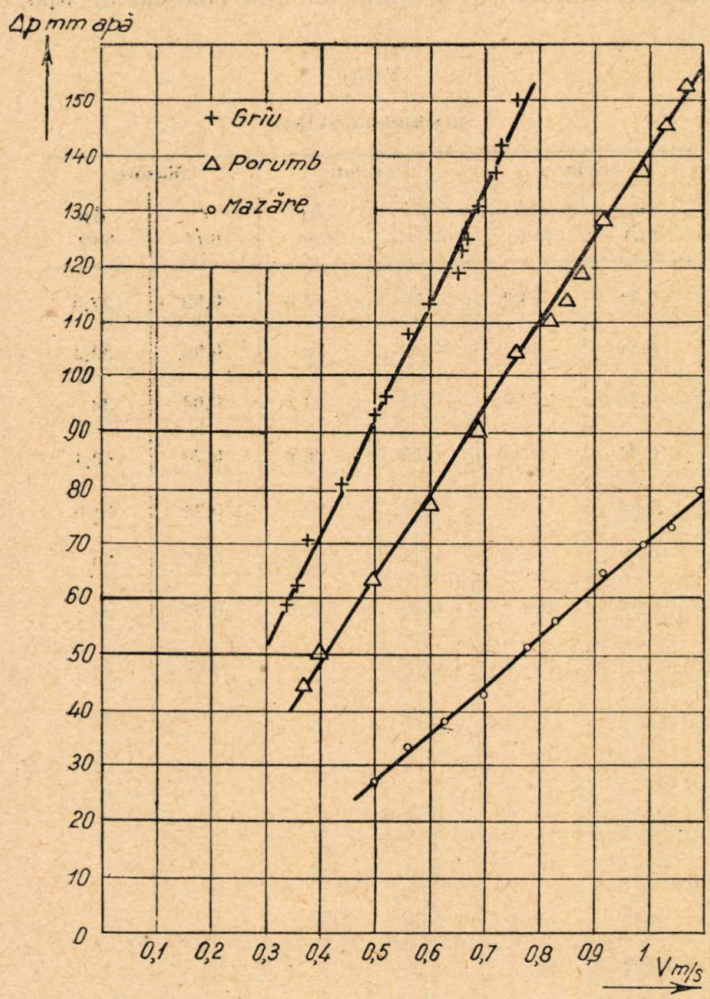


Fig. 3

B. Partea teoretică

Sub formă diferențială, legea lui Darcy poate fi scrisă

$$\bar{v} = -\frac{k_f}{\gamma} \nabla p \tag{2}$$

și se știe că în acest caz presiunea este o funcție armonică, analogă cu potențialul vitezelor din dinamica fluidelor ideale. Problema de care ne ocupăm poate fi atacată deci teoretic fără dificultăți de principiu.

Ca exemplu am considerat un strat de cereale de înălțime h, depozitat într-o încăpere paralelipipedică de lățime l și de lungime oarecare (fig. 4). Vom admite că ventilația se face prin fante dispuse pe toată lungimea camerei și anume în două moduri: *a*) pe axa de simetrie longitudinală a podelei (punctul O din figură) și *b*) la extremitățile laterale ale podelei (punctele $+\frac{l}{2}$ și $-\frac{l}{2}$ din figură).

În aceste condiții, fenomenul de scurgere este plan și putem considera camera ca avînd lungimea egală cu unitatea.

Mai departe, vom deosebi două cazuri, după cum avem $h \geqslant l$, respectiv $h < l$.

1. *Cazul* $h \geqslant l$. Cu ajutorul funcției

$$\frac{\zeta}{\alpha} = \sin \pi \frac{z}{l}, \qquad (3)$$

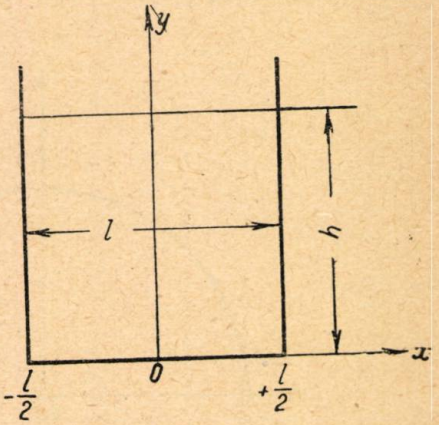


Fig. 4

fîșia dreptunghiulară semiinfinită din planul z se reprezintă pe semiplanul superior din planul ζ, punctele $+\frac{l}{2}$ și $-\frac{l}{2}$ corespunzînd respectiv cu punctele $+\alpha$ și $-\alpha$. Suprafața superioară a stratului de cereale, presupusă plană, se reprezintă în planul ζ pe semielipsa a cărei ecuație este

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \pi \frac{h}{l}} + \frac{\eta^2}{\alpha^2 \operatorname{sh}^2 \pi \frac{h}{l}} = 1, \qquad (4)$$

iar dacă $h = l$, avem $\operatorname{ch} \pi = 11{,}5891$ și $\operatorname{sh} \pi = 11{,}5419$, ceea ce arată că elipsa nu diferă mult de un cerc de rază $\rho_c = \alpha \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l}$ cu centrul în origine. Dacă $h > l$, această diferență devine din ce în ce mai mică, așa că pentru $h \geqslant l$ putem admite că linia suprafeței libere ($y = h$) se reprezintă pe semicercul de rază $\rho_c = \alpha \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l}$ din semiplanul superior ζ (fig. 5).

Să considerăm acum prima situație indicată mai sus și anume ventilația printr-o singură fantă centrală. Deoarece punctele O și ω se corespund, mișcarea din planul ζ va fi aceea datorită unei surse situate în origine. Într-adevăr, dacă introducem funcția

$$\varphi = -\frac{k_f}{\gamma} p, \qquad (5)$$

de unde rezultă

$$\bar{v} = \nabla \varphi \qquad (6)$$

și observăm că pe suprafața superioară a stratului de cereale domnește presiunea atmosferică p_c, funcția φ fiind deci constantă, urmează că și cercul de rază ρ_c din planul ζ este o curbă pe care funcția φ are aceeași valoare constantă $\varphi_c = -\frac{k_f}{\gamma} p_c$. Această condiție este însă îndeplinită

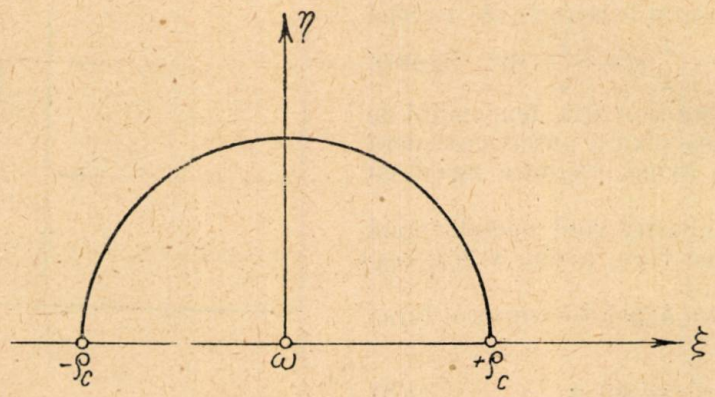


Fig. 5

de mișcarea indicată mai sus. Dacă notăm cu Q_r debitul de aer al instalației, sursa din planul ζ va avea debitul

$$Q = 2Q_r \tag{7}$$

și funcția φ este partea reală a potențialului complex

$$f(\zeta) = \frac{Q_r}{\pi} \log \frac{\zeta}{\varkappa}, \tag{8}$$

unde $\varkappa$ este o constantă reală.

Punînd

$$\zeta = \rho e^{i\theta}, \tag{9}$$

obținem

$$\varphi = \frac{Q_r}{\pi} \log \frac{\rho}{\varkappa}. \tag{10}$$

Să considerăm un cerc de rază foarte mică r_s, avînd centrul în origine în planul z. Din (3), separînd partea reală și partea imaginară, avem

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\alpha} &= \sin \pi \frac{x}{l} \operatorname{ch} \pi \frac{y}{l}, \\ \frac{\eta}{\alpha} &= \cos \pi \frac{x}{l} \operatorname{sh} \pi \frac{y}{l}. \end{aligned} \tag{11}$$

Pe cercul de rază r_s ($x^2 + y^2 = r_s^2$), x și y iau valori mici, cel mult egale cu r_s. În acest caz, putem scrie aproximativ

$$\frac{\xi}{\alpha} \approx \pi \frac{x}{l}, \quad \frac{\eta}{\alpha} \approx \pi \frac{y}{l}, \tag{12}$$

sau

$$\xi^2 + \eta^2 \approx \pi^2 \frac{\alpha^2}{l^2} r_s^2, \tag{13}$$

ceea ce înseamnă că cercul de rază r_s din planul z se reprezintă aproximativ pe cercul de rază $\rho_s = \pi \frac{\alpha}{l} r_s$, cu centrul de asemenea în origine, din planul ζ. Pe cercul de rază foarte mică r_s din planul z, putem admite că presiunea are valoarea constantă p_s (presiunea de alimentare). Rezultă de aici că pe cercul corespunzător de rază ρ_s din planul ζ funcția φ are valoarea constantă $\varphi_s = -\frac{k_f}{\gamma} p_s$. Ținînd seama de valorile constante ale funcției φ pe cercurile de rază ρ_c și ρ_s, găsim

$$\varphi_c - \varphi_s = \frac{Q_r}{\pi} \log \frac{\rho_c}{\rho_s}, \tag{14}$$

respectiv

$$p_s - p_c = \frac{\gamma Q_r}{\pi k_f} \log \frac{\rho_c}{\rho_s}. \tag{15}$$

În cele din urmă, ținînd seama de expresiile razelor ρ_c și ρ_s, avem

$$p_s - p_c = \frac{\gamma Q_r}{\pi k_f} \log \frac{\operatorname{ch} \pi \frac{h}{l}}{\pi \frac{r_s}{l}} \tag{16}$$

și

$$Q_r = \pi \frac{k_f}{\gamma} \frac{p_s - p_c}{\log \frac{\operatorname{ch} \pi \frac{h}{l}}{\pi \frac{r_s}{l}}}. \tag{17}$$

Formulele (16) și (17) servesc la calculul presiunii de alimentare p_s pentru un debit Q_r dat și la calculul debitului Q_r pentru o presiune de alimentare dată. Valoarea efectivă a razei r_s depinde de lățimea fantei de alimentare.

Pentru calculul vitezelor, se poate utiliza expresia funcției φ găsită după eliminarea constantei $\varkappa$ și anume:

$$\varphi = \frac{Q_r}{\pi} \log \frac{\rho}{\rho_c} + \varphi_c. \tag{18}$$

Să trecem acum la a doua situație și anume aceea a ventilației prin fante așezate în punctele $+\frac{l}{2}$ și $-\frac{l}{2}$ (fig. 4). Admițînd că aceste fante sînt mici le vom asimila cu surse punctiforme. Prin reprezentarea conformă (3), aceste surse pozitive se vor găsi în planul ζ în punctele $+\alpha$ și $-\alpha$ de pe axa $\omega\xi$ (fig. 6).

Admițînd ca și mai înainte că linia suprafeței libere ($y = h$) se reprezintă pe cercul de rază $\rho_c = \alpha \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l}$, acest cerc este linie de egal poten-

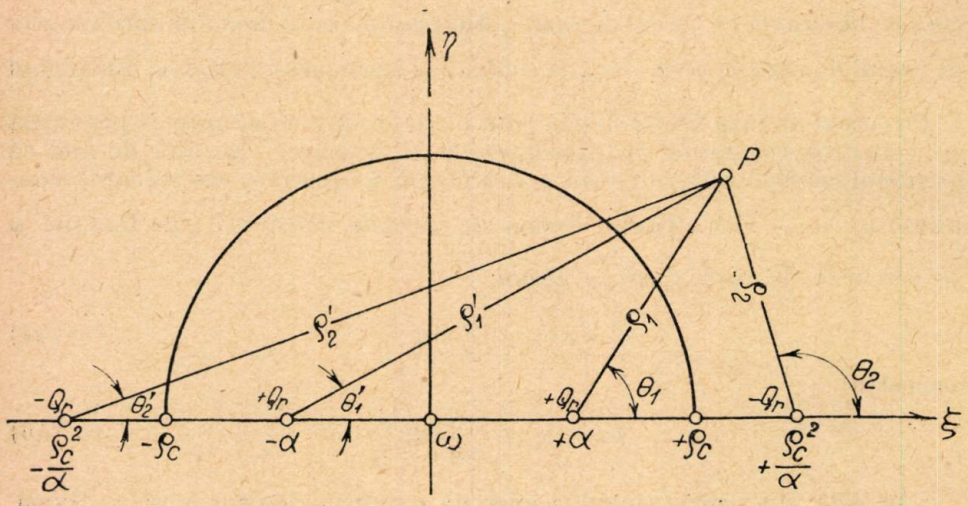


Fig. 6

țial dacă introducem sursele imagini negative, de același debit cu sursele date, situate în punctele $+\frac{\rho_c^2}{\alpha}$ și $-\frac{\rho_c^2}{\alpha}$ (fig. 6).

Să considerăm mai întîi sursa pozitivă situată în punctul $+\alpha$ și sursa negativă imagine a acesteia, așezată în punctul $+\frac{\rho_c^2}{\alpha}$. Potențialul complex al acestui sistem este

$$f(z) = \frac{Q_r}{\pi} \log \varkappa \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \frac{\rho_c^2}{\alpha}}, \tag{19}$$

$\varkappa$ fiind o constantă reală. Punînd

$$\zeta - \alpha = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad \zeta - \frac{\rho_c^2}{\alpha} = \rho_2 e^{i\theta_2}, \tag{20}$$

obținem

$$\varphi = \frac{Q_r}{\pi} \log \varkappa \frac{\rho_1}{\rho_2}, \tag{21}$$

Liniile de egal potențial, care sînt cercuri, au ecuația

$$\xi^2 + \eta^2 + 2 \frac{\frac{\rho_c^2}{\alpha} \frac{C^2}{\varkappa^2} - \alpha}{1 - \frac{C^2}{\varkappa^2}} \xi + \frac{\alpha^2 - \frac{\rho_c^4}{\alpha^2} \frac{C^2}{\varkappa^2}}{1 - \frac{C^2}{\varkappa^2}} = 0, \tag{22}$$

C fiind o constantă variabilă.

Pentru cercul de rază ρ_c cu centrul în origine (fig. 6) rezultă

$$C = \varkappa \frac{\alpha}{\rho_c}, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\alpha}{\rho_c}. \tag{23}$$

Se observă că pentru $C = 0$, cercul (22) se reduce la punctul $(+\alpha, 0)$; prin urmare, un cerc de rază foarte mică ρ_s, va avea centrul într-un punct foarte apropiat de $(+\alpha, 0)$ și va corespunde unei valori foarte mici a constantei C. Dacă punem pentru cercul de rază ρ_s

$$C = \frac{\varkappa}{\lambda} \frac{\alpha}{\rho_c}, \tag{24}$$

λ fiind o constantă, din (22) obținem

$$\rho_s = \rho_c \frac{1 - \frac{\alpha^2}{\rho_c^2}}{\lambda - \frac{\alpha^2}{\lambda \rho_c^2}} \tag{25}$$

și se observă că putem alege pe λ așa fel ca ρ_s să reprezinte o mică fracțiune din ρ_c. Pe cercul de rază ρ_s avem prin urmare

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\alpha}{\rho_c} \tag{26}$$

și dacă admitem că pe cercul de rază ρ_s funcția φ are valoarea constantă φ_s, acest cerc fiind tot o linie de egal potențial, prin eliminarea constantei $\varkappa$ găsim

$$\varphi_c - \varphi_s = \frac{Q_r}{\pi} \log \lambda, \tag{27}$$

respectiv

$$p_s - p_c = \frac{\gamma Q_r}{\pi k_f} \log \lambda. \tag{28}$$

Parametrul λ care intervine în această expresie rezultă din (25) sub forma

$$\lambda = \frac{\rho_c - \frac{\alpha^2}{\rho_c} + \sqrt{\left(\rho_c - \frac{\alpha^2}{\rho_c}\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\rho_s^2}{\rho_c}}}{2\rho_s}. \tag{29}$$

Raza ρ_c fiind cunoscută, vom căuta să definim pe ρ_s. În acest scop, să considerăm în planul z un cerc de rază mică r_s cu centrul în punctul $+\frac{l}{2}$ de pe axa Ox. Acest cerc se reprezintă aproximativ în planul ζ pe cercul de rază $\alpha\,(\mathrm{ch}\,\pi \frac{r_s}{l} - 1)$ cu centrul în punctul $(+\alpha, 0)$. Putem admite de

asemenea că acest cerc este foarte apropiat de acela a cărui rază este definită de (25) și prin urmare putem lua

$$\rho_s = \alpha\left(\operatorname{ch}\pi\frac{r_s}{l} - 1\right), \tag{30}$$

iar din (29) rezultă, ținînd seama și de expresia lui ρ_c,

$$\lambda = \frac{\operatorname{sh}^2\pi\frac{h}{l} + \sqrt{\operatorname{sh}^4\pi\frac{h}{l} + 4\left(\operatorname{ch}\pi\frac{r_s}{l} - 1\right)^2}}{2\operatorname{ch}\pi\frac{h}{l}\left(\operatorname{ch}\pi\frac{r_r}{l} - 1\right)}. \tag{31}$$

Raportul $\frac{r_s}{l}$ fiind mic, putem neglija termenul al doilea de sub radicali obținînd astfel pentru λ următoarea expresie aproximativă

$$\lambda = \frac{\operatorname{sh}\pi\frac{h}{l}\operatorname{th}\pi\frac{h}{l}}{\operatorname{ch}\pi\frac{r_s}{l} - 1}. \tag{32}$$

Formulele pentru calculul pierderii de presiune și al debitului sînt deci

$$p_s - p_c = \frac{\gamma Q_r}{\pi k_f}\log\frac{\operatorname{sh}\pi\frac{h}{l}\operatorname{th}\pi\frac{h}{l}}{\operatorname{ch}\pi\frac{r_s}{l} - 1}, \tag{33}$$

respectiv

$$Q_r = \pi\frac{k_f}{\gamma}\frac{p_s - p_c}{\log\dfrac{\operatorname{sh}\pi\frac{h}{l}\operatorname{th}\pi\frac{h}{l}}{\operatorname{ch}\pi\frac{r_s}{l} - 1}}. \tag{34}$$

Calculele absolut analoge se fac și pentru sursa pozitivă situată în punctul $-\alpha$, formulele finale fiind identice cu (33) și (34). Dacă sursele funcționează în același timp (ventilație prin ambele fante), rezultatele se însumează.

2. *Cazul* $h < l$. În acest caz, nu mai putem face afirmația de a admite că linia suprafeței libere se reprezintă pe un cerc și trebuie să recurgem la o completare a soluției indicate mai sus.

Funcția (3) reprezintă linia suprafeței libere ($y = h$) pe semielipsa (4). Mai departe această semielipsă se reprezintă pe semicercul de rază R_c din semiplanul superior Z cu ajutorul funcției [1]

$$\frac{Z}{R_c} = k^{\frac{1}{2}}\operatorname{sn}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{arc\,sin}\frac{\zeta}{\alpha}, k\right) \tag{35}$$

și dacă ținem seama de (3), găsim reprezentarea directă a domeniului din planul z pe semicercul din planul Z, funcția respectivă fiind

$$\frac{Z}{R_c} = k^{\frac{1}{2}}\operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{z}{l}, k\right). \tag{36}$$

În această expresie, avem

$$\mu = \frac{\pi}{2K}, \tag{37}$$

iar perioadele $4K$ și $2iK'$ ale funcției eliptice de modul k, care intervine în această reprezentare sînt date de relația

$$\frac{K}{K'} = \frac{l}{4h}. \tag{38}$$

Să considerăm ca și mai înainte un cerc de rază mică r_s cu centrul în origine în planul z. Punctul $z = r_s$ în care acest cerc intersectează axa Ox, corespunde în planul Z cu punctul

$$Z = R_c k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k\right), \tag{39}$$

de pe axa OX. De asemenea, punctul $z = ir_s$ în care cercul intersectează axa Oy, corespunde în planul Z cu punctul

$$Z = R_c k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}\left(i\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k\right) = iR_c k^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k'\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k'\right)}, \tag{40}$$

k' fiind modulul complimentar. Dacă raportul $\frac{r_s}{l}$ este mic, $\operatorname{cn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k'\right)$ are o valoare apropiată de unitate, iar $\operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k\right)$ și $\operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k'\right)$ sînt aproape egale. Putem deci admite că semicercul de rază r_s din semiplanul superior z se reprezintă aproximativ pe semicercul de rază

$$R_s = R_c k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k\right), \tag{41}$$

din semiplanul superior Z.

Presupunînd că ventilația se face printr-o fantă centrală asimilată cu o sursă, cercurile de rază R_c și R_s sînt linii de egal potențial pe care funcția φ are valorile φ_c, respectiv φ_s. Aplicînd formula (14) găsim

$$\varphi_c - \varphi_s = \frac{Q_r}{\pi} \log \frac{R_c}{R_s}, \tag{42}$$

și dacă ținem seama de rezultatele precedente, avem

$$p_s - p_c = \frac{\gamma Q_r}{\pi k_f} \log \frac{1}{k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k\right)}, \tag{43}$$

$$Q_r = \pi \frac{k_f}{\gamma} \frac{p_s - p_c}{\log \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{\mu}\frac{r_s}{l}, k\right)}} \tag{44}$$

Considerații analoge pot fi făcute și pentru celălalt caz de care ne-am ocupat mai înainte.

3. *Observații.* În formulele deduse mai sus, intervine coeficientul de filtrare k_f. Valoarea acestuia poate fi dedusă din formula (1), utilizînd rezultatele experiențelor executate. De asemenea, în formule apare parametrul r_s a cărui valoare depinde de dimensiunile și de aspectul constructiv al fantelor de ventilație.

Primit la redacție la 28 decembrie 1955

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОТЕКАНИЯ ВОЗДУШНОЙ СТРУИ СКВОЗЬ СЛОЙ ЗЕРНА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОВЕТРИВАНИЮ ЗЕРНА В СИЛОСАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье опытным путем определяется соотношение между потерей давления и скоростью воздушной струи, проходящей сквозь слой зерна. Результаты опытов показывают, что при малых скоростях эта зависимость является линейной, что приводит вновь к закону Дарси.

Затем на основании опытов рассматриваются несколько случаев, могущих встретиться на практике, и выводятся формулы для определения потерь давления и дебитов.

RECHERCHES SUR L'ÉCOULEMENT D'UN COURANT D'AIR À TRAVERS UNE COUCHE DE CÉRÉALES. APPLICATIONS À LA VENTILATION DES CÉRÉALES EN SILOS

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur expose les résultats des expériences effectuées en vue de déterminer la relation entre la perte de pression et la vitesse d'un courant d'air qui traverse une couche de céréales. Les résultats expérimentaux montrent que pour les petites vitesses d'écoulement cette dépendance est linéaire ; elle correspond donc à la loi de Darcy.

Ensuite, l'auteur traite quelques cas qui pourraient intervenir dans les applications et trouve des formules pour les pertes de pression et les débits d'écoulement.

BIBLIOGRAFIE

1 E. Carafoli și T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1955, vol. II, p. 145.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956.

AEROMECANICĂ

STABILITATEA DINAMICĂ ÎN ZBOR VERTICAL ASCENDENT ŞI LA PUNCT FIX, A DOUĂ TIPURI FRECVENTE DE ELICOPTER

DE

AL. MARINESCU

NOTAŢII

$Oxyz$, sistem de axe de coordonate legat de corpul elicopterului;
R_e, R, raza elicei respectiv a rotorului;
r, raza unui element de pală faţă de axul de rotaţie;
h, distanţa centrului de greutate faţă de planul articulaţiilor;
H_1, distanţe ale rotoarelor faţă de centrul de greutate;
H, s, distanţe ale axului elicei anticuplu faţă de centrul de greutate al elicopterului;
d, distanţa punctului neutru faţă de planul articulaţiilor;
a, distanţa articulaţiilor faţă de axul de rotaţie;
l_p, profunzimea palei (constantă);
V_0, viteza de deplasare a elicei sau rotorului în direcţia axului lor de rotaţie;
w, viteza indusă;
V_x, V_y, V_z, viteze de translaţie a elicopterului în direcţiile axelor x, y, z;
ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z, perturbaţiile vitezelor de translaţie în direcţiile x, y, z;
Ω_x, Ω_y, Ω_z, viteze de rotaţie a elicopterului în jurul axelor x, y, z;
$\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, $\Delta\Omega_z$, perturbaţii ale vitezelor de rotaţie în jurul axelor x, y, z;
ω, viteza unghiulară a rotorului care se consideră menţinută constantă;
ω', viteza unghiulară a elicei anticuplu;
U_e, U, viteza periferică a palei elicei respectiv a rotorului;
R_t, forţa rezultantă a rotorului;
$T = \frac{\rho}{2}\pi R^2 U^2 C_T$, tracţiunea;
R_x, R_y, R_z, forţe aerodinamice în direcţia axelor x, y, z;
G_x, G_y, G_z, componente ale greutăţii de-a lungul axelor x, y, z;
M_x, M_y, M_z, momente ale forţelor aerodinamice în jurul axelor x, y, z;
φ_x, φ_y, φ_z, unghiuri de poziţie a axelor x, y, z faţă de direcţia verticalei;
$\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$, $\Delta\varphi_z$, perturbaţii ale unghiurilor de poziţie;
θ_0, unghiul de aşezare al profilului palei rotorului;
λ, grad de permeabilitate al rotorului =

$$= \frac{\text{viteza aerului paralelă cu axul rotorului}}{\text{viteza periferică a palei}};$$

$$\Lambda_0 = \frac{V_0}{\omega' R_e}; \quad \Lambda = \frac{V_0}{\omega R};$$

β^*, așezarea la vîrful palei;

$x = \frac{r'}{R}$;

$\zeta = \frac{h}{R}$;

$S = 0{,}7$, $\tau = \frac{z\, l_{07}}{8\, R_e}$;

$C_a' = \frac{dC_z}{d\alpha}$, panta curbei de portanță a profilului palei;

C_z, coeficientul de portanță al profilului palei;
C_x, coeficientul rezistenței totale a profilului palei;
C_{T0}, C_T, coeficientul de tracțiune al elicei respectiv al rotorului;
G_{d0}, C_d, coeficient de moment rezistent al elicei respectiv al rotorului;
I_x, I_y, I_z, momente de inerție ale elicopterului față de axele x, y, z;
I, momentul de inerție al palei față de un ax trecînd prin $r = a$;
m_p, masa palei pe unitate de lungime;

$\gamma = \frac{\rho C_a' t_p R^4}{2 I}$, constanta masei palei;

ρ, densitatea;
t, timpul.

$\widehat{h = h + d}$

În două lucrări anterioare [1], [2] ne-am ocupat de stabilitatea dinamică a elicopterului cu un singur rotor antrenat prin jet, și de a celui cu rotoare coaxiale contrarotative.

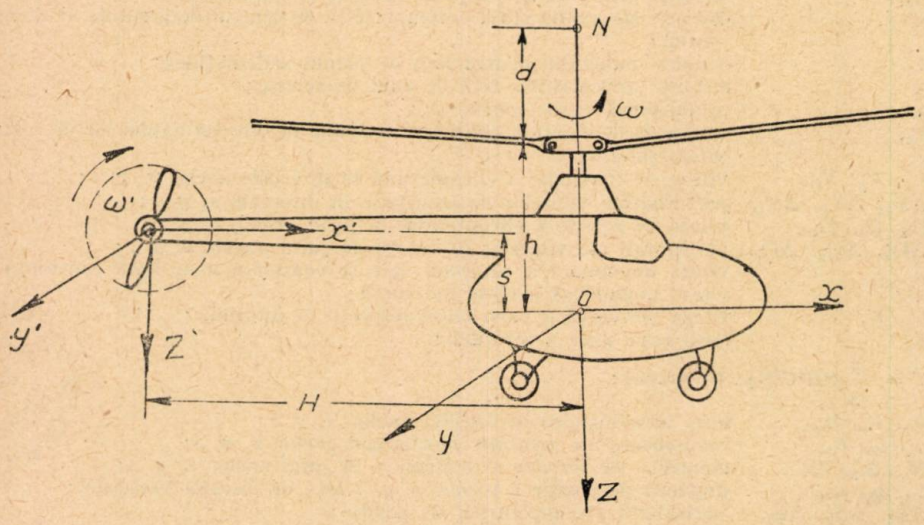


Fig. 1

Bazîndu-ne pe lucrările de mai sus și pe anumite rezultate ale lui F. Weinig [3] perfecționate de B. Schlippe și R. Dietrich [4] cu privire la aerodinamica elicei de avion, vom studia în lucrarea de față stabilitatea dinamică, în zbor vertical ascendent și la punct fix, a

elicopterului cu un singur rotor şi elice anticuplu, figura 1, precum şi a elicopterului cu două rotoare în tandem contrarotative, figura 2.

Elicopterele în cauză se presupun fără ampenaje avînd rotoare cu pale fără torsiune, dublu articulate.

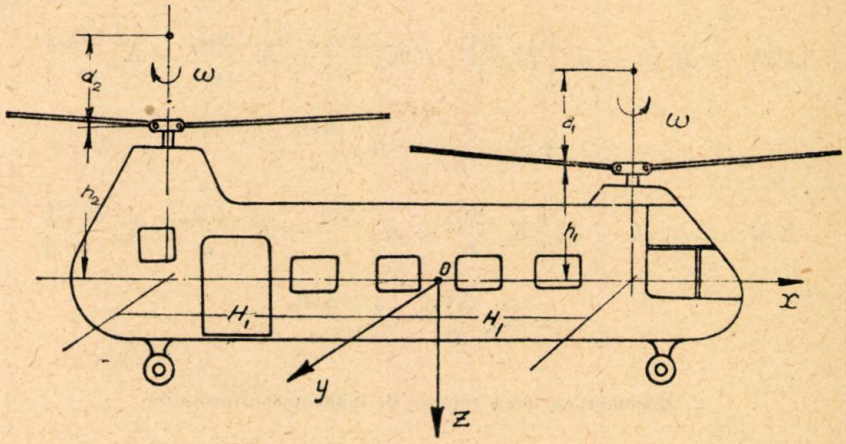


Fig. 2

I. CÎTEVA CONSIDERAŢII PRIVIND AERODINAMICA ROTORULUI ŞI A ELICEI ANTICUPLU

In cele ce urmează vom stabili perturbaţiile reacţiunilor aerodinamice datorite rotorului, respectiv elicei anticuplu funcţie de perturbaţiile vitezelor.

Presupunînd că în cazul elicopterului cu două rotoare în tandem acestea nu se influenţează reciproc, fiecăruia dintre ele i se vor aplica rezultatele unui rotor izolat.

După cum am indicat în [1] perturbaţiile reacţiunilor aerodinamice le vom determina ca funcţii liniare faţă de perturbaţiile vitezelor, aşa că dacă vom cunoaşte expresiile coeficienţilor mişcării de bătaie a palelor a căror interpretare am arătat-o, determinarea perturbaţiilor reacţiunilor este imediată.

Ca urmare a deplasării elicopterelor de care ne ocupăm, în direcţia axelor x, y, z, cu vitezele ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z, respectiv a rotirii acestora în jurul aceloraşi axe cu vitezele unghiulare $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, $\Delta\Omega_z$ se obţin în condiţiile zborului perturbat lăsînd de o parte acele relaţii care conduc vizibil la amortizări aperiodice, următoarele reacţiuni:

1. Elicopter cu un singur rotor şi elice anticuplu

$$\Delta R_x = R_t\left\{-K_1\frac{\Delta V_x}{U} - K_2\frac{\Delta V_y}{U} + K_1'\frac{\Delta\Omega_y}{\omega} - K_2'\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\} - \qquad (1)$$

$$- K_{1e}\frac{\Delta V_x}{U} + \bar{K}_{1e}\frac{\Delta\Omega_x}{\omega},$$

$$\Delta R_y = R_t \left\{ -K_1 \frac{\Delta V_y}{U} + K_2 \frac{\Delta V_x}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - K_2' \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\},$$

$$\Delta R_z = -\frac{\gamma}{6} \lambda B^3 M_p \omega^2 \frac{\Delta V_z}{U} - K_{1e} \frac{\Delta V_z}{U},$$

$$\Delta M_x = R_t (h + d) \left\{ K_1 \frac{\Delta V_y}{U} + K_2 \frac{\Delta V_x}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - K_2' \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\}$$

$$+ K_{2e} \frac{\Delta V_x}{U} - \bar{K}_{2e} \frac{\Delta \Omega_x}{\omega},$$

$$\Delta M_y = R_t (h + d) \left\{ K_1 \frac{\Delta V_x}{U} + \bar{K}_2 \frac{\Delta V_y}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} + K_2' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\}$$

$$+ K_{1e}' \frac{\Delta V_z}{U} - K_{1e}'' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega}.$$

2. Elicopter cu două rotoare în tandem contrarotative

$$\Delta R_x = -2 R_t K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U},$$

$$\Delta R_y = -2 R_t K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} - R_t \bar{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - R_t \bar{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega},$$

$$\Delta M_x = R_t (h_1 + d_1) \left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} - \bar{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} +$$

$$+ R_t (h_2 + d_2) \left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} - \bar{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\}, \qquad (2)$$

$$\Delta M_y = R_t (h_1 + d_1) K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U} + R_t (h_2 + d_2) K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U} -$$

$$\rho U^2 z C_a' t_p \frac{B^3}{3} H_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega}.$$

În relațiile (1) și (2) avem respectiv

$$R_t = z \omega^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\lambda}{3} B^3 + \frac{\theta_0}{4} B^4 \right) \int_0^R m_p r dr,$$

$$K_1 = 2 \left(\frac{4}{3} \theta_0 + \lambda \right),$$

$$K_1' = 2 \zeta \left(\frac{4}{3} \theta_0 + \lambda \right),$$

$$K_2 = \frac{2}{3} \gamma \left(\frac{\lambda}{3} B^3 + \frac{\theta_0}{4} B^4 \right),$$

$$K_2' = \frac{2}{3}\gamma\zeta\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right),$$

$$K_{1e} = \frac{\rho}{2}U_e^2\,\pi R_e^2 B^\star \frac{U}{U_e} C_{d0}\,, \tag{3}$$

$$\overline{K}_{1e} = \frac{\rho}{4}U_e^2\,\pi R_e^2 \frac{\omega}{\omega'}\left|\frac{\mathrm{d}Cd_0}{\mathrm{d}\Lambda_0}\right|_{\Lambda_0=0},$$

$$K_{1e}' = \frac{\rho}{2}U_e^2\,\pi R_e^3 B^\star \frac{U}{U_e} H\, C_{d0}\,,$$

$$K_{1e}'' = \frac{\rho}{2}U_e^2\,\pi R_e^2 B^\star s \frac{U}{U_e} C_{d0}\,,$$

$$K_{2e} = \frac{\rho}{2}U_e^2\,\pi R_e^3 \frac{U}{U_e} C_{T0}\,,$$

$$\overline{K}_{2e} = \rho\, U_e^2\,\pi R_e^3 \frac{\omega}{\omega'} C\left|\frac{\mathrm{d}C_{T0}}{\mathrm{d}\Lambda_0}\right|_{\Lambda_0=0},$$

$$B^\star = 2 + \frac{0{,}4}{\beta^\star},$$

și

$$K_1^1 = K_1 = 2\left(\frac{4}{3}\theta_0 + \lambda\right), \tag{4}$$

$$\overline{K}_1^1 = 2\zeta_1\left(\frac{4}{3}\theta_0 + \lambda\right),$$

$$\overline{K}_1^2 = 2\zeta_2\left(\frac{4}{3}\theta_0 + \lambda\right),$$

unde

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{R}\,,\quad \zeta_2 = \frac{h_2}{R}\,.$$

În relațiile (3) și (4) gradul de permeabilitate λ și așezarea θ_0 pentru zbor vertical ascendent se deduc din următoarele formule:

$$\lambda = \frac{V_0}{2\omega R}\left\{\sqrt{1 + \frac{C_T}{\overline{\Lambda}^2}} + 1\right\}, \tag{5}$$

$$C_T = \frac{z\,C_a'\,t_p}{\pi R}\left[\theta_0 - \lambda\right]\int_{\frac{a}{R}}^{B} x^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

Pentru punct fix

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{C_T}\,, \tag{7}$$

așezarea θ_0 satisfăcînd o relație identică cu (6) cu care λ este dat de (7).

În ce privește $\left|\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right|_{\Lambda_0=0}$ și $\left|\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0}\right|_{\Lambda_0=0}$, acestea au expresiile [4]

$$\left|\frac{dC_{T0}}{d\Lambda_0}\right|_{\Lambda_0=0} = -\frac{4S^2\tau}{\pi}\left(\frac{\frac{dC_z}{d\alpha}}{2+\frac{1}{C_z}\frac{dC_z}{d\alpha}\sqrt{\frac{\tau C_z}{\pi}}}+C_x\right), \tag{8}$$

$$\left|\frac{dC_{d0}}{d\Lambda_0}\right|_{\Lambda_0=0} = \frac{4S^2\tau}{\pi}\cdot\frac{1-\frac{1}{C_z}\frac{dC_z}{d\alpha}\sqrt{\frac{\tau C_z}{\pi}}}{2+\frac{1}{C_z}\frac{dC_z}{d\alpha}\sqrt{\frac{\tau C_z}{\pi}}}\cdot C_z\cdot \tag{9}$$

Cu aceste precizări, reacțiunile aerodinamice în condițiile zborului perturbat pot fi determinate, natural cînd datele constructive ale aerodinei sînt cunoscute.

II. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRILOR PERTURBATE

Dacă $\bar{V}$ (V_x, V_y, V_z) este viteza centrului de greutate a elicopterului, iar $\bar{\Omega}$ $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ rotația sa instantanee, notînd cu $\bar{R}(R_x, R_y, R_z)$ rezultanta forțelor aerodinamice, cu $\bar{M}(M_x, M_y, M_z)$ momentul rezultant, cu $\bar{G}(G_x, G_y, G_z)$ greutatea și cu $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ accelerația unui element de masă Δm al elicopterului situat la distanța $\bar{\rho}(x, y, z)$ de origina O a sistemului $xOyz$, ecuațiile mișcării neperturbate sînt*)

$$\Sigma\bar{a}\Delta m = \bar{R} + \bar{G}, \tag{10}$$

$$\Sigma\,[\bar{a}\times\bar{\rho}]\Delta m + \bar{M}_0 = \bar{M}, \tag{11}$$

cărora le asociem ecuația vectorială

$$\frac{d\bar{G}}{dt} + \bar{\Omega}\times\bar{G} = 0, \tag{12}$$

echivalentă cu 3 ecuații scalare din care reținem numai două.

Pentru mișcarea de bază (zbor vertical ascendent) definită de soluțiile sistemului (10), (11) și (12)

$$\begin{gathered} V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = -V_0 \\ \Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = 0, \\ \varphi_x = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_y = \frac{\pi}{2}, \end{gathered} \tag{13}$$

reținînd numai termenii cei mai importanți se obțin următoarele ecuații ale mișcării perturbate respectiv pentru cele două tipuri de elicoptere.

*) Contribuția mișcării relative a rotorului este introdusă în (11) prin $\bar{M}_0\left[h\,R_t\frac{8}{\gamma}\cdot\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\,hR_t\frac{8}{\gamma}\cdot\frac{\Delta\Omega_y}{\omega},0\right]$.

1. Elicopter cu un singur rotor și elice anticuplu

a) Longitudinal

$$\frac{d\Delta V_x}{dt} = \frac{g}{G} R_t \left\{ -K_1 \frac{\Delta V_x}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} - \frac{g}{G} K_{1e} \frac{\Delta V_x}{U} + V_0 \Delta \Omega_y - g \Delta \varphi_y ,$$

$$\frac{d\Delta V_z}{dt} = -\frac{g}{G} \frac{\gamma}{6} z M_\beta \omega^2 B^3 \frac{\Delta V_z}{U} - \frac{g}{G} K_{1e} \frac{\Delta V_z}{U}, \tag{14}$$

$$\frac{d\Delta \Omega_y}{dt} = \frac{h+d}{I_y} R_t \left\{ K_1 \frac{\Delta V_x}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} + \frac{K'_{1e}}{I_y} \frac{\Delta V_z}{U} - \frac{8 h R_t}{\gamma I_y} \frac{\Delta \Omega_y}{\omega},$$

$$\frac{d\Delta \varphi_y}{dt} = \Delta \Omega_y .$$

b) Lateral

$$\frac{d\Delta V_y}{dt} = \frac{g}{G} R_t \left\{ -K_1 \frac{\Delta V_y}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} - V_0 \Delta \Omega_x + g \Delta \varphi_x ,$$

$$\frac{d\Delta \Omega_x}{dt} = \frac{h+d}{I_x} R_t \left\{ -K_1 \frac{\Delta V_y}{U} - K_1' \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} - \frac{\bar{K}_{2e}}{I_x} \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - \frac{8 \bar{h} R_t}{\gamma I_x} \frac{\Delta \Omega_x}{\omega}, \tag{15}$$

$$\frac{d\Delta \varphi_x}{dt} = \Delta \Omega_x .$$

2. Elicopter cu două rotoare în tandem contrarotative

a) Longitudinal

$$\frac{d\Delta V_x}{dt} = -2 \frac{g}{G} R_t K_1' \frac{\Delta V_x}{U} + V_0 \Delta \Omega_y - g \Delta \varphi_y ,$$

$$\frac{d\Delta \Omega_y}{dt} = \frac{h_1 + d_1}{I_y} R_t K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U} + \frac{h_2 + d_2}{I_y} R_t K_1^1 \frac{\Delta V_x}{U} -$$

$$- \rho U^2 z C_a' t_p \frac{B^3}{3} H_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} - \frac{8 \bar{h}_1 R_t}{\gamma I_y} \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} - \frac{8 \bar{h}_2 R_t}{\gamma I_y} \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \tag{16}$$

$$\frac{d\Delta \varphi_y}{dt} = \Delta \Omega_y .$$

b) Lateral

$$\frac{d\Delta V_y}{dt} = \frac{g}{G} R_t \left\{ -2 K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} - \bar{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - \bar{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} - V_0 \Delta \Omega_x + g \Delta \varphi_x ,$$

$$\frac{d\Delta \Omega_x}{dt} = \frac{h_1 + d_1}{I_x} R_t \left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} - \bar{K}_1^1 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + \tag{17}$$

$$+ \frac{h_2 + d_2}{I_x} R_t \left\{ -K_1^1 \frac{\Delta V_y}{U} - \bar{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} - \frac{8 \bar{h}_1 R_t}{\gamma I_x} \cdot \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - \frac{8 \bar{h}_2 R_t}{\gamma I_x} \cdot \frac{\Delta \Omega_x}{\omega},$$

$$\frac{d\Delta \varphi_x}{dt} = \Delta \Omega_x ,$$

Introducînd notațiile adimensionale

$$\frac{\Delta V_x}{U} = \overline{\Delta V}_x, \quad \frac{\Delta V_y}{U} = \overline{\Delta V}_y, \quad \frac{\Delta V_z}{U} = \overline{\Delta V}z,$$

$$\frac{\Delta \Omega_x}{\omega} = \overline{\Delta \Omega}_x, \quad \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} = \overline{\Delta \Omega}_y, \quad \bar{t} = \frac{g}{U} t, \tag{18}$$

$$\bar{I}_x = \frac{gI_x}{GR^2}, \quad \bar{I}_y = \frac{gI_y}{GR^2}, \quad \frac{U\omega}{g} = \sigma, \quad \frac{V_0\omega}{g} = \sigma',$$

sistemele (14) și (15) devin

$$\frac{d\overline{\Delta V}_x}{d\bar{t}} = \alpha_1 \overline{\Delta V}_x - \alpha_2 \overline{\Delta V}_x - \alpha_3 \overline{\Delta \Omega}_y + \sigma' \overline{\Delta \Omega}_y - \Delta \bar{\varphi}_y,$$

$$\frac{d\overline{\Delta V}_z}{d\bar{t}} = -\alpha_4 \overline{\Delta V}_z - \alpha_2 \overline{\Delta V}_z, \tag{19}$$

$$\frac{d\overline{\Delta \Omega}_y}{d\bar{t}} = \underset{1}{\beta} \overline{\Delta V}_x + \underset{2}{\beta} \overline{\Delta V}_z - \underset{3}{\beta} \overline{\Delta \Omega}_y - \underset{4}{\beta} \overline{\Delta \Omega}_y,$$

$$\frac{d\overline{\Delta \varphi}_y}{d\bar{t}} = \sigma \overline{\Delta \Omega}_y,$$

și

$$\frac{d\overline{\Delta V}_y}{d\bar{t}} = -\alpha_1 \overline{\Delta V}_y - \alpha_3 \overline{\Delta \Omega}_x - \sigma' \overline{\Delta \Omega}_x + \overline{\Delta \varphi}_x,$$

$$\frac{d\overline{\Delta \Omega}_x}{d\bar{t}} = -\underset{5}{\beta} \overline{\Delta V}_y - \underset{6}{\beta} \overline{\Delta \Omega}_e - \underset{7}{\beta} \overline{\Delta \Omega}_x - \underset{8}{\beta} \overline{\Delta \Omega}_x, \tag{20}$$

$$\frac{d\overline{\Delta \varphi}_x}{d\bar{t}} = \sigma \overline{\Delta \Omega}_x,$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{R_t}{G} K_1, \quad \alpha_2 = \frac{K_{1e}}{G}, \quad \alpha_3 = \frac{R_t}{G} K_1', \quad \alpha_4 = \frac{zM_p\omega^2\gamma B^3}{6G},$$

$$\underset{1}{\beta} = \frac{U(h+d)R_t}{\bar{I}_y GR^2\omega} K_1; \quad \underset{2}{\beta} = \frac{UK'_{1e}}{\bar{I}_y GR^2\omega};$$

$$\underset{3}{\beta} = \frac{U(h+d)R_t}{\bar{I}_y GR^2\omega} K_1'; \quad \underset{4}{\beta} = \frac{8UhR_t}{\bar{I}_y GR^2\omega\gamma}; \tag{21}$$

$$\underset{5}{\beta} = \frac{U(h+d)R_t}{\bar{I}_x GR^2\omega} K_1; \quad \underset{6}{\beta} = \frac{U(h+d)R_t}{\bar{I}_x GR^2\omega} K_1';$$

$$\underset{7}{\beta} = \frac{U\bar{K}_{2e}}{\bar{I}_x GR^2\omega}; \quad \underset{8}{\beta} = \frac{8hR_t U}{\bar{I}_x GR^2\omega\gamma};$$

iar (16) și (17)

$$\frac{d\overline{\Delta V}_x}{d\bar{t}} = -2\alpha_1 \overline{\Delta V}_x + \sigma' \overline{\Delta\Omega}_y - \overline{\Delta\varphi}_y;$$

$$\frac{d\overline{\Delta\Omega}_y}{d\bar{t}} = \underset{1}{\beta'} \overline{\Delta V}_x + \underset{2}{\beta'} \overline{\Delta V}_x - \underset{3}{\beta'} \cdot \overline{\Delta\Omega}_y - Q_1 \overline{\Delta\Omega}_y - \overline{Q_2 \Delta\Omega}_y, \qquad (22)$$

$$\frac{d\overline{\Delta\varphi}_y}{d\bar{t}} = \sigma \overline{\Delta\Omega}_y,$$

respectiv

$$\frac{d\overline{\Delta V}_y}{d\bar{t}} = -2\alpha_1 \overline{\Delta V}_x - \alpha_2 \overline{\Delta\Omega}_z - \alpha_3 \overline{\Delta\Omega}_x - \sigma' \overline{\Delta\Omega}_x + \overline{\Delta\varphi}_x, \qquad (23)$$

$$\frac{d\overline{\Delta\Omega}_x}{d\bar{t}} = -\underset{1}{\beta} \overline{\Delta V}_y - \underset{2}{\beta} \overline{\Delta V}_y - \underset{3}{\beta} \overline{\Delta\Omega}_z - \underset{4}{\beta} \overline{\Delta\Omega}_x - Q_1 \overline{\Delta\Omega}_x - Q_2 \overline{\Delta\Omega}_x,$$

$$\frac{d\overline{\Delta\varphi}_x}{d\bar{t}} = \sigma \overline{\Delta\Omega}_x.$$

La fel cu sistemele (22) și (23) avem

$$\alpha_1 = \frac{R_t}{G} K_1^1, \quad \alpha_2 = \frac{R_t}{G} \overline{K}_1^1; \quad \alpha_3 = \frac{R_t}{G} \overline{K}_1^2,$$

$$\underset{1}{\beta'} = \frac{U(h_1 + d_1) R_t}{\bar{I}_y G R^2 \omega} K_1^1; \quad \underset{2}{\beta'} = \frac{U(h_2 + d_2) R_t}{\bar{I}_y G R^2 \omega} K_1^1,$$

$$\underset{3}{\beta'} = \rho U^3 z \, C_a' t_p \frac{B^3}{3} \frac{H_1^2}{\bar{I}_y \cdot G R^2 \omega},$$

$$\underset{1}{\beta} = \frac{U(h_1 + d_1) R_t}{\bar{I}_x G R^2 \omega} K_1^1; \quad \underset{2}{\beta} = \frac{U(h_2 + d_2) R_t}{\bar{I}_x G R^2 \omega} K_1^1, \qquad (24)$$

$$\underset{3}{\beta} = \frac{U(h_1 + d_1) R_t}{\bar{I}_x G R^2 \omega} \overline{K}_1^1; \quad \underset{4}{\beta} = \frac{U(h_2 + d_2) R_t}{\bar{I}_x G R^2 \omega} \overline{K}_1^2,$$

$$Q_1 = \frac{8\bar{h}_1 U R_t}{\bar{I}_x G R^2 \omega \gamma}; \quad Q_2 = \frac{8\bar{h}_2 U R_t}{\bar{I}_x G R^2 \omega \gamma},$$

$$\overline{Q}_1 = \frac{8\bar{h}_1 U R_t}{\bar{I}_y G R^2 \omega \gamma}; \quad \overline{Q}_2 = \frac{8\bar{h}_2 U R_t}{\bar{I}_y G R^2 \omega \gamma}.$$

Ecuațiile diferențiale pentru zborul la punct fix se obțin din (19), (20), (22) și (23) făcînd $\sigma' = 0$ și înlocuind coeficienții K prin cei corespunzători zborului la punct fix.

III. ECUAȚIILE CARACTERISTICE. CRITERII DE STABILITATE. SOLUȚIILE ECUAȚIILOR CARACTERISTICE

Făcînd substituțiile

$$\overline{\Delta V}_x = \overline{\Delta V}_{x0}\, e^{\Lambda t} \;;\; \overline{\Delta V}_y = \overline{\Delta V}_{y0}\, e^{\Lambda t} \;;\; \overline{\Delta V}_z = \overline{\Delta V}_{z0} e^{\Lambda t}$$

$$\overline{\Delta \omega}_x = \overline{\Delta \Omega}_{x0}\, e^{\Lambda t} \;;\; \overline{\Delta \Omega}_y = \overline{\Delta \Omega}_{y0}\, e^{\Delta t},$$

$$\overline{\Delta \varphi}_x = \overline{\Delta \varphi}_{x0}\, e^{\Lambda t} \;;\; \overline{\Delta \varphi}_y = \overline{\Delta \varphi}_{y0}\, e^{\Lambda t}, \tag{25}$$

din ecuațiile (19), (20), (22) și (23) obținem sisteme de ecuații algebrice liniare și omogene. Condițiile de a nu avea rădăcini toate nule, ne conduc la următoarele ecuații caracteristice:

a) Longitudinal

$$\Lambda^4 + A_1 \Lambda^3 + A_2 \Lambda^2 + A_3 \Lambda + A_4 = 0, \tag{26}$$

unde

$$A_1 = \alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1 + \underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta},$$

$$A_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2) + (\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) + \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma'),$$

$$A_3 = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) + \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma')(\alpha_4 + \alpha_2) + \underset{1}{\beta}\sigma,$$

$$A_4 = \sigma \underset{1}{\beta}(\alpha_4 + \alpha_2),$$

b) Lateral

$$\Lambda^3 + A_1 \Lambda^2 + A_2 \Lambda + A_3 = 0, \tag{27}$$

unde

$$A_1 = \alpha_1 + \underset{6}{\beta} + \underset{7}{\beta} + \underset{8}{\beta},$$

$$A_2 = \alpha_1(\underset{6}{\beta} + \underset{7}{\beta} + \underset{8}{\beta}) - \underset{5}{\beta}(\alpha_3 + \sigma'),$$

$$A_3 = \underset{5}{\beta}\sigma.$$

Pentru cel de-al doilea caz

a) Longitudinal

$$\Lambda^3 + A_1 \Lambda^2 + A_2 \Lambda + A_3 = 0, \tag{28}$$

unde

$$A_1 = \underset{3}{\beta'} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + 2\alpha_1,$$

$$A_2 = 2\alpha_1(\underset{3}{\beta'} + Q_1 + Q_2) - \sigma'(\underset{1}{\beta'} + \underset{2}{\beta'}),$$

$$A_3 = \sigma(\underset{1}{\beta'} + \underset{2}{\beta'}).$$

b) Lateral

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0,$$

unde

$$A_1 = \underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta} + Q_1 + Q_2 + 2\alpha_1, \tag{29}$$

$$A_2 = 2\alpha_1(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta} + Q_1 + Q_2) - (\alpha_2 + \alpha_3 + \sigma')(\underset{1}{\beta} + \underset{2}{\beta}),$$

$$A_3 = \sigma(\underset{1}{\beta} + \underset{2}{\beta}).$$

Un prim pas în compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale este să verificăm dacă criteriile de stabilitate sînt satisfăcute sau nu.

Criteriile lui Hurvitz pentru ecuațiile (26) și (27) sînt

$$\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1 + \underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta} > 0, \tag{30}$$

$$[\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1 + \underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}]\,[(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2) + (\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) +$$

$$+ \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma')] - [(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) + \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma')(\alpha_4 + \alpha_2) +$$

$$+ \underset{1}{\beta}\sigma] > 0,$$

$$[\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1 + \underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}] \cdot [(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2) + (\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) +$$

$$+ \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma')]\,[(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) + \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma')(\alpha_4 + \alpha_2) +$$

$$+ \underset{1}{\beta}\sigma] - [(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 + \alpha_2)(\underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta}) + \underset{1}{\beta}(\alpha_3 - \sigma')(\alpha_4 + \alpha_2) + \underset{1}{\beta}\sigma]^2 -$$

$$- \sigma\underset{1}{\beta}(\alpha_4 + \alpha_2)(\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_1 + \underset{3}{\beta} + \underset{4}{\beta})^2 > 0,$$

$$\sigma\underset{1}{\beta}(\alpha_4 + \alpha_2) > 0,$$

și

$$\alpha_1 + \underset{6}{\beta} + \underset{7}{\beta} + \underset{8}{\beta} > 0, \tag{31}$$

$$[\alpha_1 + \underset{6}{\beta} + \underset{7}{\beta} + \underset{8}{\beta}]\,[\alpha_1(\underset{6}{\beta} + \underset{7}{\beta} + \underset{8}{\beta}) - \underset{5}{\beta}(\alpha_3 + \sigma')] - \underset{5}{\beta}\sigma > 0,$$

$$\underset{5}{\beta}\sigma > 0.$$

Analog pentru ecuațiile (28) și (29)

$$\underset{3}{\beta'} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + 2\alpha_1 > 0,$$

$$[\underset{3}{\beta'} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + 2\alpha_1] \cdot [2\alpha_1(\underset{3}{\beta'} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) - \tag{32}$$

$$- \sigma'(\underset{1}{\beta'} + \underset{2}{\beta'})] - \sigma(\underset{1}{\beta'} + \underset{2}{\beta'}) > 0,$$

$$\sigma(\underset{1}{\beta'} + \underset{2}{\beta'}) > 0,$$

și

$$\beta_3 + \beta_4 + Q_1 + Q_2 + 2\alpha_1 > 0, \tag{33}$$

$$[\beta_3 + \beta_4 + Q_1 + Q_2 + 2\alpha_1] \cdot [2\alpha_1(\beta_3 + \beta_4 + Q_1 + Q_2) - (\alpha_2 + \alpha_3 + \sigma')$$
$$(\beta_1 + \beta_2)] - \sigma(\beta_1 + \beta_2) > 0,$$
$$\sigma(\beta_1 + \beta_2) > 0.$$

Criteriile corespunzătoare zborului la punct fix se obțin făcînd în (30), (31), (32) și (33) $\sigma' = 0$ și înlocuind în mărimile ce intervin coeficienții K prin cei corespunzători zborului la punct fix.

Deoarece pentru zborul vertical ascendent σ' se menține în general la valori mici, datorită factorului σ care este foarte mare în comparație cu ceilalți, criteriile (30), (31), (32) și (33) nu pot fi satisfăcute, și cu atît mai mult pentru zborul la punct fix, cînd $\sigma' = 0$.

Aceasta dovedește teoretic instabilitatea dinamică a elicopterelor în cauză, arătată de experiență.

Spre a căpăta o idee asupra mișcărilor perturbate printre care se găsesc și cele instabile vom rezolva ecuațiile caracteristice.

Pentru ecuația (26) urmînd metoda lui Ferari se obține următoarea ecuație redusă de gradul trei

$$\mu^3 + \bar{A}_1\mu^2 + \bar{A}_2\mu + \bar{A}_3 = 0, \tag{34}$$

unde

$$\bar{A}_1 = +\frac{A_2}{2},$$

$$\bar{A}_2 = \frac{A_1A_3 - 4A_4}{4},$$

$$\bar{A}_3 = -\left[\left(\frac{A_1^2}{4} - A_2\right)\frac{A_4}{2} + \frac{A_3^2}{8}\right].$$

Cum ecuația (34) nu reprezintă altceva decît condiția ca membrul al doilea al expresiei

$$\left(\Lambda^2 + \frac{A_1}{2}\Lambda + \mu\right)^2 = \left(\frac{A_1}{4} + 2\mu - A_2\right)\Lambda^2 + (A_1\mu - A_3)\Lambda + \mu^2 - A_4, \tag{35}$$

să fie un pătrat perfect, înlocuind în (35) pe μ cu μ_1 una din rădăcinile ecuației (34) se obțin în cele din urmă următoarele patru rădăcini ale ecuației (26)

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\Phi_1 - \frac{A_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} - \Phi_1\right)^2 - 4(\mu_1 - \Phi_2)}\right],$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\Phi_1 - \frac{A_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} - \Phi_1\right)^2 - 4(\mu_1 - \Phi_2)}\right], \tag{36}$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{A_2}{2} + \Phi_1\right) + \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} + \Phi_1\right)^2 - 4(\Phi_2 + \mu_1)}\right],$$

$$\Lambda_4 = -\frac{1}{2}\left[\frac{A_2}{2} + \Phi_1 + \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} + \Phi_1\right)^2 - 4(\Phi_2 + \mu_1)}\right],$$

unde Φ_1, Φ_2 sînt expresiile coeficientului lui Λ și a termenului liber ce rezultă din strîngerea termenilor în (35).

Pentru ecuațiile (27,) (28) și (29) care sînt de gradul trei vom utiliza, pentru obținerea expresiilor rădăcinilor, metoda lui Cardan.

Punînd

$$p = A_2 - \frac{A_1^2}{3},$$

$$q = \frac{2A_1^3}{27} - \frac{A_1 A_2}{3} + A_3, \tag{37}$$

se poate constata că atît pentru zbor vertical ascendent cît și pentru punct fix, discriminații

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right), \tag{38}$$

ai ecuațiilor respective sînt negativi ceea ce conduce la următoarele expresii ale rădăcinilor

$$\Lambda_1 = \alpha_1 + \underset{1}{\beta},$$

$$\Lambda_2 = -\frac{\alpha_1 + \underset{1}{\beta}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \underset{1}{\beta}), \tag{39}$$

$$\Lambda_3 = -\frac{\alpha_1 + \underset{1}{\beta}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \underset{1}{\beta}),$$

unde

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\underset{1}{\beta} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Expresiile (36) conduc în general la două rădăcini reale negative și două complexe cu părți reale pozitive, iar (39) la o rădăcină reală negativă și două complexe cu părți reale pozitive.

Se verifică deci instabilitatea dinamică și pe această cale datorită decrementelor de amortizare pozitive, și se constată că mișcările instabile găsite teoretic sînt oscilatorii cu amplitudine crescîndă așa cum arată experiența.

Perioada oscilațiilor instabile se obține înmulțind inversa părții imaginare a rădăcinilor complexe cu $\frac{2\pi U}{g}$.

Primit la redacție la 30 noiembrie 1955

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВОСХОДЯЩЕМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ И ВИСЕНИИ ДВУХ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ТИПОВ ВЕРТОЛЕТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе исследуется вопрос динамической устойчивости при восходящем вертикальном полете и при висении вертолета с одним ротором и хвостовым винтом и вертолета с двумя тандем-роторами, вращающимися в разные стороны.

Даются выражения аэродинамических реакций в зависимости от возмущений скоростей, при помощи которых выводятся дифференциальные уравнения возмущенных движений.

Из этих последних выводятся характеристические уравнения, на основании которых вычисляются критерии устойчивости и формулы для их корней.

LA STABILITÉ DYNAMIQUE DE DEUX TYPES FRÉQUENTS D'HÉLICOPTÈRES, EN VOL VERTICAL ASCENDANT ET EN VOL À POINT FIXE

(RÉSUMÉ)

Le présent article comprend une étude sur la stabilité dynamique de l'hélicoptère à un seul rotor, avec hélice anticouple et de l'hélicoptère à deux rotors en tandem contrerotatifs, en vol vertical ascendant et à point fixe.

On y établit les expressions analytiques des réactions aérodynamiques, fonctions des perturbations de la vitesse, qui servent ensuite à la détermination des équations différentielles de mouvement perturbé.

En partant de ces dernières, on déduit les équations caractéristiques à l'aide desquelles on calcule les critères de stabilité et aussi les formules explicites des racines.

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Marinescu, *Problema stabilităţii elicopterului cu rotor antrenat prin jet în zbor la punct fix.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, iulie—decembrie 1955, p. 299.
2. — *Asupra stabilităţii dinamice a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 1, ianuarie—martie 1956, p. 29.
3. F. Weinig, *Aerodynamik der Luftschraube.* Berlin, 1942.
4. B. Schlippe u. R. Dietrich, *Zur Stabilität der Hubschraube.* Deutsche Akademie der Luftahrforschung, Berlin, 1939.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

ECUAŢIILE DE ECHILIBRU ÎN COORDONATE OBLICE LA ÎNVELITORILE SUBŢIRI DE GROSIME CONSTANTĂ

DE

AUREL BELEŞ
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R. P. R.

şi MIRCEA MIHAILESCU

În cadrul unor preocupări mai largi, privind corespondenţa dintre modul real de lucru al învelitorilor subţiri, în multiplele situaţii care intervin în practică şi ecuaţiile matematice care transpun fenomenul, se prezintă în lucrarea de faţă *expresiile analitice* ale *ecuaţiilor* generale de *echilibru* pentru învelitorile subţiri de *grosime constantă.*

O învelitoare subţire este definită cînd se cunoaşte ecuaţia razei vectoare a suprafeţei mediane (fig. 1) :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x,y) \text{ şi}$$

h, grosimea constantă a învelitorii măsurată pe normala la suprafaţa mediană.

Se presupune funcţia $\mathbf{R}(x, y)$ continuă cu derivate continuie pînă la ordinul 3 inclusiv, iar variabilele x şi y astfel încît produsul vectorial al primelor derivate

$$\mathbf{R}_x \, \mathbf{R}_y \neq 0,$$

în care s-a notat

$$\mathbf{R}_x = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} ; \; \mathbf{R}_y = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}.$$

După cum se cunoaşte variabilele independente x şi y se pot măsura :

— pe 2 direcţii rectilinii concurente cînd sînt *coordonate carteziene,* sau

— se pot lua arbitrar astfel încît menţinînd succesiv pe x constant şi y constant, să se obţină 2 familii de curbe pe suprafaţă care alcătuiesc o reţea de *coordonate curbilinii.*

Cînd unghiul celor două direcţii Ox, Oy sau a reţelei de coordonate curbilinii este drept, coordonatele sînt *rectangulare,* iar cînd unghiul χ al direcţiilor Ox, Oy este diferit de $\frac{\pi}{2}$ coordonatele *sînt oblice.*

În general coordonatele rectangulare apar pentru simplitatea conducerii operațiilor ca cele mai avantajoase totuși așa cum observă prof. P. L a r d y, într-o recentă lucrare [1] : „unul din procedeele cele mai fruc-

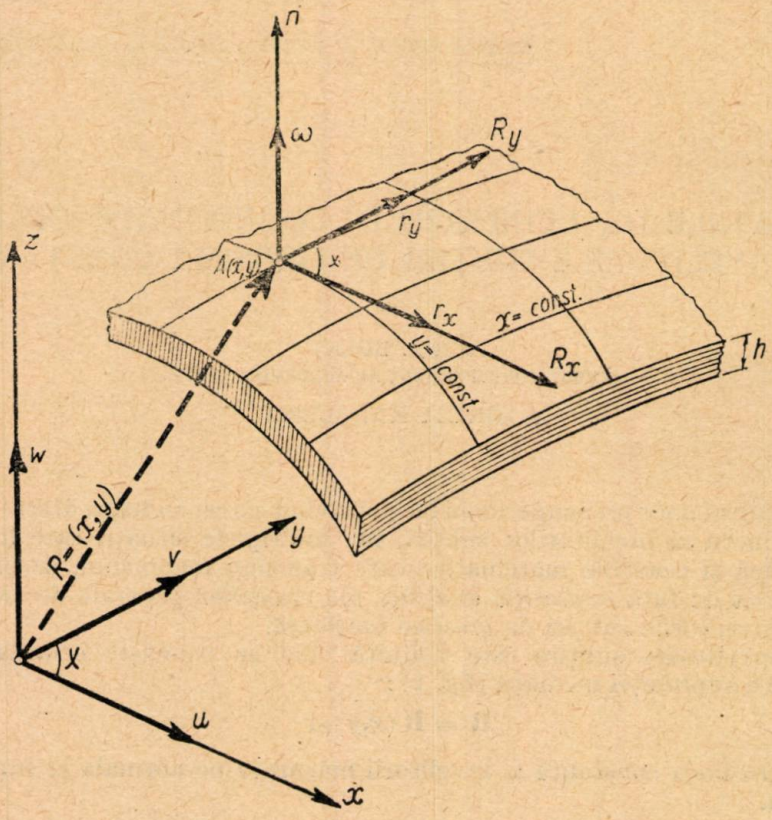


Fig. 1

tuoase pentru determinarea soluțiilor exacte ale problemelor de elasticitate teoretică, constă din alegerea unui sistem de coordonate care să se potrivească problemei puse" și în acest sens sînt numeroase cazuri în care folosirea unui sistem de coordonate oblice să fie mai operativă ; de exemplu *paraboloizii hiperbolici* avînd curburile principale neegale *învelitorile conice* în general *învelitorile de translație* sau *riglate* avînd bază trapezoidală.

În lucrările devenite clasice asupra învelitorilor subțiri, scrise de A. F. L o v e [2], W. F l ü g g e [3], S. T i m o s h e n k o [4] și V. Z. V l a s o v [5] problema de echilibru este tratată numai în coordonate rectangulare.

Relativ recent, cîțiva cercetători, printre care citǎm pe W e i Z a n g C h i e n [6] A. I. L u r i e [7] A. L. G o l d e n w e i s e r [8] și D. R ü d i n g e r [9] s-au ocupat de scrierea ecuațiilor de echilibru în coordonate oblice.

În cele ce urmează ne-am propus să indicăm o cale, *mai directă* pentru deducerea *ecuațiilor de echilibru în coordonate oblice*, pe care să le scriem apoi sub formă *scalară* astfel încît diferitele *trepte de aproximație* care pot interveni în calculul învelitorilor subțiri, să poată fi clar puse în evidență.

Lucrarea s-a întocmit pe baza ipotezelor simplificatoare admise pentru cazul deformațiilor mici în tehnica învelitorilor subțiri :

În timpul solicitării *grosimea învelitorii rămîne constantă*, iar *normala* la suprafața mediană în *starea neîncărcată* devine *normală* la învelitoarea *deformată* ; ca urmare, *starea de eforturi este plană* în fiecare punct iar *deformațiile variază liniar* pe grosimea învelitorii.

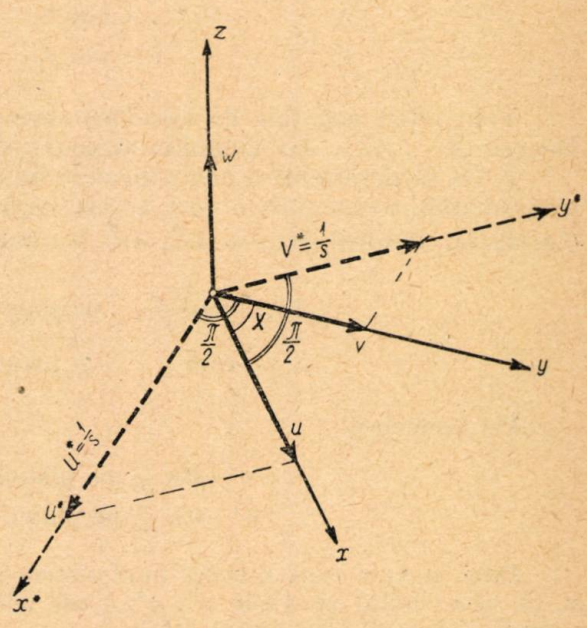


Fig. 2

I

Vom expune mai întîi cîteva considerente de ordin geometric arătînd care sînt axele de referință și cum se determină componentele unui vector și ale derivatelor sale.

1. Revenind la prima figură, dacă x și y sînt coordonate carteziene oblice, menținînd în ecuația suprafeței succesiv pe x și apoi pe y constant, se obțin 2 familii de curbe situate pe suprafața mediană a învelitorii a căror proiecție pe plan xOy formează rețeaua de linii $x = \text{const.}$ și $y = \text{const.}$

Derivatele în punctul A (x,y) a razei vectoare $\mathbf{R}$ (x,y) reprezintă vectorii tangenți la cele 2 familii de curbe.

Folosind *notația tensorială*

$$\mathbf{R}_x^2 = g_{11}, \quad \mathbf{R}_y^2 = g_{22}; \quad \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_y = g_{12} = g_{21}, \tag{1}$$

atunci

$$\mathbf{r}_x = \frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}, \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_y = \frac{\mathbf{R}_y}{\sqrt{g_{22}}}, \tag{3}$$

reprezintă versorii tangentelor, iar versorul normalei are expresia

$$\omega = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}. \tag{4}$$

Versorii $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, $\boldsymbol{\omega}$ formează un trivector la care în general unghiul direcțiilor $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$ notat cu χ este oarecare.

Vom nota în cele ce urmează pentru simplificarea scrierii

$$\begin{aligned} c &= \cos \chi, \\ s &= \sin \chi. \end{aligned} \tag{5}$$

Vom referi ecuațiile de echilibru scrise sub formă scalară mai întîi la axele Ar_x , Ar_y , $A\omega$ și apoi la axele Ox, Oy, Oz.

2. Ca să determinăm componentele unui vector în mod analog ca în coordonatele rectangulare, vom asocia triedrului oblic Ar_x, Ar_y, $A\omega$ sau Ox, Oy, Oz, triedrul *reciproc* Ar_x^*, Ar_y^*, $A\omega$ sau Ox^*, Oy^*, Oz în care

r_x^* este $\perp$ pe planul yz,

r_y^* este $\perp$ pe planul xz.

De asemenea

x^* este $\perp$ pe planul yz,

y^* este $\perp$ pe planul xz.

Dacă $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sînt *versorii* unui sistem de axe oblice (de exemplu x, y, z), vom defini pe axele x^*, y^* z, ale triedrului reciproc niște vectori numiți *reciproci*, [10] avînd mărimile :

$$|\mathbf{u}^*| = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|} = \frac{1}{s}, \quad |\mathbf{v}^*| = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|} = \frac{1}{s}. \tag{6}$$

Versorii sistemului de coordonate reciproc, se pot deduce imediat

$$\bar{\mathbf{u}}^* = s\mathbf{u}, \quad \bar{\mathbf{v}}^* = s\mathbf{v}^*, \quad \bar{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w}. \tag{7}$$

Pentru scrierea mai comodă a formulelor vom opera cu *versorii* sistemului de bază și *vectorii reciproci* întrucît între ei se pot scrie următoarele produse scalare

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cînd } i = j \\ 0 & \qquad i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

în care

δ este simbolul lui Kroneker,

iar

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{v}^* \\ \mathbf{w} \end{matrix} \right\| \text{ și } \| \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3 \| = \| \mathbf{u}\, \mathbf{v}\, \mathbf{w} \| \tag{9}$$

produsele vectoriale au expresiile

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = -s\mathbf{v}^\star, \qquad \mathbf{u}^\star \times \mathbf{w} = -\frac{1}{s}\mathbf{v}, \tag{1.10}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = s\mathbf{u}^\star, \qquad \mathbf{v}^\star \times \mathbf{w} = \frac{1}{s}\mathbf{u}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}^\star \times \mathbf{u} = -\mathbf{v}^\star \times \mathbf{v} = \frac{c}{s}\mathbf{w}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}^\star = -\mathbf{u}^\star \times \mathbf{v} = \frac{1}{s}\mathbf{w}. \tag{4.10}$$

Pe baza relațiilor de mai sus, expresia analitică a unui vector raportat la unul din triedrele de bază (de exemplu *xyz*) este

$$\mathbf{N} = (\mathbf{u}^\star \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{u} + (\mathbf{v}^\star \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{w}, \tag{1.11}$$

raportîndu-l la triedrul reciproc $x^\star\ y^\star\ z$ se obține

$$\mathbf{N} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{u}^\star + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{v}^\star + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{w}, \tag{2.11}$$

în paranteze sînt *produsele scalare* între vectorul dat și versorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, respectiv *vectorii* $\mathbf{u}^\star$, $\mathbf{v}^\star$, $\mathbf{w}$.

Dacă se notează:

U, V, W componentele unui vector în sistemul de coordonate de bază și

$U^\star$, $V^\star$, $W^\star$ aceleași componente în sistemul reciproc, atunci semnificația lor este

$$U = \mathbf{u}^\star\,\mathbf{N}, \quad V = \mathbf{v}^\star\,\mathbf{N}, \qquad W = \mathbf{w} \cdot \mathbf{W}, \tag{1.12}$$

$$U^\star = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}, \quad V^\star = \mathbf{v}\,\mathbf{N}, \tag{2.12}$$

componentele în sistemul *inițial* se numesc *covariante*, iar în *triedrul reciproc contravariante*.

Scriind doi vectori unul în componente covariante și altul în componente contravariante, produsul scalar dintre ei este

$$\mathbf{N}^1\,\mathbf{N}^2 = U_1\,U_2^\star + V_1\,V_2^\star + W_1\,W_2, \tag{13}$$

formă asemănătoare cu expresia din coordonate rectangulare.

Produsul vectorial se poate scrie la fel ca în coordonatele rectangulare, dacă se consideră versorii sistemului de bază și componentele contravariante ale celor 2 vectori, sau invers folosind vectorii reciproci și componentele covariante ale vectorilor; se obțin

$$\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2 = \frac{1}{s}\begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ U_1^\star & V_1^\star & W_1 \\ U_2^\star & V_2^\star & W_2 \end{vmatrix} = s\begin{vmatrix} \mathbf{u}^\star & \mathbf{v}^\star & \mathbf{w} \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Pentru calculele care urmează este util să cunoaștem componentele contravariante ale versorilor $\mathbf{u},\mathbf{v}$ și componentele covariante ale vectorilor reciproci $\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*$; folosind expresiile (1.12) și (2.12) se deduce

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}^* + c\mathbf{v}^* = \frac{1}{s}\bar{\mathbf{u}}^* + \frac{c}{s}\bar{\mathbf{v}}^*, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}^* + c\mathbf{u}^* = \frac{c}{s}\bar{\mathbf{u}}^* + \frac{1}{s}\bar{\mathbf{v}}^*, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{s^2}\mathbf{u} - \frac{c}{s^2}\mathbf{v}, \quad \bar{\mathbf{u}}^* = \frac{1}{s}\mathbf{u} - \frac{c}{s}\mathbf{v}, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{s^2}\mathbf{u} + \frac{1}{s^2}\mathbf{v}, \quad \bar{\mathbf{v}}^* = -\frac{c}{s}\mathbf{u} + \frac{1}{s}\mathbf{v}. \tag{4.15}$$

3. Să ne fixăm acum atenţiunea asupra *derivatei* unui vector pentru a scrie *componentele vectorului derivat* în raport cu unul din sistemele de axe oblice ; deosebim 2 cazuri :

— vectorul este liber şi versorii sistemului de axe sînt invariabili ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$), în sistemul de axe cartezian x,y,z ;

— vectorul este liber iar versorii sînt variabili ($\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω) în lungul liniilor de coordonate curbilinii.

3.1. În primul caz să începem prin a deriva componenta *covariantă* U a vectorului $\mathbf{N}$ în raport cu x ; referindu-ne la expresia (1.12), deoarece vectorul reciproc $\mathbf{u}^*$ rămîne constant, se obţine

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\mathbf{u}^*, \tag{1.16}$$

sau

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\mathbf{u}^* = \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_u = \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{2.16}$$

conform regulii de la punctul 2 recunoaştem în membrul stîng componenta *covariantă* după axa x, a vectorului derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$, iar în partea dreaptă derivata parţială a componentei covariante U în raport cu variabila x. La fel se pot scrie şi celelalte componente covariante ale derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_v = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_w = \frac{\partial W}{\partial x}, \tag{17}$$

permutînd variabila y în locul lui x rezultă componentele covariante ale derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}$. Componentele contravariante ale derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$ se obţin în mod analog şi sînt

$$\left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_u^* = \frac{\partial U^*}{\partial x}, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_v^* = \frac{\partial V^*}{\partial x}, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_w = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}. \tag{18}$$

3.2. În cazul vectorului raportat la sistemul de axe format de versorii $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω, derivînd expresia componentei contravariante $U^* = \mathbf{r}_x\,\mathbf{N}$, deoarece versorul $\mathbf{r}_x$ este variabil ca direcție se obține

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x}\,\mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\,\mathbf{r}_x^*, \tag{1.19}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\,\mathbf{r}_x = \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_{\mathbf{r}_x}^{*} = \frac{\partial U^*}{\partial x} - \mathbf{N}\,\frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x} \tag{2.19}$$

recunoaștem în partea stîngă componenta contravariantă a vectorului derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$ după axa $\mathbf{r}_x$; în partea dreaptă primul termen reprezintă derivata parțială a lui U^* în raport cu x, iar al doilea modificarea care survine datorită variației versorului $\mathbf{r}_x$.

Acest al doilea termen depinde de *forma suprafeței* și se exprimă funcție de *derivatele componentelor tensorului metric fundamental* (care dă distanța dintre 2 puncte de pe suprafață) cu ajutorul *simbolurilor lui Cristoffel.*

Distanța între două puncte vecine pe suprafață se scrie folosind notația tensorială

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{22}\,dy^2 + 2\,g_{12}\,dx\,dy, \tag{20}$$

în care așa cum s-a stabilit anterior

$$g_{11} = \mathbf{R}_x^2,\ g_{22} = \mathbf{R}_y^2, \quad g_{12} = \mathbf{R}_x\,\mathbf{R}_y = c\,R_x\,R_y,$$

prin derivarea acestor relații se obține:

$$\mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{2}(g_{11})_x, \quad \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_{yy} = \frac{1}{2}(g_{22})_y, \tag{1.21}$$

$$\mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_{xy} = \frac{1}{2}(g_{11})_y, \quad \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_{xy} = \frac{1}{2}(g_{22})_x, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{R}_y = (g_{12})_x - \frac{1}{2}(g_{11})_y, \quad \mathbf{R}_{yy} \cdot \mathbf{R}_x = (g_{12})_y - \frac{1}{2}(g_{22})_x, \tag{3.21}$$

paranteza rotundă urmată de indice jos, reprezintă derivată.

Vom folosi aceste rezultate la calcularea derivatei $\frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial x}$; în sistemul de coordonate $\mathbf{r}_x\,\mathbf{r}_y\,\omega$, versorul $\mathbf{r}_x$ este egal cu $\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}$.

Expresia analitică a derivatei versorului raportată la sistemul de axe reciproc se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right) = \alpha_1\,\mathbf{r}_x^* + \beta_1\,\mathbf{r}_y^* + \gamma_1\,\omega, \tag{22}$$

în care, conform regulilor stabilite, s-a notat:

$$\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right)\mathbf{r}_x, \quad \beta_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right)\mathbf{r}_y, \gamma_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right)\omega. \tag{23}$$

Calculînd pe rînd produsele scalare dintre vectorul derivatei lui $\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}$ cu versorii $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, și ω vor rezulta componentele contravariante ale derivatei versorului $\mathbf{r}_x$

$$\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right)\cdot\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{2\,\mathbf{R}_x\,\mathbf{R}_{xx}\,(g_{11}) - \mathbf{R}_x^2\,(g_{11})_x}{2\,g_{11}^2} = 0, \tag{24}$$

rezultat firesc deoarece versorul $\mathbf{r}_x$ avînd lungime constantă, vectorul derivatei este perpendicular pe direcția lui și va avea numai componente după axele $\mathbf{r}_y^*$ și ω; în continuare se obține

$$\beta_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right)\cdot\frac{\mathbf{R}_y}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{2\,(g_{12})_x\,g_{11} - (g_{11})_y\,g_{11} - (g_{11})_x\cdot g_{12}}{2\sqrt{g_{22}\cdot g_{11}^2}} =$$

$$= s^2\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \tag{25}$$

în care $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$ este *simbolul lui Cristoffel* de *speța a doua* a cărei lege de formare se poate găsi și în [11]; aceeași semnificație are și semnul lui Herman Weil, care în acest caz este Γ_{11}^2.

Observînd că versorul ω este perpendicular pe vectorii $\mathbf{R}_x$ și $\mathbf{R}_y$ rezultă

$$\omega\cdot\mathbf{R}_x = 0,\quad \omega\cdot\mathbf{R}_y = 0, \tag{26}$$

de unde prin derivare se obține

$$\omega\cdot\mathbf{R}_{xx} = -\,\omega_x\cdot\mathbf{R}_x = \mathfrak{F}, \tag{1.27}$$

$$\omega\cdot\mathbf{R}_{xy} = -\,\omega_y\cdot\mathbf{R}_x = -\,\omega_x\mathbf{R}_y = \mathfrak{F}, \tag{2.27}$$

$$\omega\cdot\mathbf{R}_{yy} = -\,\omega_y\cdot\mathbf{R}_y = \mathfrak{L}. \tag{3.27}$$

Pe baza relațiilor de mai sus rezultă imediat

$$\gamma_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{R}_x}{\sqrt{g_{11}}}\right)\cdot\omega = \frac{2\,g_{11}\mathbf{R}_{xx}\,\mathbf{w} - (g_{11})_x\,\mathbf{R}_x\,\mathbf{w}}{2\,g_{11}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{g_{11}}}\cdot \tag{28}$$

În consecință expresia analitică a derivatei versorului $\mathbf{r}_x$ devine

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_x) = s^2\,\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\,\Gamma_{11}^2\,\mathbf{r}_y^* + \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{g_{11}}}\,\mathbf{w}. \tag{29}$$

Revenind la expresia componentei contravariante (2.19) a derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$ după axa x^* ținînd seama de relația (29) rezultă

$$\left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_{r_x}^{*} = \frac{\partial U^*}{\partial x} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_y^*)\;s^2\,\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\,\Gamma_{11}^2 - (\mathbf{N}\cdot\omega)\,\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{g_{11}}}\cdot \tag{30}$$

În mod asemănător se deduce și componenta covariantă a vectorului derivatei $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$.

Revenind la relațiile (1.12) derivăm prima ecuație în raport cu x obținînd

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\,\mathbf{r}_x^* + \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x}\,\mathbf{N}, \tag{31}$$

sau conform regulei (12) rezultă

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\cdot\mathbf{r}_x^* = \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_u = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \mathbf{N}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x}\,. \tag{32}$$

Descompunînd vectorul $\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x}$ după axele triedrului reciproc se obține

$$\frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x} = \alpha_2\,\mathbf{r}_x^* + \beta_2\,\mathbf{r}_y^* + \gamma_2\,\omega, \tag{1.33}$$

în care

$$\alpha_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x}\cdot\mathbf{r}_x\,;\quad \beta_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x}\,\mathbf{r}_y\,;\quad \gamma_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x}\,\omega. \tag{2.33}$$

Pentru a calcula α_2, β_2, γ_2 vom înlocui vectorul contravariant $\mathbf{r}_x^*$ funcție de versorii $\mathbf{r}_x$ și $\mathbf{r}_y$ conform expresiilor și vom obține pe rînd

$$\alpha_2 = \mathbf{r}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{s^2}\,(\mathbf{r}_x - c\,\mathbf{r}_y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right) - c\,\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\,\Gamma_{12}^1$$

în mod analog:

$$\beta_2 = c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right) + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\,\Gamma_{11}^2\,,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{s^2}\left(\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} - c\,\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}\right).$$

Expresia analitică a vectorului $\frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x}$ (1.33) devine

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_x^*}{\partial x} = {} & \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right) - c\,\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\,\Gamma_{12}^1\right]\mathbf{r}_x^* + \\ & + \left[c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right) + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\,\Gamma_{11}^2\right]\mathbf{r}_y^* + \\ & + \left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} - c\,\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}\right)\right]\omega.\end{aligned} \tag{34}$$

Ca urmare *componenta covariantă* a derivatei unui vector se poate scrie

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right|_{r_x} = {} & \frac{\partial U}{\partial x} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_x^*)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right) - c\,\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\,\Gamma_{12}^1\right] - \\ & - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_y^*)\left[c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right) + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\,\Gamma_{11}^2\right] - \\ & - (\mathbf{N}\cdot\omega)\left[\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} - c\,\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}\right]\frac{1}{s^2}\,.\end{aligned} \tag{35}$$

În tabloul nr. 1 se dau expresiile analitice ale vectorilor corespunzători derivatelor $\frac{\partial N}{\partial x}$ și $\frac{\partial N}{\partial y}$ în raport cu sistemul de axe de bază și sistemul reciproc.

II

4. Folosind tehnica descrisă anterior, să trecem la deducerea ecuațiilor de echilibru.

În conformitate cu ipotezele lui Kirchoff (amintite la începutul lucrării) pentru un element de învelitoare avînd un vîrf în A (x,y) dacă

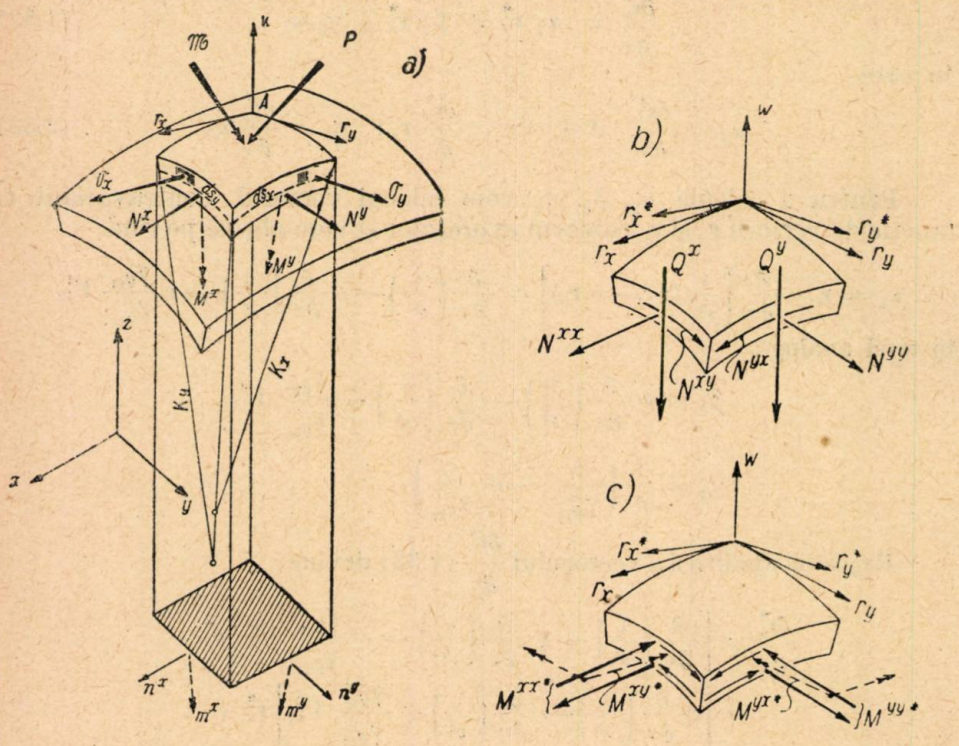


Fig. 3

σ^x și σ^y sînt vectorii eforturilor unitare pe fețele $x =$ const. și $y =$ const. (fig. 3), prin sumare vectorială pe toată grosimea h a învelitorii, se obțin, în raport cu suprafața mediană, cîte o rezultantă și un moment rezultant notate cu $\mathbf{N}^x$ și $\mathbf{M}^x$ pe latura $x =$ const. și $\mathbf{N}^y$ și $\mathbf{M}^y$ pe latura $y =$ const.; expresiile lor se referă la o lățime unitară măsurată pe suprafața mediană a învelitorii.

Observăm că vectorii $\mathbf{M}^x$ și $\mathbf{M}^y$ se găsesc în planul tangent la suprafața mediană, iar $\mathbf{N}^x$ și $\mathbf{N}^y$ au direcții oarecare.

Elementul de învelitoare este încărcat cu o forță și un moment care pe unitatea de suprafață are valorile $\mathbf{P}$ și $\mathbf{M}$. Deplasîndu-ne de pe fețele adiacente vîrfului A $(x.y)$ pe laturile corespunzătoare vîrfului B $(x+\mathrm{d}x;$ $y+\mathrm{d}y)$, eforturile rezultante $\mathbf{N}^x$ și $\mathbf{N}^y$ și momentele $\mathbf{M}^x$ și $\mathbf{M}^y$ vor avea alte

valori; diferențele raportate la distanța parcursă se pot aproxima în cadrul ipotezelor considerate, cu derivatele prime ale eforturilor.

5. Cunoscînd eforturile interioare pe cele 4 laturi și încărcarea exterioară, echilibrul elementului mic este dat de 2 ecuații vectoriale, care exprimă condiția ca *translația* și *rotirea* elementului să fie nulă; acestea sînt după Goldenweiser [8]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{g_{22}}\,\mathbf{N}^x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{g_{11}}\,\mathbf{N}^y) + s\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}\,\mathbf{P} = 0, \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{g_{22}}\,\mathbf{M}^x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{g_{11}}\,\mathbf{M}^y) + \mathbf{R}_x \times (\sqrt{g_{22}}\,\mathbf{N}^x) + \mathbf{R}_y \times (\sqrt{g_{11}}\,\mathbf{N}^y) + s\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}\,\mathbf{M} = 0. \tag{2.36}$$

Momentele s-au luat în raport cu originea sistemului de coordonate.

Expresiile $\sqrt{g_{11}}$ și $\sqrt{g_{22}}$ reprezintă fiecare raportul dintre arcul elementar și creșterea variabilei, pe direcțiile x și y. Făcînd substituția:

$$\mathbf{n}^x = \sqrt{g_{22}}\,\mathbf{N}\ ;\quad \mathbf{n}^y = \sqrt{g_{11}}\,\mathbf{N}^y\ ;\quad \mathfrak{P} = s\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}\,\mathbf{P} \tag{1.37}$$

$$\mathbf{m}^x = \sqrt{g_{22}}\mathbf{M}^x\ ;\quad \mathbf{m}^y = \sqrt{g_{22}}\,\mathbf{M}^y\ ;\quad \mathfrak{M} = s\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}\,\mathbf{M} \tag{2.37}$$

noile necunoscute $\mathbf{n}^x$, $\mathbf{n}^y$ și $\mathbf{m}^x$, $\mathbf{m}^y$ reprezintă tot eforturi unitare ale învelitorii, însă se referă la lungimi măsurate în planul xOy; înlocuind expresiile (1.37) și (2.37) în relațiile (1.36) și (2.36)se obține.

$$\frac{\partial \mathbf{n}^x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}^y}{\partial y} + \mathfrak{P} = 0, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}^x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{m}^y}{\partial y} + \mathbf{R}_x \times \mathbf{n}^x + \mathbf{R}_y \times \mathbf{n}^y + \mathfrak{M} = 0. \tag{2.38}$$

III

6. Ecuațiile vectoriale de echilibru (1.38) și (2.38) le vom transcrie *scalar* cu scopul de a le face accesibile metodelor de rezolvare din analiza matematică.

Pentru fiecare efort rezultant trebuie fixate componentele fundamentale și pentru fiecare ecuație, sistemul de axe de referință.

7. Dacă raportăm ecuațiile de echilibru la sistemul de axe $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω vom considera *fundamentale* componentele *covariante ale rezultantelor* $\mathbf{n}^x$, $\mathbf{n}^y$ și $\mathfrak{P}$ și componentele *contravariante ale momentelor* $\mathbf{m}^x$, $\mathbf{m}^y$ și $\mathfrak{M}$ (fig. 3*b* și 3*c*) în consecință *ecuația de translație* se va scrie *scalar* față de *sistemul de axe de bază* ($\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω), iar *ecuația de rotire* față de *sistemul de axe reciproc* ($\mathbf{r}_x^*$, $\mathbf{r}_y^*$, ω) (fig. 3*a*).

Această alegere conduce la o formulare asemănătoare a ecuațiilor de proiecție și de momente, datorită faptului că forțele care alcătuiesc cuplul momentelor sînt paralele cu eforturile de membrană (tangente la suprafață) figura 3*b*.

În conformitate cu figura 3 *a* expresiile analitice ale vectorilor considerați sînt

$$\mathbf{n}^x = n^{xx} \cdot \mathbf{r}_x + n^{xy} \cdot \mathbf{r}_y - q^x \omega, \tag{1.39}$$

$$\mathbf{n}^y = n^{yx} \cdot \mathbf{r}_x + n^{yy} \cdot \mathbf{r}_y - q^y \omega, \tag{2.39}$$

$$\mathbf{m}^x = m^{xy\star} \cdot \mathbf{r}_x^\star + m^{xx\star} \cdot \mathbf{r}_y^\star, \tag{3.39}$$

$$\mathbf{m}^y = m^{yy\star} \cdot \mathbf{r}_x^\star + m^{yx\star} \cdot \mathbf{r}_y^\star, \tag{4.39}$$

$$\mathfrak{R} = X \cdot \mathbf{r}_x + Y \cdot \mathbf{r}_y + Z \cdot \omega, \tag{5.39}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{y\star} \cdot \mathbf{r}_x + \mathfrak{M}^{x\star} \cdot \mathbf{r}_y. \tag{6.39}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuațiile (38) și folosind formulele de derivare din tabloul nr. 1 se obțin 6 ecuații scalare care apar în tabloul nr. 2.

8. Să referim acum starea de echilibru a elementului de învelitoare la sistemul de axe x, y, z. Pentru că componentele n^{xx}, n^{xy}, n^{yy}, m^{xx}, m^{xy}, m^{yx} q^x și q^y din ecuațiile (39) au din punct de vedere *fizic* o semnificație precisă și anume sînt *eforturile de membrană*, *momentele încovoietoare* și de *răsucire* și *forțele tăietoare*, vom determina expresiile analitice ale eforturilor rezultante față de sistemul de axe x, y, z, operînd cu aceste componente și înlocuind în ecuațiile (39) versorii $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω cu expresiile lor funcție de versorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ai sistemului de axe x, y, z, care sînt

$$\mathbf{r}_x = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\mathbf{u} + \sqrt{g_{11} - 1}\, \mathbf{w}), \tag{1.40}$$

$$\mathbf{r}_y = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (\mathbf{v} + \sqrt{g_{22} - 1}\, \mathbf{w}), \tag{2.40}$$

$$\omega = \frac{1}{s\sqrt{g_{11} + g_{22} - 2c\sqrt{(g_{11} - 1)(g_{22} - 1)} + s^2 - 2}} [(\sqrt{g_{11} - 1} - c\sqrt{g_{22} - 1})\mathbf{u} + (\sqrt{g_{22} - 1} - c\sqrt{g_{11} - 1})\mathbf{v} - s\mathbf{w}]. \tag{3.40}$$

Dacă se notează

$$\bar{n}^{xx} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} n^{xx}; \quad n^{xy} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = N^{xy}, \tag{1.41}$$

$$\bar{n}^{yy} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} n^{yy}; \quad n^{yx} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = N^{yx}, \tag{2.41}$$

$\bar{n}^{xx}$, $\bar{n}^{yy}$, N^{xy} și N^{yx} reprezintă proiecțiile eforturilor de membrană ale învelitorii pe planul xOy raportate la unitatea de lungime din acest plan (fig. 3); se observă că pentru componentele tangențiale, proiecțiile măsurate în planul xOy sînt egale cu valorile reale raportate la unitatea de lungime de pe învelitoare.

Notînd de asemenea

$$\bar{q}^x = \frac{1}{\sqrt{g_{11} + g_{22} - 2c\sqrt{(g_{11} - 1)(g_{22} - 1)} + s^2 - 2}} q^x, \tag{1.42}$$

$$\bar{q}^y = \frac{1}{\sqrt{g_{11} + g_{22} - 2c\sqrt{(g_{11} - 1)(g_{22} - 1)} + s^2 - 2}} q^y, \tag{2.42}$$

Tabloul nr. 1

Componentele derivatelor în triedrul $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω

Notații :

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right); \qquad D = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{s^2}\right) - c\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{s^2}\right)$$

$$B = c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{s^2}\right); \qquad F = c\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{s^2}\right)$$

Derivata	Componenta contravariantă $\left(\frac{\partial N}{\partial}\right)^{\star}_{r_x}$	Componenta contravariantă $\left(\frac{\partial N}{\partial}\right)^{\star}_{r_y}$	$\left(\frac{\partial N}{\partial}\right)_{\omega}$
$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$	$\frac{\partial U^{\star}}{\partial x} - (\mathbf{N}\mathbf{r}_y^{\star})\, s^2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\, \Gamma_{11}^2 - (\mathbf{N}\cdot\omega)\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}}$	$\frac{\partial V^{\star}}{\partial x} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_x^{\star})\, s^2 \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\, \Gamma_{12}^1 - (\mathbf{N}\cdot\omega)\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}$	$\frac{\partial W}{\partial x} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_x^{\star})\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} + (\mathbf{N}\mathbf{r}_y^{\star})\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}$
$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}$	$\frac{\partial U^{\star}}{\partial y} - (\mathbf{N}\mathbf{r}_y^{\star})\, s^2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\, \Gamma_{12}^2 - (\mathbf{N}\cdot\omega)\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}}$	$\frac{\partial V^{\star}}{\partial x} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_x^{\star})\, s^2 \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\, \Gamma_{22}^1 - (\mathbf{N}\omega)\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}$	$\frac{\partial W}{\partial y} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_x^{\star})\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_y^{\star})\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}$

Tabloul nr. 1 *(continuare)*

Derivata	Componenta covariantă $\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial}\right)^{\star}_{r_x}$	Componenta covariantă $\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial}\right)^{\star}_{r_y}$	$\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial}\right)_{\omega}$
$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial x} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_x)\left[A - c\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{12}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_y)\left[B + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{11}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\omega)\left[\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{g_{11}}} - c\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$\frac{\partial V}{\partial x} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_x)\left[B + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{12}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_y)\left[A - c\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{11}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\omega)\left[\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{g_{22}}} - c\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}}\right].$	$\frac{\partial W}{\partial x} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_x)\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{g_{11}}} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_y)\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}$
$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}$	$\frac{\partial U}{\partial y} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_x)\left[D - c\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{22}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_y)\left[F + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{12}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\omega)\left[\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}} - c\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$\frac{\partial V}{\partial y} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_x)\left[F + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{22}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_y)\left[D - c\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{12}\right] -$ $- (\mathbf{N}\cdot\omega)\left[\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}} - c\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$\frac{\partial W}{\partial y} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_x)\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}^{\star}_y)\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}.$

Tabloul nr. 2

Ecuații de echilibru scrise scalar în raport cu triedrul $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, ω

	Componentele lui $\mathbf{n}^x$	Componentele lui $\mathbf{n}^y$	P.
Proiecție pe $\mathbf{r}_x$	$+\frac{\partial n^{xx}}{\partial x} - n^{xx}\left[A - c\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{12}\right] - n^{xy}\left[B - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{11}\right] + q^x\left[\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} - c\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$+\frac{\partial n^{yx}}{\partial x} - n^{yx}\left[D - c\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{22}\right] - n^{yy}\left[F + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{12}\right] + q^y\left[\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}} - c\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$+X$
Proiecție pe $\mathbf{r}_y$	$+\frac{\partial n^{xy}}{\partial x} - n^{xx}\left[B + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{12}\right] - n^{xy}\left[A - c\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{11}\right] + q^x\left[\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}} - c\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$+\frac{\partial n^{yy}}{\partial y} - n^{yx}\left[F + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\Gamma^1_{22}\right] - n^{yy}\left[D - c\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma^2_{12}\right] + q^y\left[\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}} - c\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}}\right]\frac{1}{s^2}$	$+Y$
Proiecție pe ω	$-\frac{\partial q^x}{\partial x} + n^{xx}\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} + n^{xy}\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}$	$-\frac{\partial q^y}{\partial y} + n^{yx}\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}} + n^{yy}\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}$	$+Z$

Tabloul nr. 2 *(continuare)*

	Componentele lui $\mathbf{m}^*$	Componentele lui $\mathbf{m}^y$	Componentele $\mathbf{R}_x \times \mathbf{n}^x$	Componentele $\mathbf{R}_y \times \mathbf{n}^y$	M
Rotire în jurul lui r_x^*	$\frac{\partial m^{xy*}}{\partial x} - m^{xx*}\, s^2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{11}^2$	$\frac{\partial m^{yy*}}{\partial y} - m^{yx*}\, s^2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^2$	—	$s\sqrt{g_{22}}\, q^y$	$+ M^y$
Rotire în jurul lui r_y^*	$\frac{\partial m^{xx*}}{\partial x} - m^{xy*}\, s^2 \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{12}^1$	$\frac{\partial m^{yx*}}{\partial y} + m^{yy*}\, s^2 \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{22}^1$	$s\sqrt{g_{11}}\, q^x$	—	$+ M^x$
Rotire în jurul lui ω	$m^{yx*} \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{g_{11}}} + m^{xx*} \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{22}}}$	$m^{xy*} \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{g_{11}}} + m^{yj*} \frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{g_{22}}}$	$s\sqrt{g_{11}}\, n^{xy}$	$s\sqrt{g_{22}}\, n^{yx}$	—

$\bar{q}^x$, $\bar{q}^y$ sînt proiecțiile pe axa z, raportate la unitatea de lungime din planul xOy a forțelor tăietoare Q^x și Q^y ce apar pe elementul de suprafață.

În consecință, expresiile analitice raportate la sistemul de axe x,y,z ale eforturilor rezultante $\mathbf{n}^x$ și $\mathbf{n}^y$ sînt

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^x = &\left[\bar{n}^{xx} + \frac{\bar{q}^x}{s}\left(\sqrt{g_{11}-1} - c\sqrt{g_{22}-1}\right)\right]\mathbf{u} + \\ &+\left[N^{xy} + \frac{\bar{q}^x}{s}\left(\sqrt{g_{22}-1} - c\sqrt{g_{11}-1}\right)\right]\mathbf{v} + \\ &+\left[\bar{n}^{xx}\sqrt{g_{11}-1} + N^{xy}\sqrt{g_{22}-1} + \bar{q}^x\right]\mathbf{w},\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^y = &\left[N^{yx} + \frac{\bar{q}^y}{s}\left(\sqrt{g_{11}-1} - c\sqrt{g_{22}-1}\right)\right]\mathbf{u} + \\ &+\left[\bar{n}^{yy} + \frac{\bar{q}^y}{s}\left(\sqrt{g_{22}-1} - c\sqrt{g_{11}-1}\right)\right]\mathbf{v} + \\ &+\left[N^{yx}\sqrt{g_{11}-1} + \bar{n}^{yy}\sqrt{g_{22}-1} + \bar{q}^y\right]\mathbf{w}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Raportînd vectorii momentelor m^x și m^y la sistemul de coordonare reciproc x^*, y^*, z se obține

$$\mathbf{m}^x = \bar{m}^{xy^*}\,\mathbf{u}^* + \bar{m}^{xx^*}\,\mathbf{v}^* + \bar{m}^{xz}\,\mathbf{w}, \tag{1.44}$$

$$\mathbf{m}^y = \bar{m}^{yy^*}\,\mathbf{u}^* + \bar{m}^{yx^*}\,\mathbf{v}^* + \bar{m}^{yx}\,\mathbf{w}. \tag{2.44}$$

Ca urmare, componentele din planul tangent la învelitoare, au expresiile

$$m^{xx'} = \frac{1}{\cos\psi^*}\bar{m}^{xx^*}; \quad m^{yy'} = \frac{1}{\cos\varphi^*}\bar{m}^{yy^*}, \tag{1.45}$$

$$m^{xy'} = \frac{1}{\cos\varphi^*}\bar{m}^{xy^*}; \quad m^{yx'} = \frac{1}{\cos\psi^*}m^{yx^*}. \tag{2.45}$$

Componentele $m^{xx'}$ și $m^{yy'}$ sînt situate pe liniile care rezultă proiectînd axele x^* și y^* pe planul tangent la învelitoare și nu coincid cu direcțiile r_x^* și r_x^*.

În ecuațiile (44), $\bar{m}^{xz}$ și $\bar{m}^{yz}$ au următoarea semnificație

$$\bar{m}^{xz} = \bar{m}^{xy^*}\operatorname{tg}\varphi^* + \bar{m}^{xx^*}\operatorname{tg}\psi^*, \tag{1.46}$$

$$\bar{m}^{yz} = \bar{m}^{yy^*}\operatorname{tg}\varphi^* + \bar{m}^{xy^*}\operatorname{tg}\psi^*, \tag{2.46}$$

în care φ^* și ψ^* sînt unghiurile axelor x^* și y^* cu planul tangent din punctul considerat al învelitorii.

Înlocuind expresiile analitice (43) și (44) ale eforturilor $\mathbf{n}^x$, $\mathbf{n}^y$, $\mathbf{m}^x$ și $\mathbf{m}^y$ în ecuațiile vectoriale (38) se obțin ecuațiile sub formă scalară care apar în tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

Ecuațiile de echilibru scrise scalar față de triedrul x, y, z.

	Componenta lui $\mathbf{n}^x$	Componenta lui $\mathbf{n}^y$	Componenta lui $\mathfrak{L}$
Proiecție pe axa **x**	$+\frac{\partial}{\partial x}\bar{n}^{xx}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{q}^{x}\left(\sqrt{g_{11}-1}-c\sqrt{g_{22}-1}\right)$	$+\frac{\partial}{\partial y}N^{yx}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\bar{q}^{y}}{s}\left(\sqrt{g_{11}-1}-c\sqrt{g_{22}-1}\right)$	$+X$
Proiecție pe axa **y**	$+\frac{\partial}{\partial x}N^{xy}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{q}^{x}\left(\sqrt{g_{22}-1}-c\sqrt{g_{11}-1}\right)$	$+\frac{\partial}{\partial y}\bar{n}^{yy}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\bar{q}^{y}}{s}\left(\sqrt{g_{22}-1}-c\sqrt{g_{11}-1}\right)$	$+Y$
Proiecție pe axa **z**	$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{n}^{xx}\sqrt{g_{11}-1}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N^{xy}\sqrt{g_{22}-1}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\bar{q}^{x}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\left(N^{yx}\sqrt{g_{11}-1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{n}^{yy}\sqrt{g_{22}-1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\bar{q}^{y}$	$+Z$

Tabloul nr. 3 *(continuare)*

	Componenta lui m^x	Componenta lui m^y	Componenta lui $\mathbf{R}_x \times \mathbf{n}^x$	Componenta lui $\mathbf{R}_y \times \mathbf{n}^y$	Componenta lui $\mathfrak{M}$
Rotire în jurul lui $\mathbf{x}^*$	$+\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}^{xy*}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\bar{m}^{yy*}$	$-s\sqrt{g_{11}}\cdot\sqrt{g_{11}-1}\cdot$ $\cdot[N^{xy}+q^x(\sqrt{g_{22}-1}-c\sqrt{g_{11}-1})]$	$-s\sqrt{g_{22}}[\bar{q}^y-N^{yx}\sqrt{g_{11}-1}$ $+\sqrt{g_{22}-1}(\sqrt{g_{22}-1}-c\sqrt{g_{11}-1})\bar{q}^y]$	$+\mathfrak{M}^y$
Rotire în jurul lui $\mathbf{y}^*$	$+\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}^{xx*}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\bar{m}^{yx*}$	$[-s\sqrt{g_{11}}[\bar{q}^x-N^{xy}\sqrt{g_{22}-1}+$ $+\sqrt{g_{11}-1}(\sqrt{g_{11}-1}-c\sqrt{g_{22}-1})\bar{q}^x]$	$-s\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}-1}[$ $[N^{yx}+\bar{q}^y(\sqrt{g_{11}-1}-c\sqrt{g_{22}-1})]$	$+\mathfrak{M}^x$
Rotire în jurul lui $\mathbf{z}$	$\frac{\partial}{\partial x}\bar{m}^{xz}$	$\frac{\partial}{\partial y}\bar{m}^{yz}$	$s\sqrt{g_{11}}[N^{xy}+(\sqrt{g_{22}-1}-$ $c\sqrt{g_{11}-1})\bar{q}^x]$	$-s\sqrt{g_{22}}[N^{yx}+$ $+(\sqrt{g_{11}-1}-c\sqrt{g_{22}-1})\bar{q}^y]$	

Tabloul nr. 4

Ecuații de echilibru scrise scalar în raport cu triedrul r_x, r_y, ω în ipoteza V. Z. VLASOV

	Componentele lui $\mathbf{n}^x$	Componentele lui $\mathbf{n}^y$	Componentele lui $\mathfrak{L}$
Proiecție pe $\mathbf{r}^x$	$+\frac{\partial n^{xx}}{\partial x}$	$+\frac{\partial n^{yx}}{\partial y}$	$+X$
Proiecție pe $\mathbf{r}^y$	$+\frac{\partial n^{xy}}{\partial x}$	$+\frac{\partial n^{yy}}{\partial y}$	$+Y$
Proiecție pe ω	$-\frac{\partial q^x}{\partial x}+n^{xx}\,\mathfrak{I}+n^{xy}\,\mathfrak{J}$	$-\frac{\partial q^y}{\partial y}+n^{yx}\,\mathfrak{J}+n^{yy}\,\mathfrak{L}$	$+Z$

	Componentele $\mathbf{m}^x$	Componentele lui $\mathbf{m}^y$	Componentele $\mathbf{R}_x \times \mathbf{n}^x$	Componentele $\mathbf{R}_y \times \mathbf{n}^y$	$\mathfrak{M}$
Rotire în jurul lui r_x^*	$+\frac{\partial m^{xy\star}}{\partial x}$	$+\frac{\partial m^{yy\star}}{\partial y}$		$+sq^y$	$\mathfrak{M}^x$
Rotire în jurul lui r_y^*	$+\frac{\partial m^{xx\star}}{\partial x}$	$+\frac{\partial m^{yx\star}}{\partial y}$	$+sq^x$		$\mathfrak{M}^y$
Rotire în jurul lui ω	$+m^{yx\star}\,\mathfrak{I}+m^{xx\star}\,\mathfrak{J}$	$-m^{xy\star}\,\mathfrak{J}-m^{yy\star}\,\mathfrak{L}$	sn^{xy}	$-sn^{yx}$	

Tabloul nr. 5

Ecuațiile de echilibru scrise scalar în raport cu axele x, y, z, în ipoteza că se neglijează forțele tăietoare în ecuațiile de proiecție și termenii multiplicați cu $\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{11}-1}$, $\sqrt{g_{22}}\,\sqrt{g_{22}-1}$, $\sqrt{g_{11}}\cdot\sqrt{g_{22}-1}$ și $\sqrt{g_{22}}\cdot\sqrt{g_{11}-1}$

	Componenta lui $\mathbf{n}^x$	Componenta lui $\mathbf{n}^y$			**P**
Proiecție pe axa x	$+\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{n}^{xx}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\,N^{xy}$			$+X$
Proiecție pe axa y	$+\frac{\partial}{\partial x}\,N^{xy}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\,\bar{n}^{yy}$			$+Y$
Proiecție pe axa z	$+\frac{\partial}{\partial x}(n^{xx}\sqrt{g_{11}-1})+$ $+\frac{\partial}{\partial x}(N^{xy}\sqrt{g_{22}-1})+$ $+\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{q}^x$	$+\frac{\partial}{\partial y}(N^{yx}\sqrt{g_{11}-1})+$ $+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{n}^{yy}\sqrt{g_{22}-1})+$ $+\frac{\partial}{\partial y}\,\bar{q}^y$			$+Z$
	Componenta lui m^x	Componenta lui m^y	$\mathbf{R}_x \times \mathbf{n}^x$	$\mathbf{R}_y \times \mathbf{n}^y$	**m**
Rotire în jurul lui x^*	$+\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{m}^{xy*}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\,\bar{m}^{yy}$	$-$	$-s\sqrt{g_{22}}\,\bar{q}^y$	$+m^x$
Rotire în jurul lui y^*	$+\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{m}^{xx*}$	$+\frac{\partial}{\partial y}\,\bar{m}^{xy*}$	$-s\sqrt{g_{11}}\,\bar{q}^x$	$-$	$+m^y$
Rotire în jurul lui z	$\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{m}^{xz}$	$-\frac{\partial}{\partial y}\,m^{yz}$	$s\sqrt{g_{11}}\,N^{xy}$	$-s\sqrt{g_{22}}\,N^{yx}$	

IV

9. Ecuațiile scrise în tablourile nr. 2 și 3 permit să punem în evidență următoarele *concluzii* :

9.1. Se obțin expresii mai simple cînd se raportează starea de echilibru a elementului de învelitoare la proiecția sa din planul de coordonate xOy (ecuațiile din tabloul nr. 3).

9.2. Ecuațiile din tabloul nr. 2, se pot simplifica fără să se modifice aproximația de calcul, alegînd rețeaua de coordonate curbilinii, astfel încît unghiul χ (format de liniile x și y) să rămînă constant.

Introducînd *ipoteza lui V. Z. V l a s o v* (după care metrica pe suprafață se consideră egală cu metrica în plan) componentele tensorului metric fundamental devin egale cu unitatea și simbolii lui Cristoffel se anulează ; sistemul de ecuații se reduce la forma din tabloul nr. 4, *asemă-*

nătoare cu aceea care exprimă echilibrul elementului de învelitoare în coordonate rectangulare.

9.3. Ecuațiile din tabloul nr. 3, se pot pune sub o *formă simplificată*, accesibilă calculului operînd cu o *ipoteză* mai *puțin restrictivă* decît aceea a lui V. Z. V l a s o v : în ecuațiile de proiecție după axele x și y se consideră neglijabili termenii în care intervin forțele tăietoare, iar în ecuațiile de momente, termenii multiplicați cu expresiile

$$\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{11}-1}, \sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}-1}, \sqrt{g_{22}}\cdot\sqrt{g_{11}-1} \text{ și } \sqrt{g_{11}}\cdot\sqrt{g_{22}-1}.$$

Ecuațiile care rezultă în acest caz, apar în tabloul nr. 5 și la fel ca pentru ecuațiile din tabloul nr. 4, se *constată că ele sînt asemănătoare cu acele care se obțin în coordonate rectangulare.* Aceste ecuații apar ca extensiune a sistemului de ecuații Pucher [12].

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В КОСЫХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК НЕИЗМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В некоторых случаях вопрос тонких оболочек может быть успешнее исследован, применяя системы косых координат.

В работе даются общие уравнения равновесия относительно двух систем косых осей:

— первой системы, образованной единичными векторами касательных на направлениях x, y и нормалью к оболочке,

— второй системы, образованной прямоугольной системой xyz, к которой отнесена средняя поверхность оболочки.

Для упрядочения использовали системы основных осей и системы взаимных осей, оперируя единичными векторами основной системы и взаимными векторами.

Выбирая надлежащим образом составляющие напряжений и производя несколько подходящих замен, вывели упрощенные формулы, позволяющие установить разные степени приближения.

LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE EN COORDONNÉES OBLIQUES POUR LES VOILES MINCES D'ÉPAISSEUR CONSTANTE

(RÉSUMÉ)

Dans certains cas, la question des voiles minces peut être plus avantageusement étudiée au moyen des systèmes de coordonnées obliques.

Dans la présente étude, on donne les équations générales d'équilibre par rapport à deux systèmes d'axes obliques : le premier formé par les vecteurs unitaires des tangentes **u**, **v**, qui se trouvent sur les directions x, y et la normale ω à la voile ; le second, est formé par le système cartésien $x\ y\ z$, auquel on rapporte la surface médiane de la voile.

Pour l'ordonnance de l'écriture, on a utilisé les systèmes d'axes de base et les systèmes d'axes réciproques opérant avec les vecteurs unitaires du système fondamental et les vecteurs réciproques.

Par un choix judicieux des constituants des efforts et après une série de substitutions convenables, on a abouti à des formules simplifiées, permettant de mettre en évidence les différents degrés d'approximation.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Lardy, *Die Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Platten.* Schweitz. Bauzeitung, septembrie, 1949, p. 252.
2. A. E. Love, *Lehrbuch der Elastizität.* B. G. Teubner, Leipzig, 1907.
3. W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen.* Springer-Verlag, Berlin, 1934.
4. S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells.* Mc Graw Hill, London, 1940.
5. V. Z. Vlasov, *Obșceaia teoriia obolocek.* Gostehizdat, Moscova, 1949.
6. W. Z. Chien, *The Intrinsec Theory of Shells Quarterly of Applied Mathematics.* 1944, vol. I.
7. A. I. Lurie, *Statika uprughih obolocek.* Tehteorizdat, Moscova, 1953.
8. A. I. Goldenweiser, *Teoriia uprughih obolocek.* Tehteorizdat, Moscova, 1953.
9. D. Rüdinger, *Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit schiefem Grundriss.* Österreichisches Lugeman-Archiv, 1955, vol. IX, caietul 4.
10. N. Teodorescu, *Metode vectoriale în fizica matematică.* Ed. tehnică, București, 1954, vol. II.
11. G. Vrănceanu, *Geometria analitică și proiectivă.* Ed. tehnică, București 1954.
12. A. Pucher, *Über den Spannungszustand in doppeltgekrümmten Flächen.* Beton und Eisen, 1934, nr. 33, p. 298.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul, VII nr. 3, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

O METODĂ DE APROXIMARE A CONDIŢIILOR PE CONTUR ÎN CAZUL PROBLEMEI PLANE A ELASTICITĂŢII

DE

P. P. TEODORESCU

1. Introducere

Studiul local al unui element infinit mic dintr-un corp elastic ne dă starea de tensiune şi de deformaţie într-un punct oarecare al unui corp oarecare. Pentru a ne referi la un corp anumit şi la o solicitare anumită (exterioară sau masică) trebuie să ţinem seama de aşa-numitele condiţii pe contur. Ele ne precizează soluţia problemei. Studiul local trebuie deci completat cu un studiu global.

În general putem cunoaşte deplasările sau eforturile unitare corespunzătoare punctelor de pe contur. Va trebui să punem condiţia ca eforturile (în unele puncte) şi deplasările (în alte puncte) pe contur, obţinute din calcul, să fie egale cu cele date.

Dacă izbutim să satisfacem condiţiile date în toate punctele conturului, găsind o funcţie care să reprezinte starea de tensiune sau de deformaţie în fiecare punct al corpului, problema este pe deplin rezolvată. Unele metode de calcul (calcul variaţional) ne permit să găsim cu aproximaţia dorită expresia acestei funcţii sub forma unei dezvoltări în serie [8]. Această exprimare analitică ne dă posibilitatea să calculăm valoarea funcţiei eforturilor sau a derivatelor sale în orice punct din interiorul corpului. Alte metode (calculul cu diferenţe finite — metoda reţelelor, metoda relaxării) ne permit să obţinem valoarea aproximativă a funcţiei căutate într-un număr finit de puncte din interiorul corpului, satisfăcînd condiţiile pe contur tot într-un număr finit de puncte.

Metoda de calcul, pe care o vom dezvolta pentru unele cazuri în cele ce urmează, are părţi comune cu fiecare din metodele menţionate mai sus. Metoda constă în a căuta o funcţie analitică, de formă cît mai simplă, care să verifice condiţiile pe contur într-un număr finit de puncte; această funcţie ne dă starea de tensiune şi de deformaţie pentru orice punct din interiorul corpului.

Aproximaţia cu care lucrăm poate fi oricît de bună vrem. Un exemplu de calcul ne va arăta precizia rezultatelor. Această metodă poate fi folosită cu succes atunci cînd alte metode mai rapide sau mai exacte nu sînt eficace.

2. Problema plană

Ne vom referi numai la problema plană a teoriei elasticității și anume la starea de tensiune plană. Rezultatele rămîn valabile și pentru starea de deformație plană dacă înlocuim modulul de elasticitate E și coeficientul lui Poisson μ prin constantele elastice generalizate

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2}; \qquad \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{1}$$

Eforturile unitare se pot exprima sub forma [1] și [9]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx,$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy, \tag{2}$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

iar componentele deplasării vor fi

$$Eu = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x} - \int dx \int X dx + \mu \iint Y dx dy + f_1(y) + E(-\omega_0 y + u_0), \tag{3}$$
$$Ev = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y} - \int dy \int Y dy + \mu \iint X dx dy + f_2(x) + E(\omega_0 x + v_0),$$

unde u_0 și v_0 sînt deplasările, iar ω_0 este rotația grinzii perete în planul ei, considerată ca un corp rigid.

Funcția F a eforturilor trebuie să verifice ecuația

$$\Delta\Delta F = \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy - \mu \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \tag{4}$$

Funcțiile de o singură variabilă $f_1(y)$ și $f_2(x)$ sînt date de ecuația diferențială cu variabile separate

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \int dx \int \frac{\partial X}{\partial y} dx - \int dy \frac{\partial Y}{\partial x} dy + \mu \iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0. \tag{5}$$

Condițiile pe contur, pe un element de linie de orientare $\bar{n}$, se scriu sub forma

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \tag{6}$$
$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y),$$

unde p_{nx}, p_{ny}, sînt componentele încărcării pe acest element de linie.

A pune aceste condiții este echivalent, în lipsa forțelor masice, cu a cunoaște pe contur valoarea funcției și a derivatei sale normale. Aceste valori se obțin cu ușurință, observînd că funcția și derivata normală sînt momentul, respectiv forța axială într-o grindă imaginară de-a lungul conturului, sub acțiunea sarcinilor exterioare.

Pe de altă parte, trebuie ca sarcinile exterioare să se echilibreze pe contur (dacă ținem seama de forțele masice, trebuie să se echilibreze împreună cu acestea) pentru ca funcția eforturilor și derivatele sale parțiale să fie univoc determinate.

3. Polinoame biarmonice

Pentru metoda de calcul propusă este convenabil să folosim integrale de forma cea mai simplă. De aceea vom folosi polinoame biarmonice.

I. I. Goldenblat [7] a dat următoarea formă generală pentru funcțiile biarmonice

$$F = \varphi_0 + y\varphi_1 + y^2\varphi_2 + y^3\varphi_3 + \sum_{n=2}^{\infty} y^{2n} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\left[(n-1)\frac{\partial^{2n}\varphi_0}{\partial x^{2n}} + 2n\frac{\partial^{2n-2}\varphi^2}{\partial x^{2n-2}}\right] + \sum_{n=2}^{\infty} y^{2n+1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}\left[(n-1)\frac{\partial^{2n}\varphi_1}{\partial x^{2n}} + 6n\frac{\partial^{2n-2}\varphi_3}{\partial x^{2n-2}}\right], \tag{7}$$

unde φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 sînt funcții arbitrare. Prin particularizări se pot obține polinoamele biarmonice.

Plecînd de la forma generală a unui polinom omogen de gradul n putem găsi coeficienții, punînd condiția ca acest polinom să fie biarmonic [11].

Putem ajunge la acest rezultat și pe altă cale. E. Almansi [2] a arătat că o funcție biarmonică se poate pune totdeauna sub forma

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + (x^2 + y^2)\,\psi(x, y), \tag{8}$$

unde φ și ψ sînt funcții armonice.

Alegem un polinom de forma

$$P_n(x, y) = (a + ib)(x + iy)^n + (x^2 + y^2)(c + id)(x + iy)^{n-2}, \tag{9}$$

unde i este unitatea imaginară.

Găsim astfel că un polinom biarmonic de gradul n depinde de patru constante arbitrare. După proprietățile de paritate în raport cu cele două variabile, acest polinom se poate descompune în două polinoame biarmonice, fiecare depinzînd de cîte două constante arbitrare.

Pentru polinomul biarmonic omogen de gradul n par găsim:

— un polinom par în raport cu x și y

$$P_n^{22}(x, y) = \alpha_n\left[x^n - \frac{n-2}{n}C_n^2 x^{n-2}y^2 + \frac{n-4}{n}C_n^4 x^{n-4}y^4 - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{2}{n}C_n^{n-2}x^2y^{n-2}\right] + \beta_n\left[y^n - \frac{n-2}{n}C_n^2 x^2 y^{n-2} + \frac{n-4}{n}C_n^4 x^4 y^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{2}{n}C_n^{n-2}x^{n-2}y^2\right] = \tag{10}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{n-2i}{n} C_n^{2i}(\alpha_n x^{n-2i}y^{2i} + \beta_n x^{2i}y^{n-2i});$$

— un polinom impar în raport cu x și y

$$P_n^{11}(x,y) = \gamma_n\Big[x^{n-1}y - \frac{n-4}{n(n-2)}C_n^3 x^{n-3}y^3 + \frac{n-6}{n(n-2)}C_n^5 x^{n-5}y^5 - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n(n-2)}C_n^{n-3}x^3y^{n-3}\Big] + \delta_n\Big[xy^{n-1} - \frac{n-4}{n(n-2)}C_n^3 x^3 y^{n-3} + \frac{n-6}{n(n-2)}C_n^5 x^5 y^{n-5} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n(n-2)}C_n^{n-3}x^{n-3}y^3\Big] = \tag{11}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^i \frac{n-2i-2}{n(n-2)}C_n^{2i+1}(\gamma_n x^{n-2i-1}y^{2i+1} + \delta_n x^{2i+1}y^{n-2i-1}).$$

Pentru polinomul biarmonic omogen de gradul n impar găsim:
— un polinom impar în raport cu x și par în raport cu y

$$P_n^{12}(x,y) = \alpha_n\Big[x^n - \frac{n-3}{n-1}C_n^2 x^{n-2}y^2 + \frac{n-5}{n-1}C_n^4 x^{n-4}y^4 - \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2}{n-1}C_n^{n-3}x^3y^{n-3}\Big] + \beta_n\Big[xy^{n-1} - \frac{n-3}{n(n-1)}C_n^3 x^3 y^{n-3} + \frac{n-5}{n(n-1)}C_n^5 x^5 y^{n-5} - \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2}{n(n-1)}C_n^{n-2}x^{n-2}y^2\Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{n-2i-1}{n-1}\left(\alpha_n C_n^{n-2i}x^{n-2i}y^{2i} + \beta_n\frac{C_n^{n-2i-1}}{n}x^{2i+1}y^{n-2i-1}\right); \tag{12}$$

— un polinom par în raport cu x și impar în raport cu y

$$P_n^{21}(x,y) = \gamma_n\Big[x^{n-1}y - \frac{n-3}{n(n-1)}C_n^3 x^{n-3}y^3 + \frac{n-5}{n(n-1)}C_n^5 x^{n-5}y^5 - \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2}{n(n-1)}C_n^{n-2}x^2y^{n-2}\Big] + \delta_n\Big[y^n - \frac{n-3}{n-1}C_n^2 x^2 y^{n-2} + \frac{n-5}{n-1}C_n^4 x^4 y^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2}{n-1}C_n^{n-3}x^{n-3}y^3\Big] = \tag{13}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{n-2i-1}{n-1}\left(\gamma_n\frac{C_n^{n-2i-1}}{n}x^{n-2i-1}y^{2i+1} + \delta_n C_n^{n-2i}x^{2i}y^{n-2i}\right),$$

unde C_p^q este simbolul combinărilor a p obiecte luate cîte q.

În anexă se dau expresiile polinoamelor biarmonice, precum și ale derivatelor lor parțiale pînă la gradul 12 inclusiv.

Pe baza acestor rezultate se pot calcula și deplasările. De pildă, din expresia funcției F_4^{22} obținem, folosind relațiile (3) și (5),

$$Eu = \alpha_4 [-2(1+2\mu)x^3 + 6\mu xy^2] + \beta_4 [6(2+\mu)xy^2 - 2x^3], \quad (14)$$

$$Ev = \alpha_4 [6(2+\mu)x^2y - 2y^3] + \beta_4 [-2(1+2\mu)y^3 + 6\mu x^2y].$$

Am luat constantele u_0, v_0, ω_0 nule datorită proprietăților de paritate ale deplasărilor în raport cu cele două variabile.

4. Aproximarea condițiilor pe contur

Vom considera starea de tensiune reprezentată de polinomul

$$P(x, y) = \sum_{i=2}^{n} P_i(x, y), \quad (15)$$

care cuprinde $(4n - 5)$ constante arbitrare, datorită formei speciale a polinomului P_2^{11}.

Pentru un punct de pe contur putem pune condițiile (6) în eforturi sau putem pune condiții în deplasări, folosind relațiile (3). Deci pentru un punct de pe contur găsim două relații între constantele de determinat. Scriind că funcția $P(x, y)$ îndeplinește condițiile pe contur în $(2n - 3)$ puncte, găsim un sistem de $(4n-6)$ ecuații liniare cu $(4n - 5)$ necunoscute care ne va determina constantele α_i, β_i, γ_i și δ_i. Una din aceste constante se poate lua arbitrară (de pildă $\delta_n = 0$).

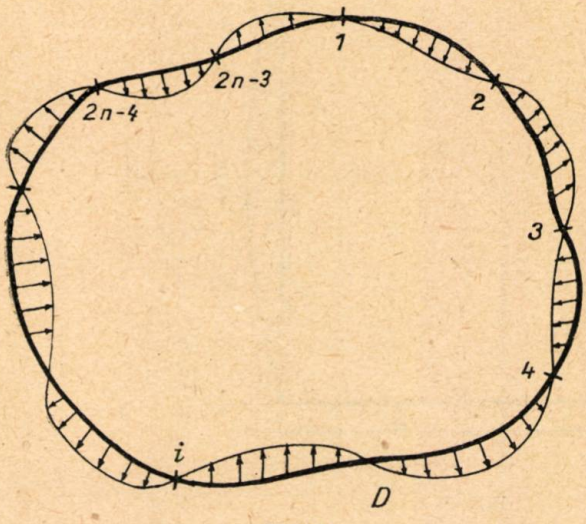


Fig. 1

În felul acesta funcția biarmonică (15) pe care o determinăm va corespunde unei stări de tensiune în grinda perete, dată de o distribuție $\mathfrak{D}_1$ de eforturi sau deplasări pe contur foarte apropiată de distribuția $\mathfrak{D}_2$ a problemei pe care o studiem.

Fie $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2$ diferența dintre cele două distribuții de condiții pe contur (de pildă condiții în eforturi). O asemenea distribuție de eforturi este cea din figura 1, direcțiile eforturilor fiind oarecare în fiecare punct (componentă normală și tangențială).

Dacă numărul punctelor de pe contur în care am pus condiții exacte este suficient de mare, eforturile parazitare $\mathfrak{D}$ vor da în interiorul grinzii perete o stare de tensiune neglijabilă în raport cu starea de tensiune dată de distribuția de eforturi $\mathfrak{D}_2$. Această aproximație este cu atît mai vala-

bilă cu cît sarcinile pe contur se echilibrează pe porțiuni și putem aplica principiul lui B. de St. Venant.

Numărul punctelor în care se pun condiții pe contur precum și aproximația pe care ne-o dă metoda de calcul se pot determina practic de la caz la caz, după cum vom vedea pe un exemplu.

În cazul unui contur cu proprietăți de simetrie și a unor încărcări simetrice sau antisimetrice se obțin simplificări importante de calcul; în acest caz se folosesc formele pare sau impare în raport cu x sau y ale polinoamelor biarmonice, iar condițiile se pun numai pe o parte a conturului.

5. Exemplu de calcul

Vom determina starea de efort și de deformație într-o grindă perete pătrată, caz ce nu se poate trata prin metodele analitice obișnuite de calcul.

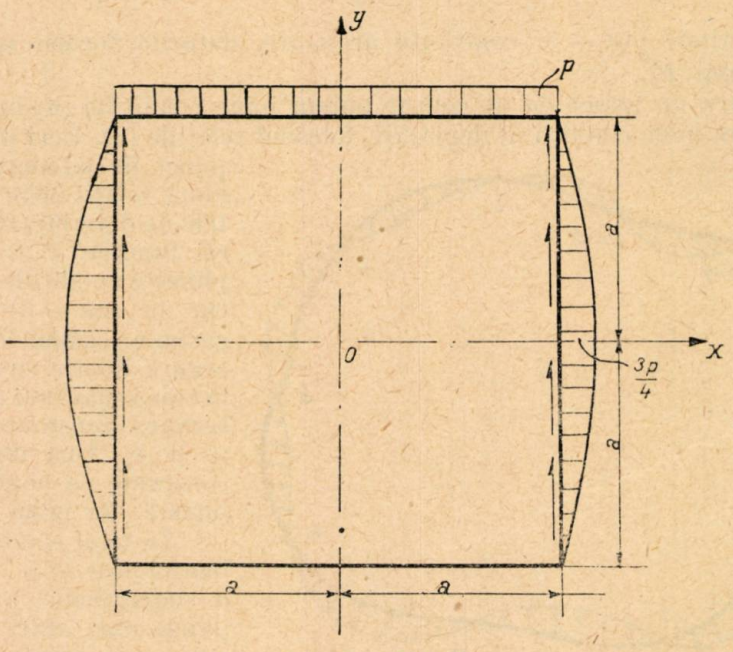


Fig. 2

Presupunem că grinda perete este acționată de o sarcină uniform distribuită la partea superioară, de intensitate p și lateral de reacțiuni ce acționează sub forma unor sarcini tangențiale, distribuite parabolic (fig. 2).

Pentru a simplif ca calculul vom descompune problema în două cazuri de încărcare, după proprietățile de simetrie în raport cu axa Ox.

Vom avea astfel de rezolvat cazul de încărcare din figura 3 *a* cu proprietăți de antisimetrie în raport cu axa Ox. Pentru cazul de încărcare din figura 3 *b*, care este o compresiune simplă, corespunde funcția eforturilor

$$P''(x, y) = -\frac{p}{4}x^2. \tag{16}$$

Aceasta ne dă eforturile unitare

$$\sigma_x = 0: \quad \sigma_y = -\frac{p}{2}: \quad \tau_{xy} = 0. \tag{17}$$

Pentru primul caz de încărcare vom alege un polinom $P'(x, y)$ par în raport cu x și impar în raport cu y.

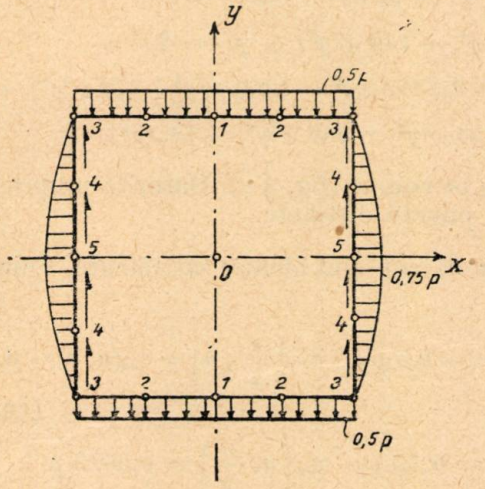


Fig. 3 *a*

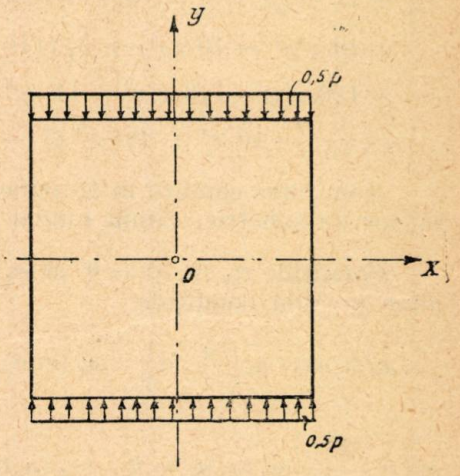


Fig. 3 *b*

Sarcinile care acționează pe contur își fac echilibru; condiția de univocitate a funcției lui Airy este deci satisfăcută.

Alegem o funcție a eforturilor de forma

$$P'(x, y) = P_3^{21} + P_5^{21} + P_7^{21} + P_9^{21} + P_{11}^{21} = \gamma_3 x^2 y + \delta_3 y^3 +$$
$$+ \gamma_5 (x^4 y - x^2 y^3) + \delta_5 (y^5 - 5 x^2 y^3) + \gamma_7 \left(x^6 y - \frac{10}{3} x^4 y^3 + x^2 y^5 \right) +$$
$$+ \delta_7 \left(y^7 - 14\, x^2 y^5 + \frac{35}{3} x^4 y^3 \right) + \gamma_9 (x^8 y - 7\, x^6 y^3 + 7\, x^4 y^5 - x^2 y^7) +$$
$$+ \delta_9 (y^9 - 27\, x^2 y^7 + 63\, x^4 y^5 - 21\, x^6\, y^3) + \gamma_{11} \left(x^{10} y - 12\, x^8\, y^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{126}{5} x^6 y^5 - 12\, x^4 y^7 + x^2 y^9 \right). \tag{18}$$

Eforturile unitare corespunzătoare vor fi

$$\sigma_x = 6 \delta_3 y - 6 \gamma_5 x^2 y + \delta_5 (20\, y^3 - 30\, x^2 y) + \gamma_7 (-20\, x^4 y + 20\, x^2 y^3) +$$
$$+ \delta_7 (42\, y^5 - 280\, x^2 y^3 + 70\, x^4 y) + \gamma_9 (-42\, x^6 y + 140\, x^4 y^3 - 42\, x^2 y^5) +$$
$$+ \delta_9 (72\, y^7 - 1134\, x^2 y^5 + 1260\, x^4 y^3 - 126\, x^6 y) +$$
$$+ \gamma_{11} (-72\, x^8 y + 504\, x^6 y^3 - 504\, x^4 y^5 + 72\, x^2 y^7)$$

$$\sigma'_y = 2\gamma_3 y + \gamma_5(12x^2y - 2y^3) - 10\,\delta_5 y^3 + \gamma_7(30x^4y - 40x^2y^3 + 2y^5) +$$
$$+ \delta_7(-28y^5 + 140x^2y^3) + \gamma_9(56x^6y - 210x^4y^3 + 84x^2y^5 - 2y^7) +$$
$$+ \delta_9(-54y^7 + 756x^2y^5 - 630x^4y^3) +$$
$$+ \gamma_{11}(90x^8y - 672x^6y^3 + 756x^4y^5 - 144x^2y^7 + 2y^9), \qquad (19)$$
$$\tau'_{xy} = -2\gamma_3 x + \gamma_5(-4x^3 + 6xy^2) + 30\,\delta_5 xy^2 + \gamma_7(-6x^5 +$$
$$+ 40x^3y^2 - 10xy^4) + \delta_7(140xy^4 - 140x^3y^2) + \gamma_9(-8x^7 +$$
$$+ 126x^5y^2 - 140x^3y^4 + 14xy^6) + \delta_9(378xy^6 - 1260x^3y^4 + 378x^5y^2) +$$
$$+ \gamma_{11}(-10x^9 + 288x^7y^2 - 756x^5y^4 + 336x^3y^6 - 18xy^8).$$

Vom pune condiții în 16 puncte pe contur (fig. 3 *a*). Datorită proprietăților de simetrie, rămîn numai 5 puncte distincte.

Condițiile $\tau'_{xy}(0, a) = 0$ și $\sigma'_x(a, 0) = 0$ sînt identic satisfăcute. Vom pune pe rînd condițiile

$$\sigma'_y(0, a) = \sigma'_y\left(\frac{a}{2}, a\right) = \sigma'_y(a, a) = -0{,}5\,p\,; \quad \tau'_{xy}\left(\frac{a}{2}, a\right) = \tau'_{xy}(a, a) = 0, \qquad (20)$$

$$\sigma'_x\left(a, \frac{a}{2}\right) = \sigma'_x(a, a) = 0\,; \quad \tau'_{xy}(a, 0) = 0{,}75\,p\,; \quad \tau'_{xy}\left(a, \frac{a}{2}\right) = 0{,}5625\,p.$$

Găsim astfel următorul sistem de 9 ecuații liniare care ne determină cei 9 parametri arbitrari

$$(\gamma_3 a) - (\gamma_5 a^3) - 5(\delta_5 a^3) + (\gamma_7 a^5) - 14(\delta_7 a_5) - (\gamma_9 a^7) - 27(\delta_9 a^7) +$$
$$+ (\gamma_{11} a^9) = -0{,}25\,p,$$
$$2(\gamma_3 a) + (\gamma_5 a^3) - 10(\delta_5 a^3) - 6{,}125(\gamma_7 a^5) + 7(\delta_7 a^5) + 6{,}75(\gamma_9 a^7) +$$
$$+ 95{,}625(\delta_9 a^7) + 3{,}1016(\gamma_{11} a_9) = -0{,}5\,p,$$
$$(\gamma_3 a) + 5(\gamma_5 a^3) - 5(\delta_5 a^3) - 4(\gamma_7 a^5) + 56(\delta_7 a^5) - 36(\gamma_9 a^7) +$$
$$+ 36(\delta_9 a^7) + 16(\gamma_{11} a^9) = -0{,}25\,p,$$
$$(\gamma_3 a) - 2{,}5(\gamma_5 a^3) - 15(\delta_5 a^3) + 0{,}1875(\gamma_7 a^5) - 52{,}5(\delta_7 a^5) +$$
$$+ 6{,}625(\gamma_9 a^7) - 43{,}3125(\delta_9 a^7) - 11{,}6055(\gamma_{11} a^9) = 0, \qquad (21)$$
$$(\gamma_3 a) - (\gamma_5 a^3) - 15(\delta_5 a^3) - 12(\gamma_7 a^5) +$$
$$+ 4(\gamma_9 a^7) + 252(\delta_9 a^7) + 80(\gamma_{11} a^9) = 0,$$
$$3(\delta_3 a) - 3(\gamma_5 a^3) - 12{,}5(\delta_5 a^3) - 7{,}5(\gamma_7 a^5) + 1{,}3125(\delta_7 a^5) -$$
$$- 4{,}8125(\gamma_9 a^7) + 59{,}625(\delta_9 a^7) + 11{,}8125(\gamma_{11} a^9) = 0,$$
$$3(\delta_3 a) - 3(\gamma_5 a^3) - 5(\delta_5 a^3) - 84(\delta_7 a^5) + 28(\gamma_9 a^7) + 36(\delta_9 a^7) = 0,$$
$$(\gamma_3 a) + 2(\gamma_5 a^3) + 3(\gamma_7 a^5) + 4(\gamma_9 a^7) + 5(\gamma_{11} a^9) = -0{,}375\,p,$$
$$2(\gamma_3 a) + 2{,}5(\gamma_5 a^3) - 7{,}5(\delta_5 a^3) - 3{,}375(\gamma_7 a^5) + 26{,}25(\delta_7 a^5) -$$
$$- 14{,}9688(\gamma_9 a^7) - 21{,}6563(\delta_9 a^7) - 19{,}9297(\gamma_{11} a^9) = -0{,}5625\,p.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații, găsim

$$\gamma_3 = -0{,}347400\,\frac{p}{a}, \qquad \delta_7 = -0{,}003585\,\frac{p}{a^5},$$

$$\delta_3 = -0{,}083952\,\frac{p}{a}, \qquad \gamma_9 = -0{,}003837\,\frac{p}{a^7},$$

$$\gamma_5 = \;\;0{,}009407\,\frac{p}{a^3}, \qquad \delta_9 = \;\;0{,}000376\,\frac{p}{a^7}, \tag{22}$$

$$\delta_5 = -0{,}014571\,\frac{p}{a^3}, \qquad \gamma_{11} = -0{,}000654\,\frac{p}{a^9}.$$

$$\gamma_7 = -0{,}009264\,\frac{p}{a^5},$$

Funcția P' a eforturilor este astfel determinată.
Notăm coordonatele reduse

$$\xi = \frac{x}{a}; \qquad \eta = \frac{y}{a}. \tag{23}$$

Înlocuind valorile (22) în (19) și ținînd seama de starea de tensiune dată de (16), găsim eforturile unitare sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= [(-0{,}504 + 0{,}380\,\xi^2 - 0{,}064\,\xi^4 + 0{,}113\,\xi^6 + 0{,}047\,\xi^8)\,\eta + \\
&+ (-0{,}291 + 0{,}819\,\xi^2 - 0{,}064\,\xi^4 - 0{,}329\,\xi^6)\,\eta^3 + \\
&+ (-0{,}151 - 0{,}265\,\xi^2 + 0{,}329\,\xi^4)\,\eta^5 + (0{,}027 - 0{,}047\,\xi^2)\,\eta^7]\,p, \\
\sigma_y &= [-0{,}500 + (-0{,}695 + 0{,}113\,\xi^2 - 0{,}278\,\xi^4 - 0{,}215\,\xi^6 - 0{,}059\,\xi^8)\,\eta + \\
&+ (0{,}127 - 0{,}132\,\xi^2 + 0{,}570\,\xi^4 + 0{,}439\,\xi^6)\,\eta^3 + \\
&+ (0{,}082 - 0{,}038\,\xi^2 - 0{,}494\,\xi^4)\,\eta^5 + \\
&+ (-0{,}013 + 0{,}094\,\xi^2)\,\eta^7 - 0{,}001\,\eta^9]\,p, \qquad (24) \\
\tau_{xy} &= [(0{,}695\,\xi - 0{,}038\,\xi^3 + 0{,}056\,\xi^5 + 0{,}031\,\xi^7 + 0{,}006\,\xi^9) + \\
&+ (-0{,}381\,\xi + 0{,}131\,\xi^3 - 0{,}338\,\xi^5 - 0{,}189\,\xi^7)\,\eta^2 + \\
&+ (-0{,}409\,\xi + 0{,}063\,\xi^3 + 0{,}494\,\xi^5)\,\eta^4 + \\
&+ (0{,}088\,\xi - 0{,}221\,\xi^3)\,\eta^6 + 0{,}012\,\xi\eta^8]\,p.
\end{aligned}$$

În felul acesta obținem pe contur o distribuție $\mathfrak{D}_1$ de eforturi, din care scădem distribuția $\mathfrak{D}_2$ de sarcini exterioare. Găsim astfel:

— pentru laturile $\xi = \pm 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_x(\pm 1, \eta) &= (-0{,}028\,\eta + 0{,}135\,\eta^3 - 0{,}087\,\eta^5 - 0{,}020\,\eta^7)\,p = \\
&= -0{,}02\,\eta\,(\eta^2 - 1)\,(\eta^2 - 0{,}25)\,(\eta^2 + 5{,}6)\,p, \qquad (25) \\
\tau_{xy}(\pm 1, \eta) &= \pm(-0{,}027\,\eta^2 + 0{,}148\,\eta^4 - 0{,}133\,\eta^6 + 0{,}012\,\eta^8)\,p \cong \\
&\cong \pm 0{,}012\,\eta^2\,(\eta^2 - 1)\,(\eta^2 - 0{,}25)\,(\eta^2 - 9{,}7)\,p;
\end{aligned}$$

— pentru laturile $\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(\xi, \pm 1) &= \pm(0{,}037\,\xi^2 - 0{,}202\,\xi^4 + 0{,}224\,\xi^6 - 0{,}059\,\xi^8)\,p \cong \\
&\cong \mp 0{,}05\,\xi^2\,(\xi^2 - 1)\,(\xi^2 - 0{,}25)\,(\xi^2 - 2{,}55)\,p, \qquad (26) \\
\tau_{xy}(\xi, \pm 1) &= (0{,}005\,\xi - 0{,}065\,\xi^3 + 0{,}212\,\xi^5 - 0{,}158\,\xi^7 + 0{,}006\,\xi^9)\,p \cong \\
&\cong 0{,}006\,\xi\,(\xi^2 - 1)\,(\xi^2 - 0{,}25)\,(\xi^2 - 0{,}15)\,(\xi^2 - 25)\,p.
\end{aligned}$$

Aceste eforturi parazitare $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2$ sînt reprezentate în figura 4. Cu toate că nu se aplică principiul lui B. de St. Venant, grinda perete avînd dimensiuni egale, în interior ia naștere o stare de tensiune neglijabilă (eforturile $\mathfrak{D}$ fiind foarte mici în raport cu încărcarea $\mathfrak{D}_2$). Putem face o verificare elementară, aproximînd încărcarea cu sarcini distribuite

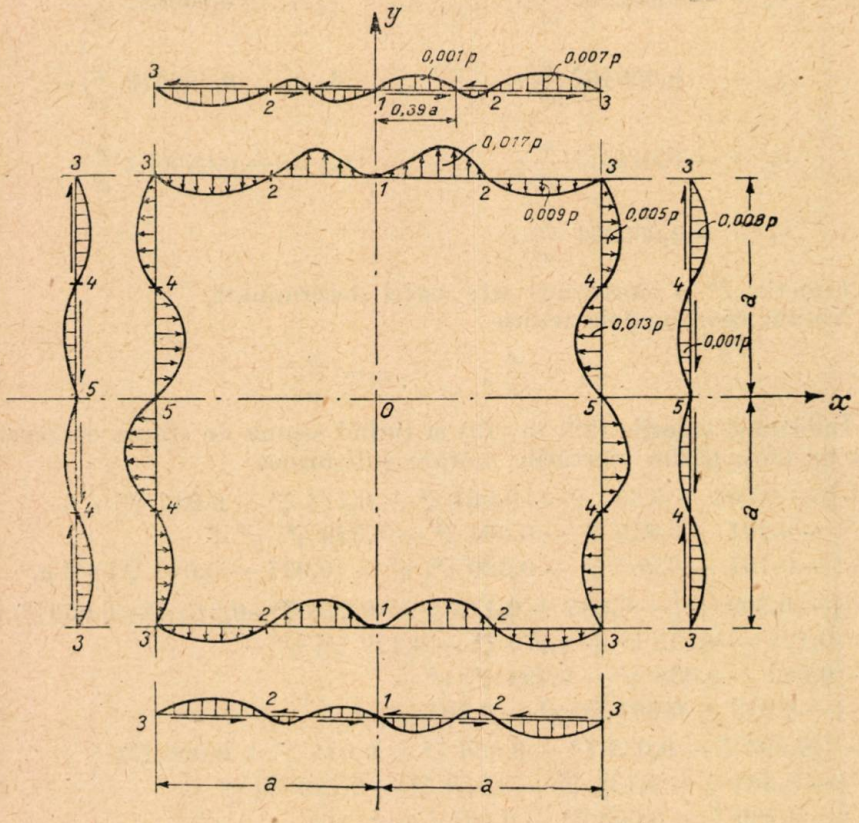


Fig. 4

parabolic și folosind metodele rezistenței materialelor. Momentele în secțiunile 2—2 și 1—1 verticale vor fi

$$M_{2-2} = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}01\, p \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = -\frac{0{,}01 p a^2}{6},$$

$$M_{1-1} = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}01\, p \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3p}{4} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}02\, p \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = -\frac{0{,}01 p a^2}{6}.$$

Modulul de rezistență fiind

$$W = \frac{1}{6}(2a)^2 = \frac{2}{3}a^2, \tag{27}$$

vom găsi

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M}{W} = \mp \frac{0{,}01 p a^2}{6} \cdot \frac{3}{2a^2} = \mp \frac{0{,}01}{4} p = \mp 0{,}0025\, p.$$

Se vede deci că eroarea nu va trece de 1,7% din sarcina exterioară, maxim pe care-l atinge în patru puncte de pe contur. Putem deci considera că relațiile (24) ne dau starea de tensiune căutată.

În figura 5 reprezentăm diagramele de eforturi date de relațiile (24).

Vom compara aceste rezultate cu cele date de rezistența materialelor și cu cele date de un calcul mai aproximativ, bazat tot pe metodele teoriei elasticității.

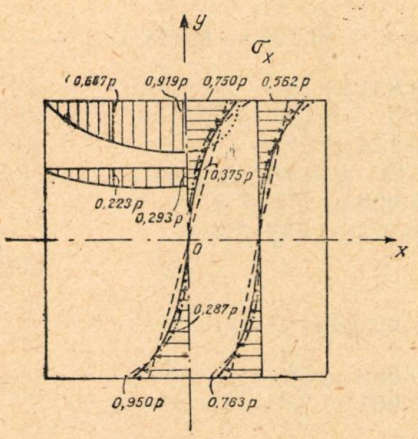


Fig. 5 *a*

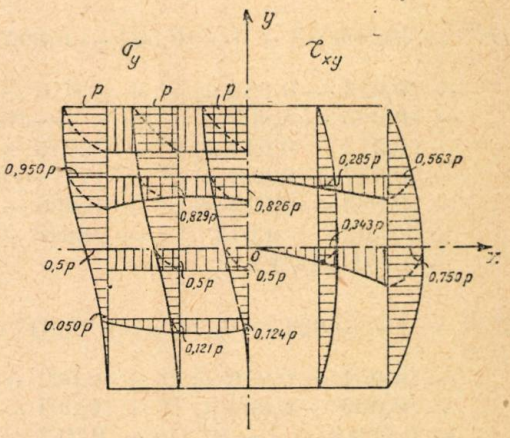


Fig. 5 *b*

Rezistența materialelor ne dă

$$\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z}\, y = -0{,}75\,(1-\xi^2)\,\eta p\,; \quad \sigma_y = 0\,;$$

$$\tau_{xy} = \frac{T(x)\cdot S(y)}{b\cdot I_z} = 0{,}75\,\xi\,(1-\eta^2)\,p. \tag{28}$$

Alegînd ca funcție a eforturilor un polinom biarmonic de gradul V obținem o stare de tensiune în care se verifică condițiile pe contur pe laturile de sus și jos ($\eta = \pm 1$), iar pe laturile $\xi = \pm 1$ se verifică condițiile numai în sumă. Dacă deschiderea e mai mare decît dublul înălțimii se poate aplica principiul lui B. de St. Venant și rezultatele obținute dau o aproximație suficientă. În cazul nostru nu mai putem aplica acest principiu și rezultatele se îndepărtează de realitate. Găsim astfel [6]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= [(-0{,}45 + 0{,}75\,\xi^2)\,\eta - 0{,}50\,\eta^3]\,p,\\ \sigma_y &= (-0{,}50 - 0{,}75\,\eta + 0{,}25\,\eta^3)\,p,\\ \tau_{xy} &= 0{,}75\,\xi\,(1-\eta^2)\,p.\end{aligned} \tag{29}$$

Comparînd rezultatele pentru secțiunile $\xi = 0$ și $\xi = 0{,}5$ găsim că distribuția reală a efortului σ_x este cuprinsă între cea dată de formula lui Navier și cea dată de relațiile (29) (fig. 5 *a*). Distribuția lui σ_x în lungul grinzii este aproximativ parabolică, după diagrama momentului încovoietor.

Efortul unitar σ_y nu este același în fiecare secțiune transversală; pe înălțimea grinzii acest efort nu variază parabolic, are însă o formă asemănătoare cu cea dată de relațiile (29).

Efortul tangențial τ_{xy} variază tot după o lege aproximativ parabolică pe înălțimea grinzii. În lungul grinzii variația acestui efort unitar nu este liniară — după diagrama forței tăietoare — decît pentru secțiuni longitudinale $|\eta| \geqq 0{,}5$.

În concluzie rezultatele date de relațiile (29) sînt mai exacte spre interiorul grinzii ($\xi = 0$; $\eta = 0$) decît spre margine.

Folosind formulele (3) și (5) putem calcula și componentele deplasării. Găsim astfel

$$E\frac{u}{a} = \{0{,}500\,\mu\xi + [-(0{,}504 - 0{,}695\,\mu)\,\xi + (0{,}127 - 0{,}038\,\mu)\,\xi^3 - \\ -(0{,}013 - 0{,}056\,\mu)\,\xi^5 + (0{,}016 + 0{,}031\,\mu)\,\xi^7 + \\ +(0{,}005 + 0{,}007\,\mu)\,\xi^9]\,\eta + [-(0{,}291 + 0{,}127\,\mu)\,\xi + \\ +(0{,}273 + 0{,}044\,\mu)\,\xi^3 - (0{,}013 + 0{,}114\,\mu)\,\xi^5 - \\ -(0{,}047 + 0{,}063\,\mu)\,\xi^7]\,\eta^3 + [-(0{,}151 + 0{,}082\,\mu)\,\xi - \\ -(0{,}088 - 0{,}013\,\mu)\,\xi^3 + (0{,}066 + 0{,}099\,\mu)\,\xi^5]\,\eta^5 + \\ +[(0{,}027 + 0{,}013\,\mu)\,\xi - (0{,}016 + 0{,}031\,\mu)\,\xi^3]\,\eta^7 + \\ +0{,}001\,\mu\xi\eta^9\}\,p, \tag{30}$$

$$E\frac{v}{a} = \{-(0{,}924 + 0{,}352\,\mu) + (0{,}947 + 0{,}348\,\mu)\,\xi^2 - \\ -(0{,}051 + 0{,}010\,\mu)\,\xi^4 + (0{,}021 + 0{,}009\,\mu)\,\xi^6 + \\ +(0{,}006 + 0{,}004\,\mu)\,\xi^8 + (0{,}001 + 0{,}001\,\mu)\,\xi^{10} - \\ -0{,}500\,\eta + [-(0{,}348 - 0{,}252\,\mu) + \\ +(0{,}057 - 0{,}190\,\mu)\,\xi^2 - (0{,}139 - 0{,}032\,\mu)\,\xi^4 - \\ -(0{,}108 + 0{,}057\,\mu)\,\xi^6 - (0{,}030 + 0{,}024\,\mu)\,\xi^8]\,\eta^2 + \\ +[(0{,}042 + 0{,}073\,\mu) - (0{,}033 + 0{,}205\,\mu)\,\xi^2 + \\ +(0{,}142 + 0{,}016\,\mu)\,\xi^4 + (0{,}110 + 0{,}082\,\mu)\,\xi^6]\,\eta^4 + \\ +[(0{,}013 + 0{,}025\,\mu) - (0{,}006 - 0{,}044\,\mu)\,\xi^2 - \\ -(0{,}082 + 0{,}055\,\mu)\,\xi^4]\,\eta^6 + \\ +[-(0{,}002 + 0{,}003\,\mu) + (0{,}012 + 0{,}006\,\mu)\,\xi^2]\,\eta^8\}\,p.$$

Folosind polinomul biarmonic de gradul V și relațiile (29) găsim

$$E\frac{u}{a} = \{0{,}500\,\mu\xi + [-(0{,}450 - 0{,}750\,\mu)\,\xi + 0{,}250\,\xi^3]\,\eta - \\ -(0{,}500 + 0{,}250\,\mu)\,\xi\eta^3\}\,p, \tag{31}$$

$$E\frac{v}{a} = \{-(0{,}912 + 0{,}375\,\mu) + (0{,}975 + 0{,}375\,\mu)\,\xi^2 - 0{,}063\,\xi^4 - 0{,}500\eta - \\ -[(0{,}375 - 0{,}225\,\mu) + 0{,}375\,\mu\xi^2]\,\eta^2 + (0{,}063 + 0{,}125\,\mu)\,\eta^4\}\,p.$$

Pentru a face comparație între aceste rezultate ne vom referi la fibra medie a grinzii perete, care în stare nedeformată are ecuația $\eta = 0$ (cu toate că această noțiune nu mai are aceeași importanță în cazul unei grinzi perete ca în cazul unei grinzi lungi).

Relațiile (30) ne dau ecuația fibrei medii deformate sub forma

$$E\frac{v}{a} = [-(0{,}924 + 0{,}352\,\mu) + (0{,}947 + 0{,}348\,\mu)\,\xi^2 - \\ -(0{,}051 + 0{,}010\,\mu)\,\xi^4 + (0{,}021 + 0{,}009\,\mu)\,\xi^6 + \\ +(0{,}006 + 0{,}004\,\mu)\,\xi^8 + (0{,}001 + 0{,}001\,\mu)\,\xi^{10}]\,p. \tag{32}$$

Iar ecuațiile (31) ne dau

$$E\frac{v}{a} = [-(0{,}912 + 0{,}375\,\mu) + (0{,}975 + 0{,}375\,\mu)\,\xi^2 - 0{,}063\,\xi^4]\,p. \quad (33)$$

Ecuația diferențială

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z} + k\,\frac{p(x)}{GA}, \quad (34)$$

unde $k = 1, 2$ pentru secțiunea dreptunghiulară ne dă fibra medie deformată prin metodele rezistenței materialelor

$$E\frac{v}{a} = \frac{1}{16}(1-\xi^2)(5-\xi^2)\,p + 0{,}6\,(1+\mu)(1-\xi^2)\,p =$$

$$= [-(0{,}912 + 0{,}600\,\mu) + (0{,}975 + 0{,}600\,\mu)\,\xi^2 - 0{,}063\,\xi^4]\,p. \quad (35)$$

Se vede ușor că rezultatele date de rezistența materialelor sînt foarte apropiate de cele date de relațiile (33). Vom preciza valabilitatea lor cu ajutorul relațiilor (32). Pentru aceasta ne vom referi la deplasarea maximă (săgeata la mijlocul grinzii $\xi = 0$).

Ecuația (32) ne dă

$$f_{TE} = (0{,}924 + 0{,}352\,\mu)\,\frac{pa}{E}\cdot \quad (36)$$

Din formula aproximativă (33) obținem

$$f'_{TE} = (0{,}912 + 0{,}375\,\mu)\,\frac{pa}{E}\cdot \quad (37)$$

Săgeata după rezistența materialelor este dată de

$$f_{RM} = (0{,}912 + 0{,}600\,\mu)\,\frac{pa}{E}\cdot \quad (38)$$

Vom preciza coeficientul lui Poisson. Pentru $\mu = 1/6$ (beton armat) găsim

$$f_{TE} = 0{,}983\,\frac{pa}{E};\quad f'_{TE} = 0{,}975\,\frac{pa}{E};\quad f_{RM} = 1{,}012\,\frac{pa}{E}\cdot \quad (39)$$

Pentru $\mu = 0{,}3$ (oțel) obținem

$$f_{TE} = 1{,}030\,\frac{pa}{E};\quad f'_{TE} = 1{,}025\,\frac{pa}{E};\quad f_{RM} = 1{,}092\,\frac{pa}{E}\cdot \quad (40)$$

Față de rezultatele date de rezistența materialelor, găsim o creștere a rigidității cu 4% la beton armat și cu 6% la oțel.

Deplasarea maximă pe orizontală se obține pentru $\xi = \pm 1$ și este aproximativ de zece ori mai mică decît săgeata f

$$u_{TE} = (0{,}084 \ldots 0{,}150)\,\frac{pa}{E}\cdot \quad (41)$$

Putem deci afirma că componenta v a deplasării este suficientă pentru a aprecia săgeata.

Mai observăm că influența efortului σ_y asupra săgeții este foarte mică în raport cu influența eforturilor σ_x și σ_{xy}.

G r a n O l s s o n a calculat [5] curbura fibrei medii deformate, cu metodele teoriei elasticității, sub forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{E}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Delta F + (1+\mu)\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right] \tag{42}$$

folosind pentru cazul nostru polinomul de gradul V.

Un studiu detaliat al deformației grinzii drepte a fost făcut de G. W o r c h [10], comparînd unele rezultate date de teoria elasticității cu cele date de rezistența materialelor (34). G. W o r c h găsește pentru coeficientul k expresia

$$k = \frac{63 + 28\mu}{40(1+\mu)} = 1 + \frac{23 - 12\mu}{40(1+\mu)}. \tag{43}$$

Pentru valori particulare ale lui μ găsim astfel $k = 1{,}373 \ldots 1{,}450 > > 1{,}200$. Aceasta ne conduce însă la săgeți aproximativ cu 10% mai mari ca cele reale. Deci rezultatele pe care le obținem sînt valabile numai pentru o grindă cu o deschidere cel puțin de două ori mai mare decît înălțimea ($\lambda = l/h \geqq 2$), condiție necesară pentru valabilitatea formulelor (29).

De o problemă analogă în legătură cu consolele scurte s-a ocupat A l. C i ș m i g i u [3] dînd rezultate pentru $l/h \geqq 2$ și arătînd că „pentru $l/h < 2$ componenta săgeții provenită din forța tăietoare poate deveni comparabilă cu componenta de încovoiere, iar pentru console foarte scurte ($l/h < 1$) este de așteptat ca efectul momentului încovoietor asupra săgeții să devină neglijabil în raport cu efectul forței tăietoare, iar rigiditatea să devină proporțională numai cu aria secțiunii transversale“ *).

Folosind rezultatele obținute de noi, putem aduce unele precizări. Pentru $l/h = 1$ componenta săgeții provenită din forța tăietoare este aproximativ de două ori mai mare decît componenta provenită din încovoiere. Folosind rezultatele date de rezistența materialelor (34), atît de bine verificate în cazul de mai sus, obținem

$$f_{RM} = \frac{1}{GA}\left[\frac{5}{384}\cdot\frac{12\,pl^2\left(\frac{l}{h}\right)^2}{2(1+\mu)} + k\frac{pl^2}{8}\right], \tag{44}$$

și putem afirma că săgeata dată de încovoiere este neglijabilă față de cea dată de forța tăietoare (reprezintă aproximativ o zecime din aceasta) pentru $l/h \leqq 0{,}5$. În acest caz putem vorbi de o rigiditate proporțională numai cu aria secțiunii transversale.

Este drept că pentru o grindă perete noțiunea de rigiditate nu poate fi legată numai de săgeata fibrei medii, ci și de deformabilitatea întregului element de construcție. Aceasta poate fi însă pe deplin studiată cu ajutorul relațiilor (30).

În general putem afirma că pentru grinzi scurte (cu $l/h \leqq 2$) [4] se impune un calcul mai exact.

*) p. 87.

7. Concluzii

Metoda de calcul se poate folosi pentru studiul unei mari varietăți de elemente de construcție, de pildă : grinzi pereți cu contur dreptunghiular, pentru diferite cazuri de rezemare și încărcare ; grinzi pereți cu un contur oarecare pentru poduri, grinzi cu vute etc.

Avantajele metodei de calcul sînt următoarele :

— Se poate face un studiu al unei grinzi pereți cu exactitatea pe care o dorim.

— Se poate studia problema unei grinzi pereți cu un contur oarecare.

— Se poate studia problema grinzilor pereți multiplu conexe (cu goluri) tot atît de ușor ca cea a grinzilor pereți simplu conexe.

— Se pot studia încărcări cu forțe masice oarecare.

— Se poate face un studiu punînd — cu tot atîta ușurință — condiții pe contur în eforturi sau deplasări (spre deosebire de alte metode).

— Spre deosebire de alte metode (diferențe finite de pildă) care ne dau valori numerice în puncte, obținem expresii analitice atît pentru eforturile unitare cît și pentru deplasări (care altminteri nu se puteau calcula).

— Putînd calcula deplasările se poate aprecia rigiditatea grinzii perete, ceea ce este foarte important în unele cazuri (de pildă pentru diafragmele de rigidizare la construcții mijlocii și înalte în regiuni seismice).

— Calculînd diferența $\mathfrak{D}$ dintre starea de efort găsită de noi și solicitările de pe contur putem aprecia aproximația cu care s-a făcut calculul.

— Se lucrează cu polinoame biarmonice, deci se folosesc metode de calcul elementare, ușor accesibile unui cerc larg de ingineri.

— În cazul unor proprietăți de simetrie sau antisimetrie se obțin simplificări importante în rezolvarea problemei.

Dezavantajele metodei de calcul sînt următoarele :

— Din punct de vedere al calculului se ajunge la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare cu un număr destul de mare de necunoscute. Acest sistem nu este simetric în raport cu diagonala principală, deci nu se poate aplica algoritmul lui Gauss. Pe de altă parte sistemul nu poate fi rezolvat prin metode iterative, condițiile de convergență ne fiind îndeplinite

— Pentru fiecare raport între dimensiunile grinzii trebuie să facem un calcul separat, neputînd astfel efectua un calcul general (ca și în cazul metodei diferențelor finite).

—Putem uneori să introducem parametri ai încărcării (care să ne indice — de pildă — o poziție arbitrară a unei sarcini). Calculul devine mai greoi (uneori chiar imposibil, trebuind să facem un studiu pentru fiecare caz în parte). Trebuie să remarcăm totuși că, în sistemul de ecuații liniare pe care-l avem de rezolvat, încărcarea afectează numai termenii liberi.

Se poate extinde metoda de calcul, făcînd ca numărul punctelor de pe contur în care punem condiții să tindă către infinit. În acest caz integrala pe care o folosim devine o serie. Încărcarea se dezvoltă pe contur într-o serie Taylor și se pun condițiile în consecință.

Eventual se pot folosi și alte funcții de eforturi decît cele polinomiale pentru diferite probleme particulare.

Metoda de calcul indicată poate fi folosită cu ușurință și în spațiul tridimensional pentru rezolvrea unor probleme analoge. Credem că această metodă ar putea conduce la rezolvarea unor probleme grele din punct de

vedere al condițiilor pe contur, probleme rămase nerezolvate pînă în prezent.

Este drept că în acest caz ajungem la un sistem de ecuații liniare cu un număr mare de necunoscute, a cărui rezolvare devine o problemă în sine. Dar cu ajutorul unei mașini electronice de calcul [1]) aceasta nu mai poate constitui o dificultate.

Unele metode mai elegante de rezolvare a problemei, metode mai puțin accesibile în general (metode variaționale sau metode b zate pe utilizarea funcțiilor de variabilă complexă) conduc — în afară de cazuri particulare — la calcule numeroase (ca și în cazul metodei dezvoltate de noi), calcule care uneori nici nu se pot efectua (spre deosebire de metoda de mai sus în care calculele se pot efectua totdeauna). De aceea am căutat să prezentăm mai amănunțit această metodă de calcul, care este în general accesibilă unui cerc larg de ingineri.

ANEXA

cu expresiile polinoamelor biarmonice și ale derivatelor lor parțial pînă la gradul 12 inclusiv

$$P_2^{22} = \alpha_2 x^2 + \beta_2 y^2; \quad \sigma_x = 2\beta_2, \quad \sigma_y = 2\alpha_2, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$P_2^{11} = (\gamma_2 + \delta_2)\, xy; \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -(\gamma_2 + \delta_2)$$

$$P_3^{12} = \alpha_3 x^3 + \beta_3 xy^2; \quad \sigma_x = 2\beta_3 x, \quad \sigma_y = 6\alpha_3 x, \quad \tau_{xy} = -2\beta_3 y$$

$$P_2^{21} = \gamma_3 x^2 y + \delta_3 y^3; \quad \sigma_x = 6\delta_3 y, \quad \sigma_y = 2\gamma_3 y, \quad \tau_{xy} = -2\gamma_3 x$$

$$P_4^{22} = \alpha_4 (x^4 - 3x^2y^2) + \beta_4 (y^4 - 3x^2y^2); \quad \sigma_x = -6\alpha_4 x^2 + \beta_4 (12 y^2 - 6x^2)$$
$$\sigma_y = \alpha_4 (12 x^2 - 6y^2) - 6\beta_4 y^2, \quad \tau_{xy} = 12 (\alpha_4 + \beta_4)\, xy$$

$$P_4^{11} = \gamma_4 x^3 y + \delta_4 xy^3; \quad \sigma_x = 6\delta_4 xy, \quad \sigma_y = 6\gamma_4 xy, \quad \tau_{xy} = -3\gamma_4 x^2 - 3\delta_4 y^2$$

$$P_5^{12} = \alpha_5 (x^5 - 5x^3y^2) + \beta_5 (xy^4 - x^3y^2); \quad \sigma_x = -10\, \alpha_5 x^3 + \beta_5 (12\, xy^2 - 2x^3)$$
$$\sigma_y = \alpha_5 (20\, x^3 - 30\, xy^2) - 6\, \beta_5\, xy^2, \; \tau_{xy} = 30\, \alpha_5\, x^2 y + \beta_5 (-4y^3 + 6x^2 y)$$

$$P_5^{21} = \gamma_5 (x^4 y - x^2 y^3) + \delta_5 (y^5 - 5\, x^2 y^5);$$
$$\sigma_x = -6\gamma_5 x^2 y + \delta_5 (20\, y^3 - 30\, x^2 y);$$
$$\sigma_y = \gamma_5 (12\, x^2 y - 2y^3) - 10_5\, y^3, \; \tau_{xy} = \gamma_5 (-4x^3 + 6\, xy^2) + 30\, \delta_5 xy^2$$

$$P_6^{22} = \alpha_6 (x^4 - 10\, x^4 y^2 + 5x^2 y^4) + \beta_6 (y^6 - 10\, x^2 y^4 + 5x^4\, y^2)$$
$$\sigma_x = \alpha_6 (-20\, x^4 + 60\, x^2 y^2) + \beta_6 (30\, y^4 - 120\, x^2 y^2 + 10\, x^4)$$
$$\sigma_y = \alpha_6 (30\, x^4 - 120\, x^2 y^2 + 10\, y^4) + \beta_6 (-20\, y^4 + 60\, x^2 y^2)$$
$$\tau_{xy} = \alpha_6 (80\, x^3 y - 40\, xy^3) + \beta_6 (80\, xy^3 - 40\, x^3 y)$$

---

[1]) În cursul anului 1956 se termină la Institutul de fizică al Academiei R.P.R. construcția unei mașini electronice de calcul cu 1500 tuburi electronice.

$$P_6^{11} = \gamma_6\left(x^5y - \frac{5}{3}x^3y^3\right) + \delta_6\left(xy^5 - \frac{5}{3}x^3y^3\right)$$

$$\sigma_x = -10\,\gamma_6\,x^3y + \delta_6\,(20\,xy^3 - 10\,x^3y)$$

$$\sigma_y = \gamma_6\,(20\,x^3y - 10\,xy^3) - 10\,\delta_6\,xy^3$$

$$\tau_{xy} = \gamma_6\,(5x^4 - 15\,x^2y^2) + \delta_6\,(5y^4 - 15\,x^2y^2)$$

$$P_7^{12} = \alpha_7\left(x^7 - 14\,x^5y^2 + \frac{35}{3}x^3y^4\right) + \beta_7\left(xy^6 - \frac{10}{3}x^3y^4 + x^5y^2\right)$$

$$\sigma_x = \alpha_7\,(-28\,x^5 + 140\,x^3y^2) + \beta_7\,(30\,xy^4 - 40\,x^3y^2 + 2x^5)$$

$$\sigma_y = \alpha_7\,(42\,x^5 - 280\,x^3y^2 + 70\,xy^4) + \beta_7\,(-20\,xy^4 + 20\,x^3y^2)$$

$$\tau_{xy} = \alpha_7\,(140\,x^4y - 140\,x^2y^3) + \beta_7\,(-6y^5 + 40\,x^2y^3 - 10\,x^4y)$$

$$P_7^{21} = \gamma_7\left(x^6y - \frac{10}{3}x^4y^3 + x^2y^5\right) + \delta_7\left(y^7 - 14\,x^2y^5 + \frac{35}{3}x^4y^3\right)$$

$$\sigma_x = \gamma_7\,(-20\,x^4y + 20\,x^2y^3) + \delta_7\,(42\,y^5 - 280\,x^2y^3 + 70\,x^4y)$$

$$\sigma_y = \gamma_7\,(30\,x^4y - 40\,x^2y^3 + 2y^5) + \delta_7\,(-28\,y^5 + 140\,x^2y^3)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_7\,(-6x^5 + 40\,x^3y^2 - 10\,xy^4) + \delta_7\,(140\,xy^4 - 140\,x^3y^2)$$

$$P_8^{22} = \alpha_8(x^8 - 21\,x^6y^2 + 35\,x^4y^4 - 7x^2y^6) +$$

$$+ \beta_8\,(y^8 - 21\,x^2y^6 + 35\,x^4y^4 - 7x^6y^2)$$

$$\sigma_x = \alpha_8\,(-42\,x^6 + 420\,x^4y^2 - 210\,x^2y^4) +$$

$$+ \beta_8\,(56\,y^6 - 630\,x^2y^4 + 420\,x^4y^2 - 14\,x^6)$$

$$\sigma_y = \alpha_8\,(56\,x^6 - 630\,x^4y^2 + 420\,x^2y^4 - 14\,y^6) +$$

$$+ \beta_8\,(-42\,y^6 + 420\,x^2y^4 - 210\,x^4y^2)$$

$$\tau_{xy} = \alpha_8\,(252\,x^5y - 560\,x^3y^3 + 84\,xy^5) +$$

$$+ \beta_8\,(252\,xy^5 - 560\,x^3y^3 + 84\,x^5y)$$

$$P_8^{11} = \gamma_8\left(x^7y - \frac{14}{3}x^5y^3 + \frac{7}{3}x^3y^5\right) + \delta_8\left(xy^7 - \frac{14}{3}x^3y^5 + \frac{7}{3}x^5y^3\right)$$

$$\sigma_x = \gamma_8\left(-28\,x^5y + \frac{140}{3}x^3y^3\right) + \delta_8\left(42\,xy^5 - \frac{280}{3}x^3y^3 + 14\,x^5y\right)$$

$$\sigma_y = \gamma_8\left(42\,x^5y - \frac{280}{3}x^3y^3 + 14\,xy^5\right) + \delta_8\left(-28\,xy^5 + \frac{140}{3}x^3y^3\right)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_8\,(-7x^6 + 70\,x^4y^2 - 35\,x^2y^4) +$$

$$+ \delta_8\,(-7y^6 + 70\,x^2y^4 - 35\,x^4y^2)$$

$$P_9^{12} = \alpha_9\,(x^9 - 27\,x^7y^2 + 63\,x^5y^4 - 21\,x^3y^6) +$$

$$+ \beta_9\,(xy^8 - 7x^3y^6 + 7\,x^5y^4 - x^7y^2)$$

$$\sigma_x = \alpha_9\,(-54\,x^7 + 756\,x^5y^2 - 630\,x^3y^4) +$$

$$+ \beta_9\,(56\,xy^6 - 210\,x^3y^4 + 84\,x^5y^2 - 2x^7)$$

$$\sigma_y = \alpha_9 (72\, x^7 - 1134\, x^5y^2 + 1260\, x^3y^4 - 126\, xy^6) +$$
$$+ \beta_9 (-42\, xy^6 + 140\, x^3y^4 - 42\, x^5y^2)$$
$$\tau_{xy} = \alpha_9 (378\, x^6y - 1260\, x^4y^3 + 378\, x^2y^5) +$$
$$+ \beta_9 (-8y^7 + 126\, x^2y^5 - 140\, x^4y^3 + 14\, x^6y)$$

$$P_9^{21} = \gamma_9 (x^8y - 7x^6\, y^3 + 7x^4y^5 - x^2y^7) +$$
$$+ \delta_9 (y^9 - 27\, x^2y^7 + 63\, x^4y^5 - 21\, x^6y^3)$$
$$\sigma_x = \gamma_9 (-42\, x^6y + 140\, x^4y^3 - 42\, x^2y^5) +$$
$$+ \delta_9 (72\, y^7 - 1134\, x^2y^5 + 1260\, x^4y^3 - 126\, x^6y)$$
$$\sigma_y = \gamma_9 (56\, x^6y - 210\, x^4y^3 + 84\, x^2y^5 - 2y^7) +$$
$$+ \delta_9 (-54\, y^7 + 756\, x^2y^5 - 630\, x^4y^3)$$
$$\tau_{xy} = \gamma_9 (-8x^7 + 126\, x^5y^2 - 140\, x^3y^4 + 14\, xy^6) +$$
$$+ \delta_9 (378\, xy^6 - 1260\, x^3y^4 + 378\, x^5y^2)$$

$$P_{10}^{22} = \alpha_{10}(x^{10} - 36\, x^8y^2 + 126\, x^6y^4 - 84x^4y^6 + 9\, x^2\, y^8) +$$
$$+ \beta_{10} (y^{10} - 36\, x^2y^8 + 126\, x^4y^6 - 84\, x^6y^4 + 9x^8y^2)$$
$$\sigma_x = \alpha_{10} (-72\, x^8 + 1512\, x^6y^2 - 2520\, x^4y^4 + 504\, x^2y^6) +$$
$$+ \beta_{10} (90\, y^8 - 2016\, x^2y^6 + 3780\, x^4y^4 - 1008\, x^6y^2 + 18\, x^8)$$
$$\sigma_y = \alpha_{10} (90\, x^8 - 2016\, x^6y^2 + 3780\, x^4y^4 - 1008\, x^2y^6 + 18\, y^8) +$$
$$+ \beta_{10} (-72\, y^8 + 1512\, x^2y^6 - 2520\, x^4y^4 + 504\, x^6y^2)$$
$$\tau_{xy} = \alpha_{10} (576\, x^7y - 3024\, x^5y^3 + 2016\, x^3y^5 - 144\, xy^7) +$$
$$+ \beta_{10} (576\, xy^7 - 3024\, x^3y^5 + 2016\, x^5y^3 - 144\, x^7y)$$

$$P_{10}^{11} = \gamma_{10}\left(x^9\, y - 9x^7y^3 + \frac{63}{5}\, x^5y^5 - 3x^3y^7\right) +$$
$$+ \delta_{10}\left(xy^9 - 9x^3y^7 + \frac{63}{5}\, x^5y^5 - 3\, x^7y^3\right)$$
$$\sigma_x = \gamma_{10} (-54\, x^7y + 252\, x^5y^3 - 126\, x^3y^5) +$$
$$+ \delta_{10} (72\, xy^7 - 378\, x^3y^5 + 252\, x^5y^3 - 18\, x^7y)$$
$$\sigma_y = \gamma_{10} (72\, x^7y - 378\, x^5y^3 + 252\, x^3y^5 - 18\, xy^7) +$$
$$+ \delta_{10} (-54\, xy^7 + 252\, x^3y^5 - 126\, x^5y^3)$$
$$\tau_{xy} = \gamma_{10} (-9x^8 + 189\, x^6y^2 - 315\, x^4y^4 + 63\, x^2y^2) +$$
$$+ \delta_{10} (-9y^8 + 189\, x^2y^6 - 315\, x^4y^4 + 63\, x^6y^2)$$

$$P_{11}^{12} = \alpha_{11}\left(x^{11} - 44\, x^9y^2 + 198\, x^7y^4 - \frac{924}{5}\, x^5y^6 + 33\, x^3y^8\right) +$$
$$+ \beta_{11}\left(xy^{10} - 12\, x^3y^8 + \frac{126}{5}\, x^5y^6 - 12\, x^7y^4 + x^9y^2\right)$$
$$\sigma_x = \alpha_{11} (-88\, x^9 + 2376\, x^7y^2 - 5544\, x^5y^4 + 1848\, x^3y^6) +$$
$$+ \beta_{11} (90\, xy^8 - 672\, x^3y^6 + 756\, x^5y^4 - 144\, x^7y^2 + 2x^9)$$

$$\sigma_y = \alpha_{11}(110\,x^9 - 3168\,x^7y^2 + 8316\,x^5y^4 - 3696\,x^3y^6 + 198\,xy^8) +$$
$$+ \beta_{11}(-72\,xy^8 + 504\,x^3y^6 - 504\,x^5y^4 + 72\,x^7y^2)$$
$$\tau_{xy} = \alpha_{11}(792\,x^8y - 5544\,x^6y^3 + 5544\,x^4y^5 - 792\,x^2y^7) +$$
$$+ \beta_{11}(-10\,y^9 + 288\,x^2y^7 - 756\,x^4y^5 + 336\,x^6y^3 - 18\,x^8y)$$

$$P_{11}^{21} = \gamma_{11}\left(x^{10}\,y - 12\,x^8y^3 + \frac{126}{5}\,x^6y^5 - 12\,x^4y^7 + x^2y^7\right) +$$
$$+ \delta_{11}\left(y^{11} - 44\,x^2y^9 + 198\,x^4y^7 - \frac{921}{5}\,x^6y^5 + 33\,x^8y^3\right)$$
$$\sigma_x = \gamma_{11}(-72\,x^8y + 504\,x^6y^3 - 504\,x^4y^5 + 72\,x^2y^7) +$$
$$+ \delta_{11}(110\,y^9 - 3168\,x^2y^7 + 8316\,x^4y^5 - 3696\,x^6y^3 + 198\,x^8y)$$
$$\sigma_y = \gamma_{11}(90\,x^8y - 672\,x^6y^3 + 756\,x^4y^5 - 144\,x^2y^7 + 2y^9) +$$
$$+ \delta_{11}(-88\,y^9 + 2376\,x^2y^7 - 5544\,x^4y^5 + 1848\,x^6y^3)$$
$$\tau_{xy} = \gamma_{11}(-10\,x^9 + 288\,x^7y^2 - 756\,x^5y^4 + 336\,x^3y^6 - 18\,xy^8) +$$
$$+ \delta_{11}(792\,xy^8 - 5544\,x^3y^6 + 5544\,x^5y^4 - 792\,x^7y^2)$$

$$P_{12}^{22} = \alpha_{12}(x^{12} - 55\,x^{10}y^2 + 330\,x^8y^4 - 462\,x^6y^6 + 165\,x^4y^8 - 11\,x^2y^{10}) +$$
$$+ \beta_{12}(y^{12} - 55\,x^2y^{10} + 330\,x^4y^8 - 462\,x^6y^6 + 165\,x^8y^4 - 11\,x^{10}y^2)$$
$$\sigma_x = \alpha_{12}(-110\,x^{10} + 3960\,x^8y^2 - 13860\,x^6y^4 + 9240\,x^4y^6 -$$
$$- 990\,x^2y^9) +$$
$$+ \beta_{12}(132\,y^{10} - 4950\,x^2y^8 + 18480\,x^4y^6 - 13860\,x^6y^4 +$$
$$+ 1980\,x^8y^2 - 22\,x^{10})$$
$$\sigma_y = \alpha_{12}(132\,x^{10} - 4950\,x^8y^2 + 18480\,x^6y^4 - 13860\,x^4y^6 +$$
$$+ 1980\,x^2y^8 - 22\,y^{10}) +$$
$$+ \beta_{12}(-110\,y^{10} + 3960\,x^2y^8 - 13860\,x^4y^6 + 9240\,x^6y^4 - 990\,x^8y^2)$$
$$\tau_{xy} = \alpha_{12}(1100\,x^9y - 10560\,x^7y^3 + 16632\,x^5y^5 - 5280\,x^3y^7 +$$
$$+ 220\,xy^9) +$$
$$+ \beta_{12}(1100\,xy^9 - 10560\,x^3y^7 + 16632\,x^5y^5 - 5280\,x^7y^3 + 220\,x^9y)$$

$$P_{12}^{11} = \gamma_{12}\left(x^{11}\,y - \frac{44}{3}\,x^9y^3 + \frac{198}{5}\,x^7y^5 - \frac{132}{5}\,x^5y^7 + \frac{11}{3}\,x^3y^9\right) +$$
$$+ \delta_{12}\left(xy^{11} - \frac{44}{3}\,x^3y^9 + \frac{198}{5}\,x^5y^7 - \frac{132}{5}\,x^7y^5 + \frac{11}{3}\,x^9y^3\right)$$
$$\sigma_x = \gamma_{12}\left(-88\,x^9y + 792\,x^7y^3 - \frac{5544}{5}\,x^5y^5 + 264\,x^3y^7\right) +$$
$$+ \delta_{12}\left(110\,xy^9 - 1056\,x^3y^7 + \frac{8316}{5}\,x^5y^5 - 528\,x^7y^3 + 22\,x^9y\right)$$
$$\sigma_y = \gamma_{12}\left(110\,x^9y - 1056\,x^7y^3 + \frac{8316}{5}\,x^5y^5 - 528\,x^3y^7 + 22\,xy^9\right) +$$
$$+ \delta_{12}\left(-88\,xy^9 + 792\,x^3y^7 - \frac{5544}{5}\,x^5y^5 + 264\,x^7y^3\right)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{12}(-11\,x^{10} + 396\,x^8y^2 - 1386\,x^6y^4 + 924\,x^4y^6 - 99\,x^2y^8) + \delta_{12}(-11\,y^{10} + 396\,x^2y^8 - 1386\,x^4y^6 + 924\,x^6y^4 - 99\,x^8y^2).$$

Primită la redacție la 30 ianuarie 1956.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЯ УСЛОВИЙ НА КОНТУРЕ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

1. Приближенные методы расчета, при помощи которых обычно решаются задачи теории упругости, бывают двоякого рода:

— вариационные методы, позволяющие найти с желаемым приближением выражения для унитарных напряжений и перемещений в форме разложений в ряды; такое аналитическое выражение дает возможность вычислить значения функции напряжений или ее производных в любой точке внутри тела;

— методы, основанные на конечных разностях (сетки, релаксации), позволяющие получить приближенное значение искомой функции в конечном числе точек внутри тела и удовлетворяющие условиям на контуре также в конечном числе точек.

Метод, разработанный автором, в некоторых частях сходен с каждым из вышеуказанных методов и состоит в отыскании аналитической функции самой простой формы, удовлетворяющей на контуре условиям в конечном числе точек; эта функция дает состояние напряжения и деформации для любой точки внутри тела.

2—3. Автор рассматривает только плоскую задачуу пругости, указывая способ найти бигармонические многочлены (10—13), применяемые при расчете.

4. Вводя подва условия в $(2n-3)$ точках на контуре находят систему $(4n-6)$ уравнений с $(4n-5)$ неизвестными, из которых одно берется произвольно. Вычислив разность $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2$ между найденным состоянием направления и нагрузками на контуре, можно установить степень приближенности, с которой сделан расчет.

5. Автор показывает способ применения метода на примере расчета, сравнивая найденные результаты с другими результатами, полученными при помощи приблизительных расчетов.

При этом автор показывает, что при $l/h=1$ составляющая стрелы от срезывающей силы приблизительно в два раза больше составляющей от изгиба; при $l/h \leqq 0{,}5$ стрела при изгибе весьма незначительная в сравнении со стрелой от срезывающей силы, а жесткость балки-стенки становится пропорциональной только площади поперечного сечения.

6. Показываются достоинства и недостатки метода расчета. Можно решить плоскую задачу для любого контура при любых условиях на контуре в отношении усилий или перемещений. Трудность заключается в решении системы линейных уравнений. Метод можно распространить и на трехмерное пространство, пользуясь в известных случаях другими бигармоническими функциями, а не многочленными. Для решения систем линейных уравнений можно прибегнуть к электронной счетной машине.

A METHOD OF APPROXIMATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS FOR THE PLANE PROBLEM OF THE ELASTICITY

(ABSTRACT)

1. The approximative methods of computation, which the problems of the theory of the elasticity are generally resolved by, are of two kinds :

— Variational methods, which allow to find, with the required approximation, the expressions of the stresses and displacements, under the form of a series. This analytical expression gives the possibility of computing the value of the stress function or of its derivatives in each point inside the body.

— Finite difference methods (nets, relaxation) which allow to obtain the approximative value of the researched function in a finite number of points inside the body, satisfying the boundary conditions also in a finite number of points.

The improved method of the author has points in common with each of the afore mentioned methods. It consists in searching an analytical function, of the simplest form, which should verify the boundary conditions in a finite number of points; this function gives the tension state and the deflections for each point inside the body.

2—3. The author is referring only to the plane problem of elasticity, showing how the biharmonical polynoms (10—13), made use of for the calculation, are to be found.

4. In stating 2 conditions at a time in $(2n—3)$ points on the boundary we find a system of $(4n—6)$ equations with $(4n—5)$ unknowns, one of which is arbitrarily taken. In calculating the difference $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 — \mathfrak{D}_2$ between the found state of stress and the sollicitation on the boundary it is possible, to appreciate the approximation which the computation was done by.

5. The author shows how the method is applied on an example and compares the results found with other results, given by more approximative calculus.

On this occasion, the author points out that the component of the deflection resulting from the shearing is approximately twice greater than that given by the bending, for $l/h = 1$; but for $l/h \leqq 0.5$ the deflection given by the bending can be neglected in comparison with that given by the shearing, and the rigidity of a disc becomes proportional only with the cross section area.

6. The advantages and disadvantages of the method are marked out. The plane problem can be solved for an arbitrary boundary (eventually multiply connected) with every boundary conditions in stresses or in displacements. The difficulty lies in solving the linear system of equations. The method can also be extended in the three dimensional space, eventually making use of biharmonical functions others than the polynomial ones. The linear system of equations may be solved by using the electronical computing machine.

BIBLIOGRAFIE

1. Airy G. B., *On the Strains in the Interior of Beams.* Phil. Trans,, 1863, vol. 153, p. 49.
2. Almansi E., *Sull'integrazione dell'Equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem., 1898, s. III, t. II, p. 1.
3. Cişmigiu Al., *Rigiditatea consolelor plane de lungime medie, acţionate de forţe orizontale de volum (masice).* Bul. ştiinţ. al Inst. de constr., Bucureşti, 1954, nr. 1, p. 79.
4. — *Despre o clasificare tehnică a grinzilor drepte şi a boltilor cilindrice.* Ind. constr. şi a mat. de constr., an. VI, 1955, nr. 6, p. 332.
5. Gran Olsson R., *Ueber die Grundlagen der Balkenbiegung.* Der Bauing., an. 21, 1940, c. 27/28.
6. Girkmann K., *Flächentragwerke.* Viena, 1954.
7. Goldenblat I. I., *Raşciot i konstruirovanie jelezobetonnih balokstenok.* Stroiizdat nakromstroia, Moscova, 1940.
8. Teodorescu P. P., *Calculul grinzilor pereţi cu o singură deschidere în caz general de rezemare şi încărcare.* Autoreferatul disertaţiei pentru obţinerea titlului de candidat în ştiinţe tehnice, Bucureşti, 1955.
9. — *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Comunicările Acad. R. P. R., t. VI, nr. 2, februarie 1956, p. 285.
10. Worch G., *Ueber Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie.* Bautechnikarchiv, Berlin, 1949, caietul 5, p. 43.
11. Zweiling K., *Biharmonische Polynome.* Berlin, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

O TEORIE GENERALĂ A METODEI DISTRIBUIRII EFORTURILOR

PARTEA I

DE

CONST. C. POPOVICI

I. INTRODUCERE

Dintre toate metodele de calcul ale eforturilor sistemelor multiplu static nedeterminate, cele mai mult folosite astăzi sînt metodele de rezolvare prin aproximaţii succesive cu distribuiri de momente sau transmiteri de rotiri şi deplasări.

Metoda transmiterii rotirilor şi deplasărilor se poate folosi astăzi la orice sistem de cadre. Din punct de vedere teoretic ea nu diferă cu nimic de metoda deformaţiilor, dar din punct de vedere practic, prin eliminarea sistemului de ecuaţii, aduce simplificări de calcul, în cazul în care rezolvarea prin iteraţie a sistemului de ecuaţii de condiţie este avantajoasă.

Metoda distribuirii momentelor, deşi în fond derivă de asemenea din metoda deformaţiilor, diferă mult mai mult de aceasta prin faptul că eforturile din capetele barelor se obţin direct prin distribuiri de momente, fără a se determina într-o fază intermediară valorile rotirilor şi deplasărilor. Această metodă nu se aplică astăzi decît pentru cadre cu noduri fixe sau cadre etajate.

Pentru celelalte categorii de cadre, se aplică o metodă mixtă în care metoda distribuirii momentelor se combină cu metoda deformaţiilor, luîndu-se ca sistem primitiv sistemul static nedeterminat format din cadrul cu noduri fixe, iar ca necunoscute deplasările nodurilor. Coeficienţii ecuaţiilor de condiţie (eforturile produse de deplasările unitare) se obţin cu ajutorul metodei distribuirii momentelor, iar determinarea deplasărilor necunoscute şi a eforturilor finale se face ca în metoda deformaţiilor.

Metoda mixtă îmbină avantajele celor două metode folosite şi anume obţinerea pe o cale simplă a coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie şi rezolvarea pe calea cea mai comodă a unui sistem de ecuaţii cu un număr mult mai mic de necunoscute. Se pierde însă avantajul metodei distribuirii momen-

telor, adică obținerea directă a momentelor barelor la noduri, iar în cazul sistemelor cu multe deplasări, calculele se îngreuiază și conducerea lor în mai multe etape este dificilă.

În cele ce urmează vom da o generalizare a metodei distribuirii momentelor pentru orice sistem elastic plan sau spațial, cu bare drepte sau curbe, adică vom arăta că rezolvarea oricărui sistem elastic poate fi făcută numai prin distribuiri de eforturi și într-o singură etapă, pe o schemă de calcul.

Pentru ușurința și generalitatea expunerii vom folosi calculul matricial, pornind de la metoda deformațiilor. În felul acesta se va pune în evidență și dependența acestei metode de metoda deformațiilor și în același timp se va demonstra și pe cale algebrică exactitatea metodei.

Este de la sine înțeles că în cadrul unei lucrări restrînse nu se pot examina posibilitățile unei asemenea metode, în special acelea legate de simplificarea calculelor și reducerea numărului iterațiilor; acest lucru nu ar putea fi făcut cu rezultate satisfăcătoare decît examinînd amănunțit fiecare categorie de cadre.

Pentru a nu neglija însă cu totul latura practică a problemei am examinat în mod sumar și categoriile cele mai importante de cadre, arătînd cum se poate aplica metoda generală la aceste cazuri.

Fără îndoială că un studiu mai detaliat și aplicarea variantelor simplificatoare cunoscute astăzi, precum și a altora ce s-ar mai putea imagina, vor aduce ușurări considerabile de calcul, față de metoda primitivă.

Ținînd seama de cadrul lucrării nu am socotit necesar să indic decît o bibliografie strict necesară expunerii făcute. Cititorul poate însă consulta, în legătură cu această problemă, bibliografia completă din *Metoda aproximațiilor succesive* de Radu Agent [1].

II. METODA DEFORMAȚIILOR

Să considerăm un sistem elastic oarecare, plan sau spațial, cu bare drepte sau curbe, legate între ele prin noduri simple sau prin șaibe indeformabile.

Pentru determinarea completă prin metoda deformațiilor, a stării de eforturi a acestui sistem, este necesar să cunoaștem anumite eforturi din capetele barelor și anume, acele a căror explicitare este necesară pentru obținerea ecuațiilor de deformare. Astfel, la structurile la care se neglijează efectul forțelor axiale, nu trebuie determinate decît momentele din capetele barelor, iar la sistemele la care se ține seama și de alungirile barelor, vor trebui determinate și forțele axiale.

Ca necunoscute se aleg deformațiile sistemului și anume cele trei componente ale rotirilor nodurilor și cele trei componente ale deplasărilor nodurilor, astfel încît, în general, un sistem elastic, avînd N noduri și nici o articulație în afară de cele ale reazemelor, va conduce la un sistem de 6 N ecuații liniare cu tot atîtea necunoscute. În cazul cînd se neglijează efectul deformațiilor axiale iar unele deplasări ale nodurilor nu se pot produce din cauza legăturilor date de bare, numărul necunoscutelor se micșorează în raport cu numărul barelor și felul în care sînt legate între ele. Fără a face o analiză a numărului de deformații și a numărului de eforturi ce trebuie determinate, vom presupune că sistemul considerat are n deplasări independente $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ (rotiri sau deplasări ale nodu-

rilor), iar pentru stabilirea ecuațiilor de deformații trebuie să determinăm p eforturi.

Aceste eforturi se exprimă în funcție de deplasări, astfel

$$\begin{aligned} S_a &= s_{a1}\,\delta_1 + s_{a2}\,\delta_2 + \ldots s_{an}\,\delta_n + s_{a0}, \\ S_b &= s_{b1}\,\delta_1 + s_{b2}\,\delta_2 + \ldots s_{bn}\,\delta_n + s_{b0}, \\ &\vdots \\ S_p &= s_{p1}\,\delta_1 + s_{p2}\,\delta_2 + \ldots s_{pn}\,\delta_n + s_{p0}, \end{aligned} \tag{1}$$

în care $s_{a0}, s_{b0}, \ldots, s_{p0}$ reprezintă eforturile de incastrare din secțiunile a, b, $\ldots$, p, iar $s_{ai}\, s_{bi}, \ldots, s_{pi}$ eforturile produse de deplasarea unitară $\delta_i = 1$, în aceleași secțiuni. Eforturile $s_{ai}, \ldots, s_{pi}$ mai sînt numite și *rigidități* ale barelor respective pentru deplasarea δ_i.

Dacă notăm cu S și S_0 vectorii eforturilor totale și ai celor de incastrare, adică

$$S = \begin{pmatrix} S_a \\ S_b \\ \vdots \\ S_p \end{pmatrix} \qquad \text{și} \qquad S_0 = \begin{pmatrix} s_{a0} \\ s_{b0} \\ \vdots \\ s_{p0} \end{pmatrix} \tag{2}$$

cu Δ vectorul deplasărilor

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

iar cu $\bar{S}$ matricea eforturilor unitare

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} s_{a1} & s_{a2} \ldots s_{an} \\ s_{b1} & s_{b2} \ldots s_{bn} \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} \ldots s_{pn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

avem

$$S = \bar{S}\,.\,\Delta + S_0. \tag{5}$$

Vectorul S reprezintă starea de eforturi a sistemului elastic considerat, în secțiunile a, b, $\ldots$, p.

Pentru a forma ecuațiile de condiție, vom desființa în secțiunile a, b, $\ldots$, p legăturile corespunzătoare eforturilor S. Astfel dacă S_i este un moment, vom introduce în punctul i o articulație în planul efortului S_i, iar dacă efortul este o forță axială, vom secționa bara în acel punct și vom introduce un manșon care să permită deplasarea fără rotire a celor două capete ale barei, în lungul ei.

Introducînd în locul legăturilor desființate eforturile corespunzătoare $S_a, \ldots, S_p$, care restabilesc continuitatea sistemului, el va fi în echilibru și va avea aceeași stare de deformație ca și sistemul dat.

Dînd pe rînd sistemului deplasările virtuale

$$\bar{\delta}_1 = 1,\ \bar{\delta}_2 = 1,\ \ldots,\ \bar{\delta}_n = 1,$$

vom obține următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned}
&\delta_{1a} S_a + \delta_{1b} S_b + \ldots \delta_{1p} S_p + \delta_{10} = 0,\\
&\delta_{2a} S_a + \delta_{2b} S_b + \ldots \delta_{2p} S_p + \delta_{20} = 0,\\
&\vdots\\
&\delta_{na} S_a + \delta_{nb} S_b + \ldots \delta_{np} S_p + \delta_{n0} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

în care δ_{ia}, δ_{ib}, ..., δ_{ip} reprezintă deplasările virtuale ale eforturilor S_a, ..., S_p în deplasarea virtuală $\bar{\delta}_i = 1$, iar δ_{i0} reprezintă lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare, pentru aceeași deplasare virtuală.

Notînd cu $\bar{\Delta}$ matricea deplasărilor virtuale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_{1a} & \delta_{1b} & \ldots & \delta_{1p} \\ \delta_{a2} & \delta_{2b} & \ldots & \delta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \delta_{na} & \delta_{nb} & \ldots & \delta_{np} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

iar cu L_0 vectorul lucrului mecanic virtual al încărcărilor exterioare

$$L_0 = \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{p0} \end{pmatrix} \tag{8}$$

vom avea

$$\bar{\Delta}.S + L_0 = 0. \tag{9}$$

Din (5) și (8) obținem

$$\bar{\Delta}.S + L_0 = \bar{\Delta}\,(\bar{S}.\,\Delta + S_0) + L_0 = \bar{\Delta}.\bar{S}.\,\Delta + \bar{\Delta}.S_0 + L_0. \tag{10}$$

Punînd

$$R = \bar{\Delta}.\bar{S} \quad \text{și} \quad R_0 = \bar{\Delta}.S_0 + L_0, \tag{11}$$

în care R este o matrice pătrată cu n^2 elemente, cunoscută sub numele de *matricea reacțiunilor*, iar R_0 vectorul cu n componente reprezentînd reacțiunile încărcărilor exterioare [6], obținem sistemul de n ecuații liniare cu n necunoscute

$$R.\,\Delta + R_0 = 0, \tag{12}$$

care ne va da prin rezolvare, valorile necunoscutelor δ_i ce determină eforturile sistemului cu ajutorul relațiilor (5).

Elementele r_{ij} ale matricei R au expresia [3],

$$r_{ij} = r_{ji} = \sum_{k=a}^{p} s_{ki}\,\delta_{jk}, \tag{13}$$

încît reprezintă lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare s_{ki} în deplasarea $\bar{\delta}_j = 1$.

Componentele vectorului R_0 reprezintă, de asemenea, lucrul mecanic al eforturilor de incastrare și al încărcărilor exterioare pentru cele n deplasări virtuale ale sistemului.

Coeficienții sistemului (12) se pot obține deci fie pe calea cunoscută a deplasărilor virtuale, fie pe cale pur algebrică, cu ajutorul produselor de matrice și vectori; alegerea uneia din cele două căi depinde de complexitatea sistemului elastic considerat.

Rezolvarea sistemului (12) se face cu ajutorul determinanților, în cazul unui număr mic de ecuații, iar pentru un număr mare de ecuații, prin metoda Gauss, sau prin metoda iterației [7]. După cum se știe [2] și [6] ecuațiile de condiție ale unui sistem elastic pot fi rezolvate întotdeauna prin această ultimă metodă.

III. REZOLVAREA SISTEMULUI DE COINDIȚIE PRIN METODA ITERAȚIEI SIMPLE

Dacă notăm cu R_1 matricea diagonală, formată din elementele diagonalei principale ale matricei R

$$R_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & rn_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

și dacă notăm cu $\Delta^{(m-1)}$ și $\Delta^{(m)}$ vectorii valorilor iterate de ordinul $(m-1)$ și m, ale necunoscutelor, vom avea

$$R_1 \Delta^{(m)} + (R - R_1)\, \Delta^{(m-1)} + R_0 = 0, \tag{15}$$

din care deducem

$$\Delta^{(m)} = -R_1^{-1} (R - R_1)\, \Delta^{(m-1)} - R_1^{-1} R_0. \tag{16}$$

Corespunzător valorilor iterate ale deplasărilor, vom obține valori iterate și pentru eforturi și anume

$$S^{(m)} = \bar{S}.\, \Delta^{(m)} + S_0 = -\bar{S}.R_1^{-1} (R - R_1)\, \Delta^{(m-1)} - \bar{S}.R_1^{-1}.R_0 + S_0. \tag{17}$$

Ținînd seama de relațiile (5) și (11)

$$S^{(m)} = -\bar{S} \dots R_1^{-1}.\bar{\Delta}.\bar{S}.\, \Delta^{(m-1)} + \bar{S}.\, \Delta^{(m-1)} - \bar{S}.R_1^{-1}.\bar{\Delta}.S_0 - \bar{S}.R_1^{-1} L_0 +$$

$$+ S_0 = S^{(m-1)} - \bar{S}.R_1^{-1} (\bar{\Delta}.S^{(m-1)} + L_0). \tag{18}$$

Dacă punem

$$\bar{\Delta}\, S^{(m-1)} + L_0 = -L^{(m-1)}, \tag{19}$$

obținem

$$S^{(m)} = S^{(m-1)} + \bar{S}.R_1^{-1} L^{(m-1)}. \tag{20}$$

Luînd

$$S^{(0)} = \bar{S}.\, \Delta^{(0)} + S_0, \tag{21}$$

în care componentele vectorului $\Delta^{(0)}$ sînt valorile inițiale arbitrare admise

pentru deformațiile δ, seriile valorilor iterate ale eforturilor sînt complet determinate, în funcție de coeficienții relațiilor (1) și (6) și de valorile inițiale arbitrare $\delta_1^{(0)}, \ldots, \delta_n^{(0)}$.

Cunoscînd deci matricele $\bar{S}$, $\bar{\Delta}$ și vectorii S_0 și L_0 vom putea obține prin iterație valorile eforturilor, fără a fi nevoie să formăm sistemul de ecuații (12). Elementele matricei R_1 reprezintă lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare s_{ki} în deplasarea $\bar{\delta}_i = 1$, deci se pot obține fără a calcula produsul matricelor $\bar{S}$ și Δ și în orice caz fără a calcula decît elementele diagonalei principale ale matricei R.

Punînd relația (20) sub forma

$$\sigma^{(m)} = S^{(m)} - S^{(m-1)} = \bar{S} . R_1^{-1} L^{(m-1)}, \qquad (22)$$

observăm că vom putea obține valorile iterate, prin dezvoltarea în serie după procedeul de iterație al lui Krivoșein citat în [6], adică obținînd după prima iterație $\sigma^{(1)} = S^{(1)} - S^{(0)}$ etc., încît valoarea iterată de ordinul m va fi

$$S^{(m)} = S^{(0)} + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \ldots \sigma^{(m)},$$

iar, deoarece sistemul este convergent în procesul de iterație

$$\lim_{m \to \infty} S^{(m)} = S.$$

Tot din relația (20) deducem prin înmulțirea cu matricea $\bar{\Delta}$, la stînga

$$\bar{\Delta} S^{(m)} = \bar{\Delta} S^{(m-1)} + \bar{\Delta} . \bar{S} . R_1^{-1} L^{(m-1)},$$

sau

$$L^{(m)} = L^{(m-1)} - R . R_1^{-1} . L^{(m-1)},$$

$$R_1 L^{(m)} + (R - R_1) L^{(m-1)} = 0, \qquad (23)$$

valorile vectorilor L pot fi deci obținute prin iterația sistemului liniar omogen

$$R . L = 0, \qquad (24)$$

care cu excepția termenului liber, este identic cu sistemul (12).

Din relațiile (19), (5) și (11) rezultă

$$- L^{(m)} = \bar{\Delta} . S^{(m)} + L_0 = \bar{\Delta} . \bar{S} . \Delta^{(m)} + \bar{\Delta} . S_0 + L_0 = R . \Delta^{(m)} + R_0. \qquad (25)$$

Mărimile $L^{(m)}$ reprezintă deci rezultatul înlocuirii valorilor iterate ale necunoscutelor, în sistemul (12). Se observă că $\lim L^{(m)} = 0$ pentru $m \to \infty$, ceea ce rezultă și din relațiile (22) și (24).

Rezultatele obținute ne indică un nou procedeu pentru determinarea eforturilor prin metoda deformațiilor la sistemele elastice complicate, la care alcătuirea, prin metodele cunoscute, a sistemului (12) și rezolvarea lui, duce la mari dificultăți.

Nu vom insista asupra acestuia, deoarece nu constituie obiectul lucrării de față, ci vom urmări calea care permite obținerea directă a eforturilor și care conduce la metoda distribuirii momentelor.

IV. METODA DISTRIBUIRII MOMENTELOR

Relația (22) ne arată că putem obține eforturile unui sistem elastic, adunînd la valorile obținute prin iterația precedentă un termen de corecție exprimat vectorial prin

$$\bar{S} . R_1^{-1} . L^{(m-1)}.$$

Produsul $\bar{S} . R_1^{-1}$ se scrie dezvoltat astfel :

$$\bar{S} . R_1^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{s_{a1}}{r_{11}} & \frac{s_{a2}}{r_{22}} & \frac{s_{a3}}{r_{33}} & \dots & \frac{s_{an}}{r_{nn}} \\ \frac{s_{b1}}{r_{11}} & \frac{s_{b2}}{r_{22}} & \frac{s_{b3}}{r_{33}} & \dots & \frac{s_{bn}}{r_{nn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{s_{p1}}{r_{11}} & \frac{s_{p2}}{r_{22}} & \frac{s_{p3}}{r_{33}} & \dots & \frac{s_{pn}}{r_{nn}} \end{Vmatrix} \tag{26}$$

iar termenul de corecție va fi un vector cu p componente

$$\sigma^{(m)} = \begin{Vmatrix} -\sum_1^n \frac{s_{ai}}{r_{ii}} L_i^{(m-1)} \\ -\sum_1^n \frac{s_{bi}}{r_{ii}} L_i^{(m-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\sum_1^n \frac{s_{pi}}{r_{ii}} L_i^{(m-1)} \end{Vmatrix} \tag{27}$$

Pentru a obține deci termenii de corecție ai eforturilor, în iterația m, trebuie să înmulțim fiecare din termenii $L_i^{(m-1)}$ cu factorii

$$-\frac{s_{ai}}{r_{ii}}, \quad -\frac{s_{bi}}{r_{ii}}, \dots, -\frac{s_{pi}}{r_{ii}}.$$

Acești factori se numesc ca și la metoda obișnuită *factori de repartiție*, iar operația se numește *repartizare*.

Din relația (19) se vede că $L_i^{(m-1)}$ echilibrează lucrul mecanic virtual al eforturilor obținute după a $m-1$ iterație, pentru deplasarea virtuală $\bar{\delta}_i = 1$. Observăm însă că deoarece matricea $(R - R_1)$ are elementele diagonalei principale nule, rezultă, în baza relației (23), că $L_i^{(m)}$ nu depinde de $L_i^{(m-1)}$ și că prin urmare la calculul lucrului mecanic $L_i^{(m)}$ nu mai trebuie să ținem seama de eforturile obținute prin repartizarea lui $L_i^{(m-1)}$. Totodată, deoarece conform relației (25) prin $L^{(m-1)}$ am echilibrat lucrul mecanic virtual al deplasărilor date de iterația $(m-1)$, cînd vom calcula lucrul mecanic $L^{(m)}$ al deplasărilor din iterația m nu mai trebuie să luăm

în considerare decît corecțiile de eforturi date de această iterație, deoarece corecțiile determinate prin iterațiile precedente fac ca lucrul mecanic virtual al eforturilor obținute după acea iterație să fie nul.

Rezultatele de mai sus s-au obținut aplicînd sistemului metoda iterației simple. Dacă am fi aplicat alt procedeu de iterație, am fi obținut aceleași rezultate, deoarece în principiu sistemul de calcul este același. În metoda distribuirii momentelor se aplică de obicei procedeul de iterație Seidel-Yu citat după [6], care este mai convergent.

V. METODA GENERALĂ DE CALCUL

Avînd un sistem elastic oarecare, se stabilește numărul de deplasări independente. Pentru sisteme plane, acesta este în general egal cu numărul nodurilor, plus numărul gradelor de libertate ale sistemului, iar pentru sisteme în spațiu este în general egal cu de trei ori numărul nodurilor, plus numărul gradelor de libertate.

Se calculează apoi eforturile de incastrare, rigiditățile s_{ii} ale barelor și factorii de repartizare.

Calculăm lucrul mecanic virtual al eforturilor de incastrare și al încărcărilor exterioare, pentru fiecare deplasare independentă a sistemului și îl repartizăm apoi cu ajutorul factorilor de repartizare, notînd pe schema sistemului, sau într-un tablou, efortul obținut prin această operație. Factorii de repartizare se înscriu chiar pe schema cadrului, iar în cazuri mai complicate pe scheme alăturate, sau în tablouri.

Trecînd la a doua iterație, se calculează din nou lucrul mecanic virtual pentru cele n deplasări.

Conform celor arătate mai sus, vom lua în calcul numai corecțiile de eforturi obținute din prima iterație și nu vom ține seama în calculul lucrului mecanic al unei anumite deplasări de corecțiile de eforturi obținute prin repartizarea din iterația precedentă, a lucrului mecanic al aceleiași deplasări.

Repetînd de mai multe ori aceste operații se ajunge ca lucrul mecanic al fiecărei deplasări să fie neglijabil, ceea ce arată că deplasările sînt suficient de apropiate de valorile exacte. Făcînd suma eforturilor inițiale și a corecțiilor, vom obține valorile eforturilor căutate.

Interpretarea fizică a acestei metode este asemănătoare acelei date pentru metoda deformațiilor [7] și generalizează interpretarea dată în metoda distribuirii momentelor pentru cadrele cu noduri fixe:

Se consideră sistemul avînd toate nodurile fixate prin anumite legături exterioare. În barele lui se dezvoltă eforturile de incastrare.

Dînd sistemului libertatea de a căpăta una din deplasările posibile, adică înlăturînd una din legăturile sale, se vor dezvolta în bare eforturi corespunzătoare. Oprind sistemul în această poziție și dîndu-i libertatea de a căpăta altă deplasare se vor obține alte eforturi. Mergînd din aproape în aproape, sistemul își capătă treptat poziția de echilibru, cînd, înlăturîndu-i toate legăturile, el nu se mai poate deplasa. Eforturile totale obținute corespund acestei stări de echilibru.

Varietatea mare a sistemelor elastice face ca pentru fiecare categorie să se poată stabili o variantă de calcul. Vom examina acum toate categoriile de sisteme elastice formate din bare.

VI. CAZURI PARTICULARE

1. Cadre cu noduri fixe

Deplasările posibile sînt rotirile nodurilor. Starea de eforturi este determinată prin momentele barelor la noduri. Expresia acestora în funcție de deformații este

$$M_a = k_a\,\varphi_1 + l_a\,\varphi_2 + \mathfrak{M}_a,$$
$$M_b = k_b\,\varphi_1 + l_b\,\varphi_3 + \mathfrak{M}_b,$$
$$\vdots$$
$$M_p = k_p\,\varphi_n + l_p\,\varphi_{n-1} + \mathfrak{M}_p,$$

cele n rotiri ale nodurilor fiind independente, ecuațiile de lucru mecanic se vor scrie pentru fiecare nod în parte. Lucrul mecanic virtual pentru rotirea $\overline{\varphi}_i = 1$ este exprimat prin suma momentelor barelor ce concură în acest nod. Factorii de repartiție vor fi determinați prin raportul dintre eforturile unitare k_a, l_a etc. și lucrul mecanic al eforturilor unitare la nod, adică $k_a + k_b + \ldots$

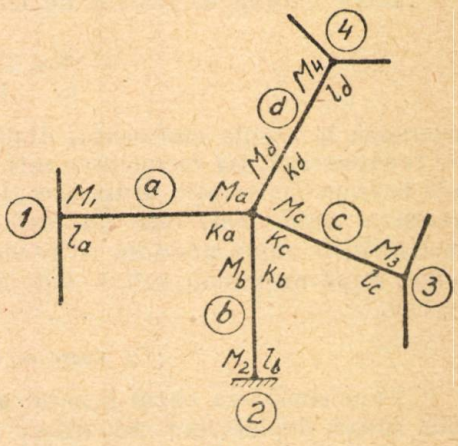


Fig. 1

Dacă considerăm cazul concret din figura 1, lucrul mecanic virtual al eforturilor date de deplasarea unitară $\overline{\varphi}_A = 1$ va fi

$$L_A = k_a + k_b + k_c + k_d,$$

încît factorii de repartiție pentru momentele M_a, M_b, M_c, M_d vor fi

$$\rho_a = -\frac{k_a}{k_a + k_b + k_c + k_d};\quad \rho_b = -\frac{k_b}{k_a + k_b + k_c + k_d};\ \text{etc.} \tag{28}$$
$$(\rho_a + \rho_b + \rho_c + \rho_d = -1),$$

iar pentru momentele M_1, M_2, M_3, M_4 vor fi:

$$\rho_1 = -\frac{l_a}{k_a + k_b + k_c + k_d};\quad \rho_2 = -\frac{l_b}{k_a + k_b + k_c + k_d}\ \text{etc.},$$

acești factori pot fi puși și sub forma

$$\rho_1 = -\frac{l_a}{k_a}\cdot\frac{k_a}{\Sigma k} = \frac{l_a}{k_a}\rho_a;\quad \rho_2 = \frac{l_b}{k_b}\rho_b\ \text{etc.}$$

Lucrul mecanic virtual al eforturilor obținute după repartizarea i în deplasarea $\overline{\varphi}_A = 1$ va fi

$$L_A = M_a^{(i)}.1 + M_b^{(i)}.1 + M_c^{(i)}.1 + M_d^{(i)}.1 = \Sigma M^{(i)}.$$

Prin repartizare, vom obține în capetele barelor 1-a, 2-b, 3-c, 4-d momentele

$$M_a^{(i+1)} = \rho_a \Sigma M^{(i)}, \quad M_b^{(i+1)} = \rho_b \Sigma M^{(i)} \text{ etc.},$$

$$M_1^{(i+1)} = \rho_1 \Sigma M^{(i)} = \frac{l_a}{k_a} M_a^{(i+1)}, \quad M_2^{(i+1)} = \frac{l_b}{k_b} M_b^{(i+1)} \text{ etc.}$$

Dacă numim coeficienți de transmitere rapoartele

$$\frac{l_1}{k_a}, \quad \frac{l_2}{k_b}, \ldots, \frac{l_4}{k_d},$$

ajungem la regula cunoscută, după care suma momentelor de la noduri se repartizează, iar momentele astfel obținute se transmit capetelor opuse ale barelor. În iterația următoare, lucrul mecanic virtual al unei deplasări (rotirea unui nod) este dat de suma momentelor transmise din nodul vecin, încît suma acestora se repartizează și se transmite din nou, pînă cînd, după un număr suficient de iterații momentele transmise sînt neglijabile.

2. Cadre cu noduri deplasabile

Vom considera cazul general al cadrelor la care barele ce se rotesc din cauza deplasărilor nodurilor, nu sînt paralele. Vom neglija, după cum se obișnuiește, efectul deformațiilor date de forțele axiale, încît starea de eforturi a cadrului va fi dată de momentele barelor la noduri. Expresia acestor momente este de forma

$$M_a = k_a \varphi_a + l_a \varphi_b + m_a \psi_a + \mathfrak{M}_a, \tag{29}$$

în care φ_a, φ_b sînt rotirile celor două capete ale barei, iar ψ_a este rotirea barei; k_a, l_a, m_a sînt momente unitare (rigidități), iar $\mathfrak{M}_a$ este momentul de încastrare în punctul a, dat de încărcările exterioare. În general rotirea ψ_a depinde de mai multe deplasări independente ale sistemului, fiind de forma:

$$\psi_a = \sum_{i=1}^{l} \omega_{ai} \psi_i,$$

în care l este numărul gradelor de libertate ale sistemului, ψ_i sînt deplasările corespunzătoare, iar ω_i coeficienți oarecare.

Sistemul elastic va avea ca deplasări independente rotirile nodurilor — pentru care relațiile de lucru mecanic virtual se scriu ca și în cazul cadrelor cu noduri fixe — și rotirile barelor, pentru care va trebui să scriem ecuațiile de lucru mecanic virtual sub forma generală.

Factorii de repartiție ai lucrului mecanic virtual dat de rotirile nodurilor vor fi aceiași ca în cazul cadrelor cu noduri fixe, încît repartizarea sumei momentelor din jurul fiecărui nod se face ca în cazul 1. La fel vom face și transmiteri de momente.

Factorii de repartizare ai lucrului mecanic virtual dat de rotirile barelor se obțin calculînd lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare, pentru fiecare deplasare.

Expresia (29) se mai scrie

$$M_a = k_a \varphi_a + l_a \varphi_b + \sum_1^l m_a \omega_{ai} \psi_i + \mathfrak{M}_a,$$

iar lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare pentru deplasarea ψ_i, va fi

$$r_{ii} = \sum_{j=a}^{p} m_j \omega_{ji}^2, \tag{30}$$

încît factorul de repartiție pentru efortul dintr-o secțiune oarecare a, va fi

$$\rho_a = -\frac{m_a \omega_{ai}}{\Sigma m_a \omega_{ai}^2}. \tag{31}$$

Avînd determinați acești factori, calculele se fac după metoda generală arătată.

Lucrul mecanic virtual al eforturilor ce trebuie repartizate după iterația (j) se calculează în mod tot atît de simplu.

Dacă $M_{ai}^{(j)}$ este efortul în unul din capetele barei a, dat de deplasarea i și obținut după repartizarea (j), lucrul mecanic virtual al tuturor momentelor din repartizarea (j) și deplasarea i, va fi

$$L_i^{(j+1)} = \sum \omega_{ai} M_{ai}^{(j)}.$$

În cazul particular al cadrelor etajate, cu stîlpi paraleli deplasabili, de lungime egală, avem $\omega_a = \omega_b = \ldots \omega_p$, încît factorii de repartiție vor fi de forma

$$\rho_a = -\frac{m_a}{\sum_a^p m_a}. \tag{32}$$

Dacă barele au secțiuni constante, $m_a = \frac{6 E I_a}{l_a}$, iar relația (31) devine

$$\rho_a = -\frac{\frac{I_a}{l_a}}{2 \Sigma \frac{I_a}{l_a}}.$$

În cazul acesta particular, lucrul mecanic virtual al eforturilor ce trebuie repartizate este egal cu suma momentelor încovoietoare din capetele stîlpilor, obținute prin repartizarea și transmiterea momentelor din jurul nodurilor.

3. Cadre cu bare curbe

Momentele în capetele barei curbe $a — b$ au expresia [2]

$$M_a = k_a \varphi_a + l_a \varphi_b + m_a \psi_a + n_a \varepsilon + \mathfrak{M}_a, \tag{33}$$

în care ε reprezintă deplasarea relativă a nașterilor arcului pe direcția acestora, n_a efortul datorit deplasării unitare $\varepsilon = 1$. Celelalte notații sînt ca la barele drepte.

Dacă sistemul elastic are l grade de libertate, ($l - 1$ rotiri independente ale barelor și deplasarea ε), atunci expresia (33) devine, punînd $\varepsilon = \omega_l \psi_l$

$$M_a = k_a \varphi_a + l_a \varphi_b + \sum_{i=1}^{l-1} m_a \omega_{ai} \psi_i + n_a \omega_l \psi_l + \mathfrak{M}_a .$$

Efortul axial în punctul c, în care tangenta la arc este paralelă cu linia nașterilor, va fi de forma

$$N_c = p_c \varphi_a + q_c \varphi_b + r_c \omega_l \psi_l + \mathfrak{N}_c ,$$

p_c, q_c, r_c fiind eforturi unitare, iar $\mathfrak{N}_c$ efortul de încastrare.

Relațiile de lucru mecanic virtual pentru rotirile nodurilor și factorii de repartiție pentru aceste deplasări se calculează ca la cadrele cu noduri fixe.

Relațiile de lucru mecanic virtual pentru rotirile $\psi_1, \ldots, \psi_{l-1}$ ale barelor și factorii de repartiție corespunzători se calculează ca pentru cadrele cu noduri deplasabile.

Pentru deplasarea ψ_l lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare se calculează în modul obișnuit, însă ținînd seama și de efortul axial $\mathfrak{N}_c$, care pentru deplasarea ψ_l dă lucrul mecanic corespunzător. De asemenea în iterațiile următoare se va avea în vedere, la calculul lucrului mecanic, forța axială produsă de celelalte deplasări (φ_a, φ_b, ... ; $\psi_1, \ldots, \psi_{l-1}$).

Factorii de repartiție ai lucrului mecanic L_l se obțin calculînd mai întîi lucrul mecanic al eforturilor unitare pentru deplasarea ψ_l :

$$r_{ll} = n_a \omega_l^2 + \sum_a^p \overline{m_a \omega_{al}^2},$$

încît factorul de repartiție pentru efortul din secțiunea k, va fi

$$\rho_k = - \frac{m_k \omega_{kl}}{n_a \omega_l^2 + \Sigma m_a \omega_{al}^2} .$$

Pentru forța axială, factorul de repartiție este

$$\rho_c = - \frac{r_c \omega_l}{n_a \omega_l^2 + \Sigma m_a \omega_{al}^2} = \frac{r_c}{n_a} \rho_a ,$$

încît efortul axial din c se poate obține direct prin repartizarea lucrului mecanic virtual, sau prin transmiterea momentului din a. Tot astfel putem introduce factorii de transmitere $\frac{p_c}{k_a}$ și $\frac{q_c}{k_b}$ pentru momentele repartizate în jurul nodurilor A și B. Metoda de calcul nu diferă prea mult de cele anterioare, singura diferență constînd în modul de calcul al factorilor de repartizare.

4. Cadre în spațiu

Să considerăm un cadru spațial, format din bare drepte. Pentru simplificare, vom neglija deformațiile forțelor axiale.

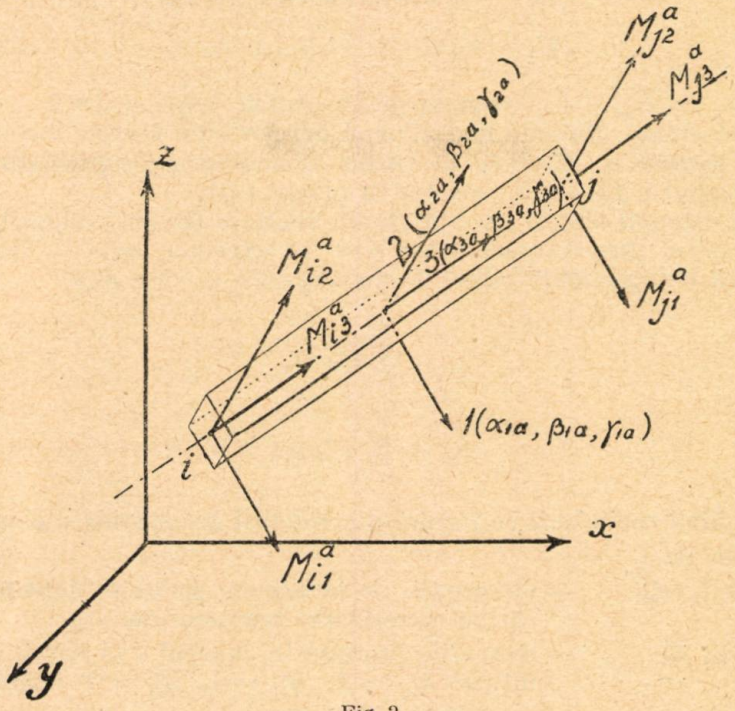


Fig. 2

Raportăm acest cadru la un sistem general de coordonate *Oxyz*. Componentele rotirilor nodurilor după aceste axe coordonate vor fi

$$\varphi_{ix},\ \varphi_{iy},\ \varphi_{iz}.$$

Alegem pentru fiecare bară cîte un sistem propriu de direcții ortogonale (*1*, *2*, *3*) ca în figura 2. Direcțiile *1* și *2* vor fi dirijate normal pe axul barei și după cele două direcții principale ale secțiunilor barei, iar direcția *3* va fi dirijată în lungul barei. Sensul direcției *3* este arbitrar, însă sensurile direcțiilor *1* și *2* vor fi alese astfel ca o rotire pozitivă (în sensul acelor unui ceasornic) a direcției *1*, în planul normal pe *3*, să o suprapună peste direcția *2*, iar o rotire pozitivă a direcției *2* în planul normal pe *1* să o suprapună peste direcția *3*.

Dacă notăm cu

$$\alpha_{1a},\ \beta_{1a},\ \gamma_{1a},$$
$$\alpha_{2a},\ \beta_{2a},\ \gamma_{2a},$$
$$\alpha_{3a},\ \beta_{3a},\ \gamma_{3a},$$

cosinusurile directoare ale celor trei direcții ale barei *a*, iar cu

$$\varphi^a_{i1},\ \varphi^a_{i2},\ \varphi^a_{i3},$$

componentele rotirilor nodului i după aceleași direcții, vom avea

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^a &= \alpha_{1a}\,\varphi_{ix} + \beta_{1a}\,\varphi_{iy} + \gamma_{1a}\,\varphi_{iz}, \\ \varphi_{i2}^a &= \alpha_{2a}\,\varphi_{ix} + \beta_{2a}\,\varphi_{iy} + \gamma_{2a}\,\varphi_{iz}, \\ \varphi_{i3}^a &= \alpha_{3a}\varphi_{ix} + \beta_{3a}\,\varphi_{iy} + \gamma_{3a}\,\varphi_{iz}. \end{aligned} \tag{34}$$

Notăm cu ψ_{1a} și ψ_{2a} componentele rotirii barei a după cele două direcții principale. Rotirile nodurilor și barelor sînt vectori dirijați după direcțiile respective. Trebuie să ținem seama că ψ_{1a} reprezintă rotirea barei în planul i 23, iar ψ_{2a} rotirea în planul i 31.

Dacă sistemul elastic are l grade de libertate (rotiri independente ale barelor) rotirea unei bare oarecare a se va exprima liniar în funcție de cele l rotiri independente, alese ca necunoscute și vom avea

$$\begin{aligned} \psi_{1a} &= \sum_{k=1}^{l} \omega_{1k}^a \psi_k, \\ \psi_{2a} &= \sum_{k=1}^{l} \omega_{2k}^a \psi_k, \end{aligned} \tag{35}$$

ω_{1k}^a și ω_{2k}^a fiind coeficienți ce rezultă din condiții geometrice și cinematice.

Notăm cu

$\mathfrak{M}_{i1}^a, \mathfrak{M}_{i2}^a, \mathfrak{M}_{i3}^a$ — momentele de incastrare perfectă, datorite încărcărilor exterioare, temperatură etc.;

$\lambda_{i1}^a,\ \lambda_{i2}^a,\ \lambda_{i3}^a$ — eforturile produse în capătul i al barei, de către rotirile $\overline{\varphi}_{i1}^a = 1,\ \overline{\varphi}_{i2}^a = 1,\ \overline{\varphi}_{i3}^a = 1$ (rigidități la încovoiere și torsiune);

$\mu_{i1}^a,\ \mu_{i2}^a,\ \mu_{i3}^a$ — eforturile produse în capătul i, de către rotirile capătului opus al barei $\overline{\varphi}_{j1}^a = 1,\ \overline{\varphi}_{j2}^a = 1,\ \overline{\varphi}_{j3}^a = 1$;

$\nu_{i1}^a,\ \nu_{i2}^a$ — eforturile produse în capătul i către rotirile barei $\overline{\psi}_{1a} = 1,\ \overline{\psi}_{2a} = 1$;

$\varphi_{jx},\ \varphi_{jy},\ \varphi_{jz}$ — componentele rotirii nodului j, după axele sistemului general;

$\varphi_{j1}^a,\ \varphi_{j2}^a,\ \varphi_{j3}^a$ — componentele rotirii aceluiași nod, după sistemul de coordonate al barei a.

Componentele momentului din capătul i al barei a, după cele trei direcții principale, vor fi *)

$$\begin{aligned} M_{i1}^a &= \lambda_{i1}^a \varphi_{i1}^a + \mu_{i1}^a\,\varphi_{j1}^a + \nu_{i1}^a\,\psi_{1a} + \mathfrak{M}_{i1}^a, \\ M_{i2}^a &= \lambda_{i2}^a\,\varphi_{i2}^a + \mu_{i2}^a\,\varphi_{j2}^a + \nu_{i2}^a\psi_{2a} + \mathfrak{M}_{i2}^a, \\ M_{i3}^a &= \lambda_{i3}^a\,\varphi_{i3}^a + \mu_{i3}^a\,\varphi_{j3}^a + \mathfrak{M}_{i3}^a. \end{aligned} \tag{36}$$

*) Pentru bare cu secțiuni constante și pentru o altă convenție de semne, expresiile (36) sînt date în [8].

Ținînd seama de (34) și (35) avem

$$M^a_{i1} = \lambda^a_{i1}(\alpha_{1a}\varphi_{ix} + \beta_{1a}\varphi_{iy} + \gamma_{1a}\varphi_{iz}) + \mu^a_{i1}(\alpha_{1a}\varphi_{jx} + \beta_{1a}\varphi_{jy} + \gamma_{1a}\varphi_{jz}) + \\ + \nu^a_{i1}\sum \omega^a_{ik}\psi_k + \mathfrak{M}^a_{i1},$$

$$M^a_{i2} = \lambda^a_{i2}(\alpha_{2a}\varphi_{ix} + \beta_{2a}\varphi_{iy} + \gamma_{2a}\varphi_{iz}) + \mu^a_{i2}(\alpha_{2a}\varphi_{jx} + \beta_{2a}\varphi_{jy} + \gamma_{2a}\varphi_{jz}) + \\ + \nu^a_{i2}\sum \omega^a_{2k}\psi_k + \mathfrak{M}^a_{i2}, \qquad (37).$$

$$M^a_{i3} = \lambda^a_{i3}(\alpha_{3a}\varphi_{ix} + \beta_{3a}\varphi_{iy} + \gamma_{3a}\varphi_{iz}) + \mu^a_{i3}(\alpha_{3a}\varphi_{jx} + \beta_{2a}\varphi_{jz} + \gamma_{3a}\varphi_{jz}) + \mathfrak{M}^a_{i3}.$$

Cu ajutorul expresiilor (37) putem forma matricea reacțiilor, deci să obținem un sistem de ecuații care să ne dea valorile necunoscutelor și apoi, pe ale tuturor eforturilor.

În metoda distribuirii momentelor nu trebuie însă să determinăm decît factorii de repartiție. Aceștia sînt dați de rapoartele dintre coeficienții deformațiilor alese ca necunoscute, din expresiile (37) și lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare λ, μ, ν în deplasarea unitară a deformației respective.

În cazul de față, pentru rotirea unitară $\bar{\varphi}_{ix} = 1$, avem conform relațiilor (34)

$$\bar{\varphi}^a_{i1} = \alpha_{1a}, \quad \bar{\varphi}^a_{i2} = \alpha_{2a}, \quad \bar{\varphi}^a_{i3} = \alpha_{3a},$$

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = \ldots \bar{\psi}_l = 0,$$

iar eforturile în capetele barei ij, datorite acestor rotiri, sînt

$$\bar{M}^a_{i1} = \lambda^a_{i1}\alpha_{1a}, \quad \bar{M}^a_{i2} = \lambda^a_{i2}\alpha_{2a}, \quad \bar{M}^a_{i3} = \lambda^a_{i3}\alpha_{3a},$$

$$\bar{M}^a_{j1} = \mu^a_{i1}\alpha_{1a}, \quad \bar{M}^a_{j2} = \mu^a_{i2}\alpha_{2a}, \quad \bar{M}^a_{j3} = \mu^a_{j3}\alpha_{3a}.$$

Lucrul mecanic virtual al acestor eforturi va fi

$$L^a_{ix} = \lambda^a_{i1}\alpha^2_{1a} + \lambda^a_{i2}\alpha^2_{2a} + \lambda^a_{i3}\alpha^2_{3a},$$

iar pentru toate barele ce concură în nodul i

$$L_{ix} = \sum^a L^a_{ix} = \sum^a (\lambda^a_{i1}\alpha^2_{1a} + \lambda^a_{i2}\alpha^2_{2a} + \lambda^a_{i3}\alpha^2_{3a}). \qquad (38)$$

Factorii de repartiție vor fi deci

$$\rho^a_{i1} = -\frac{\lambda^a_{i1}\alpha_{1a}}{L_{ix}}; \quad \rho^a_{i2} = -\frac{\lambda^a_{i2}\alpha_{2a}}{L_{ix}}; \quad \rho^a_{i3} = -\frac{\lambda^a_{i3}\alpha_{3a}}{L_{ix}};$$

$$\rho^a_{j1} = -\frac{\mu^a_{j1}\alpha_{1a}}{L_{ix}}; \quad \rho^a_{j2} = -\frac{\mu^a_{j2}\alpha_{2a}}{L_{ix}}; \quad \rho^a_{j3} = -\frac{\mu^a_{j3}\alpha_{3a}}{L_{ix}}. \qquad (39)$$

Se pot introduce și de data aceasta coeficienții de transmitere, care, pentru momentele încovoietoare, sînt la fel cu acei de la cadrele plane, iar pentru momentele de torsiune sînt dați de raportul $\mu^a_{j3} : \lambda^a_{i3}$. Pentru bare cu secțiune constantă, coeficienții de transmitere sînt $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; —1.

În același mod se obțin și factorii de repartiție pentru rotirile $\bar{\varphi}_{iy} = 1$ și $\bar{\varphi}_{iz} = 1$,

$$\begin{aligned}
&\rho'^{a}_{i1} = -\frac{\lambda^a_{i1}\beta_{1a}}{L_{iy}}; \quad \rho'^{a}_{i2} = -\frac{\lambda^a_{i2}\beta_{2a}}{L_{iy}}; \quad \rho'^{a}_{i3} = -\frac{\lambda^a_{i3}\beta_{3a}}{L_{iy}};\\
&\rho'^{a}_{j1} = -\frac{\mu^a_{j1}\beta_{1a}}{L_{iy}}; \quad \rho'^{a}_{j2} = -\frac{\mu^a_{j2}\beta_{2a}}{L_{iy}}; \quad \rho'^{a}_{j3} = -\frac{\mu^a_{j3}\beta_{3a}}{L_{iy}};\\
&\rho''^{a}_{i1} = -\frac{\lambda^a_{i1}\gamma_{1a}}{L_{iz}}; \quad \rho''^{a}_{i2} = -\frac{\lambda^a_{i2}\gamma_{2a}}{L_{iz}}; \quad \rho''^{a}_{i3} = -\frac{\lambda^a_{i3}\gamma_{3a}}{L_{iz}};\\
&\rho''^{a}_{j1} = -\frac{\mu^a_{j1}\gamma_{1a}}{L_{iz}}; \quad \rho''^{a}_{j2} = -\frac{\mu^a_{j2}\gamma_{2a}}{L_{iz}}; \quad \rho''^{a}_{j3} = -\frac{\mu^a_{j3}\gamma_{3a}}{L_{iz}}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Lucrul mecanic virtual al momentelor ce trebuie repartizate prin iterația (h) se calculează în modul următor:

Dacă notăm cu $M^{a(h)}_{i1}$, $M^{a(h)}_{i2}$, $M^{a(h)}_{i3}$ momentele obținute prin operațiile precedente și rămase nerepartizate în nodul i vom avea

$$\begin{aligned}
L^{(h+1)}_{ix} &= \sum^{a} (\alpha_{1a} M^{a(h)}_{i1} + \alpha_{2a} M^{a(h)}_{i2} + \alpha_{3a} M^{a(h)}_{i3}),\\
L^{(h+1)}_{iy} &= \sum^{a} (\beta_{1a} M^{a(h)}_{i1} + \beta_{2a} M^{a(h)}_{i2} + \beta_{3a} M^{a(h)}_{i3}),\\
L^{(h+1)}_{iz} &= \sum^{a} (\gamma_{1a} M^{a(h)}_{i1} + \gamma_{2a} M^{a(h)}_{i2} + \gamma_{2a} M^{a(h)}_{i3}),
\end{aligned}$$

în care sumele se extind la toate barele ce concură în nodul i.

Să calculăm acum factorii de repartiție pentru deplasarea ψ_k.

Lucrul mecanic virtual al rotirii unitare $\bar{\psi}_k = 1$ este

$$L_k = \sum^{a} [(\nu^a_{i1} + \nu^a_{j1})\,\bar{\omega}^{a^2}_{1k} + (\nu^a_{i2} + \nu^a_{j2})\,\bar{\omega}^{a^2}_{2k}], \tag{41}$$

în care suma se referă la toate barele sistemului, ce sînt antrenate de rotirea $\bar{\psi}_k = 1$.

Factorii de repartiție vor fi deci

$$\begin{aligned}
&\rho^{ak}_{i1} = -\frac{\nu^a_{i1}\omega^a_{1k}}{L_k}; \quad \rho^{ak}_{i2} = -\frac{\nu^a_{i2}\omega^a_{2k}}{L_k};\\
&\rho^{ak}_{j1} = -\frac{\nu^a_{j1}\omega^a_{1k}}{L_k}; \quad \rho^{ak}_{j2} = -\frac{\nu^a_{j2}\omega^a_{2k}}{L_k}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Lucrul mecanic virtual al eforturilor ce trebuie repartizate prin iterația (h) se calculează în același mod ca pentru rotirile nodurilor și avem

$$L^{(h+1)}_{k} = \sum^{r_k} [\omega^a_{1k}(M^{a(h)}_{i1} + M^{a(h)}_{j1}) + \omega^a_{2k}(M^{a(h)}_{i2} + M^{a(h)}_{j2})],$$

în care suma este extinsă la toate barele antrenate de deplasarea (k).

În cazul cadrelor spațiale calculul este mai dificil atît din cauză că pentru fiecare nod avem trei rotiri independente, cît și din cauza complicațiilor suplimentare, încît nu poate fi aplicat cu ușurință decît pentru cadre cu noduri puține sau pentru cadre la care direcțiile barelor aduc simplificări.

În orice caz, efectuarea calculelor într-o singură etapă este de preferat metodei cu forțe de fixare și în cele mai multe cazuri și metodei eforturilor sau a deformațiilor *).

VII. CONVERGENȚA ITERAȚIEI

Pentru aplicarea metodei distribuirii eforturilor este necesar să cunoaștem gradul de convergență al procesului iterativ. Se știe [3] și [6] că orice sistem de ecuații de condiție al unui sistem elastic poate fi rezolvat prin metoda iterației, încît rezultă că și metoda distribuirii momentelor poate fi aplicată oricărui sistem elastic. Pentru sistemele elastice ale căror ecuații de condiții sînt încet convergente, metoda însă nu mai este avantajoasă, deoarece necesită un număr prea mare de iterații, pentru a se obține rezultate suficient de exacte.

Această dificultate se poate uneori înlătura prin folosirea unor variante ale metodei iterației, prin alegerea unor valori inițiale cît mai apropiate de cele exacte, prin folosirea mai multor trepte de calcul, sau prin folosirea simetriei sistemului elastic.

Pentru a ne da seama de gradul de convergență în procesul de iterație, atunci cînd urmează să aplicăm metoda distribuirii eforturilor, ar trebui să formăm ecuația caracteristică a sistemului de ecuații și să-i aflăm rădăcinile, operații care în cazul sistemelor elastice cu multe deplasări comportă calcule extrem de anevoioase, deci nu aduc nici un folos.

Practica arată că metoda distribuirii eforturilor se poate aplica cu rezultate foarte bune în cazul cînd sistemul de condiție (12) satisface criteriul de convergență al lui Wittmeyer, care pune condiția ca în fiecare ecuație a sistemului (12) coeficientul diagonalei principale să fie mai mare în valoare absolută, decît suma valorilor absolute a celorlalți coeficienți, adică să avem pentru fiecare ecuație

$$|r_{ii}| > |r_{1i}| + |r_{2i}| + \ldots |r_{i-1i}| + |r_{i+1i}| + \ldots |r_{ni}|.$$

Din cauza simetriei sistemului ($r_{ij} = r_{ji}$), condiția de mai sus se mai poate scrie și astfel

$$\left|\frac{r_{i1}}{r_{ii}}\right| + \left|\frac{r_{i2}}{r_{ii}}\right| + \ldots \left|\frac{r_{ii-1}}{r_{ii}}\right| + \left|\frac{r_{ii+1}}{r_{ii}}\right| + \ldots \left|\frac{r_{in}}{r_{ii}}\right| < 1,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$\frac{r_{ij}}{r_{ii}}$ reprezintă însă lucrul mecanic virtual, în deplasarea j al factorilor de repartiție pentru deplasarea i, încît condiția de mai sus ne arată că pentru

*) În lucrările [4] și [5] sînt date exemple de calculul unor cadre spațiale prin metoda mixtă. În partea a doua a lucrării vom trata un exemplu prin metoda descrisă mai sus, cu care ocazie se va putea face o comparație între cele două metode.

ca convergența iterației să fie satisfăcătoare, trebuie ca pentru orice deplasare virtuală i a sistemului elastic suma valorilor absolute ale lucrului mecanic virtual în toate celelalte deplasări virtuale, a factorilor de repartiție pentru deplasarea i, să fie mai mică decît 1*).

În cazul cadrelor cu noduri fixe, această condiție este întotdeauna îndeplinită, suma fiind întotdeauna mai mică decît 1, iar pentru bare cu secțiuni constante, cel mult $\frac{1}{2}$. Pentru acest gen de cadre, metoda distribuirii eforturilor va fi deci întotdeauna avantajoasă.

Pentru sisteme elastice cu noduri deplasabile, o analiză generală a condiției de convergență formulate este destul de dificilă din cauza marii diversități a structurilor elastice și a multiplelor elemente ce intervin în calcule, încît ea va trebui făcută pentru fiecare caz în parte.

Această analiză se poate face, avînd calculați factorii de repartiție pentru fiecare deplasare și poate uneori să fie de folos, arătîndu-ne de la început gradul de convergență al iterațiilor.

În general convergența sistemelor elastice cu noduri deplasabile este redusă, încît pentru obținerea unor rezultate satisfăcătoare este necesar un umăr mult mai mare de iterații decît pentru cadrele cu noduri fixe. Totuși metoda expusă poate fi avantajoasă și în cazul acesta, mai ales pentru sistemele cu un număr mare de deplasări, deoarece la fiecare iterație se repetă în mod mecanic calculele din iterațiile precedente, pe cînd în metoda mixtă, pe lîngă faptul că trebuie făcut cîte un calcul pentru fiecare deplasare, mai intervine apoi stabilirea și rezolvarea unui sistem de ecuații, după care eforturile finale trebuie calculate separat.

În cazurile în care ne putem mulțumi cu rezultate aproximative deci atunci cînd nu este necesar să efectuăm decît un număr mic de iterații, metoda arătată este preferabilă metodei mixte.

VIII. ÎNCHEIERE

Calcule, făcute atît pentru cadre cu noduri deplasabile, cît și pentru cadre cu bare curbe au arătat că metoda generală, cu variantele sale arătate mai sus sînt destul de ușor de aplicat și conduc la rezultate exacte.

Metoda generală expusă ne indică posibilitatea de aplicare a metodei distribuirii eforturilor și la sisteme elastice mult mai complicate, chiar și la sisteme continue (plăci plane sau curbe) ale căror ecuații diferențiale se pot înlocui cu suficientă aproximație prin ecuații cu diferențe finite, încît atît eforturile în fiecare punct cît și ecuațiile de echilibru fiind date ca funcții sau ecuații liniare ale deformațiilor, vom putea scrie relațiile de lucru mecanic virtual și expresiile factorilor de repartiție în modul general arătat.

Pentru fiecare caz trebuie însă găsită schema de calcul cea mai potrivită, fie sub forma unor diagrame ale sistemului elastic, fie sub formă de tablouri.

Și în cazul acesta însă, trebuie examinată problema convergenței procesului de iterație, care condiționează aplicabilitatea metodei.

Primită la redacție la 1 decembrie 1955.

*) Dacă în locul valorilor absolute luăm valorile reale, obținem coeficienții ecuațiilor de condiție din metoda deformațiilor, coeficientul necunoscutei principale fiind unitatea.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕТОДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

ЧАСТЬ 1

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Метод распределения моментов может быть применен ко всем системам прямых или гнутых балок. За исключением ярусных рам с параллельными столбами, расчет должен производиться в несколько этапов методом закрепляющих сил.

В настоящей работе доказывается тождественность метода деформаций методу распределения монентов; единственная разница между обоими методами состоит в порядке производства расчетов и в исключительном применении итерации.

Напряжения характеристических сечений упругой структуры могут быть выражены в зависимости от n независимых деформаций, уравнениями (1) или при помощи матриц (2), (3) и (4), отношением (5).

Применяя принцип виртуальной работы получают n уравнений (12), определяющих значения деформаций и следовательно напряжений.

Решая систему уравнений (12) путем итерации констатируют, что всякое характеристическое напряжение структуры может выражаться сходящимся рядом, каждый член которого получается умножением виртуальной работы напряжений предыдущей итерации на коэффициенты распределения.

Таким образом в каждой итерации уравновешивается виртуальная работа прежде полученных напряжений.

Из этого вытекает общий метод, применимый ко всякой упругой плоской или пространственной структуре с прямыми или изогнутыми балками.

Общий метод анализируется применительно к различным категориям структур (неподвижным и подвижным узлам, с изогнутыми балками, и пространственным структурам) с указанием для каждого случая особого метода.

В заметке, которая появится в следующем номере, будет показано применение этих методов к трем примерам, уже исследованным классическими методами.

Полученные результаты доказывают точность и преимущества этих методов.

UNE THÉORIE GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE DE DISTRIBUTION DES MOMENTS.

I re PARTIE

(RÉSUMÉ)

La méthode de distribution des moments peut être appliquée à tout système aux barres rectilignes ou courbes. A l'exception du cas des cadres étagés à pilliers parallèles, le calcul doit être fait en plusieurs étapes, par la méthode des forces de fixation.

Dans l'étude présente, on démontre l'identité de la méthode des déformations et de la méthode de distribution des moments, la seule

différence entre ces deux méthodes provenant de l'arrangement des calculs et de l'exclusive utilisation de l'itération.

Les efforts des sections caractéristiques d'une structure élastique peuvent être exprimées en fonction des n déformations indépendantes par les équations (1) ou, à l'aide des matrices (2), (3) et (4), par la relation (5).

Utilisant le principe du travail virtuel, on obtient les n équations (12), qui déterminent les valeurs des déformations, donc des efforts.

En résolvant le système (12) au moyen de l'itération, on observe que tout effort caractéristique de la structure peut être obtenu en série convergente, chaque terme de la série étant obtenu par la multiplication du travail virtuel des efforts de l'itération précédente, par des facteurs de répartition.

Ainsi, dans chaque itération on équilibre le travail virtuel des efforts obtenus précédemment.

Il en résulte une méthode générale, applicable à toute structure élastique, à barres rectilignes ou courbes, plane ou dans l'espace.

La méthode générale est analysée pour différentes catégories de structures (nœuds fixes, nœuds déplaçables, à barres courbes et aux structures dans l'espace), en indiquant pour chaque cas une méthode particulière.

Dans une note, qui paraîtra dans le prochain numéro de ce périodique, on applique ces méthodes à trois exemples déjà étudiés par les méthodes classiques.

Les résultats obtenus indiquent l'exactitude des méthodes et leurs avantages.

BIBLIOGRAFIE

1. Agent R., *Metoda aproximațiilor succesive*. E.S.A.C., București, 1955.
2. Beyer K., *Die Statik im Eisenbetonbau*. J. Springer, Berlin, 1933.
3. Fadeev V. N., *Vîcislitelntie metodî lineinoi alghebrî*. Gosudarstv. izd. tehn.-teor.-literat., Moscova, 1950.
4. Palotás László, *Keretek elmélete és számitása*. Köslekedés és mélyépétés tudományi könyv és folyóivatkiadó vállalat. Budapesta, 1951.
5. — *Die Berechnung räumlicher Rahmenkonstruktionen mit den Momentenausgleichsverfahren*. Acta Technica Acad. Scient. Hungaricae, Budapesta, 1952, t. II, fasc. 2—4.
6. Popovici C. Const., *Asupra metodei iterației, aplicată la un sistem de ecuații liniare*. Studii și cercetări matematice, t. IV, nr. 1—2, 1953, p. 233.
7. Prokofiev I. P., *Statica construcțiilor*. OPED C.F.R. București, 1951, vol. II.
8. Stavraki L. N., *Rasciot procinosti prostranstvenîh karkasov iz tonkostenîh sterjnei otkrîtovo simmetriceskogo profilea. Rasciot prostranstvenîh konstrukții*. Gostroizdat, Moscova 1951, fasc. II.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

REZISTENŢA LA ÎNCOVOIERE A PRĂJINILOR GRELE ÎNCĂRCATE AXIAL CU O PARTE DIN GREUTATEA PROPRIE

DE

N. S. PÎRVULESCU

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

S-a arătat anterior [1] sarcinile critice la care tijele grele îşi pierd stabilitatea. În cazul garniturii prăjinilor de foraj, atît flambajul cît şi instabilitatea de rotaţie sînt limitate de pereţii găurii de sondă. Se pune întrebarea: în ce condiţii se pot depăşi valorile critice ale apăsării pe sapă, pentru a mări viteza de înaintare a acesteia în teren şi a realiza astfel, ceea ce se numeşte forajul forţat. Pentru a răspunde la această întrebare este necesar a se determina efortul unitar maxim ce se naşte în prăjinile grele prin încovoiere, cînd sarcinile critice sînt depăşite.

Deşi, după cum am arătat [1], cazul cel mai apropiat de realitate este acela al articulaţiei la extremitatea inferioară, al încastrării la extremitatea superioară şi fără deplasare laterală; în cele ce urmează însă, vom considera cazul mai simplu şi anume acela al ambelor capete articulate şi tot fără deplasare laterală. Acesta din urmă este cazul cel mai apropiat de cel dintîi, prezintă rezultate mai acoperitoare şi poate fi folosit în următoarea premisă simplificatoare. În cazul formei de pierdere a stabilităţii după mai multe bucle, admitem pentru simplificare că nodurile intermediare pot fi considerate ca articulaţii; ceea ce reduce problema la studiul unei singure bulce articulată la ambele capete şi anume la studiul buclei inferioare, care este cea mai solicitată.

S-a arătat [2] că integrala ecuaţiei diferenţiale a liniei medii deformată elastic

$$A\frac{d^4y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[(x-h)\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\omega}{g}\,y, \tag{0}$$

este dată de expresia

$$y(x)=\sum_{j=0}^{3} j!\,a_j\,\Psi_j(x), \tag{1}$$

în care

$$\Psi_j(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta^r(x)\, \Xi_{j+4r}(x), \tag{2}$$

valabilă pentru $j \geqslant 2$;

pentru $j = 1$,

$$\Psi_1(x) = \frac{N_1^{0,0}}{1!} + z(x)\, \Xi_4(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \beta^r(x)\, \Xi_{1+4r}(x) \tag{3}$$

pentru $j = 0$,

$$\Psi_0(x) = \frac{N_0^{0,0}}{0!} + \sum_{r=1}^{\infty} \beta^r(x)\, \Xi_{4r}(x), \tag{4}$$

iar

$$\Xi_{j+4r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x)\, \frac{N_{j+4r}^{k,k-u}}{(j+4r+2k+u)!}, \tag{5}$$

$$z(x) = x^3/A; \quad A = EI/q, \tag{6}$$

$$-\alpha'(x) = \alpha(x) = h/x, \tag{7}$$

$$\beta(x) = w\, x^4; \; w = B/A; \; B = \omega^2/g. \tag{8}$$

Redăm notațiile

$y(x)$ — săgeata fibrei medii deformate elastic la depărtarea x de originea O considerată în extremitatea inferioară;
EI — rigiditatea tijei;
q — greutatea aparentă a prăjinei pe unitatea de lungime;
g — accelerația gravității;
h — lungimea porțiunii comprimate a tijei;
ω — viteza de rotație a prăjinii.

Numerele $N_{j+4r}^{k,k-u}$ au fost calculate anterior [2] și [3].

Considerînd extremitatea inferioară articulată în origine avem $a_0 = 0 = a_2$ și relația (1) devine

$$y(x) = a_1\, x\, \Psi_1(x) + 3!\, a_3\, x^3\, \Psi_3(x). \tag{9}$$

Derivînd succesiv de i ori avem

$$y^{(i)}(x) = a_1\, x^{-i}\, \Psi_1^{(i)}(x) + 3!\, a_3\, x^{3-i}\, \Psi_3^{(i)}(x), \tag{10}$$

în care indicele superior i din paranteză reprezintă ordinul de derivare

numai pentru funcțiile $y(x)$ nu și pentru funcțiile $\Psi(x)$ și $\Xi(x)$, care sînt date de expresiile

$$\Psi_j^{(i)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta^r(x)\, \Xi_{j+4r}^{(i)}(x) \tag{11}$$

și

$$\Xi_{j+4r}^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x) \frac{N_{j+4r}^{k,\,k-u}}{(j+4r+2k+u-i)!}. \tag{12}$$

Considerînd extremitatea superioară fără deplasare laterală, pentru $x = L$, în care L este lungimea tijei, sau a unei bucle în ipoteza simplificatoare admisă, avem $y(L) = 0$ și relația (9) devine

$$3!\, a_3 = -a_1 \Psi_1(L)/L^2 \Psi_3(L). \tag{13}$$

În cazul articulației și la extremitatea superioară, condiția de instabilitate este dată de relația

$$\Psi_1(L)/\Psi_3(L) = \Psi_1^{(2)}(L)/\Psi_3^{(2)}(L), \tag{14}$$

care poate servi ca verificare a expresiei (13) în calculul numeric.

Eliminînd pe a_3 din relațiile (10) și (13) ,se obține

$$y^{(i)}(x) = a_1 x^{1-i} [\Psi_1^{(i)}(x) - \Psi_3^{(i)}(x)(x/L)^2 \Psi_1(L)/\Psi_3(L), \tag{15}$$

în care a_1 reprezintă înclinarea sapei înșurubată la extremitatea inferioară a garniturii de foraj.

Să notăm

x_1 — depărtarea punctului de pe linia elastică unde săgeata este maximă și deci înclinarea tijei este nulă ($\theta_1 = 0$);

x_2 — depărtarea punctului de inflexiune unde momentul de încovoiere este nul ($M_2 = 0$);

x_3 — depărtarea secțiunii unde solicitarea la încovoiere este maximă și deci forța tăietoare este nulă ($T_3 = 0$).

Pentru $x = x_1$ avem $y(x_1) = f_1$ și $y^{(1)}(x_1) = 0$.

În primul caz, relația (15), pentru $i = 0$, devine

$$a_1 = \frac{f_1/x_1}{\Psi_1(x_1) - \Psi_3(x_1)(x_1/L)^2 \Psi_1(L)/\Psi_3(L)}, \tag{16}$$

iar în al doilea caz, pentru $i=1$, aceeași relație devine

$$\left(\frac{L}{x_1}\right)^2 = \frac{\Psi_1(L)\, \Psi_3^{(1)}(x_1)}{\Psi_3(L)\, \Psi_1^{(1)}(x_1)}. \tag{17}$$

Pentru $x = x_3$ avem $y^{(3)}(x_3) = 0$ și relația (15) în care $i = 3$, devine

$$\left(\frac{L}{x_3}\right)^2 = \frac{\Psi_1(L)\, \Psi_3^{(3)}(x_3)}{\Psi_3(L)\, \Psi_1^{(3)}(x_3)}. \tag{18}$$

Se știe că momentul încovoietor este dat de expresia

$$M = -EI\, y^{(2)}(x). \tag{19}$$

Momentul încovoietor maxim M_3, corespunde lui x_3 și deci

$$-M_3/EI = y^{(2)}(x_3). \tag{20}$$

Ținînd seama de (15) în care $i = 2$, relația (20) devine:

$$-\frac{M_3}{EI} = \frac{a_1}{x_3}\left[\Psi_1^{(2)}(x_3) - \Psi_3^{(2)}(x_3)\,(x_3/L)^2\,\Psi_1(L)/\Psi_3(L)\right]. \tag{21}$$

Eliminînd pe a_1 din relațiile (16) și (21) se obține

$$\frac{M_3}{EI} = \frac{-f_1}{x_1 x_3}\,\frac{\Psi_1^{(2)}(x_3) - \Psi_3^{(2)}(x_3)\,(x_3/L)^2\,\Psi_1(L)/\Psi_3(L)}{\Psi_1(x_1) - \Psi_3(x_1)\,(x_1/L)^2\,\Psi_1(L)/\Psi_3(L)}. \tag{22}$$

Pentru $x = L$ relația (6) devine

$$EI = qL_3/z(L). \tag{23}$$

Eliminînd rigiditatea EI din relațiile (22) și (23) se obține:

$$\frac{M^3}{qLf_1} = -\frac{\frac{L}{x_1}\,\frac{L}{x_3}}{z(L)}\,\frac{\Psi_1^{(2)}(x_3) - \Psi_3^{(2)}(x_3)\,(x_3/L)^2\,\Psi_1(L)/\Psi_3(L)}{\Psi_1(x_1) - \Psi_3(x_1)\,(x_1/L)^2\,\Psi_1(L)/\Psi_3(L)}. \tag{24}$$

Valorile Ψ se obțin din relațiile (2), (3), (4) respectiv (11), (12) în care se înlocuiește x respectiv cu x_1, x_3 și L, iar rapoartele L/x_1 și L/x_3 se obțin rezolvînd ecuațiile (17) și (18).

Pentru ca în relațiile obținute să figureze parametri determinați $z(L)$ sau cunoscuți $\alpha(L)$ în locul funcțiilor $z(x)$ și $\alpha(x)$, facem înlocuirile date de expresiile

$$z(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3 z(L) \quad \text{și} \quad \alpha(x) = \frac{L}{x}\,\alpha(L). \tag{25}$$

Avînd în vedere expresiile din tabloul nr. 1, este mai comod să punem relația (24) sub forma următoare:

$$\frac{M_3}{qLf_1} = \frac{\frac{L}{x_1}\,\frac{\Psi_1(L)\,\Psi_3^{(2)}(x_3)}{\Psi_3(L)\,z(L)} - \frac{\Psi_1^{(2)}(x_3)}{z(L)}\left(\frac{L}{x_3}\right)^2}{\frac{L}{x_3}\,\Psi_1(x_1) - \left(\frac{x_1}{L}\right)^2\frac{\Psi_1(L)}{\Psi_3(L)}\,\Psi_3(x_1)} \tag{26}$$

Dacă însemnăm cu N_0 forța de apăsare pe sapă, avem

$$N_0 = q\,h_{1,3}^{2,0} \tag{27}$$

Ținînd seama de relația (7) pentru $x = L$ expresia apăsării pe sapă devine

$$N_0 = q\, L\, \alpha\,(L), \tag{28}$$

care înlocuită în (26) ne dă

$$M_3 = \chi\, N_0 f_1, \tag{29}$$

în care

$$\chi = \frac{\dfrac{L}{x_1}\left[\dfrac{\Psi_1(L)\,\Psi_3^{(2)}(x_3)}{\Psi_3\, z(L)\, z(L)} - \dfrac{\Psi_1^{(2)}(x_3)}{z\,(L)}\left(\dfrac{L}{x^3}\right)^2\right]}{\alpha\,(L)\,\dfrac{L}{x_3}\left[\Psi_1(x_1) - \left(\dfrac{x_1}{L}\right)^2 \dfrac{\Psi_1(L)}{\Psi_3(L)}\,\Psi_3(x_1)\right]}. \tag{30}$$

Ținînd seama de expresiile (17) și (18), relația (24) poate fi pusă și sub forma

$$\frac{M_3}{N_0 f_1} = \frac{-\dfrac{L}{x_1}\dfrac{L}{x_3}\left[\Psi_1^{(2)}(x_3) - \dfrac{\Psi_1^{(3)}(x_3)}{\Psi_3^{(3)}(x_3)}\,\Psi_3^{(2)}(x_3)\right]}{\alpha\,(L)\, z\,(L)\left[\Psi_1(x_1) - \dfrac{\Psi_1^{(1)}(x_1)}{\Psi_3^{(1)}(x_1)}\,\Psi_3(x_1)\right]}, \tag{31}$$

și prin urmare, avînd în vedere expresiile din tabloul nr. 1, relația (30) poate fi pusă sub forma:

$$\chi = \frac{\dfrac{L}{x_1}\left[\dfrac{\Psi_3^{(2)}(x_3)\,\Psi_1^{(3)}(x_3)}{\Psi_3^{(3)}(x_3)\, z\,(L)}\left(\dfrac{L}{x_3}\right)^3 - \dfrac{\Psi_1^{(2)}(x_3)}{z\,(L)}\left(\dfrac{L}{x_3}\right)^3\right]}{\alpha\,(L)\left(\dfrac{L}{x_3}\right)^2\left[\Psi_1(x_1) - \Psi_3(x_1)\,\dfrac{\Psi_1^{(1)}(x_1)}{\Psi_3^{(1)}(x_1)}\right]}, \tag{32}$$

care poate fi folosită în calculul numeric pentru verificarea rezultatelor obținute cu ajutorul relației (30).

Cazul particular al instabilității pentru care $\omega = 0$ îl vom denumi „flambajul garniturii de prăjini" pentru a-l deosebi de „instabilitatea de rotație" a cărui denumire o păstrăm pentru cazul general cînd $\omega \neq 0$.

B. REZISTENȚA PRĂJINILOR LA FLAMBAJ

Pentru $\omega = 0$, relațiile (2) și (3) devin

$$\Psi_1(x) = 1 + z\,(x)\,\Xi_4(x), \tag{33}$$

$$\Psi_3(x) = \Xi_3(x),$$

iar expresiile Ψ sînt date în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1.

Funcțiile Ψ pentru ω = 0

$$\Psi_1(L)=\frac{1}{1!}+z\left\{\frac{1}{4!}-z\left[\frac{\alpha}{6!}-\frac{4}{7!}\right]+z^2\left[\frac{\alpha^2}{8!}-\alpha\frac{10}{9}+\frac{28}{10!}\right]-\dots\right\}$$

$$\Psi_1^{(2)}(L)/z=\frac{1}{2!}-z\left[\frac{\alpha}{4!}-\frac{4}{5!}\right]+z^2\left[\frac{\alpha^2}{6!}-\alpha\frac{10}{7!}+\frac{28}{8!}\right]-\dots$$

$$\Psi_1(x_1)=\frac{1}{1!}+z\left(\frac{x_1}{L}\right)^3\left\{\frac{1}{4!}-z\left(\frac{x_1}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_1}\frac{\alpha}{6!}-\frac{4}{7!}\right]+z^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_1}\right)^2\frac{\alpha^2}{8!}-\frac{L}{x_1}\alpha\frac{10}{9!}+\frac{28}{10!}\right]-\dots\right\}$$

$$\Psi_1^{(1)}(x_1)=\frac{1}{0!}+z\left(\frac{x_1}{L}\right)^3\left\{\frac{1}{3!}-z\left(\frac{x_1}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_1}\frac{\alpha}{5!}-\frac{4}{6!}\right]+z^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_1}\right)^2\frac{\alpha^2}{7!}-\frac{L}{x_1}\alpha\frac{10}{8!}+\frac{28}{9!}\right]-\dots\right\}$$

$$\Psi_1^{(2)}(x_3)\left(\frac{L}{x_3}\right)^3/z=\frac{1}{2!}-z\left(\frac{x_3}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_3}\frac{\alpha}{4!}-\frac{4}{5!}\right]+z^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_3}\right)^2\frac{\alpha^2}{6!}-\frac{L}{x_3}\alpha\frac{10}{7!}+\frac{28}{8!}\right]-\dots$$

$$\Psi_1^{(3)}(x_3)\left(\frac{L}{x_3}\right)^3/z=\frac{1}{1!}-z\left(\frac{x_3}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_3}\frac{\alpha}{3!}-\frac{4}{4!}\right]+z^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_3}\right)^2\frac{\alpha^2}{5!}-\frac{L}{x_3}\alpha\frac{10}{6!}+\frac{28}{7!}\right]-\dots$$

$$\Psi_3(L)=\frac{1}{3!}-z\left[\frac{\alpha}{5!}-\frac{3}{6!}\right]+z^2\left[\frac{\alpha^2}{7!}-\alpha\frac{8}{8!}+\frac{18}{9!}\right]-z^3\left[\frac{\alpha^3}{9!}-\alpha^2\frac{15}{10!}+\alpha\frac{82}{11!}-\frac{162}{12!}\right]+\dots$$

$$\Psi_3^{(2)}(L)=\frac{1}{1!}-z\left[\frac{\alpha}{3!}-\frac{3}{4!}\right]+z^2\left[\frac{\alpha^2}{5!}-\alpha\frac{8}{6!}+\frac{18}{7!}\right]-z^3\left[\frac{\alpha^3}{7!}-\alpha^2\frac{15}{8!}+\alpha\frac{82}{9!}-\frac{162}{10!}\right]+\dots$$

$$\Psi_3(x_1)=\frac{1}{3!}-z\left(\frac{x_1}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_1}\frac{\alpha}{5!}-\frac{3}{6!}\right]+z^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_1}\right)^2\frac{\alpha^2}{7!}-\frac{L}{x_1}\alpha\frac{8}{8!}+\frac{18}{9!}\right]-z^3\left(\frac{x_1}{L}\right)^9\left[\left(\frac{L}{x_1}\right)^3\frac{\alpha^3}{9!}-\left(\frac{L}{x_1}\right)^2\alpha^2\frac{15}{10!}+\frac{L}{x_1}\alpha\frac{82}{11!}-\frac{162}{12!}\right]+\dots$$

$$\Psi_3^{(1)}(x_1)=\frac{1}{2!}-z\left(\frac{x_1}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_1}\frac{\alpha}{4!}-\frac{3}{5!}\right]+z^2\left(\frac{x_1}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_1}\right)^2\frac{\alpha^2}{6!}-\frac{L}{x_1}\alpha\frac{8}{7!}+\frac{18}{8!}\right]-z^3\left(\frac{x_1}{L}\right)^9\left[\left(\frac{L}{x_1}\right)^3\frac{\alpha^3}{8!}-\left(\frac{L}{x_1}\right)^2\alpha^2\frac{15}{9!}+\frac{L}{x_1}\alpha\frac{82}{10!}-\frac{162}{11!}\right]+\dots$$

$$\Psi_3^{(2)}(x_3)=\frac{1}{1!}-z\left(\frac{x_3}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_3}\frac{\alpha}{3!}-\frac{3}{4!}\right]+z^2\left(\frac{x_3}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_3}\right)^2\frac{\alpha^2}{5!}-\frac{L}{x_3}\alpha\frac{8}{6!}+\frac{18}{7!}\right]-z^3\left(\frac{x_3}{L}\right)^9\left[\left(\frac{L}{x_3}\right)^3\frac{\alpha^3}{7!}-\left(\frac{L}{x_3}\right)^2\alpha^2\frac{15}{8!}+\frac{L}{x_3}\alpha\frac{82}{9!}-\frac{162}{10!}\right]+\dots$$

$$\Psi_3^{(3)}(x_3)=\frac{1}{0!}-z\left(\frac{x_3}{L}\right)^3\left[\frac{L}{x_3}\frac{\alpha}{2!}-\frac{3}{3!}\right]+z^2\left(\frac{x_3}{L}\right)^6\left[\left(\frac{L}{x_3}\right)^2\frac{\alpha^2}{4!}-\frac{L}{x_3}\alpha\frac{8}{5!}+\frac{18}{6!}\right]-z^3\left(\frac{x_3}{L}\right)^9\left[\left(\frac{L}{x_3}\right)^3\frac{\alpha^3}{6!}-\left(\frac{L}{x_3}\right)^2\alpha^2\frac{15}{7!}+\frac{L}{x_3}\alpha\frac{82}{8!}-\frac{162}{9!}\right]+\dots$$

Observație, S-a notat $z(L)$ și $\alpha(L)$ respectiv cu z și α pentru simplificare.

1. Cazul extrem $\alpha(L) \to \infty$

În acest caz funcțiile $\Xi_{j\infty}$ devin funcții trigonometrice după cum s-a arătat anterior [4] și date în tabloul nr. 1, al acestei lucrări.

Funcțiile $\Psi(x)$ le notăm în acest caz cu $\Psi(x)_\infty$, iar expresiile lor sînt date în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

Relațiile dintre funcțiile $\Psi(x)_\infty$ și funcțiile trigonometrice $f(\alpha,z)$.

$$\Psi_1(x)_\infty = 1 + \frac{1}{\alpha(x)}\left[\frac{1}{2} - \frac{1-\cos\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}{\alpha(x)\,z(x)}\right]$$

$$\Psi_1^{(1)}(x)_\infty = 1 + \frac{1}{\alpha(x)}\left[1 - \frac{\sin\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}{\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}\right]$$

$$\frac{\Psi_1^{(2)}(x)_\infty}{z(x)} = \frac{1-\cos\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}{\alpha(x)\,z(x)} = \Psi_3^{(1)}(x)_\infty$$

$$\frac{\Psi_1^{(3)}(x)_\infty}{z(x)} = \frac{\sin\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}{\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}} = \Psi_3^{(2)}(x)_\infty$$

$$\Psi_3(x)_\infty = \frac{1}{\alpha(x)\,z(x)}\left[1 - \frac{\sin\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}{\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}}\right]$$

$$\Psi_3^{(3)}(x)_\infty = \cos\sqrt{\alpha(x)\,z(x)}$$

Pentru cazul în care ambele capete ale tijei sînt articulate, condiția de instabilitate — după cum s-a arătat anterior [4] — este

$$\alpha(L)\,z(L) = K^2\pi^2. \tag{34}$$

Ținînd seama de relațiile (25) condiția (34) devine

$$\alpha(x)\,z(x) = (K\pi\,x/L)^2, \tag{35}$$

cu care s-a exprimat funcțiile $\Psi(x)_\infty$ din tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

Relațiile dintre funcțiile $\Psi(x)_\infty$ și funcțiile trigonometrice $f(x/L)$

$$\Psi_1(x)_\infty = 1 + \frac{1}{\alpha(x)}\left[\frac{1}{2} - \frac{1-\cos K\pi\,x/L}{(K\pi\,x/L)^2}\right]$$

$$\Psi_1^{(1)}(x)_\infty = 1 + \frac{1}{\alpha(x)}\left[1 - \frac{\sin K\pi\,x/L}{K\pi\,x/L}\right]$$

$$\frac{\Psi_{(1)}^{(2)}(x)_\infty}{z(L)}\left(\frac{L}{x}\right)^3 = \frac{1-\cos K\pi\,x/L}{(K\pi\,x/L)^2} = \Psi_3^{(1)}(x)_\infty$$

$$\frac{\Psi_1^{(3)}(x)_\infty}{z(L)}\left(\frac{L}{x}\right)^3 = \frac{\sin K\pi\,x/L}{K\pi\,x/L} = \Psi_3^{(2)}(x)_\infty$$

$$\Psi_3(x)_\infty = \frac{1}{(K\pi\,x/L)^2}\left[1 - \frac{\sin K\pi\,x/L}{K\pi\,x/L}\right]$$

$$\Psi_3^{(3)}(x)_\infty = \cos K\pi x/L$$

În acest caz și pentru prima buclă de flambaj ($K = 1$), relațiile (17) și (18) devin

$$\cos \pi x_1/L = 0, \tag{36}$$

$$\operatorname{tg} \pi x_3/L = \pi/z\,(L), \tag{37}$$

care sînt verificate de valorile: $L/x_1 = 2$ și $L/x_3 = 2$.

Valorile funcțiilor $\Psi\,(x)_\infty$, pentru $K = 1$ sînt date în tabloul nr. 4.

Pentru verificare se pot folosi expresiile din tabloul nr.1, păstrînd numai termenii în $\alpha\,(L)$ la puterea cea mai mare și avînd în vedere condiția (34).

Dacă în formulele (30) sau (32) introducem valorile din tabloul nr. 4, obținem coeficientul $\chi = 1$.

Tabloul nr. 4

Valorile Ψ funcție de γ

Ψ \ $\alpha\,(L)$	∞	2	1	1/2
$\Psi_1\,(L)$	1	1,196	1,591	5,16
$\Psi_1^{(2)}\,(L)/z\,(L)$	$\frac{2}{\pi^2} = 0{,}2028$	0,261	0,381	1,859
$\Psi_3\,(L)$	$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}1014$	0,1034	0,1052	0,1667
$\Psi_3^{(2)}\,(L)$	0	0,1444	0,458	5,08
$\Psi_1\,(x_1)$	1	1,028	1,066	1,156
$\Psi_1^{(1)}\,(x_1)$	1	1,105	1,257	1,603
$\Psi_1^{(2)}\,(x_3)\left(\frac{L}{x_3}\right)^3/z\,(L)$	$\frac{4}{\pi^2} = 0{,}4056$	0,418	0,432	0,447
$\Psi_1^{(3)}\,(x_3)\left(\frac{L}{x_3}\right)^3/z\,(L)$	$\frac{2}{\pi} = 0{,}637$	0,702	0,764	0,822
$\Psi_3\,(x_1)$	$\frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^3} = 0{,}1472$	0,1461	0,1437	0,1395
$\Psi_3^{(1)}\,(x_1)$	$\frac{4}{\pi^2} = 0{,}4056$	0,402	0,395	0,385
$\Psi_3^{(2)}\,(x_3)$	$\frac{2}{\pi} = 0{,}637$	0,679	0,732	0,785
$\Psi_3^{(3)}\,(x_3)$	0	0,1723	0,338	0,494

2. Intervalul $\alpha\,(L) \leqslant 2$

Pentru acest interval valorile Ψ trecute în tabloul nr. 4, au fost calculate cu ajutorul expresiilor din tabloul nr. 1, în care, conform formulei (30) din studiul anterior [1]

$$z\,(L) = [c_{1,3}^{2.0}/\alpha\,(L)]^3, \tag{38}$$

iar valorile $c_{1,3}^{2.0}$ din tabloul nr. 1 al lucrării citate, sînt redate în tabloul nr. 5.

Lungimea critică a porțiunii comprimate $h_{1,3}^{2,0}$, este dată de formula (29) din lucrarea citată și pe care o redăm

$$h_{1,3}^{2,0} = c_{1,3}^{2,0} \sqrt[3]{EI/q}. \tag{39}$$

Deoarece valorile L/x_1 și L/x_3 se obțin din ecuațiile (17) și (18) prin iterație, este avantajos să se pornească de la cele obținute pentru $\alpha(L)$ precedent în ordinea descrescătoare a acestuia. Astfel pentru $\alpha(L) = 2$ se va porni iterațiile de la valorile extreme $L/x_1 = L/x_3 = 2$ corespunzătoare lui $\alpha(L) = \infty$ pentru $\alpha(L) = 1$ se va porni iterațiile de la valorile corespunzătoare lui $\alpha(L) = 2$ ș.a.m.d., întrucît aceste valori cresc în timp ce $\alpha(L)$ descrește.

Valorile χ s-au calculat cu formulele (30) și (32).

Pentru controlul rezultatelor obținute în tablourile nr. 4 și 5, valorile acestea s-au trecut respectiv pe diagrama din figura 1.

Tabloul nr. 5

Valorile χ

$\alpha(L)$	$c_{1,3}^{2,0}$	$z(L)$	L/x_1	L/x_3	χ	x_1/h	x_3/h
∞		0	2	2	1		
32	21,70 *)	—	—	—	(0,985)		
16	13,50 *)	—	(2,002)	(2,01)	(0,97)	0,0312	0,0311
8	8,77 *)	—	(2,008)	(2,035)	(0,94)	0,0623	0,6143
4	5,66 *)	—	(2,02)	(2,075)	(0,88)	0,1238	0,1205
2	3,74	6,229	2,05	2,20	0,79	0,2439	0,2273
4/3	(3,05)	—	(2,1)	(2,42)	(0,69)	0,3571	0,3096
1	2,65	18,2	2,18	2,73	0,59	0,4587	0,3663
2/3	(2,33)		(2,435)	(3,44)	(0,48)	0,6173	0,4367
1/2	2,18	82	2,7	4,41	0,407	0,719	0,4535
0	2				0,4	1	0,5

*) Valori obținute prin formula aproximativă (40) pentru expresia $c_{1,3}^{2,0*}$.

În diagrama din figura 2 sînt trasate variațiile valorilor x_1/h și x_3/h conform tabloului nr. 5

3. Intervalul $2 < \alpha(L) < \infty$

Valorile L/x_3, L/x_1 și χ au fost determinate pentru acest interval pe cale grafică după diagramele din figura 3 și au fost trecute între paranteze în tabloul nr. 5.

Valorile coeficientului de flambaj $c_{1,3}^{2,0}$ s-au calculat pentru acest interval cu următoarea formulă aproximativă pentru care aceste valori s-au deosebit cu notația stelat.

$$c_{1,3}^{2,0*} = \alpha(L) \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\alpha(L) - 1/2}}. \tag{40}$$

Această formulă s-a obținut [5] și [6] din acceptarea unei sarcini egală cu jumătate din greutatea tijei, introdusă însă la capătul superior al tijei, în locul considerării greutății proprii.

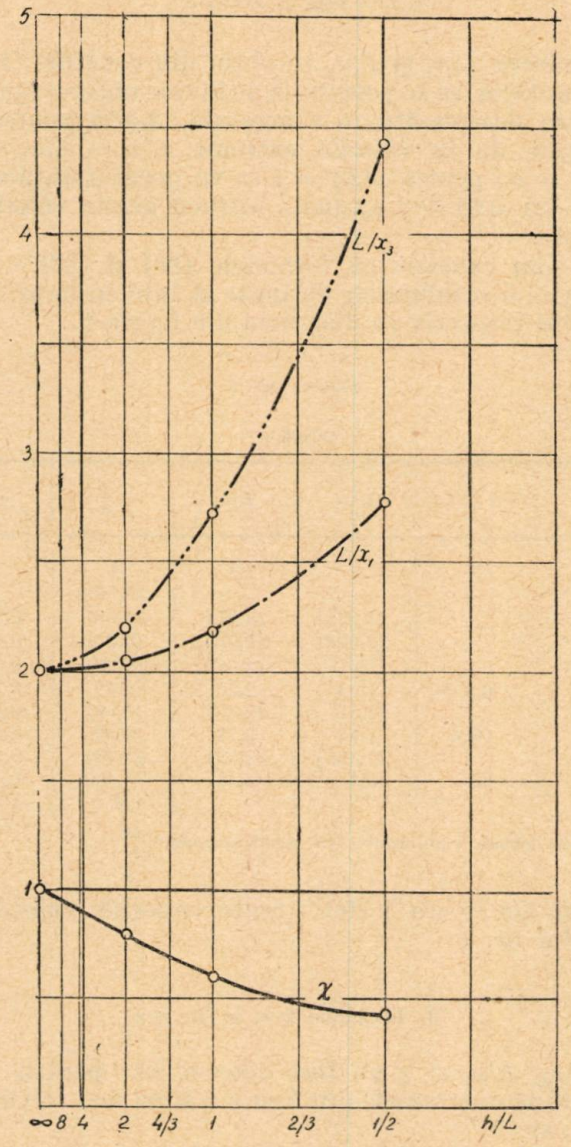


Fig. 1

C. APLICAȚII

Efortul unitar maxim σ care se naște în prăjini prin încovoierea lor, cînd se depășește sarcina critică, este dată, după cum se știe, de expresia

$$\sigma = M_3/W, \tag{41}$$

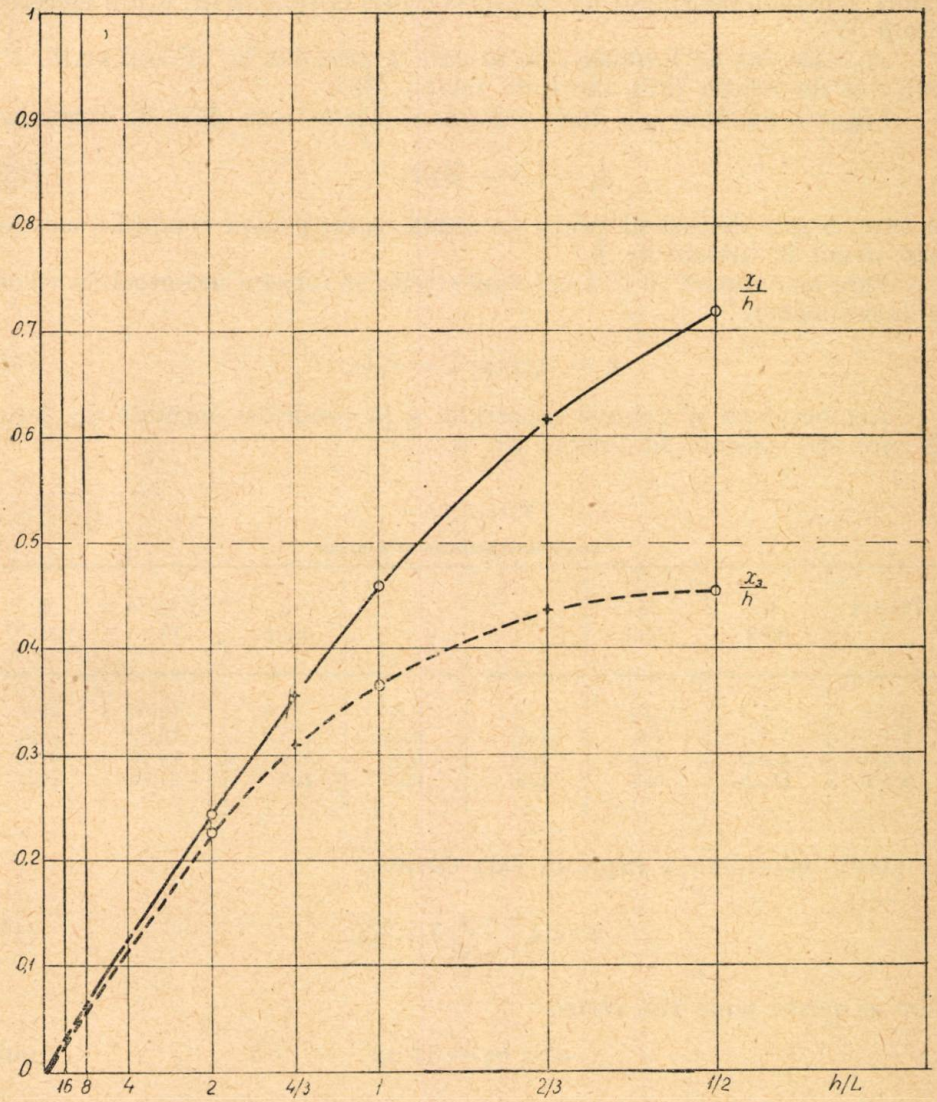


Fig. 2

în care :

$$W = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)/D, \tag{42}$$

D și d fiind diametrele exterior și interior ale prăjinilor grele, ale căror valori, pentru dimensiunile uzuale, sînt trecute în tabloul nr. 6, din lucrarea citată [1].

M_3 este dat de formula (29) în care χ este dat în tabloul nr. 5, N_0 este dat de relația (27), iar h de relația (39).

Săgeata maximă f_1 a liniei deformată elastic este dată de expresia :

$$f_1 = (\Delta - D)/2, \tag{43}$$

în care Δ este diametrul găurii de sondă, care, pentru condițiile uzuale, este trecut în tabloul nr. 6.

Este mai comod ca în locul diametrelor să folosim următoarele valori adimensionale :

$$\eta = \Delta/D \text{ și } \zeta = d/D. \tag{44}$$

Am notat cu η^* valorile raportului η în condițiile obținute de foraj și care sînt trecute în tabloul nr. 6.

Tabloul nr. 6

Caracteristicile prăjinilor grele uzuale

Prăjini "	D mm	Δ mm	η^*	ζ	q kg/m	$(EI/q)^{1/3}$ m	K kg/dm^3
2 7/8	95,3	119	1,25	0,33	42,5	12,65	28,3
4 1/2	139,7	191	1,35	0,41	85,5	16,59	26,8
6 5/8	196,9	274	1,40	0,45	162	21,40	26,2
8 5/8	254,5	381	1,50	0,45	267	24,95	26,2

În aceste considerații expresia (41) devine

$$\sigma = 4\frac{\eta - 1}{1 + \zeta^2}\chi\gamma h_{1,3}^{2,0}, \tag{45}$$

care se poate pune sub forma

$$\sigma = (\eta - 1)\sigma_0, \tag{46}$$

în care

$$\sigma_0 = K\chi h_{1,3}^{2,0}, \tag{47}$$

iar

$$K = 4\gamma/(1 + \zeta^2). \tag{48}$$

Valorile σ_0 sînt trecute în tabloul nr. 8, iar valorile K sînt trecute în tabloul nr. 6.

Tabloul nr. 7

Valorile $h_{1,3}^{2,0}$ în m

h/L \ Prăjini gr	2″7/8	4″1/2	6″5/8	8″5/8
32	274,5	360,0	464,4	541,4
16	170,8	224,0	288,9	336,8
8	110,9	145,5	187,7	218,8
4	71,6	93,9	121,1	141,2
2	47,4	62,1	80,0	93,4
4/3	(38,6)	(50,6)	(65,3)	(76,1)
1	33,5	43,9	56,7	66,1
2/3	(29,3)	(38,5)	(49,5)	(58,3)
1/2	27,6	36,2	46,7	54,4

Tabloul nr. 8

Valorile σ_0 în kg/cm²

h/L \ Prăjini gr	2″7/8	4″1/2	6″5/8	8″5/8
32	765,2	950,3	1 198	1 397
16	469	582,4	734,1	856
8	296,6	366,6	462,2	538,9
4	178,3	221,4	279,3	325,7
2	105,8	131,6	165,6	193,3
4/3	75,3	93,5	118,2	137,5
1	56,0	69,4	87,8	102,2
2/3	39,7	49,6	61,8	73,4
1/2	32,9	40,8	51,6	60,0

Valorile q trecute în tabloul nr. 6 au fost calculate pentru o greutate specifică aparentă $\gamma = 6{,}7$ kg/dm³ a prăjinilor de oțel cufundate într-un noroi cu $\gamma = 1{,}15$ kg/dm³.

Valorile $h_{1,3}^{2,0}$ pentru $h/L \leqslant 2$ au fost calculate anterior [1] și sînt redate în tabloul nr. 7. Valorile trecute în paranteză au fost determinate grafic după diagramele respective. Pentru intervalul $h/L > 2$ s-au folosit formulele (39) și (40).

Variațiile $h_{1,3}^{2,0}$ sînt trasate pe diagrama din figura 3.

La solicitările forțate de felul celor studiate aici, ceea ce cedează mai întîi sînt îmbinările ,care prezintă un W mai mic, cu alte cuvinte se rup cepurile. Prin urmare ceea ce interesează este efortul unitar, care se naște în cazul îmbinării și pe care-l notăm cu $\bar{\sigma}$.

Nu ne vom opri deocamdată la studiul îmbinării, ci vom admite o eficacitate a îmbinării λ dată de relația

$$\lambda = \sigma/\bar{\sigma}. \tag{49}$$

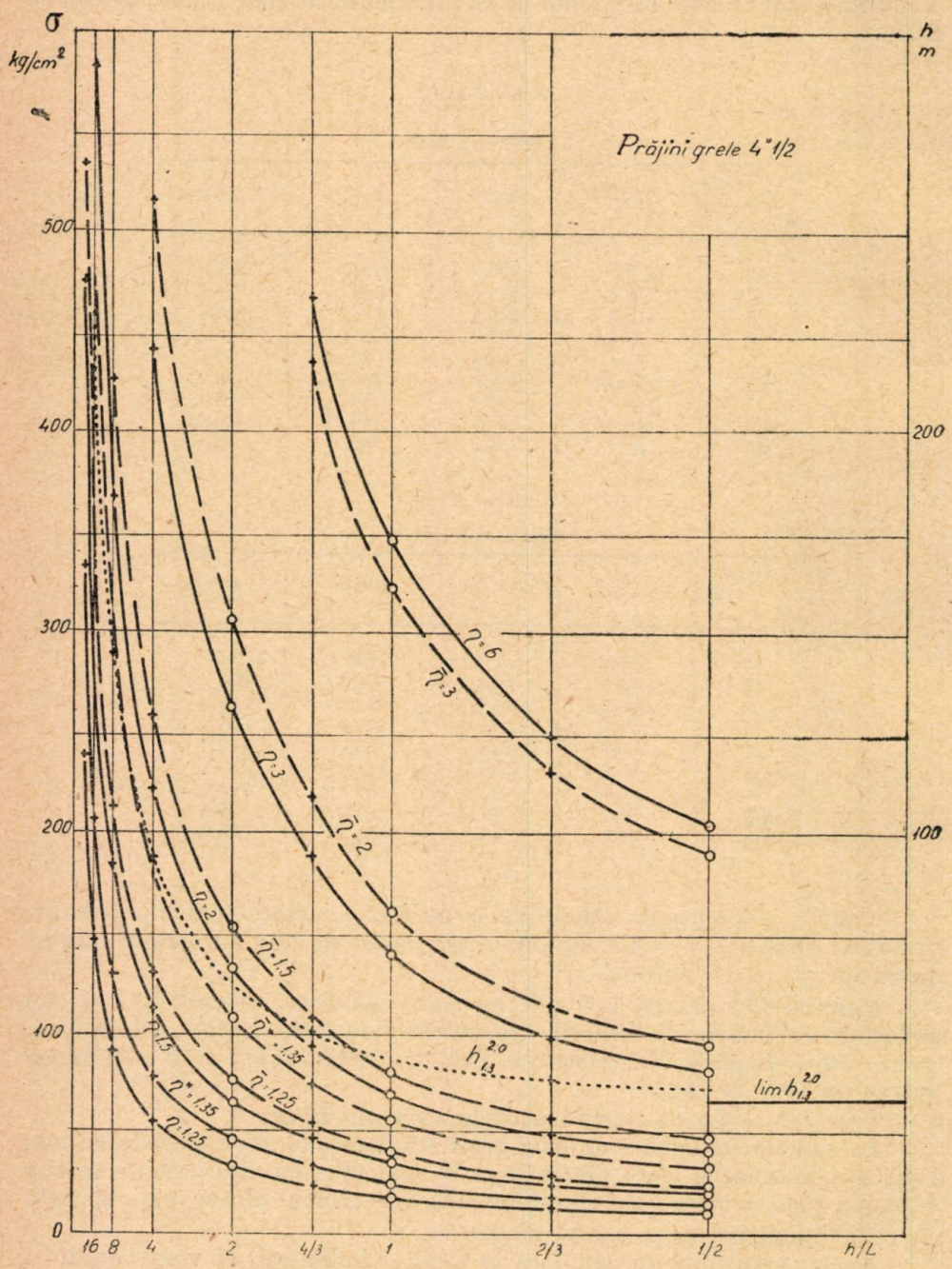

σ
kg/cm²
h
m
Präjini grele 4"1/2
500
400
300
200
100
0
200
100
η=6
η=3
η=3
η=2
η=2
η=1,5
η=1,5
η=1,35
η=1,35
η=1,25
η=1,25
$h_{1,3}^{2,0}$
$\lim h_{1,3}^{2,0}$
16
8
4
2
4/3
1
2/3
1/2
h/L

Fig. 3

Pentru a fixa valori informative ne servim de relația (41), în care W se referă la cepul îmbinării în secțiunea ultimului filet angajat, încît relația (42) devine

$$\overline{W} = \frac{\pi}{32} \overline{D}^3 (1 - \overline{\zeta}^4), \tag{50}$$

în care

$$\overline{\zeta} = d_2^*/\overline{D}, \tag{51}$$

d_2^* fiind diametrul interior al cepului.

În aceste considerații relația (49) devine

$$\lambda = (1 - \overline{\zeta}^4)/(1 - \zeta^4). \tag{52}$$

Dimensiunea $\overline{D}$ se calculează cu formula

$$\overline{D} = d^* - H^* + 2f^*, \tag{53}$$

în care s-a menținut notațiile din STAS 324—49 (fig. 4) cu notația stelat spre a se deosebi de notațiile folosite aici.

Valorile d^*, H^*, f^*, d^*_2 conform standardului menționat precum și $\overline{D}$, $\overline{\zeta}$ și λ sînt trecute în tabloul nr. 9.

Tabloul nr. 9

Dimensiunile filetelor speciale

Prăjini grele	d^*	H^*	f^*	$\overline{D}$	$d_2{}^*$	$\overline{\zeta}$	λ
2 7/8 N	69,5	4,377	0,508	66,139	31,8	0,481	0,32
4 1/2 N	110,868	4,377	0,508	107,507	57,2	0,532	0,43
6 5/8 N	146,248	5,846	0,635	142,032	88,9	0,626	0,33

Valorile σ și $\overline{\sigma}$ calculate cu formulele (46) și (49) pentru diferite valori ale raportului η și pentru prăjinile grele de 2″7/8, 4″1/2, 6″5/8, 8″5/8 sînt trecute respectiv în tablourile nr. 10, 11, 12 și 13. Cifrele barate corespund la $\overline{\sigma}$, iar cele nebarate la σ. Coloanele notate cu * corespund la valori uzuale.

În diagramele din figura 3, respectiv pentru prăjini de 4″1/2 și 6″5/8, care sînt cele mai uzuale, s-au trasat plin variațiile σ și întrerupt $\overline{\sigma}$, variind raportul h/L pentru diferite valori ale raportului η (curbele notate $\overline{\eta}$ se referă la $\overline{\sigma}$, iar indicele * se referă la valorile uzuale). Variația lungimii comprimate $h^{2,0}_{1,3}$ este trasată punctat, iar valoarea asimptotică pentru $h/L \to 0$, este trasată plin și notată cu lim. $h^{2,0}_{1,3}$.

În diagrama din figura 5, s-au trasat curbe pline pentru variațiile efortului unitar din prăjină σ^* pentru valorile uzuale η^*; iar pentru variațiile efortului unitar din îmbinare $\overline{\sigma}^*$ pentru aceleași valori, s-au trasat curbe întrerupte.

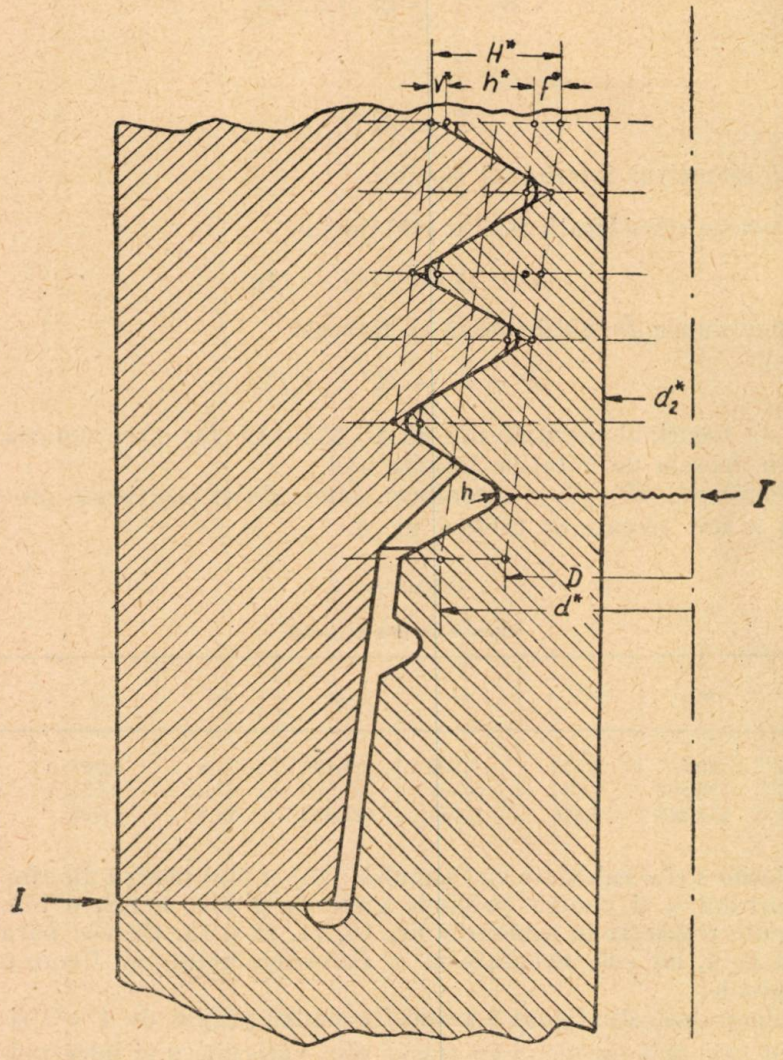


Fig. 4

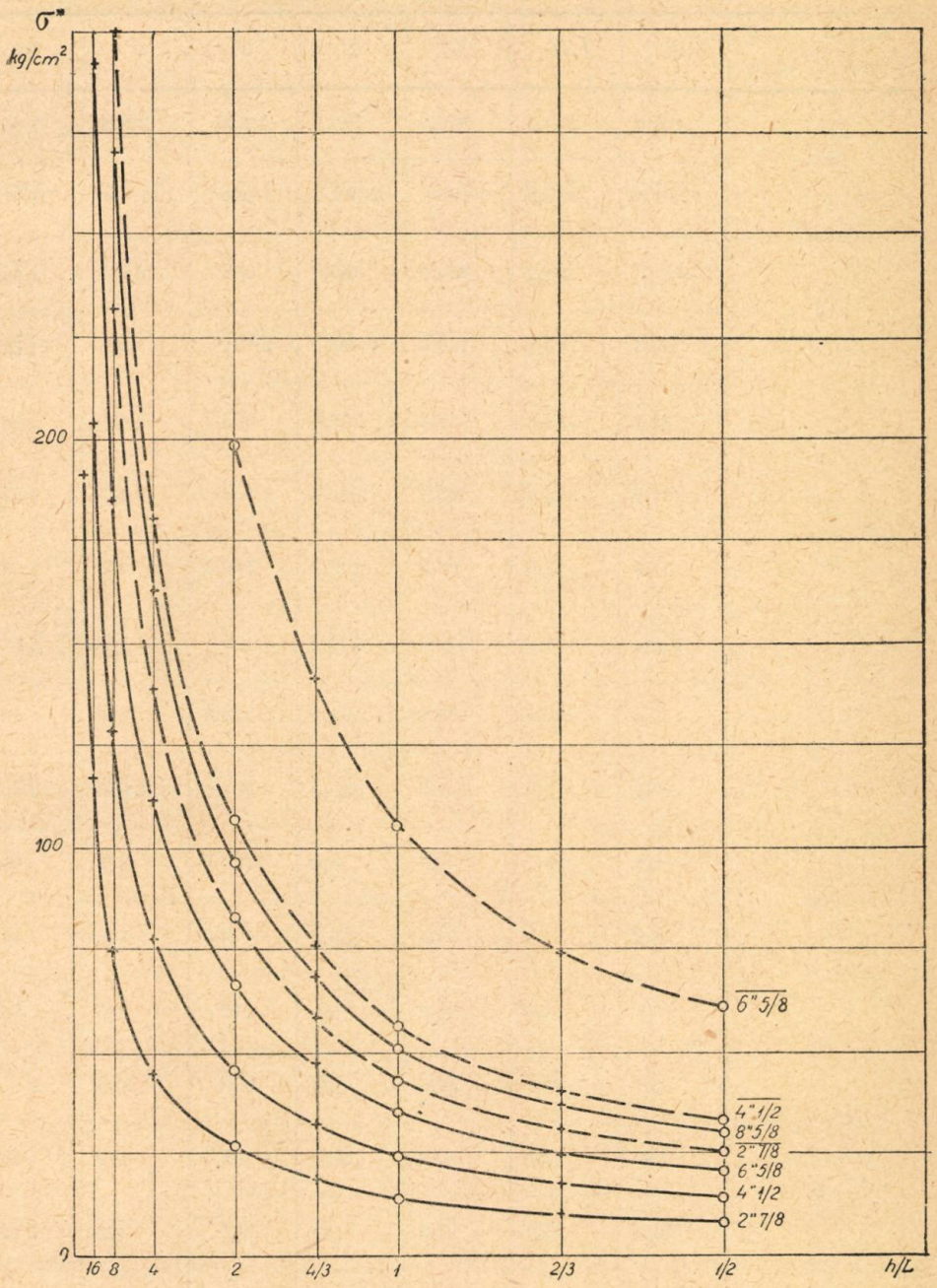


Fig. 5

Tabloul nr. 10

Valorile σ și $\overline{\sigma}$ în kg/cm² pentru prăjini grele 2'' 7/8 în funcție de η și h/L

h/L \ η	1,25*	1,35	1,50	2	3	6	11
32	191,3	267,8	382,6	765,2	1 530	3 826	7 652
	597,8	836,9	1 196	2 391	4 781	11 956	23 913
16	117,3	164,2	234,5	469,0	938	2 345	4 690
	366,6	513,1	732,8	1 466	2 931	7 328	14 656
8	74,2	103,8	148,3	296,6	593,2	1 483	2 966
	231,7	324,4	463,4	926,9	1 854	4 634	9 269
4	44,6	62,4	89,2	178,3	356,6	892	1 783
	139,4	195,0	275,6	572,2	1 114	2 788	5 572
2	26,5	37,0	52,9	105,8	211,6	529	1 058
	82,8	115,6	165,3	330,6	661,3	1 653	3 306
4/3	18,8	26,4	37,7	75,3	150,6	377	753
	58,7	81,5	94,1	235,3	470,6	1 178	2 353
1	14	19,6	28,0	56	112	280	560
	43,7	61,3	87,5	175	350	875	1 750
2/3	9,93	13,9	19,9	39,7	79,4	119	397
	31,0	43,4	62,2	124	248	622	1 240
1/2	8,23	11,5	16,5	32,9	65,8	165	329
	25,7	35,9	51,6	102,8	205,6	516	1 028

Tabloul nr. 11

Valorile σ și $\overline{\sigma}$ în kg/cm² pentru prăjini grele 4″ 1/2 în funcție de η și h/L

h/L \ η	1,25	1,35*	1,50	2	3	6	11
32	237,6	332,6	475,2	950,3	1 901	4 752	9 503
	$\overline{552,7}$	$\overline{773,6}$	$\overline{1\,105}$	$\overline{2\,210}$	$\overline{4\,422}$	$\overline{11\,053}$	$\overline{22\,104}$
16	145,6	203,8	291,2	582,4	1 165	2 912	5 824
	$\overline{338,7}$	$\overline{474}$	$\overline{677,3}$	$\overline{1\,355}$	$\overline{2\,710}$	$\overline{6\,773}$	$\overline{13\,547}$
8	91,7	128,3	183,3	366,6	733,2	1 833	3 666
	$\overline{213,3}$	$\overline{298,4}$	$\overline{426,3}$	$\overline{832,7}$	1 705	$\overline{4\,264}$	$\overline{8\,527}$
4	55,4	77,5	110,7	221,4	442,8	1 107	2 214
	$\overline{128,8}$	$\overline{180,3}$	$\overline{257,5}$	$\overline{515}$	1 030	$\overline{2\,575}$	$\overline{5\,150}$
2	32,9	46,1	65,8	131,6	263,2	658	1 316
	$\overline{76,5}$	$\overline{107,2}$	$\overline{153,0}$	3 061	$\overline{612,2}$	$\overline{1\,530}$	$\overline{3\,061}$
4/3	23,4	32,7	46,8	93,5	187	468	935
	$\overline{54,4}$	$\overline{76,1}$	$\overline{108,9}$	$\overline{217,5}$	$\overline{435}$	$\overline{1\,087}$	$\overline{2\,175}$
1	17,4	24,3	34,7	69,4	138,8	347	694
	$\overline{40,5}$	$\overline{56,5}$	$\overline{80,7}$	$\overline{161,4}$	$\overline{322,8}$	$\overline{807}$	$\overline{1\,614}$
2/3	12,4	17,36	24,8	49,6	99,2	248	496
	$\overline{28,8}$	$\overline{40,4}$	$\overline{57,7}$	$\overline{115,4}$	$\overline{230,7}$	$\overline{576,8}$	$\overline{1\,154}$
1/2	10,2	14,3	20,4	40,8	81,6	204	408
	$\overline{23,7}$	$\overline{33,3}$	$\overline{47,5}$	$\overline{94,9}$	$\overline{189,8}$	$\overline{475}$	$\overline{949}$

Tabloul nr. 12

Valorile σ și $\overline{\sigma}$ în kg/cm² pentru prăjini grele 6″ 5/8 în funcție de η și h/L

h/L \ η	1,25	1,40*	1,50	2	3	6	11
32	299,5	479,2	599	1 198	2 396	5 990	11 980
	878,5	1 438	1 797	3 594	7 188	17 970	35 940
16	183,5	293,6	367	734,1	1 468	3 670	7 341
	550,5	880,8	1 101	2 202	4 404	11 010	22 023
8	115,6	185,0	231	462,2	924,4	2 311	4 622
	346,8	555	693	1 386	2 773	6 933	13 866
4	69,8	111,7	139,7	279,3	558,6	1 397	2 793
	209,4	335,1	419,1	837,9	1 676	4 191	8 374
2	41,4	66,2	82,8	165,6	331,2	828	1 656
	124,2	198,6	248,4	496,8	993,6	2 484	4 968
4/3	29,6	42,3	59,1	118,2	236,4	591	1 182
	88,7	141,9	177,33	354,6	709,2	1 773	3 546
1	22,0	35,1	43,9	87,8	175,6	439	878
	66	105,3	131,7	263,4	526,8	1 317	2 634
2/3	15,5	24,7	30,9	61,8	123,6	309	618
	46,5	74,1	92,7	185,4	370,8	927	1 854
1/2	12,9	20,6	25,8	51,6	103,2	258	516
	38,7	61,8	77,4	154,8	309,6	774	1 548

Punctele provenite din calculul exact în a 5-a aproximație, figurează, încercuite pe toate diagramele.

Tabloul nr. 13

Valorile σ în kg/cm² pentru prăjini grele 8″ 5/8 în funcție de η și h/L

h/L \ η	1,25	1,5*	2	3	6	11
32	349,2	698,5	1 397	2 794	6 985	13 970
16	214,0	428,0	856	1 712	4 280	8 560
8	134,7	269,4	538,9	1 078	2 694	5 389
4	81,4	162,8	325,7	651,4	1 628	3 257
2	48,3	96,7	193,3	386,6	967	1 933
4/3	76,1	68,7	137,5	275,0	688	1 375
1	25,6	51,1	102,2	204,4	511	1 022
2/3	18,3	36,7	73,4	146,8	367	734
1/2	15,0	30	60	120	300	600

CONCLUZII

Rezultatele obținute contribuie la precizarea tehnologiei forajului forțat și în special al forajului cu turbină.

Necesitatea de a traversa terenuri dure a făcut să se dezvolte forajul prin sape cu role, care reclamă apăsări axiale considerabil mărite peste greutatea critică a prăjinilor grele.

Pe de altă parte, forajul prin sape cu role distruge roca din talpă printr-o acțiune de zdrobire, care necesită momente de torsiune cu mult reduse față de forajul prin sape cu lame, care distruge roca din talpă prin așchiere.

Faptul că se folosește în forajul cu role, momente de torsiune reduse, permite ca diferența față de capacitatea de rezistență a prăjinilor, să fie folosită de încordarea la care sînt supuse prăjinile grele prin depășirea sarcinii critice.

Pentru aceasta este necesar să se știe cu precizie cît de mare poate să fie această încordare — respectiv valoarea lungimii comprimate —pentru ca să nu se depășească disponibilul dintre capacitatea de rezistență a prăjinilor și efortul provocat de torsiune.

În studiile anterioare ne-am ocupat de problema de stabilitate. Era necesar să se cunoască cu precizie care este lungimea comprimată critică, care să nu fie depășită în forajul normal spre a nu devia găurile de sondă și a nu obosi prăjinile; ceea ce se accentuează mai ales în prezența găurilor de cheie. Forajul normal este preconizat în formațiunile cu intercalații slabe unde prin devierea găurilor de sondă și abraziunea pe care o provoacă prăjinile asupra terenurilor la schimbări bruște de deviere, se dezvoltă găurile de cheie. Existența găurilor de cheie nu mai permite ca bucla prăjinilor flambate să se mai rotască o dată cu acestea; ceea ce agravează devierea și obosește materialul.

Dacă se sapă în formațiuni consolidate, chiar dure dar compacte, cum este cazul gresiilor de Tarcău și de Kliva din Moldova, găurile de cheie se dezvoltă mai greu, ceea ce favorizează forajul forțat. Or, tocmai în aceste

formațiuni dure, care reclamă apăsări mari de sapă, este necesar să se depășească sarcina critică. Aceasta este posibil tocmai pentru că traversarea acestor roci reclamă sape cu role; care, după cum s-a arătat, necesită un moment de torsiune redus.

După cum considerația de stabilitate s-a pus pentru forajul normal, tot astfel considerația de rezistență apare pentru forajul forțat.

Se înțelege că nu se poate rezolva problema de rezistență pînă ce nu s-a soluționat problema de stabilitate.

Este necesar să se determine cu precizie cît poate să fie apăsarea pe sapă (respectiv lungimea comprimată h) adică cel mai important parametru în tehnologia forajului în condițiile date de gaură (raportul η) și disponibilul (σ) din capacitatea de rezistență a prăjinilor.

Această determinare se poate face cu ajutorul diagramelor pentru prăjinile de 4″1/2 din figura 3. Astfel, la o anumită valoare h la scara ordonatei din dreaptă se duce o orizontală pînă ce întîlnește linia punctată $h_{1,3}^{2,0}$, din acest punct se ridică sau se coboară pe verticală pînă ce se întîlnește curba η precizată de condițiile locale ale sondei. Această verticală precizează raportul h/L și prin urmare oarecum numărul de bucle flambate. Din acest nou punct se duce o orizontală la ordonata din stînga unde se poate citi la scară, efortul unitar maxim σ provocat în prăjini de apăsarea respectivă.

În general interesează efortul din îmbinare $\bar{\sigma}$, care se obține folosind curbele trasate întrerupt. Pentru condiții uzuale (η^*) se poate folosi diagrama mai simplă din figura 5.

În considerarea găurilor din cheie eforturile din prăjini devin variabile cu ciclu alternat simetric la încovoiere, adică cel mai dezavantajos și care se compun cu eforturile provocate de torsiune și de compresiune sau tensiune.

Ca și pentru îmbinare nu ne vom opri deocamdată la studiul oboselii prăjinilor ci vom folosi metoda Penkov [7] cu următoarele formule pentru rezistențele admisibile

$$\sigma_{as} = \sigma_{ci}/K_s \quad ; \quad \sigma_{a.-0} = \sigma_{-0}/K_{-0} \, , \tag{54}$$

în care

σ_{ci} este rezistența la limita de curgere la încovoiere;

σ_{-0} — rezistența la oboseală pentru ciclul alternant simetric la încovoiere;

σ_{as} — rezistența admisibilă pentru solicitări statice la încovoiere;

$\sigma_{a.-0}$ — rezistența admisibilă la oboseală pentru ciclul simetric;

K_s — coeficientul de siguranță la solicitări statice;

K_{-0} — coeficientul de siguranță la oboseală a ciclului simetric:

$$K_s = K_1 K_2 K_5 \quad ; \quad K_{-0} = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 . \tag{55}$$

Pentru a fixa ideile vom lua următoarele valori orientative pentru coeficienții din diagramele lucrării citate [7].

Ne referim la limita inferioară a rezistenței de rupere la tracțiune dată de STAS 1898—50 și anume $\sigma_{st} = 90$ kg/mm². Admițînd rapoartele

$$\frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{rt}} = 0{,}833 \, ; \quad \frac{\sigma_c}{\sigma_{rt}} = 0{,}744 \, ; \quad \frac{\sigma_{-0}}{\sigma_{rt}} = 0{,}434 \, ,$$

se obține $\sigma_{ci} = 75$ kg/mm², $\sigma_c = 67$ kg/mm², $\sigma_{-0} = 39$ kg/mm².

Factorul K_1 depinde de particularitățile materialului și de influența proceselor tehnologice și admitem pentru oțelul de mai sus și în condițiile uzuale $K_1 = 1{,}7$.

Pentru a reduce cît mai mult coeficientul de siguranță, neglijăm factorul de ignoranță referitor la forțe și formule de calcul, adică admite $K_2 = 1$.

Factorul K_3 reprezintă influența dimensiunilor piesei și fie pentru prăjini 6″5/8 $K_3 = 1{,}7$.

Factorul K_4 reprezintă influența suprafeței și a agenților corosivi. Pentru noroaie sărate admitem $K_4 = 3$.

Factorul K_5 reprezintă efectul de concentrare în filet a eforturilor unitare și avînd în vedere conform STAS 324—49 raportul razei de racordare la fund către înălțimea filetului $r/H = 0{,}116$, admitem pentru solicitări statice $K_5 = 1{,}7$ iar pentru solicitări variabile cu ciclu simetric $K_5 = 2$.

Înlocuind aceste valori în relațiile (55) se obține $\sigma_{as} = 32{,}7$ kg/mm² și $\sigma_{-0} = 6{,}73$ kg/mm² dacă se ignorează factorul K_4 și $\sigma'_{-0} = 1{,}91$ dacă se are în vedere și corosivitatea noroaielor sărate.

Observăm că existența solicitărilor variabile provocate de găurile de cheie nu numai că reduce rezistența de oboseală la aproape jumătate din rezistența de curgere la încovoiere, dar prin influența factorilor care apar la solicitarea variabilă, reduce rezistența admisibilă la 20,6 % în cazul că se ignorează K_4 și la 5,85 % dacă se are în vedere și coroziunea noroiului sărat. Cifrele admise cu caracter orientativ trebuie reconsiderate prin încercări de oboseală în condiții cît mai apropiate de cele existente în sondă. Oricît de exagerate ar fi cifrele admise, se poate aprecia efectul nefast al găurilor de cheie, mai ales în mediu corosiv.

Prin urmare trebuie exclus forajul forțat, în definiția acceptată de la început, în formațiunile slabe, care favorizează formarea găurilor de cheie, și cu desăvîrșire interzis cînd se lucrează și cu noroaie sărate.

S-au întocmit tablourile nr. 14 și 15 și diagramele din figurile 6, 7 și 8 pentru folosirea lor de către inginerii din șantierele petrolifere.

În tablourile nr. 14 și 15, sînt date eforturile unitare ce se nasc sub acțiunea diferitelor sarcini (apăsări pe sapă), la variate diametre a găurilor săpate, pentru prăjinile grele respectiv de 4″1/2 și 6″5/8. Diagramele din figurile 6 și 7, reprezintă respectiv variația acestor eforturi în aceleași condiții.

În diagrama din figura 8, sînt redate variațiile eforturilor în condițiile obișnuite ale raportului Δ/D.

Liniile întrerupte, ca și la diagramele precedente, se referă la eforturile din îmbinare (cep).

Să luăm un exemplu referitor la prăjini grele 6″5/8 în găuri de dimensiuni și condiții obișnute, folosindu-ne de diagramele din figura 8. În forajul normal apăsarea de sapă nu va trebui să depășească 7 tone. În acest caz toată capacitatea de rezistență a prăjinilor se folosește la torsiune compusă cu solicitarea axială. Solicitarea axială de compresiune este aproape neînsemnată în partea de jos a prăjinilor grele și considerabilă în partea de sus a garniturii de foraj la mare adîncime. Prin urmare în prăjinile grele ne rămîne un disponibil, din capacitatea lor de rezistență, care poate fi folosit la încordarea p.in încovoiere, provocată de depășirea sarcinii critice menționate.

Tabloul nr. 14

Valorile σ şi $\overline{\sigma}$ pentru prăjini grele 4″ 1/2 în fundaţie de Δ şi q_h

q_h în tone \ Δ în mm	175	189	210	279	419	838
15	114	165	225	450		
	$\overline{255}$	$\overline{370}$				
12	88	119	178	350		
	$\overline{202}$	$\overline{275}$	400			
10	67	91	134	265		
	$\overline{154}$	$\overline{215}$	$\overline{320}$			
8	55	77	110	221	442	
	$\overline{128}$	$\overline{180}$	$\overline{257}$	$\overline{515}$		
6	38,5	54,5	77	155	310	
	$\overline{91}$	$\overline{128}$	$\overline{181}$	$\overline{361}$		
5	30	42	59	120	239	
	$\overline{69}$	$\overline{97}$	$\overline{138}$	$\overline{279}$		
4	21	29,3	41	83	167	404
	$\overline{48}$	$\overline{67}$	$\overline{95,7}$	$\overline{193}$	$\overline{372}$	
3,5	15,5	20	29	57,5	115,5	295
	$\overline{33}$	$\overline{46}$	$\overline{67,5}$	$\overline{136}$	$\overline{275}$	

Tabloul nr. 15

Valorile în σ şi $\overline{\sigma}$ în kg/cm² pentru prăjini grele 6″ 5/8 în funcţie de Δ şi gh

gh în tone \ Δ în mm	246	276	394	591	1181	2166
70	280	430				
50	210	320				
	600					
30	118	190	470			
	354	570				
20	64	102	254	506		
	188	304	750			
15	48	80	200	398		
	150	235	585			
12	36	58	148	297	740	
	112	176	445	894		
10	27	40	105	210	522	1030
	77	128	320	630		
9	20	32	82	163	416	816
	58	96	241	480		
8	15,5	25	62	124	309	618
	46,5	74	185	371		

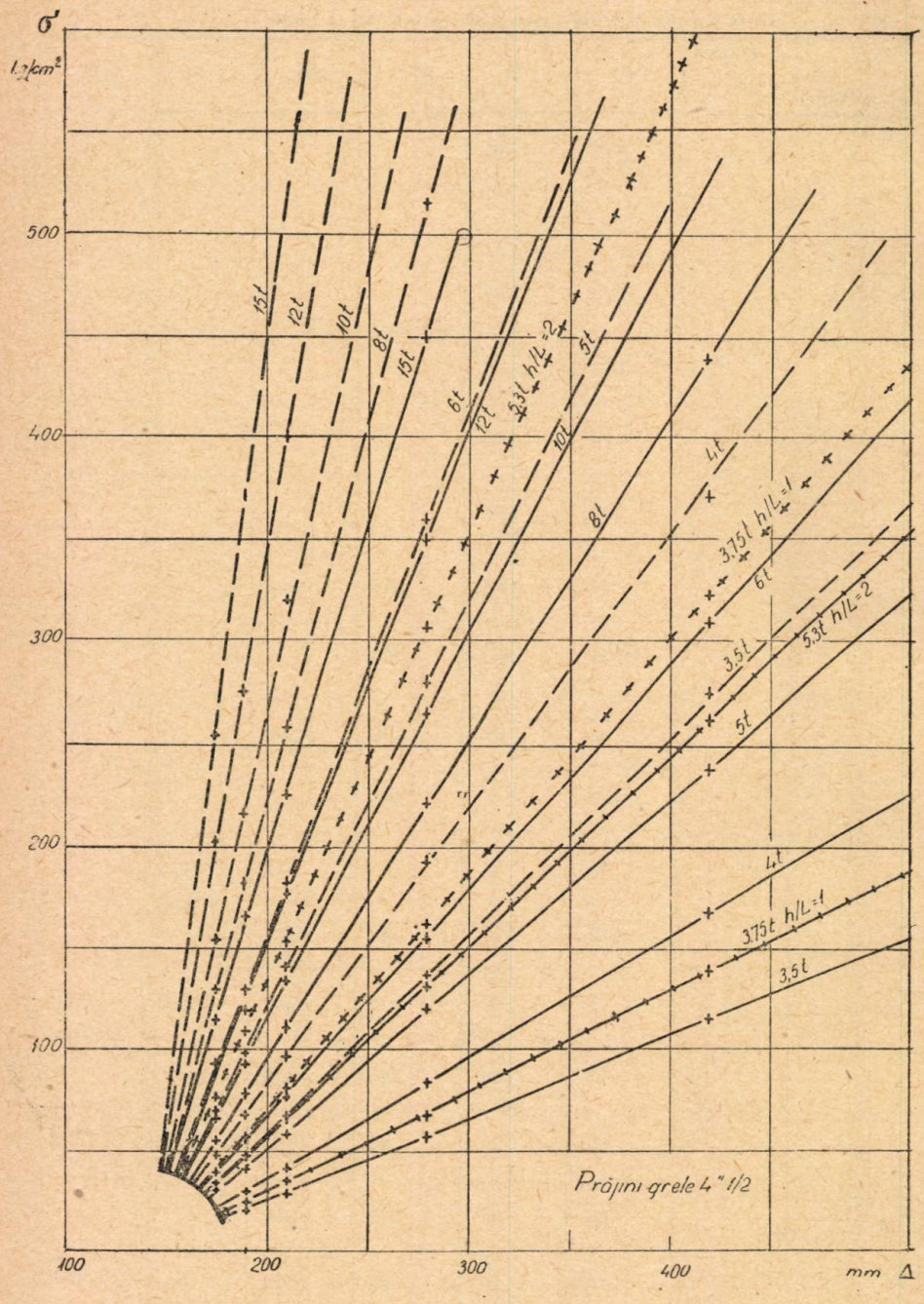

σ
kg/cm²
500
400
300
200
100
100
200
300
400
mm Δ
15t
12t
10t
8t
15t
6t
12t
5,3t h/L=2
10t
5t
8t
4t
3,75t h/L=1
6t
3,5t
5,3t h/L=2
5t
4t
3,75t h/L=1
3,5t
Prâjini grele 4" 1/2

Fig. 6

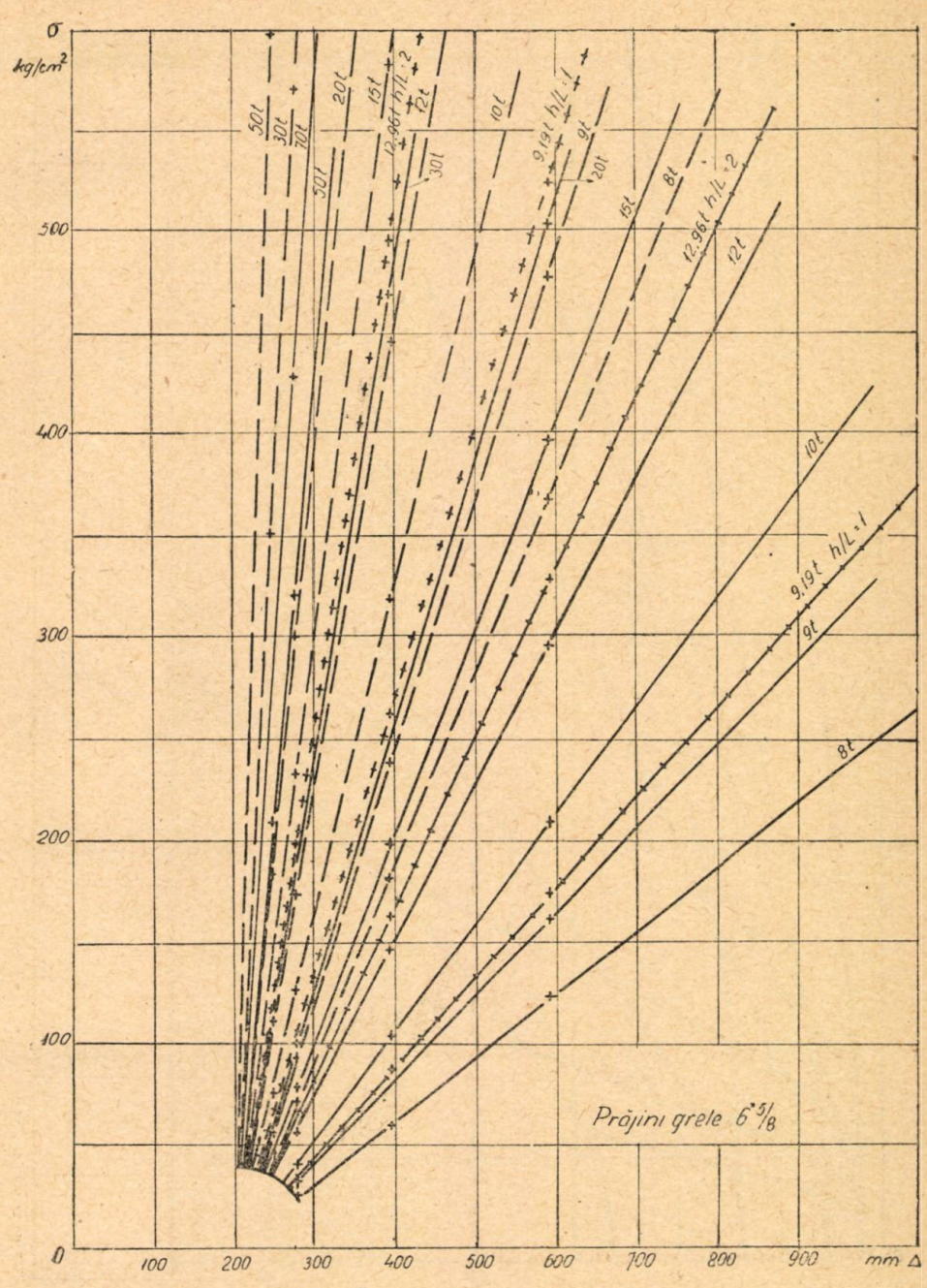

σ
kg/cm²
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
mm Δ
50t
30t
10t
20t
15t
12.96t h/L=2
12t
10t
9.19t h/L=1
9t
8t
Präjini grele 6"5/8

Fig. 7

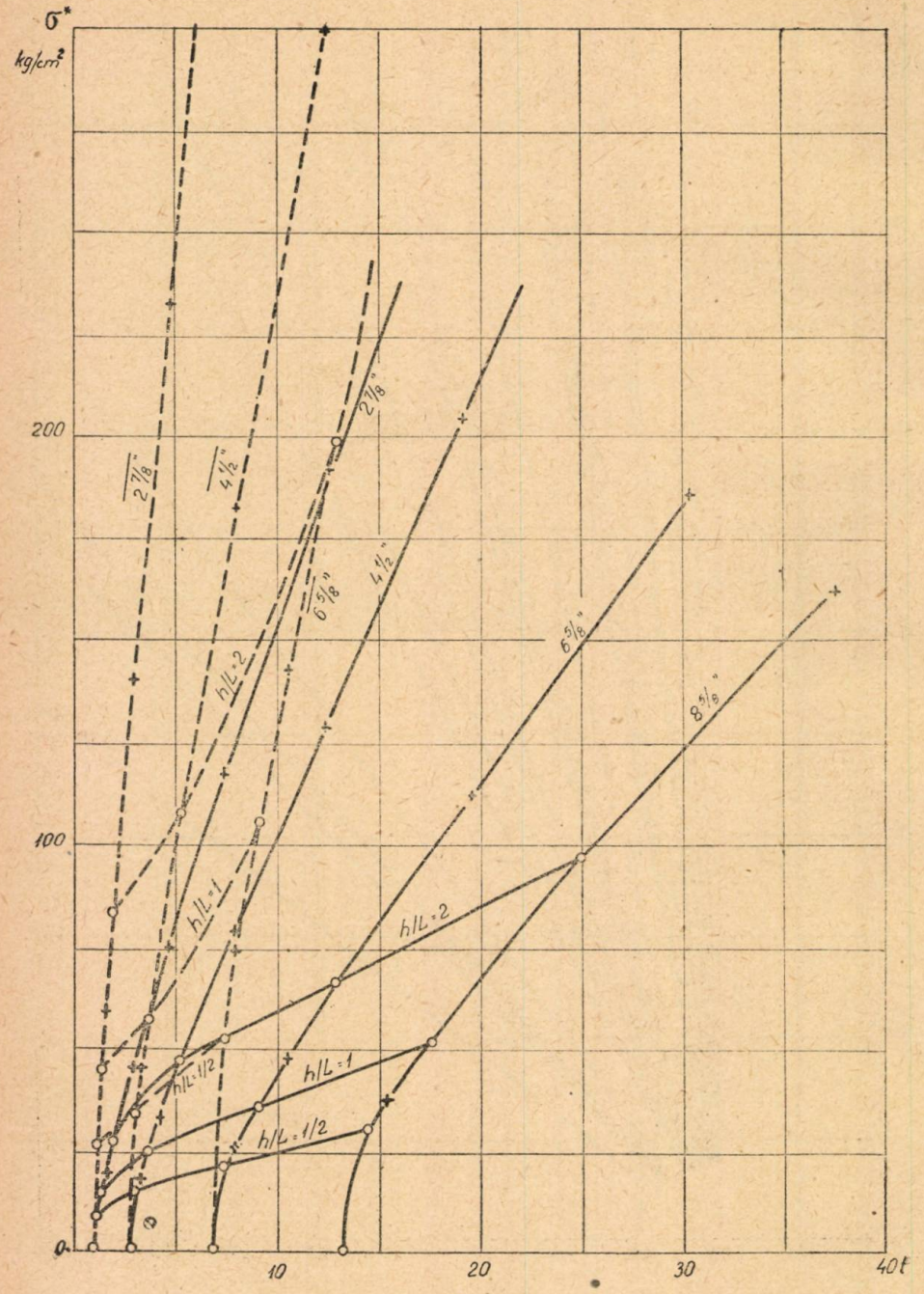

σ*
kg/cm²
200
100
0
10
20
30
40t
2 7/8"
4 1/2"
2 7/8"
6 5/8"
4 1/2"
h/L=2
h/L=1
h/L=1/2
6 5/8"
8 5/8"
h/L=2
h/L=1
h/L=1/2

Fig. 8

Dacă mărim sarcina, fie la 10 tone, efortul unitar ce se naște în prăjini prin încovoiere va fi de 0,42 kg/mm², ceea ce este fără însemnătate față de $\sigma_{as}' = 32,7$ kg/mm² (1,27%). Referindu-ne la efortul din îmbinare, constatăm că aceasta se ridică la $\bar{\sigma} = 1,25$ kg/mm², adică 3,89%, ceea ce devine apreciabil, chiar dacă nu există solicitarea alternantă provocată de gaura de cheie.

În ipoteza existenței solicitării variabile, dar fără acțiune corosivă, procentul consumat din capacitatea de rezistență ($\bar{\sigma}/\sigma_{a,-0}$) devine considerabil, în cazul cifrelor admise, de 1,25/6,73 = 18,6%. Dacă se adaugă și acțiunea corosivă, raportul $\bar{\sigma}/\sigma_{a,-0}'$ devine 1,25/1,91, adică cea mai mare parte din capacitatea de rezistență este consumată în această încordare și prin urmare folosirea sarcinii de 10 tone devine prohibitivă.

Se înțelege că folosirea acestei sarcini este riscată în cazul solicitării alternate chiar fără acțiune corosivă.

Dacă gaura de sondă are un diametru Δ mai mare decît 274 mm (tabloul nr. 6) considerat uzual, fie de 500 mm în vederea unei coloane de mare diametru, conform diagramei din figura 7, efortul în îmbinare poate să crească la 4,95 kg/mm², adică 15% din rezistența admisibilă statică. Dacă gaura este ocnită la diametru mai mare, se înțelege că procentul crește considerabil, încît forajul forțat devine periculos chiar în absența solicitării variabile .

Din exemplul considerat se vede importanța practică a diagramelor din figurile 6, 7 și 8.

Prin considerația de stabilitate, în studiile anterioare s-au determinat lungimile critice ale porțiunii comprimate pentru a evita încordarea prăjinilor provocată de depășirea sarcinii critice. În studiul de față, prin considerația de rezistență, se determină consecințele acestei depășiri.

Pe considerația de stabilitate se puteau prevede numai calitativ efectele nefavorabile ale depășirii sarcinii critice. Pe considerația de rezistență, prin diagramele anexate, se pot determina cantitativ efectele acestei încordări și în care condiții anume.

Primită la redacție la 30 ianuarie 1956.

СОПРОТИВЛЕНИЕ НА ИЗГИБ ТЯЖЕЛЫХ БУРОВЫХ ШТАНГ ПРИ ОСЕВОЙ НАГРУЗКЕ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТЬЮ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор рассматривает сопротивление на изгиб тяжелых буровых штанг при форсированном бурении, когда критические значения давления на долото переходят установленные пределы. Речь идет главным образом о прохождении сквозь твердые и слежавшиеся грунты, бурение которых производится шарошечным долотом.

Рассматриваются составные штанги шарнирно соединенные на обоих концах и без горизонтального перемещения. В отношении формы принимаемой штангой при потере устойчивости, после нескольких изгибов допускается упрощающее предположение, что промежуточные узлы являются шарнирами.

A. выражения (1), являющегося интегралом уравнения классической линии, получается отношение (15), при помощи которого выводятся выражения (16), (17), (18), при наибольшей стреле прогиба и для искомого сечения наибольшего изгиба. В результате выражение (19) изгибающего момента может быть написанов форме (29), в которой множитель дается отношением (30).

Б. Рассматривается случай без влияния вращения ($\omega = 0$), для которого функции Ψ получают выражения (33): 1) на конце $\alpha \to \infty$; 2) в промежутке $\alpha \leqslant 2$, неустойчивость которого была рассмотрена раньше, и 3) в промежутке $2 < \alpha < \infty$, для которого применяется приближенная формула (40).

Полученные результаты показаны в таблице № 5 и на диаграмме рисунков 1 и 2.

В. Зная величину наибольшего изгибающего момента определяется соответствующее унитарное напряжение по формуле (41), которая становится формулой (45), и применяется к обычным тяжелым буровым штангам $2^{7}/_{8}'' - 8^{5}/_{8}''$.

Использованы безразмерные параметры η и ζ, определенные по формулам (44), и величины которых указаны в таблице № 6. Введено обозначение σ_0 из формул (46) и (47) в качестве расчетного параметра, причем значения σ_0 приведены в таблице № 8.

Напряжения, определенные в зависимости от η и h/L указаны в талицах № 10—13 и на диаграмме рисунка 4. Были учтены и напряжения в нарезном соединении, для которых на диаграмме использованы перечеркнутые обозначения и прерывистые линии. Для обычных условий (η^*) можно пользоваться диаграммой рисунка 5. В заключение рассмариваются таблицы №№ 14,15 с диаграммами рисунков 6, 7, 8, в которых напряжения даны в зависимости от диаметра Δ скважины и нажима qh на долото.

Если выпятившаяся часть продольно изогнутых штанг не может вращаться одновременно с долотом, как это бывает при наличии «замочной скважины», то отклонение оси буровой скважины прогрессивно увеличивается. Напряжение становится переменным симметрично чередующимся и в комплекте тяжелых штанг появляется усталость, особенно в соединениях. При использовании формул (54), (55) констатируется не только понижение сопротивления усталости σ_{-0} почти до половины сопротивления текучести σ_{ci}, но и значительное увеличение запаса прочности K_{-0}, который становится значительно больше коэффициента K_s статической нагрузки.

Из этого следует, что при переменной нагрузке предел устойчивости становится настолько пониженным, что форсированное бурение становится недопустимым, при наличии (замочных скважин», а особенно при коррозирующем буровом растворе.

Настоящее исследование, проведенное на основе соображений, относящихся к сопротивлению, позволяет количественно определить эффекты форсированного бурения, когда превышается критическая нагрузка нажима на долото.

Из прилагаемых диаграмм можно быстро определить условия, при которых возможно форсированное бурение для увеличения скорости продвижения.

LA RÉSISTANCE À LA FLEXION DES TIGES LOURDES AXIALEMENT CHARGÉES D'UNE FRACTION DU POIDS PROPRE

(RÉSUMÉ)

L'auteur étudie la résistance à la flexion des tiges lourdes, en vue du forage lorsque les valeurs critiques des charges sur le trépan sont dépassées. Il s'agit du forage avec des trépans à cônes dans les formations dures et consolidées.

On considére le train de tiges articulé aux deux extrémités et sans déplacement latéral. Si la perte de stabilité prend la forme de plusieurs boucles, on admet, pour simplifier, que les noeuds intermédiaires sont des articulations.

A. En partant de l'expresion (1), l'intégrale de l'équation de la ligne élastique, on obtient les relations (15), puis (16), (17), (18), pour la condition donnée de la flèche maximum et pour la section cherchée de la flexion maximum. Par suite, on peut écrire l'expression (19) du moment de flexion, sous la forme (29), où le facteur χ est exprimé par la relation (30).

B. On étudie le cas où la vitesse de rotation est nulle ($\omega = 0$) des fonctions Ψ (33) : 1° pour le cas extrême $\alpha \to \infty$, 2° sur l'intervalle $\alpha \leqslant 2$, dont l'instabilité a été étudiée antérieurement, et 3° sur l'intervalle $2 < \alpha < \infty$, pour lequel on se sert de la formule aproximative (40).

Le tableau n° 5 et les diagrammes des figures 1 à 4 expriment les rèsultats obtenus.

C. Connaissant la valeur du moment de flexion maximum, on détermine les tensions respectives par la formule (41) qui devient (45) et l'on fait des applications aux tiges lourdes usuelles 2″7/8...8″5/8.

On a utilisé les paramétres adimensionels η et ζ des formules (44) dont les valeurs sont rendues sur le tableau n° 8 et le diagramme de la figure 4. On a aussi considéré les tensions dans les filets des raccords, pour lesquelles on a utilisé les notations barrées et les lignes interrompues des diagrammes. Dans les conditions usuelles, on peut utiliser les diagrammes de la figure 5.

En conclusion, on utilise les tableaux nos 14 et 15 et les diagrammes des figures 6, 7 et 8 ,sur lesquels sont inscrites les tensions en fonction du diamètre Δ du trou de la sonde et la force qh d'appui sur le trépan.

Si la boucle du train de tiges flambées est empêchée de tourner en même temps que le trépan, comme dans le cas d'un trou de clé, la déviation de l'axe du trou de la sonde s'aggrave progressivement. Les tensions deviennent variables alternées symétriques et fatiguent le train de tiges lourdes, surtout aux raccords. On utilise les formules (54), (55) et l'on observe que non seulement la résistance à la fatique σ_{-0} descend à peu près à la moitié de la résistance d'écoluement σ_{ct}, mais encore que le coefficient de sûreté K_{-e} devient considerable en comparaison du coefficient K_s des contraintes statiques. Il en résulte, dans le cas des sollicitations variables, que la résistance admissible baisse tellement que le forage forcé devient prohibitif dans le cas du trou de clé, surtout en présence d'une boue de forage corrosive.

Cette étude sur la considération de la résistance permet de déterminer d'une manière quantitative l'effet du forage forcé lorsque la charge

critique de la force d'appui sur le trépan est dépassée. A l'aide des diagrammes ci-joints, on peut apprécier directement les conditions pour lesquelles le forage forcé est possible en vue d'accroître la vitesse d'avancement.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, *Flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. V, nr. 1—2, 1954.
2. — *Integrarea ecuației liniei elastice în instabilitatea de rotație a tijelor verticale.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, 1955 (Sub tipar).
3. — *Despre integrarea ecuației liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele și zvelte.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. III, nr. 1—2, 1952, p. 53.
4. — *Cazurile particulare ale unei clase de funcțiuni cu aplicații la flambajul tijelor.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, 1954.
5. — *Asupra instabilității tijelor verticale, grele zvelte, și în rotație.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 157.
6. S. Timoshenko, *Théorie de la stabilité élastique.* Paris, Liége, 1947, p. 117.
7. Gh. Buzdugan, *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, p. 252.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

TENSOMETRUL REZISTIV

DE

CL. TANASICIUC

Captorii rezistivi executaţi dintr-o sîrmă rezistivă în formă de bucle, ce se lipesc pe o foiţă de hîrtie, au căpătat o largă răspîndire în aparatele, a căror destinaţie este de a măsura eforturile din materiale sau alte mărimi mecanice (acceleraţie, momente de torsiune etc.), cît şi în elementele de măsură ale sistemelor automate. Larga răspîndire se datoreşte, în primul rînd faptului că aceşti captori sînt foarte mici. Aceasta face ca prezenţa lor să nu perturbe fenomenul mecanic studiat. În afară de aceasta, mărimea lor mică permite utilizarea lor în locuri, care sînt adesea greu accesibile altor captori. În al doilea rînd, captorii rezistivi prezintă avantajul unei inerţii neglijabile la frecvenţele fenomenelor mecanice şi asigură o bună liniaritate în limitele deformaţiei elastice a firelor rezistive.

Unul din dezavantajele principale ale acestor captori, constă în faptul că de cele mai multe ori, etalonarea nu se poate face decît la un singur exemplar dintr-o serie, ceea ce impune un procedeu foarte pretenţios de confecţionare. Un alt dezavantaj constă în sensibilitatea lor la efecte termice. Aceasta a făcut ca în toate măsurătorile să se utilizeze doi captori montaţi într-o schemă diferenţială, în care variaţiile termice să producă variaţii electrice, de sens opus, în aşa fel, încît efectul total al influenţelor termice să fie nul. Date detaliate despre aceşti captori se pot găsi într-o serie de lucrări de specialitate ca [1], [2], [3] şi [4]; în lucrarea noastră vom analiza numai condiţiile de proiectare şi vom descrie aparatul proiectat şi construit de noi, cu ajutorul căruia se pot citi şi înregistra deformaţiile prin folosirea captorilor rezistivi. Captorii rezistivi sînt captori de tip parametric, adică utilizează energia de la o sursă locală, şi prin aceasta sensibilitatea lor depinde, în primul rînd, de sensibilitatea aparatului indicator. De aceea captorii se montează într-o punte Thomson, după care înaintea aparatului indicator (oscilograf sau galvanometru) se intercalează un amplificator.

Amplificarea se calculează pe următoarele considerente : deşi sensibilitatea unei punţi este direct proporţională cu tensiunea de alimentare, aceasta nu poate depăşi 6 V pentru a nu încălzi prea mult firele captorilor rezistivi, ceea ce ar face ca precizia să fie influenţată mult de condiţiile de răcire.

Dacă ne propunem să măsurăm deformațiile barelor de oțel, la o sarcină σ de 20 kg/cm^2 atunci deformația relativă a barei ε va fi

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{20}{2{,}1 \cdot 10^6} = 10^{-5},$$

unde E este modulul de elasticitate al oțelului.

Sensibilitatea relativă a captorului rezistiv se definește prin raportul

$$k = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon},$$

unde R este rezistența electrică a captorului; în cazul sîrmelor de constantan $k \simeq 2$ [1]. În acest caz

$$\frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot 10^{-5}. \qquad (1)$$

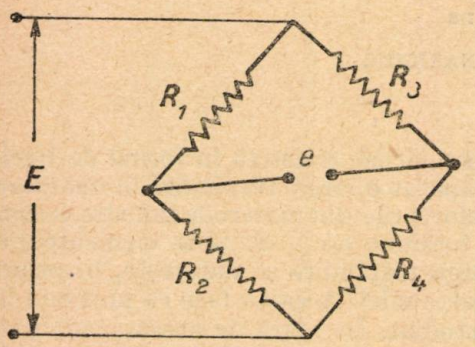


Fig. 1. — Schema pentru explicarea sensibilității punții.

Pe de altă parte, în cazul punții Thomson avînd la ieșire un instrument de impedanță infinită, tensiunea la ieșirea din punte este dată de relația

$$e = E\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right),$$

unde notațiile sînt ca în figura 1 și așa cum am văzut $E = 6$ V. Dînd mărimii R_2 o variație ΔR și ținînd seama de relația de echilibru $R_2R_3 = R_1R_4$, obținem

$$e = E\frac{\Delta R}{R_2}\frac{\frac{R_3}{R_4}}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)\left(\frac{R_3}{R_4} + 1\right)}. \qquad (2)$$

Condiția de maxim a acestei funcții se traduce prin relația

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = 1. \qquad (3)$$

Dacă R_1 și R_2 sînt doi captori rezistivi de rezistență egală și dacă rezistențele din celelalte două brațe ale punții se iau în conformitate cu raporturile (3), atunci, ținînd seama de (1), din relația (2) obținem

$$e \simeq E \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{V}.$$

Așadar, la ieșirea din punte dispunem de o tensiune de circa 30 μV.

Dacă sarcina este de 2 kg/cm^2 atunci semnalul de care dispunem va fi de 3 μV. Acest semnal trebuie să acționeze aparatul indicator. Se vede

dintr-odată că numai un galvanometru de mare sensibilitate ar putea fi acționat direct de o tensiune atît de mică.

Pentru fenomenele dinamice trebuie să recurgem însă la oscilografe. Ținînd seamă de frecvența joasă a fenomenelor mecanice, cele mai recomandate sînt oscilografele electromagnetice,întrucît ele permit înregistrarea simultană a mai multor fenomene. Rezistența buclelor oscilografelor magnetice este cîțiva ohmi, iar curentul cu care putem să le acționăm este de ordinul miliamperilor. Rezultă că tensiunea necesară trebuie să fie de

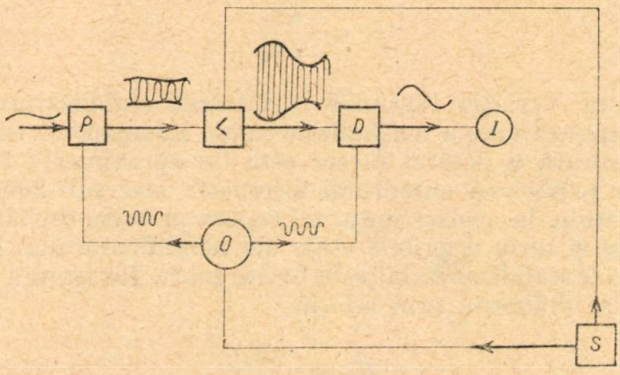


Fig. 2. — Schema-bloc a amplificatorului de curent continuu, construit pe principiul amplificatorului de unde modulate.

ordinul milivolților și, prin urmare, pentru înregistrarea fenomenelor trebuie ca tensiunea de la ieșirea din punte să fie amplificată.

Acestor amplificatori li se impune să poată amplifica frecvența care variază de la frecvența zero la cîteva sute de hertzi. Amplificatorii de curent continuu obișnuit prezintă o serie de inconveniente, în ceea ce privește sursele de alimentare și stabilitatea amplificării. De aceea este recomandabil ca aceștia să fie construiți pe principiul amplificatorilor de unde modulate (fig. 2). În aceste scheme, puntea Thomson *P* nu se mai alimentează în curent continuu, ci de la un oscilator *O*, a cărui frecvență se ia aproximativ de zece ori mai mare, decît frecvența mecanică maximă, care urmează să fie înregistrată. Variațiile mecanice produc în punte o modulație în amplitudine a acestei tensiuni, care apoi este aplicată amplificatorului. După amplificare, semnalul de joasă frecvență este detectat și aplicat instrumentului indicator I. Amplificatorul trebuie alimentat de la o sursă stabilizată; altfel, exceptînd primul etaj de amplificare, variațiile tensiunii de alimentare anodică sînt aplicate la intrarea tuturor etajelor. Majoritatea amplificatorilor utilizați în tensometrie sînt alimentați de la surse de curent continuu. În ultimul timp s-au făcut o serie de încercări de a folosi și alimentarea în curent alternativ. Verificările noastre au dovedit că schemele, care nu prevăd o stabilizare electronică a tensiunii de alimentare, nu pot fi utilizate.

La tensometrul construit de noi, stabilizarea alimentării anodice se face cu ajutorul tubului 6П3 (fig. 3), care, prin modificarea rezistenței interne, face ca tensiunea de la ieșirea stabilizatorului să se mențină con-

stantă. Variațiile de tensiune de la ieșire sînt amplificate de tubul 6J7 și aplicate pe grila tubului 6П3 astfel, ca să acționeze în sens contrar variațiilor tensiunii date de redresor. În acest montaj, elementul etalon cu care se compară tensiunea redresorului este căderea de tensiune pe tubul СГ2С care este aproximativ egală cu 75 V. Prin introducerea unei stabilizări electronice în schemă se obține nu numai o tensiune care nu depinde de fluctuațiile rețelei, dar și un efect de filtrare a pulsațiilor, care apar la ieșirea din filtrul redresorului. Factorul de stabilitate a tensiunii este definit prin relația

$$S_t = \frac{\Delta E_0}{\Delta E_0}, \tag{4}$$

unde ΔE_i este variația tensiunii la intrarea stabilizatorului, iar ΔE_0 variația corespunzătoare a tensiunii de ieșire. La aparatul executat de noi, valoarea măsurată a acestui factor este de aproximativ 300. Pulsațiile rezultate din redresarea curentului alternativ sînt sub 200 μV. Stabilizatorul constituie, în același timp, un separator între oscilator și amplificator, precum și între diferitele etaje ale amplificatorului, întrucît impedanța internă a stabilizatorului este foarte mică. Rezistența internă a stabilizatorului se definește prin relația

$$R_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta I},$$

unde ΔE_0 are semnificația din relația (4); iar ΔI este variația corespunzătoare a curentului de sarcină. Rezistența internă a stabilizatorului este de ordinul a cîteva ohmi.

Oscilatorul este de tip RC, cu o punte Wien în circuitul de reacție, acordat de frecvența de 2,2 kHz. Pentru stabilitate s-a introdus în circuitul de reacție negativă un bec, așa cum se face, în mod obișnuit, la oscilatorii RC cu stabilizare automată. Pentru a putea utiliza becurile de scală obișnuite s-a adoptat artificiul din lucrarea [1], utilizînd în schema oscilatorului un etaj de putere cu tubul 6П3.

Puntea Thomson necesită un studiu special, deoarece de execuția corectă a punții depinde precizia întregului aparat. Determinările tensometrice statice se fac, deobicei, cu un număr mare de captori lipiți în diferite puncte ale construcției studiate. Construcția cercetată se încarcă succesiv cu diferite sarcini statice, și la fiecare din ele se determină tensiunile din diferite puncte. Pentru aceasta, inițial, captorii tensometrici activi se conectează pe rînd la punte și, folosind potențiometrul P_1 (fig. 3), se reface echilibrul punții.

La fiecare conectare a unui nou captor, puntea se dezechilibrează, în primul rînd, datorită faptului că rezistențele captorilor diferă între ele, de exemplu, la cele de fabricația „Kovo" cu $\pm$ 0,2%. În afară de aceasta, rezistența firelor de legătură diferă și ea de la un captor la altul, iar rezistența de contact mai introduce încă o eroare la fiecare conectare. Eroarea introdusă de variația rezistenței de contact se reduce la o valoare neglijabilă prin utilizarea unui comutator cu contacte de mercur. După fiecare modificare a încărcării, la care se supune construcția, captorii se conectează pe rînd la punte prin intermediul comutatorului și, înainte de a se înregistra

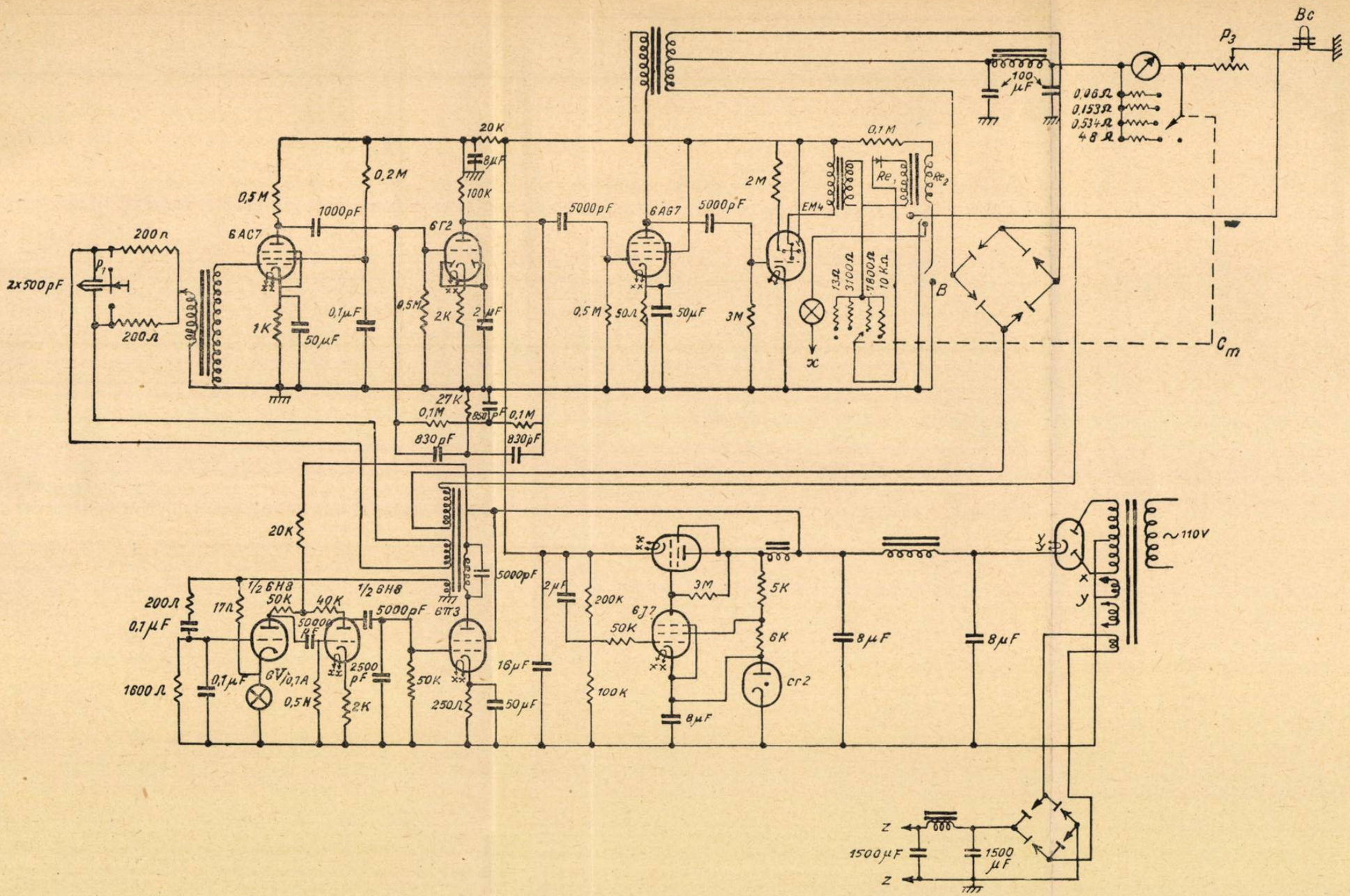


Fig. 3. — Schema tensometrului rezistiv construit în Laboratorul electronic al Institutului de mecanică aplicată.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

dezechilibrarea datorită încărcării, trebuie făcută compensarea acestor erori, aducînd P_1 la diviziunea determinată prin echilibrarea punții la sarcina inițială.

Potențiometrul P_1, aflîndu-se la intrarea în amplificator, erorile introduse de el se amplifică și ele o dată cu mărimea amplificată. De aici, rezultă condițiile de construcție a potențiometrului, deoarece, dacă sensibilitatea aparatului depinde în primul rînd de amplificare, precizia lui este determinată în cea mai mare măsură de precizia punții.

Să evaluăm precizia necesară acestui potențiometru, în ipoteza că vrem să măsurăm deformațiile barelor de oțel la o sarcină de $\sigma = 2$ kg/cm^2. Obținem o relație analogă cu (1), și anume,

$$\frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

Lucrînd cu captoare de 70 Ω rezultă

$$\Delta R = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 70 = 1{,}4 \cdot 10^{-4}\ \Omega. \tag{5}$$

După cum se poate vedea din figura 4, potențiometrul constă dintr-un fir de manganină cu diametrul de 0,6 mm pe care se deplasează un cursor, ghidat de un șurub cu pas de 0,5 mm acționat de un tambur cu 200 diviziuni. Din motive de execuție mecanică, lungimea utilă a rheocordului s-a luat de 13 cm. Aceasta echivalează cu o rezistență electrică de 0,8 Ω. Întrucît el trebuie să compenseze variațiile în ambele sensuri, rezultă că poate să compenseze 0,4 Ω. Ținînd seama de (5), deducem că pentru o sarcină de 2 kg/cm^2 este nevoie de

$$\frac{0{,}4}{1{,}4 \cdot 10^{-4}} = 2850 \text{ puncte decelabile.}$$

Din datele potențiometrului rezultă că pe toată lungimea potențiometrului dispunem de $130 \times 2 \times 200 = 52\,000$ puncte decelabile; deci cu acest potențiometru compensarea erorilor datorită rezistenței inegale a captorilor se face cu o precizie de douăzeci ori mai mare decît variația produsă de sarcina minimă măsurabilă.

În fiecare poziție a cursorului, între cursor și rheocord se stabilește o rezistență de contact. Contactele potențiometrelor obișnuite prezintă o rezistență de aproximativ 0,1 Ω. Pentru ca aparatul că poată înregistra variații relative ale rezistenței egale cu $2 \cdot 10^{-6}$ rezultă că nu putem introduce contactele în punte, decît în brațele a căror rezistență ar fi de cel puțin 10 kΩ. De aceea unul din principiile care stau la baza construcției unei punți este de a scoate contactele din punte. Potențiometrele egalizatoare se pot pune, în acest caz, în așa fel, încît cursorul potențiometrelor să fie la capetele diagonalelor punții și atunci rezistența de contact intră în diagonala punții și nu în brațele ei.

Pentru reducerea erorilor de citire, la aparatele de măsură cu amplificare electronică este recomandabil ca citirea să se facă la ieșire. Asemenea schemă prezintă avantajul că erorile de citire nu se mai amplifică și, în afară de aceasta, se pot folosi ușor mai multe scări, trecerea de la o scară la alta făcîndu-se printr-o simplă schimbare a șuntului aplicat instrumentului indicator. În cazul, însă, cînd amplitudinea semnalului amplificat

variază mult, putînd lua valori prea mari, apare pericolul ca la aparatele cu amplificare mare semnalul să iasă din regiunea liniară a tuburilor amplificatoare, și să prezinte la ieșire distorsiuni de neliniaritate. În asemenea

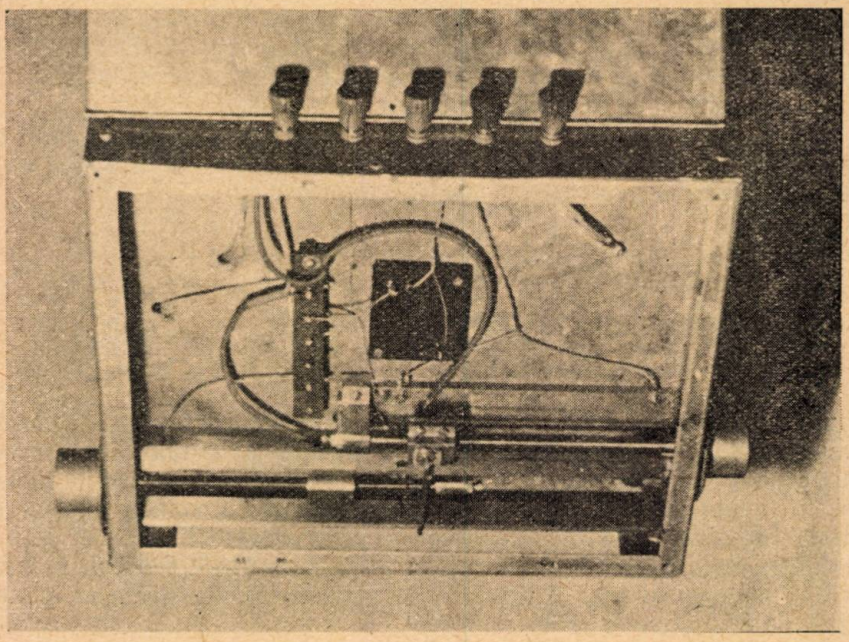


Fig. 4. — Potențiometru utilizat în puntea tensometrului rezistiv.

cazuri, se recurge fie la reducerea amplificării unuia din etaje, fie la micșorarea semnalului de intrare. Soluția adoptată de noi a fost aceea de a micșora semnalul la intrare prin echilibrarea punții cu ajutorul potențiometrului P_2, utilizat la citiri. Indicatorul de nul este așezat la ieșire și, pe măsură ce puntea se echilibrează, se poate mări amplificarea de la potențiometrul din grila etajului al doilea. Potențiometrul P_2, fiind la fel cu potențiometrul P_1, erorile de citire sînt aceleași și, după cum am văzut mai sus, ele sînt neglijabile. Reperarea poziției de echilibru se face la ieșire cu ajutorul ochiului magic și a unui instrument de nul. Echilibrarea punții se face astfel : inițial, dacă puntea este dezechilibrată mult, instrumentul este șuntat în mod automat printr-un releu de protecție. În acest caz se reduce amplificarea și, observînd ochiul magic, se reduce echilibrul, folosind potențiometrele din punte (P_1 în lpisa sarcinii sau P_2 în timpul determinărilor) Pe măsură ce puntea se echilibrează, semnalul de intrare scade și, în apropiere de echilibru, releul de protecție își încetează acțiunea și se continuă observarea cu instrumentul, acesta fiind mai sensibil decît ochiul magic.

O asemenea schemă prezintă avantajul că menține sensibilitatea aparatului aceeași la orice sarcină, iar în cazul unei sarcini mixte putem reduce dezechilibrarea datorită componentei continue și să studiem cu mai multă precizie sarcina dinamică.

Faptul că puntea este alimentată în curent alternativ face ca capacitatea firelor de legătură ale captorilor să fie de mare importanță. De aceea

echilibrarea punții nu se poate face decît dacă se folosește așa-numitul pămînt Wagner, cu ajutorul căruia reușim să compensăm efectul capacităților parazite. Deoarece tensiunea de alimentare a punții nu conține componenta continuă, puntea Wagner se reduce numai la un condensator diferențial de 2 × 500 pF. Este important de remarcat că o deplasare a poziției firelor schimbă valoarea capacităților parazite și produce dezechilibrarea punții. În acest caz, dacă nu putem asigura o poziție fixă a firelor de legătură este recomandabil ca toate firele de legătură să fie ecranate. Punînd ecranele firelor la masă, deplasările firelor nu vor mai avea nici o importanță. Cînd captorii sînt lipiți pe piese metalice se impune ca acestea să fie puse și ele la masa generală a montajului împreună cu aparatul electronic.

O atenție deosebită trebuie acordată paraziților electrici. Fără măsuri speciale de precauție nivelul acestora este mult mai ridicat, decît cel al semnalului util. Paraziții pot fi exteriori, provenind de la diferite instalații electrice din apropiere, dar cei mai periculoși sînt dați de rețeaua de alimentare și de oscilatorul local. Frecvența rețelei este împiedicată, în primul rînd, executînd transformatorii de rețea în așa fel, ca fierul să nu ajungă la saturație. O ecranare a punții și a tranformatorului de intrare al amplificatorului și a primelor etaje se impune la toate aparatele cu o amplificare mare, iar efectuarea îngrijită a ecranării este o chestiune de practică.

De asemenea, trebuie multă grijă pentru a evita o reacție de la ieșire spre intrare. În acest scop, toți transformatorii de putere se ecranează și se pun la masă într-un singur punct. Tot din această cauză trebuie evitate cuplajele capacitive dintre ieșire și intrare, ținînd seama că orice fir care traversează aparatul de la ieșire la intrare, fie el chiar un simplu fir de alimentare, poate, prin intermediul capacităților parazite, să readucă la intrare energia de la ieșire și, prin aceasta, să introducă distorsiuni, iar în unele cazuri, poate să producă chiar și intrarea montajului în oscilație. La aparatele de măsură semnalul de intrare fiind extrem de mic, masa trebuie astfel executată ca să nu avem curenți rătăcitori. De aceea ea se face în forma unei bare bune conductoare, izolate de șasiu. Etajele se pun la masă într-un singur punct, iar borna de pămînt a aparatului se prinde la bara de masă în dreptul primului etaj.

Spre deosebire de celelate aparate de măsură, la aparatele de tensometrie se ivesc dificultăți deosebite în ceea ce privește combaterea paraziților externi. Aceasta se datorește faptului, că firele de legătură sînt lungi și formează, împreună cu captorii, adevărate antene, prin care paraziții intră în aparat. La aparatul nostru această situație era și mai gravă, întrucît, pe de o parte, prin sensibilitatea sa mare, aparatul lucrează cu semnale foarte mici, iar pe de altă parte introducerea potențiometrului compensator P_1 în punte nu permite punerea directă a captorilor la masă.

Această situație s-a ameliorat făcînd amplificatorul selectiv. În acest caz, prin amplificator trec numai paraziții cuprinși în banda frecvențelor transmise, și de aceea nivelul lor este mai mic decît al semnalului util. Banda transmisă a amplificatorului este determinată de următoarele considerente :

Puntea este alimentată cu o tensiune sinusoidală de forma $E = E_m \cos pt$. Dacă în relația (2) ținem seama de (3) și presupunem

$$\Delta R = r_0 + r_1 \cos \omega t, \tag{6}$$

obținem

$$e = E_m \frac{1}{4R_2} (r_0 + r_1 \cos \omega t) \cos pt. \tag{7}$$

Aici, termenul r_0 înglobează dezechilibrarea inițială a punții și dezechilibrarea datorită componentei statice a sarcinii. Notînd $\frac{r_1}{r_0} = m$ și $E_m \frac{r_0}{4R_2} = A$ obținem

$$e = A (1 + m \cos \omega t) \cos pt,$$

care este funcția clasică a modulației în amplitudine, în care $A \cos pt$ este purtătoarea, iar m gradul de modulație. Prima concluzie pe care o putem trage este că, pentru a nu introduce distorsiuni prin supramodulație, trebuie satisfăcută relația $m \leqslant 1$, adică

$$\frac{r_1}{r_0} \leqslant 1, \tag{8}$$

ceea ce înseamnă că, în cazul cînd sarcina este pur dinamică sau cînd componenta sinusoidală este mai mică decît cea continuă, sîntem obligați să dezechilibrăm puntea pentru ca relația (7) să fie satisfăcută.

În relația (2), din care s-a dedus relația (6), s-a neglijat la numitor termenul ΔR, față de termenii care reprezintă rezistențele punții. Dacă nu neglijăm acest termen avem

$$e = E \left(\frac{R_2 + \Delta R}{R_1 + R_2 + \Delta R} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right),$$

care împreună cu (3) dă succesiv

$$e = E \left(\frac{R_1 + \Delta R}{2R_1 + \Delta R} - \frac{1}{2} \right),$$

$$e = E \frac{\Delta R}{4R_1 \left(1 + \frac{\Delta R}{2 R_1} \right)}.$$

Dezvoltînd în serie obținem

$$e = E \frac{\Delta R}{4R_1} \left[1 - \frac{\Delta R}{2R_1} + \left(\frac{\Delta R}{2R_1} \right)^2 - \left(\frac{\Delta R}{2 R_1} \right)^3 + \dots \right].$$

Înlocuind $E = E_m \cos pt$ și ținînd seama de relația (6), căpătăm

$$e = \frac{E \cos pt}{4R_1} \left[r_0 + r_1 \cos \omega t - \frac{(r_0 + r_1 \cos \omega t)^2}{2 R_1} + \frac{(r_0 + r_1 \cos \omega t)^3}{4R_1} - \dots \right],$$

de unde prin simple transformări obținem

$$e = \frac{E_m}{4R_1}\left[r_0 - \frac{r_0^2}{2R_1} - \frac{r_1^2}{4R_1} + \frac{r_0^3}{4R_1^2} + \frac{3r_0r_1^2}{8R_1^2} - \dots\right]\cos pt \quad \text{termen purtător}$$

$$+\frac{E_m}{8R_1}\left[r_1 - \frac{r_0r_1}{R_1} + \frac{3r_0^2r_1}{4R_1^2} + \frac{3r_1^3}{16R_1^2} - \dots\right]\cos(p+\omega)t \quad \text{termen util}$$

$$+\frac{E_m}{8R_1}\left[-\frac{r_1^2}{4R_1} + \frac{3r_0r_1^2}{8R_1^2} - \dots\right]\cos(p+2\omega)t \quad \text{armonica a 2-a}$$

banda superioară

. . . . . armonici superioare

$$+\frac{E_m}{8R_1}\left[r_1 - \frac{r_0r_1}{R_1} + \frac{3r_0^2r_1}{4R_1^2} + \frac{3r_1^3}{16R_1^2} - \dots\right]\cos(p-\omega)t \quad \text{termen util}$$

$$+\frac{E_m}{8R_1}\left[-\frac{r_1^2}{4R_1} + \frac{3r_0r_1^2}{8R_1^2} - \dots\right]\cos(p-2\omega)t \quad \text{armonica a 2-a}$$

banda inferioară

. . . . . armonici superioare

O evaluare analogă a termenilor de modulație, a fost făcută în 1950 de W. R. Mchaffey și A. I. Hoehn în articolul lor de sinteză [6] asupra modulației de amplitudine la punțile cu captori rezistivi; acolo însă autorii nu pun în evidență termenul r_0 și de aceea nu se poate vedea efectul pe care îl are gradul de modulație, atît asupra etalonării, cît și asupra distorsiunilor.

Din această analiză rezultă că banda de trecere a amplificatorului selectiv trebuie să fie cuprinsă între $p - \omega$ și $p + \omega$. Selectivitatea se realizează introducînd în etajul al doilea o reacție negativă selectivă printr-un circuit „dublu T". Prin introducerea acestui filtru amplificatorul funcționează în bune condiții, chiar dacă firele de legătură nu sunt ecranate, cu condiția însă ca poziția lor să nu varieze, pentru a nu modifica capacitățile parazite ale punții.

Pentru micșorarea zgomotului de fond s-a folosit în primul rînd tubul *6AC7*, la care tensiunea de zgomot a tubului este mică.

La amplificarea mare de care se dispune a trebuit să se ia măsuri speciale pentru reducerea efectului de microfon. De aceea, pentru înlăturarea vibrației mecanice a electrozilor, tubul *6AC7* a fost fixat într-un ecran de plumb așezat pe pîslă. Pentru a elimina pătrunderea nedorită a frecvenței rețelei prin filamentul primei lămpi, acest tub se alimentează cu curent redresat.

Al doilea etaj amplificator folosește partea de triodă a tubului 6Г2, iar etajul final conține tubul *6AG7*.

Detecția se face cu ajutorul unei scheme de redresare în inel, folosind ca elemente redresoare discuri de cuproxid.

După cum s-a mai amintit, aparatul dispune de două indicatoare de nul, și anume, unul optic (ochiul magic *EM4*) și unul electromecanic format dintr-un miliampermetru. Miliampermetrul indică 1 mA pe toată

sara și a fost prevăzut cu un set de șunturi în așa fel, încît, dacă la ieșirea tensometrului rezistiv se pune un oscilograf cu buclă *Bc*, să se poată măsura curenți prin buclă între 100 μA și 50 mA. Șunturile releului de protecție

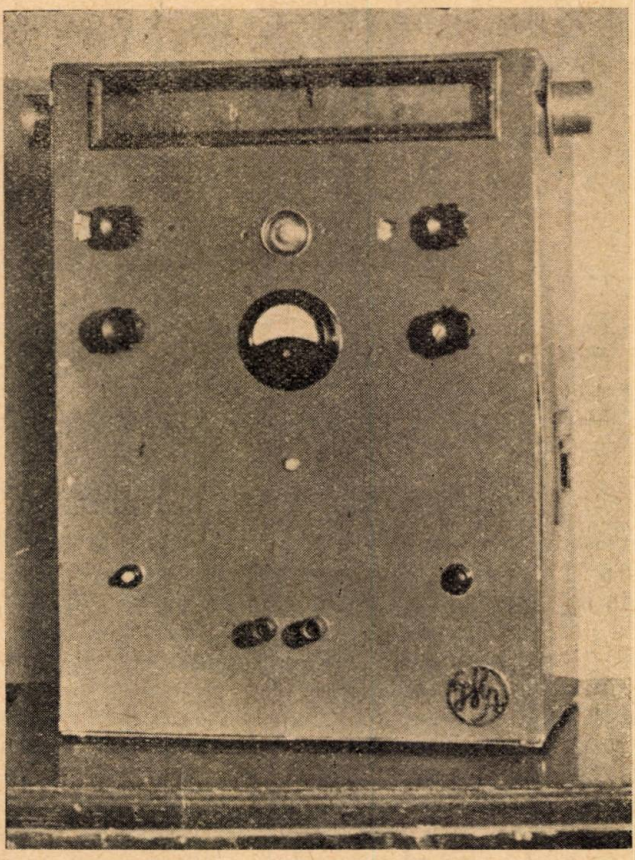


Fig. 5. — Tensometrul rezistiv. Vedere din față.

au fost dimensionate pentru cele patru bucle ale oscilografului electromagnetic МПО-2. Conectarea șunturilor în derivație cu instrumentul se face prin intermediul comutatorului *Cm* care face în același timp și comutarea rezistențelor conectate în serie cu releul Re_1, care protejează scurtcircuitîndu-le.

Releul este conectat în secundarul unui transformator coborîtor, montat în circuitul anodic al uneia din anodele ochiului magic *EM*4. Pentru a readuce lamele releului Re_1 în poziția inițială se apasă pe butonul *B* închizînd astfel circuitul bobinei Re_2. Prin aceasta se întrerupe circuitul care scurtcircuita bucla și se închide circuitul becului de semnalizare, montat în derivație cu o înfășurare de filament. Starea aprinsă a becului indică experimentatorului că bucla nu mai este scurt-circuitată.

Potențiometrul P_3 servește la reglarea curentului care trece prin buclă.

Aparatul realizat (fig. 5 și 6) funcționează în bune condiții, nu numai în circumstanțele de laborator, dar și în practica de teren. El a putut fi utilizat fără precauții speciale la măsurarea deformațiilor în corpul unui

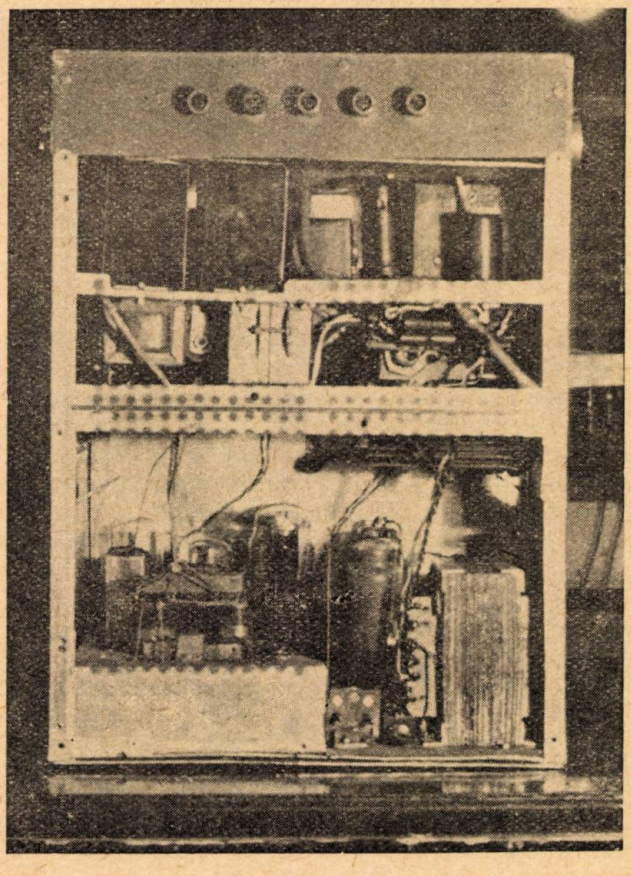


Fig. 6. — Tensometrul rezistiv. Vedere din spate a montajului.

avion, în timpul zborului. În acest din urmă caz redresorul a fost deconectat iar alimentarea s-a făcut de la baterii.

ТЕНЗОМЕТР С ПРОВОЛОЧНЫМИ ДАТЧИКАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье описывается тензометр с проволочными датчиками, построенный Институтом прикладной механики. Аппарат позволяет регистировать относительные статические и динамические деформации порядка 10^{-6}. Путем введения селективной отрицательной обратной связи обеспечено снижение уровня помех. Амплитудная модуляция в мосту представлена в форме, позволяющей определить ошибки эталонирования и искажения в зависимости от степени модуляции.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема, объясняющая чувствительность моста.
Рис. 2. — Общая схема усилителя постоянного тока, построенного по принципу усилителя модулированных волн.
Рис. 3. — Схема тензометра с проволочными датчиками, построенного в электронной лаборатории Института прикладной механики.
Рис. 4. — Потенциометр, используемый для моста тензометра.
Рис. 5. — Тензометр с проволочными датчиками. Вид спереди.
Рис. 6. — Тензометр с проволочными датчиками. Вид сзади.

LE TENSIOMÈTRE RÉSISTIF

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, l'auteur décrit l'appareil de tensiométrie à capteurs résistifs, qui a été réalisé par l'Institut de Mécanique appliquée. L'appareil permet d'enregistrer certaines déformations relatives, statiques et dynamiques, de l'ordre 10^{-6}. On expose les critériums présidant à l'établissement du projet et le mode de fonctionnement de l'appareil. On a obtenu une réduction du niveau des parasites en introduisant une réaction négative sélective. La modulation de l'amplitude en pont est présentée sous une forme qui permet d'évaluer les erreurs d'étalonnage et des distorsions en fonction du degré de modulation.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma servant à expliquer la sensibilité du pont.
Fig. 2. — Schéma-bloc de l'amplificateur de courant continu, construit sur le principe de l'amplificateur d'ondes modulées.
Fig. 3. — Schéma du tensiomètre résistif construit dans le Laboratoire életronique de l'Institut de Mécanique appliquée.
Fig. 4. — Potentiomètre utilisé pour le pont du tensiomètre résistif.
Fig. 5. — Tensiomètre résistif, vu de face.
Fig. 6. — Tensiomètre résistif, montage vu de dos.

BIBLIOGRAFIE

1. A. M. Turicin, *Elektriceskie izmerenia neelektriceskih velicin.* Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1954.
2. N. P. Raevski, *Metodî experimentalnogo issledovania mehaniceskih parametrov maşin.* Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1952.
3. — *Izmerenie mehaniciskih velicin electriceskimi metodami.* Gosudarstvernoe naucivotehniceskoe izdatelstvo maşinostroitelnoi literaturî, Moscova, 1952.
4. B. S. Sotskov, *Osnovî rasceta i proektirovania elementov avtomaticeskih i telemehaniciskih ustroistv.* Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1953.
5. A. M. Bonci-Bruevici, *Primenenie elektronnîh lamp v experimentalnoi fizike.* Gosudarstvennoe izdatelstvo tehnicoteoreticeskoi literaturî, Moscova, 1954, p. 263.
6. W. R. Mchaffey a. A. J. Hoehn, *Analysis of Amplitude Modulation Systems and Design of Tuned Amplifiers for use With Gages and Similar Instrumentation.* Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis. 1950, vol. VIII, nr. 1, p. 70.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

CONSIDERAŢII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR DE ALUNGIRE INFINITĂ LUBRIFICATE CU GAZE, COMPUSE DIN SUPRAFEŢE PLANE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Lagărele compuse din două sau mai multe suprafeţe plane au aplicaţii practice destul de numeroase. Într-adevăr în diferite tipuri de lagăre ca de exemplu lagărele de capăt, grosimea δ a filmului de lubrifiant variază liniar cu distanţa x în direcţia mişcării, sau prezintă acest gen de variaţie pe porţiuni separate de discontinuităţi de speţa întîia (punct unghiulos) şi a doua (salt finit) a grosimii filmului de lubrifiant δ. Acesta este şi cazul unor tipuri speciale de lagăre circulare, avînd cuzinetul împărţit în sectoare [1] făcute cu scopul de a mări capacitatea portantă şi stabilitatea lagărului.

Toate aceste tipuri de lagăre pot fi studiate fără dificultăţi cu ajutorul soluţiilor obţinute în cazul cînd grosimea δ variază liniar cu x [2].

1. Soluţia ecuaţiei diferenţiale a presiunilor

Ecuaţia diferenţială a presiunilor, este pentru o evoluţie izentropică oarecare, de exponent $\varkappa$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{\delta^2}\left(1 - \frac{C_1}{p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\delta}\right), \tag{1}$$

în care p este presiunea, μ, vizcozitatea, V, viteza relativă dintre suprafeţe, iar

$$C_1 = p_m^{\frac{1}{\varkappa}}\,\delta_0, \tag{2}$$

p_m fiind presiunea maximă sau minimă care se produce, iar δ_0 grosimea δ corespunzătoare.

Să considerăm variația grosimii δ de forma

$$\delta = \delta_1 + \nu \varkappa \tag{3}$$

și pentru moment $\nu \neq 0$ și $\varkappa = 1$.

Ca și pentru lagărele circulare [3] este util să se întrebuințeze variabilele adimensionale

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}; \bar{\delta} = \frac{\delta}{\Delta}; \Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}; \alpha = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \tag{4}$$

în care p_0 este presiunea mediului înconjurător, iar δ_1 și δ_2 sînt valorile grosimii δ la capetele intervalului considerat ($x = 0$ și $x = l$).

În aceste condiții notînd cu

$$\xi = \frac{[3\mu V}{\nu \Delta p_0} = \frac{6\mu V l}{\alpha (\delta_1 + \delta_2)^2 p_0} \tag{5}$$

și cu

$$\bar{\eta} = \bar{p}\bar{\delta} \tag{6}$$

în cazul cînd $\nu > 0$, repartiția presiunilor este dată de relația

$$\bar{\eta}^2 + 2\,\xi\,\bar{\eta} - \xi^2 k_3 = k_2\,\bar{\delta}^2\,\chi', \tag{7}$$

care rezultă din integrarea ecuației (1). În această relație k_2 și k_3 sînt constante de integrare, k_3 legat de C_1 prin relația

$$k_3 = \frac{4C_1}{p_0 (\delta_1 + \delta_2)\,\xi}, \tag{8}$$

iar χ' este o funcție de forma

$$\chi' = \left[\frac{\bar{\eta} + \xi (1 - \sqrt{1 + k_3})}{\bar{\eta} + \xi (1 + \sqrt{1 + k_3})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1 + k_3}}}, \tag{9}$$

care a fost reprezentată grafic cu o altă ocazie [3].

În mod analog, pentru $\nu < 0$, schimbînd pe ν în $-\nu$, repartiția presiunilor este de forma

$$\bar{\eta}^2 - 2\,\xi\,\bar{\eta} + \xi^2 k_3 = k_2\,\bar{\delta}^2 \chi, \tag{10}$$

în care însă de data aceasta, dacă $k_3 > 1$

$$\frac{1}{\chi} = \exp\left\{\frac{2}{\sqrt{k_3 - 1}}\ \operatorname{arctg}\ \frac{\bar{\eta} - \xi}{\xi\sqrt{k_3 - 1}}\right\}, \tag{11}$$

iar dacă $k_3 < 1$

$$\chi = \left[\frac{\bar{\eta} - \xi (1 - \sqrt{1 - k_3})}{\bar{\eta} - \xi (1 + \sqrt{1 - k_3})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1 - k_3}}}, \tag{12}$$

aceste două regimuri fiind despărțite de un regim critic, caracterizat prin $k_3 = 1$, regim pentru care, repartiția presiunilor este dată de relația

$$(\xi_c - \bar{\eta}) \exp\left(\frac{\xi_c}{\xi_c - \eta}\right) = k_2 \bar{\delta}, \tag{13}$$

în care s-a notat cu ξ_c valoarea ξ corespunzătoare regimului critic.

Pentru $\varkappa \neq 1$ însă având valori apropiate de aceasta din urmă așa cum se întîmplă în realitate, se poate găsi repartiția presiunilor în mod aproximativ dacă adoptăm un procedeu de aproximații succesive, pornind de la soluția pentru $\varkappa = 1$ și ne mărginim la o singură iterație.

Intr-adevăr, dacă în ecuația diferențială a presiunilor [2]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{dp^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{dx}\right) = 6\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)V\frac{d}{dx}\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta\right), \tag{14}$$

unem

$$\varphi^2 = p^{\frac{1}{\varkappa}+1}, \tag{15}$$

atunci

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{d\varphi^2}{dx}\right) = 6\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)V\frac{d}{dx}\left(\varphi^{\frac{2}{\varkappa+1}}\delta\right). \tag{16}$$

Metoda preconizată mai sus, se reduce în fond la a considera în membrul secund (16) în mod aproximativ

$$\frac{2}{\varkappa+1} \cong 1, \tag{17}$$

caz în care ecuația (16) se scrie

$$\frac{d\varphi}{dx} = 3\mu\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)V\frac{1}{\delta^2}\left(1 - \frac{C_1}{\varphi\delta}\right), \tag{18}$$

ecuație de aceeași formă cu (1) în care se pune $\varkappa = 1$ și care poate fi soluționată în modul arătat. Cu alte cuvinte soluționarea ecuației (14) este echivalentă cu găsirea repartiției presiunilor în ipoteza $\varkappa = 1$, pentru un lagăr identic cu cel considerat, având însă o viteză relativă

$$V' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)V. \tag{19}$$

Notînd această soluție p'_{iz} rezultă

$$\varphi = c\,p'_{iz}, \tag{20}$$

și ținînd seama de relația (15)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{p'_{iz}}{p_0}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}. \tag{21}$$

Pentru viteze relative V mari, notînd cu p_{iz} soluția p'_{iz} cu $V'=V$, atunci se poate pune aproximativ

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{p_{iz}}{p_0}\right)^{\varkappa}, \tag{22}$$

relație riguroasă, cînd $V \to \infty$, deoarece în acest caz soluția generală a problemei este [4]

$$p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\delta = \text{const.} \tag{23}$$

★

În cazul cînd $\nu=0$ (3) soluția problemei poate fi găsită ușor pentru orice exponent $\varkappa$ și chiar considerînd viscozitatea μ variabilă cu presiunea și temperatura. Vom considera totuși $\mu = \text{const}$, deoarece această ipoteză este apropiată de realitate.

Pentru acest caz, notînd cu

$$\xi_1 = \frac{6\,\mu V l}{\delta^2 p_0}\ ;\ \bar{x} = \frac{x}{l} \tag{24}$$

ecuația (1) se scrie

$$\frac{\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}}{C_1}\,\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{1-\frac{\bar{p}^{1/\varkappa}}{C_1}} = -\,\xi_1\,\mathrm{d}\bar{x}, \tag{25}$$

în care s-a introdus în C_1 și grosimea δ care acum este o constnată.

Deoarece $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = 0$, curba presiuniior nu va avea maxime sau minime și deci $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ are peste tot același semn.

Astfel pentru $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0$, $C_1 > \bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}$ și dezvoltînd primul membru al ecuației (25) în serie obținem pentru repartiția presiunilor relația

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_1^i}\,\frac{\varkappa}{i+\varkappa}\,\bar{p}^{\frac{\varkappa+i}{\varkappa}} = -\,\xi_1\bar{x} + C_2. \tag{26}$$

În cazul $\varkappa = 1$ seria (26) se poate însuma

$$\bar{p} + C_1 \ln (C_1 - \bar{p}) = \xi_1\,\bar{x} + C_2 \tag{27}$$

Pentru $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0$, $C_1 < p^{\frac{1}{\varkappa}}$ și procedînd analog se obține

$$\bar{p} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varkappa\,C_1^i}{i-\varkappa}\,\frac{1}{\bar{p}^{\frac{i-\varkappa}{\varkappa}}} = \xi_1\,\bar{x} + C_2, \tag{28}$$

iar pentru $\varkappa = 1$

$$\bar{p} + C_1 \ln (\bar{p} - C_1) = \xi_1\,\bar{x} + C_2. \tag{29}$$

Cu ajutorul soluțiilor obținute, se poate calcula fără dificultăți orice lagăr compus din două sau mai multe suprafețe plane.

2. Lagăre cu suprafețe paralele

Să analizăm mai întîi cazul cînd ambele suprafețe sînt paralele cu zona lubrificată avînd o lungime l și o grosime δ.

Pentru început deoarece se cunoaște soluția exactă pentru un exponent $\varkappa$ oarecare, să vedem care este influența naturii evoluției asupra repar-

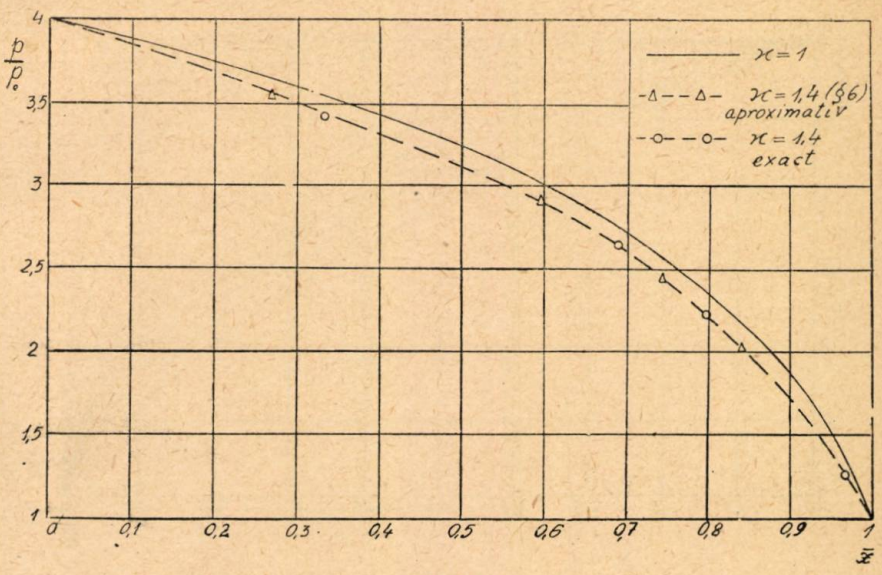


Fig. 1

tiției presiunilor și mai ales să verificăm precizia metodei aproximative de calcul propuse.

Pentru aceasta să luăm un exemplu. Fie astfel un lagăr la care $\xi_1 = 3$ și $\bar{p}_a = 4$. În cazul $\varkappa = 1$, repartiția presiunilor este dată de relația (27). Constantele C_1 și C_2 se determină punînd condițiile la limită la capetele lagărului: la $\bar{x} = 0$; $\bar{p} = \bar{p}_a$, la $\bar{x} = 1$; $\bar{p} = 1$. Rezultă astfel $C_1 = 5{,}51$, $C_2 = 6{,}23$, iar repartiția presiunilor este arătată în figura 1. Pentru $\varkappa = 1{,}4$ de exemplu, punînd aceleași condiții la limită, din relația (26) rezultă $C_1 = 4$, $C_2 = 3{,}24$, luînd primii 6 termeni din dezvoltarea în serie. Repartiția presiunilor calculată cu ajutorul relației (26) este arătată tot în figura 1. Se constată că diferențele nu sînt mari, rezultat normal de altfel, deoarece cînd $V = 0$ presiunile depind puțin de $\varkappa$, iar cînd $V = \infty$ repartiția presiunilor nu depinde de $\varkappa$ (23).

În sfîrșit, să calculăm repartiția presiunilor pentru $\varkappa = 1{,}4$ cu ajutorul motodei generale propuse. Utilizînd aceleași variabile adimensionale rezultă că repartiția $\bar{p}'_{iz}$ căutată corespunde la (19)

$$\xi' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varkappa} + 1\right)\xi = 2{,}574 \tag{30}$$

cu condițiile la limită (15), la $\bar{x} = 0$, $\bar{p}_{iz} = 3{,}28$ și la $\bar{x} = 1$, $\bar{p}'_{iz} = 1$. Rezultă atunci $C_1 = 4{,}4$, $C_2 = 3{,}85$, iar din figura 1 unde s-au trasat

și aceste rezultate se vede că repartiția presiunilor obținută în acest mod se suprapune peste cea exactă.

Ținînd seama că presiunile depind puțin de $\varkappa$ ne vom ocupa numai de cazul $\varkappa = 1$.

În toate cazurile distribuția presiunilor este dată de una din relațiile (27) sau (29), constantele C_1 și C_2 putînd fi calculate prin încercări, punînd

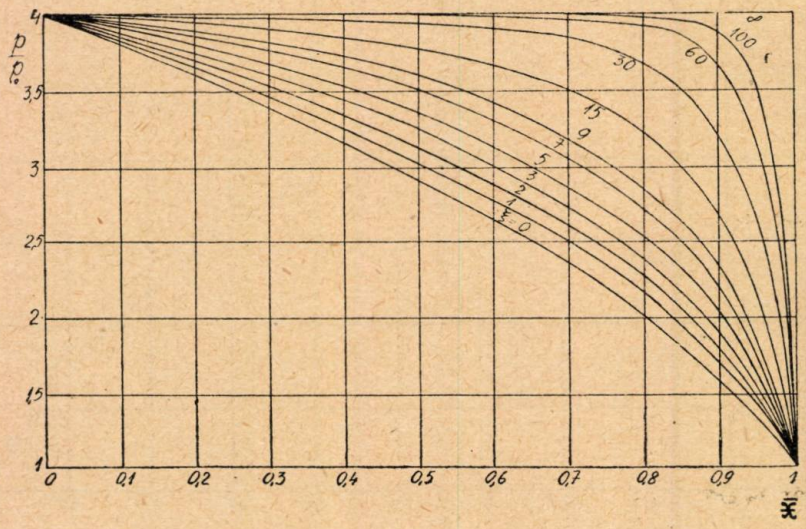


Fig. 2

condițiile la limită la capetele lagărului. Găsirea acestor constante este de multe ori ușurată dacă se observă că

$$C_1 = \bar{p}_a + \varepsilon, \tag{31}$$

în cazul relației (27) și

$$C_1 = 1 - \varepsilon, \tag{32}$$

în cazul relației (29), iar $\varepsilon > 0$ și tinde către zero cînd $\xi_1 \to \infty$, iar cînd $\xi_1 \to 0$, $\varepsilon \to \infty$.

Pentru a pune în evidență dependența curbei presiunilor de parametrul ξ_1 în figura 2 și în figura 3 s-au trasat presiunile ce rezultă la diferite valori ξ_1 pentru $\bar{p}_a = 4$, în primul caz considerînd $\frac{dp}{dx} < 0$, iar în al doilea $\frac{dp}{dx} > 0$.

Se constată că pe măsură ce ξ_1 crește, curba presiunilor tinde către repartiția limită (23), care pentru cazul considerat este

$$(\bar{p})_{\xi_1 \to \infty} = C_1. \tag{33}$$

Elementele globale ale lagărului pot fi calculate fără dificultăți. Astfel notînd cu P rezultanta presiunilor și introducînd coeficientul adimensional

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l}, \tag{34}$$

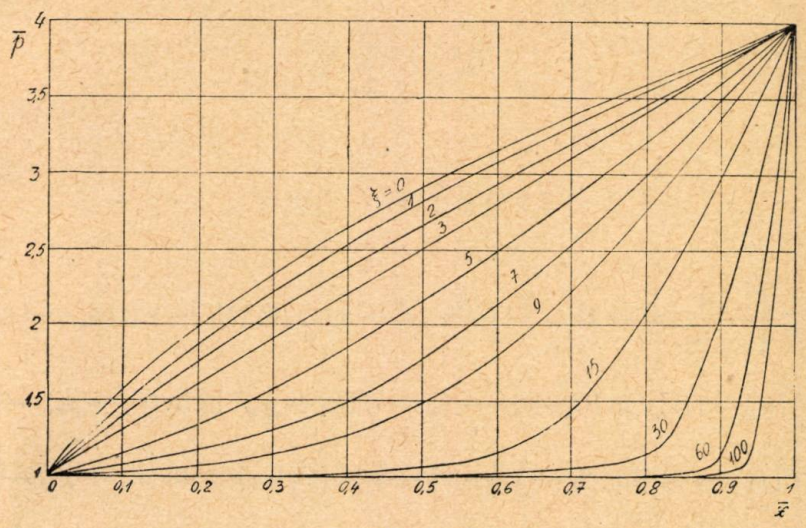


Fig. 3

atunci

$$\zeta = \int_{\bar{p}_a}^{1} \bar{p} \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{p}} \mathrm{d}\bar{p} - 1. \tag{35}$$

Astfel pentru $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{p}} = \frac{1}{\xi_1}\left(1 - \frac{C_1}{C_1 - \bar{p}}\right) \tag{36}$$

și

$$\zeta = \frac{C_1}{\xi_1}\left[C_1 \ln \frac{C_1 - 1}{C_1 - \bar{p}_a} - (\bar{p}_a - 1) - \frac{1}{2\,C_1}(\bar{p}_a^2 - 1)\right] - 1. \tag{37}$$

Cînd $\xi_1 \to 0$

$$\zeta_{\xi_1 \to 0} = \frac{2}{3}\frac{\bar{p}_a^2 + \bar{p}_a + 1}{\bar{p}_a + 1} - 1, \tag{38}$$

iar cînd $\xi_1 \to \infty$

$$\zeta_{\xi_1 \to \infty} = \bar{p}_a - 1. \tag{39}$$

În mod ana'og, cînd $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0$

$$\zeta = \frac{C_1}{\xi_1}\left[\frac{1}{2\,C_1}(\bar{p}_a^2 - 1) + (\bar{p}_a - 1) - C_1 \ln \frac{1 - C_1}{\bar{p}_a - C_1}\right]. \tag{40}$$

Cînd $\xi_1 \to 0$, ζ are aceeaşi expresie (38), iar cînd $\xi_1 \to \infty$

$$\xi_{1\to\infty} = 0 \tag{41}$$

Poziţia rezultantelor presiunilor poate fi calculată luînd de exemplu momentele în raport cu originea O. Notînd cu $\bar{x}^*$ distanţa $\bar{x}$ pînă la rezultanta P, rezultă atunci

$$\bar{x}^* = \frac{2I-1}{2\zeta}, \tag{42}$$

cu

$$I = \int_{\bar{p}_a}^{1} \bar{p}\,\bar{x}\,(\bar{p})\,\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{p}}\,\mathrm{d}\bar{p} = \tag{43}$$

$$= \frac{1}{\xi_1^2}\left\{-\frac{1}{3}(\bar{p}_a^3-1)+\frac{C_2-C_1}{2}(\bar{p}_a^2-1)+C_1(C_2-C_1)(\bar{p}_a-1)+\right.$$

$$+\frac{C_1}{4}(C_1-1)^2[2\ln(C_1-1)-1]-\frac{C_2}{4}(C_1-\bar{p}_a)^2[2\ln(C_1-\bar{p}_a)-1]+$$

$$+2C_1^2(C_1-1)[\ln(C_1-1)-1]-2C_1^2(C_1-\bar{p}_a)[\ln(C_1-\bar{p}_a)-1]+$$

$$\left.+C_1^2(C_2-C_1)\ln\frac{C_1-\bar{p}_a}{C_1-1}+C_1^3[\mathrm{li}(C_1-1)-\mathrm{li}(C_1-\bar{p}_a)]\right\},$$

pentru $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0$. Cînd $\xi_1 \to 0$

$$I_{\xi_1\to 0} = \frac{1}{3}\frac{(\bar{p}_a^2-2)(\bar{p}_a^3-1)}{(\bar{p}_a^2-1)^2}-\frac{1}{5}\frac{(\bar{p}_a^5-1)}{(\bar{p}_a^2-1)^2}, \tag{44}$$

iar cînd $\xi_1 \to \infty$

$$\bar{x}^*_{\xi_1\to\infty} = 0{,}5 \tag{45}$$

În cazul $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0$.

$$I = \frac{1}{\xi_1^2}\left\{\frac{1}{3}(\bar{p}_a^3-1)+\frac{C_1-C_2}{2}(\bar{p}_a^2-1)+C_1(C_1-C_2)(\bar{p}_a-1)+\right.$$

$$+\frac{C_1}{4}(\bar{p}_a-C_1)^2[2\ln(\bar{p}_a-C_1)-1]-\frac{C_1}{4}(1-C_1)^2[2\ln(1-C_1)-1]+$$

$$+2C_1^2(\bar{p}_a-C_1)[\ln(\bar{p}_a-C_1)-1]-2C_1^2(1-C_1)[\ln(1-C_1)-1]+$$

$$\left.+C_1^2(C_1-C_2)\ln\frac{\bar{p}_a-C_1}{1-C_1}+C_1^3[\mathrm{li}(\bar{p}_a-C_1)-\mathrm{li}(1-C_1)]\right\}, \tag{46}$$

iar cînd $\xi \to 0$ şi $\xi_1 \to \infty$ rezultatele sînt aceleaşi ca şi în cazul precedent.

Pentru forța de frecare

$$F_0, \delta = -\int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0,\delta} \mathrm{d}x, \tag{47}$$

ținînd seama că în general

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y - \delta)\, y + V\left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \tag{48}$$

atunci

$$F_{0,\delta} = \int_0^l \frac{\mu V}{\delta}\mathrm{d}x \pm \frac{1}{2}\int_0^l \delta \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \tag{49}$$

și integrînd prin părți

$$C_{F_{0,\delta}} = \frac{\delta}{l}\left[\frac{\xi_1}{6} \pm \frac{1}{2}(\bar{p}_a - 1)\right], \tag{50}$$

în care

$$C_F = \frac{F}{p_0 l}. \tag{51}$$

În sfîrșit, debitul de lubrifiant este

$$M = \rho\int_0^\delta u\,\mathrm{d}y = -\frac{\rho\delta^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\rho V\delta}{2}, \tag{52}$$

adică

$$M = \frac{\rho_a V\delta}{2} + \frac{\rho_a\delta^3}{2\mu}\xi_1\left(\frac{C_1}{\bar{p}_a} - 1\right). \tag{53}$$

Cînd $\xi_1 \to 0$, M este dat de relația

$$M = \frac{p_a\rho_a}{24\mu}\left(1 - \frac{1}{\bar{p}_a^2}\right), \tag{54}$$

iar cînd $\xi_1 \to \infty$, $M \to \infty$. Se constată că dacă $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0$, pe măsură ce V crește M schimbă de semn, adică prin priza de alimentare aerul începe să fie aspirat.

3. Lagăre cu suprafețe plane înclinate

Repartiția presiunilor este dată de relația (10), sau pentru regimul critic, de relația (13), în cazul $\nu < 0$ (fig. 4).

Pentru regimuri la care constanta k_3 nu are valori prea apropiate de $k_3 = 1$, ca și pentru lagărele circulare [3], se poate pune aproximativ

$$\chi = a\bar{\eta} + b, \tag{55}$$

caz în care, repartiția presiunilor poate fi scrisă aproximativ în mod explicit

$$\bar{p} = \frac{1}{\bar{\delta}}\left[\xi + a\frac{k_2\bar{\delta}^2}{2} + \sqrt{\left(\xi + a\frac{k_2\bar{\delta}^2}{2}\right)^2 - (\xi^2 k_3 - k_2\bar{\delta}^2 b)}\right]. \qquad (56)$$

Constantele k_2 și k_3 se determină punînd condițiile la limită ca la capetele lagărului $\bar{p}=1$. Rezultă sistemul

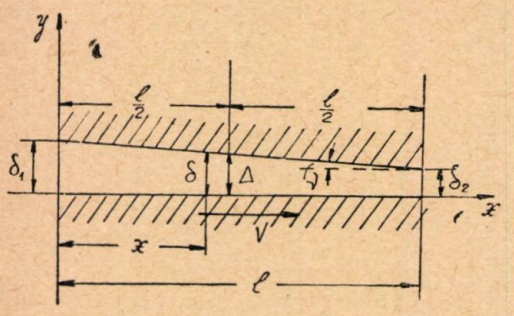


Fig. 4

$$k_2 = \frac{\bar{\delta}_1^2 - 2\xi\bar{\delta}_1 + \xi^2 k_3}{\bar{\delta}_1^2\chi_1} = \frac{\bar{\delta}_2^2 - 2\xi\bar{\delta}_2^2 + \xi^2 k_3}{\bar{\delta}_2^2\chi_2} \qquad (57)$$

în care s-a notat cu χ_1 și χ_2 valorile pe care le ia funcția χ la capetele lagărului.

Pentru regimul critic rezultă sistemul

$$k_2 = \frac{\xi_c - \bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_1}\exp\left(\frac{\xi_c}{\xi_c - \bar{\delta}_1}\right) = \frac{\xi_c - \bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_2}\exp\left(\frac{\xi_c}{\xi_c - \bar{\delta}_2}\right) \qquad (58)$$

Ca și pentru lagărele circulare [3] în figura 5 s-a reprezentat variația parametrului ξ_c în funcție de α. La valori $\xi < \xi_c$, $k_3 > 1$, iar pentru $\xi > \xi_c$ va rezulta $k_3 > 1$.

Considerațiile asupra regimului critic făcute cu ocazia studiului lagărelor circulare [3] sînt în întregime valabile și pentru acest caz. Mai mult se poate constata ușor că valorile ξ_c la $\alpha=0$ și la $\alpha=1$ sînt aceleași. La $\alpha = 0$, ξ_c este finit și deci (5) rezultă $V_c = \infty$, funcționarea la $\alpha = 0$ făcîndu-se deci tot timpul la regimuri sub cele critice. Acesta este și motivul pentru care nu am întîlnit existența unui regim critic la lagărele cu suprafețe paralele (punctul 2).

Pentru facilitarea calculelor, în figura 6 s-a trasat variația coeficientului k_3 în funcție de ξ, pentru diferite valori α.

Din această diagramă se constată că la valori ξ mai mari ($\xi > 5$) se poate pune aproximativ

$$k_3 = 1 - \left(1 - \frac{1+\alpha}{\xi}\right)^2, \qquad (59)$$

iar k_2 va fi dat de a doua ecuație (57).

Pentru a pune în evidență dependența curbei presiunilor de ξ cu titlul de exemplu în figura 7 s-au trasat repartițiile presiunilor la diferite valori ξ, pentru $\alpha = 0{,}6$. Se constată că pe măsură ce ξ crește, repartiția presiunilor tinde către repartiția limită (23), fapt accentuat pe măsură ce α crește.

Repartiția presiunilor mai depinde și de valoarea exponentului politropic $\varkappa$, diferență ce crește cu viteza V și cu α. Astfel în figura 8

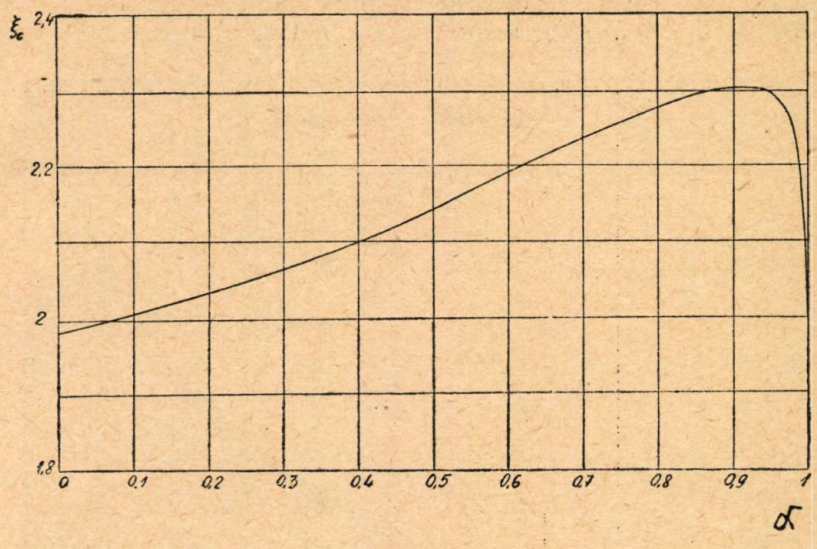

ξc
2,4
2,2
2
1,8
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
α

Fig. 5

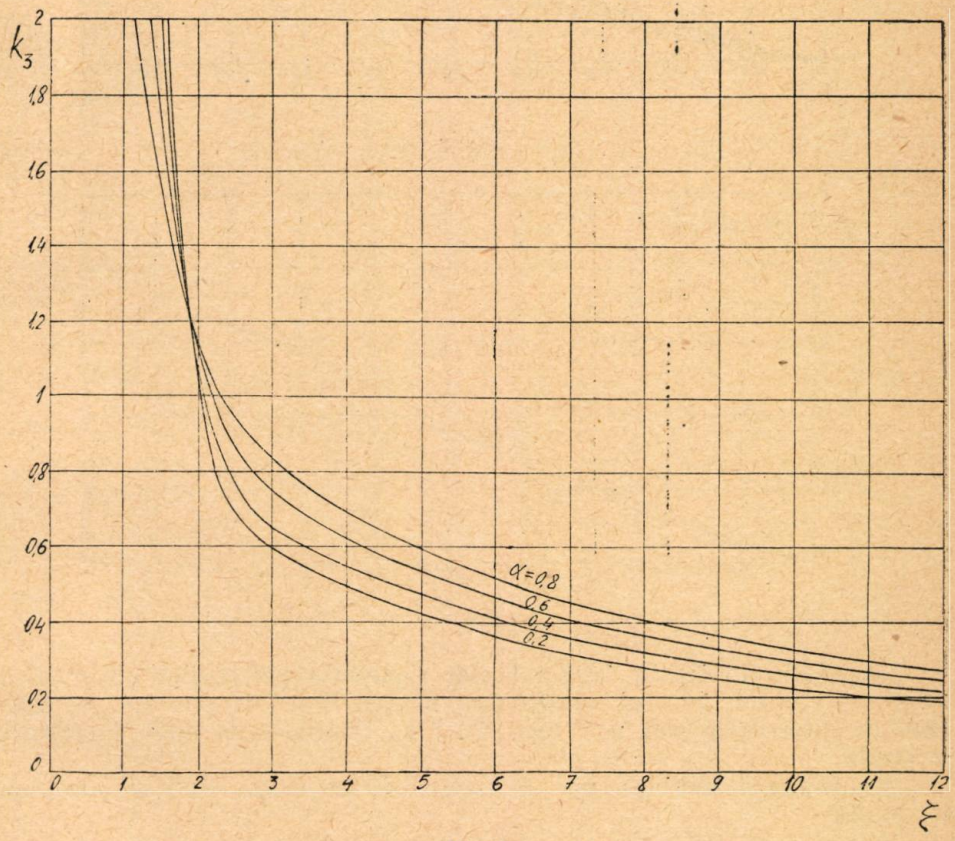

k3
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
ξ
α=0,8
0,6
0,4
0,2

Fig. 6

și figura 9 s-au trasat repartițiile obținute la $\varkappa = 1$ și $\varkappa = 1{,}4$, pentru un lagăr cu $\xi = 5$ pentru respectiv $\alpha = 0{,}4$ și $\alpha = 0{,}8$.

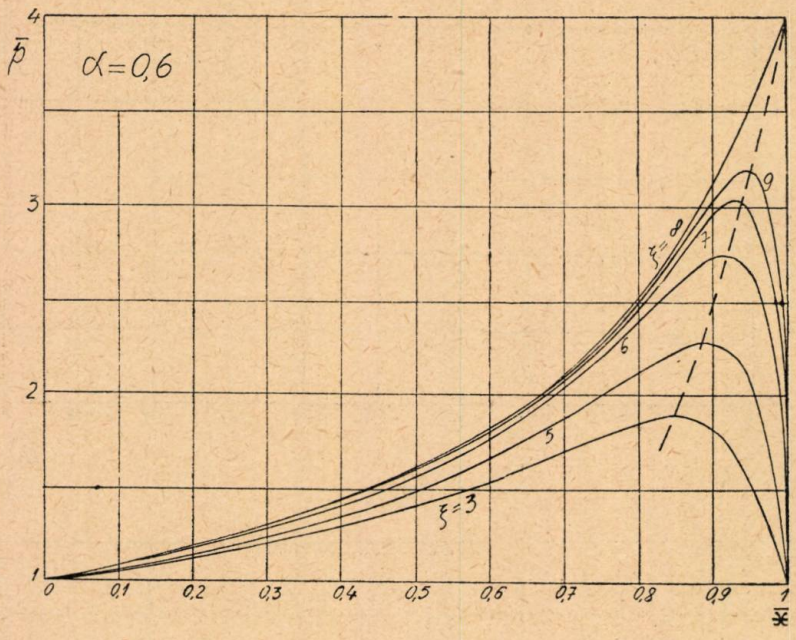


Fig. 7

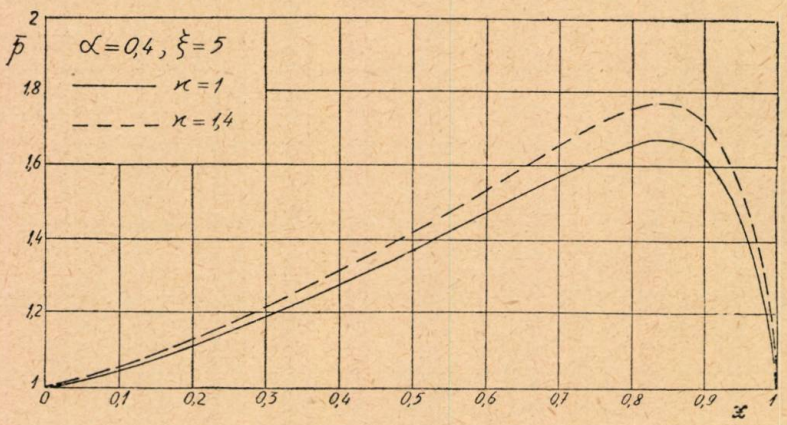


Fig. 8

În sfîrșit, în figura 10 s-a trasat repartiția presiunilor obținută în mod exact și cu ajutorul relației (56) pentru $\xi = 7$ și $\alpha = 0{,}4$. Se constată că diferențele sînt mai mici de 2 %. Erorile scad cînd ξ crește și α scade.

Considerații analoge pot fi făcute și în cazul cînd se consideră $\nu > 0$ (3).

★

Elementele globale pentru acest tip de lagăr pot fi calculate analitic prin mijloace elementare.

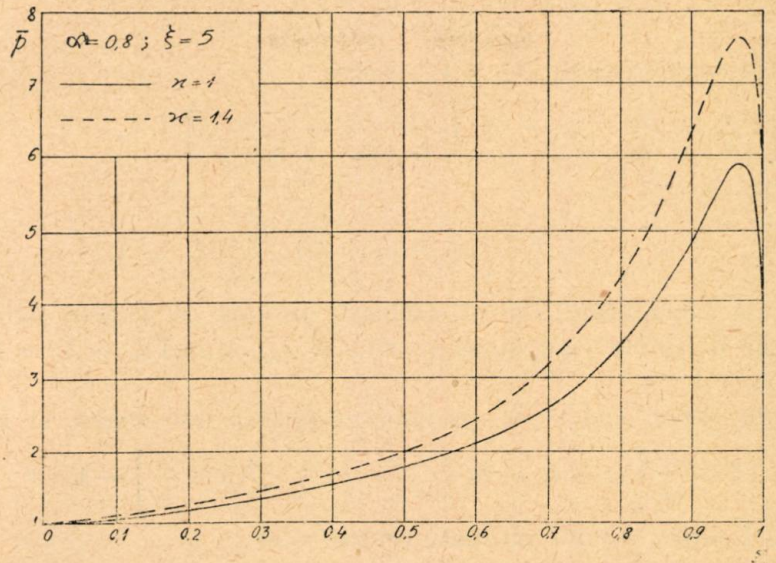


Fig. 9

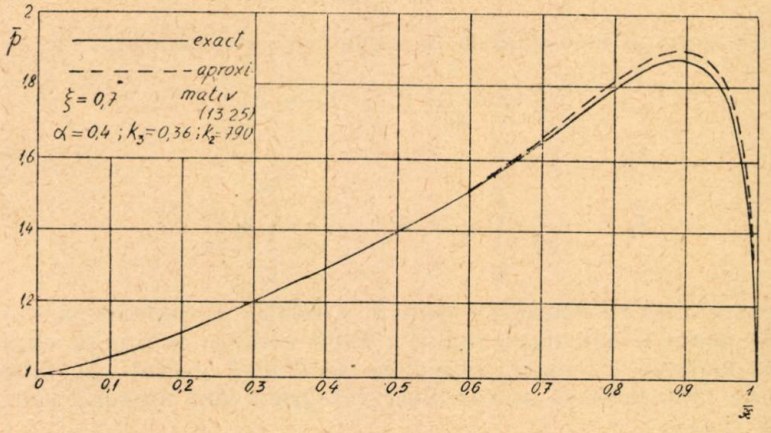


Fig. 10

Astfel coeficientul de încărcare ζ (34) poate fi scris sub forma

$$\zeta = \frac{1}{2\alpha}\int_{\bar{\eta}_1}^{\bar{\eta}_2} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{\eta}}\, d\bar{\eta} - 1. \tag{60}$$

Ținînd seama că (10)

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{\eta}} = \frac{\bar{\eta}\,\bar{\delta}}{\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 k_3}, \tag{61}$$

rezultă pentru, $k_3>1$

$$\zeta = \frac{\xi}{\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{k_3}{4}\ln\frac{\chi_2}{\chi_1}\right) + \frac{\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2}{2\alpha} - 1. \tag{62}$$

Pentru regimul critic, $k_3 = 1$, rezultă

$$\zeta = \frac{1}{2\alpha}\left[2\,\xi_c \ln\frac{\bar{\eta}_1 - \xi_c}{\bar{\eta}_2 - \xi_c} + \xi_c^2\left(\frac{1}{\bar{\eta}_1 - \xi_c} - \frac{1}{\bar{\eta}_2 - \xi_c}\right) + \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2\right] - 1, \tag{63}$$

iar pentru $k_3 < 1$

$$\zeta = \frac{\xi}{\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{k_3}{4}\ln\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) + \frac{\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2}{2\alpha} - 1. \tag{64}$$

Pentru generalitate s-au considerat presiuni la capete oarecare. În cazurile obișnuite cînd această presiune p_0, atunci $\bar{\eta}_1 = \bar{\delta}_1 = 1 + \alpha$ și $\eta_2 = \delta_2 = 1-\alpha$.

Pentru cazul cînd $\nu>0$, considerații analoge ne conduc la relația

$$\zeta = \frac{\xi}{\alpha}\left[\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2 - \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \left(1 + \frac{k_3}{4}\right)\ln\frac{\chi_1'}{\chi_2'}\right] - 1. \tag{65}$$

Cînd $\xi \to \infty$, rezultă imediat, pentru $\nu<0$

$$\zeta_{\xi\to\infty} = \frac{1+\alpha}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 1. \tag{66}$$

Poziția sarcinii este dată și în acest caz de relația (42) cu

$$I = \frac{1+\alpha}{2\alpha}(\zeta + 1) - I_1, \tag{67}$$

în care

$$I_1 = \frac{1}{4\alpha^6}\int_{\bar{\delta}_2}^{\bar{\delta}_1} \eta\, \mathrm{d}^2\,\delta = \frac{1}{4\alpha^2}\int_{\bar{\eta}_2}^{\bar{\eta}_1} \bar{\eta}\,\frac{\mathrm{d}\bar{\delta}}{\mathrm{d}\bar{\eta}}\,\mathrm{d}\bar{\eta} \tag{68}$$

În cazul cînd se consideră pentru χ relația aproximativă (55) integrala (68) poate fi calculată analitic, fiind conduși la funcții eliptice, ca și pentru lagărele circulare. Calculele sînt însă destul de laborioase, așa că este preferabil să se calculeze integrala (68) numeric sau grafic.

Cînd $\xi \to 0$,

$$\bar{x}^* = \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\left[\dfrac{3(1+\alpha)}{2\alpha} - 2\right]\ln\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} - \dfrac{1}{2}\left(1 + 5\,\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)}{\ln\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} - 2\alpha}, \tag{69}$$

iar pentru $\xi \to \infty$

$$\bar{x}^*_{\xi\to\infty} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{(1+\alpha)^2}{2\alpha}\ln\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} - \left(2 + \dfrac{1}{\alpha}\right)}{\dfrac{1+\alpha}{2\alpha}\ln\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} - 1}. \tag{70}$$

Pentru forța de frecare, rezultă

$$F_{0,\delta} = \frac{\Delta p_0}{3} \xi \text{ în } \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \pm \alpha \frac{\Delta}{l} P \tag{71}$$

sau pentru coeficientul C_F (51)

$$C_{F_{0,\delta}} = \frac{\Delta}{l}\left(\frac{1}{3} \xi \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \pm \alpha\zeta\right). \tag{72}$$

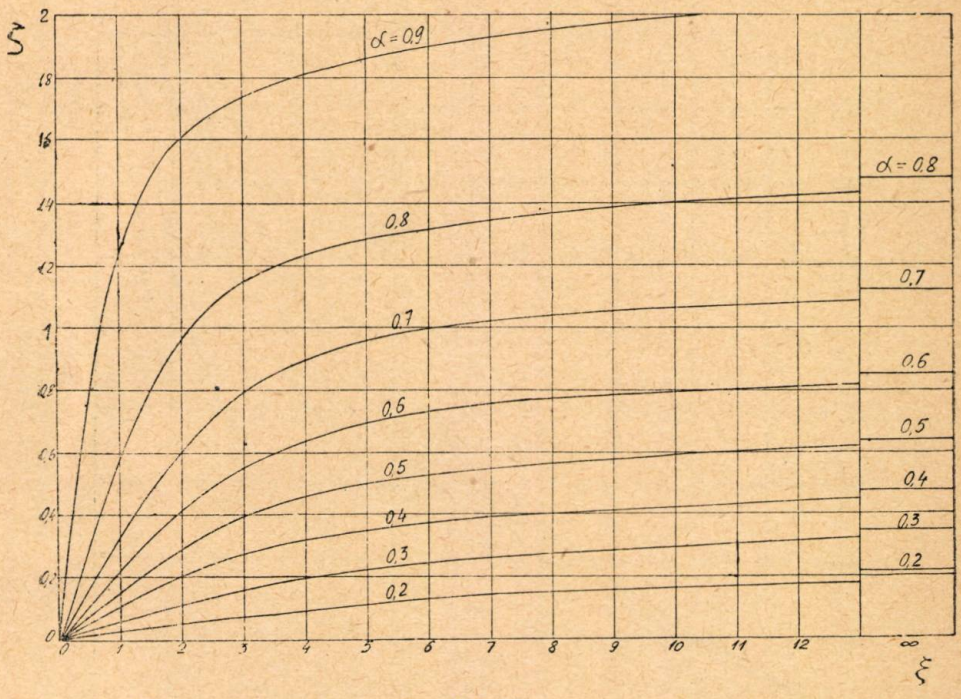


Fig. 11

La valori ξ mai mari, termenul $\alpha\zeta$ devine neglijabil față de primul, frecările crescînd proporțional cu V.

★

Pentru a ușura calculele de proiectare și verificare pentru acest tip de lagăre, dăm mai jos rezultatele obținute asupra elementelor globale, sub formă de diagrame.

Astfel în figura 11 s-a reprezentat variația coeficientului ζ în funcție de ξ, pentru diferite valori α. Se constată că ζ tinde repede către valoarea limită pentru $\xi \to \infty$, pe măsură ce ξ crește. Coeficientul ζ depinde de α atît direct, cît și prin intermediul lui ξ. De aceea uneori este util să introducem în locul lui ξ un alt parametru

$$\xi' = \xi\,\alpha = \frac{3\,\mu V l}{2\,p_0\,\Delta^2}. \tag{73}$$

Variația coeficientului ζ în funcție de α pentru diferite valori ξ' este arătată în figura 12.

În sfîrșit, în cazul proiectării se prescrie uneori grosimea minimă δ_2. Atunci este util să se introducă un alt parametru ξ^*

$$\xi^* = \frac{3\mu Vl}{2 p_0 \delta_2^2} = \xi \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{\xi'}{(1-\alpha)^2} \tag{74}$$

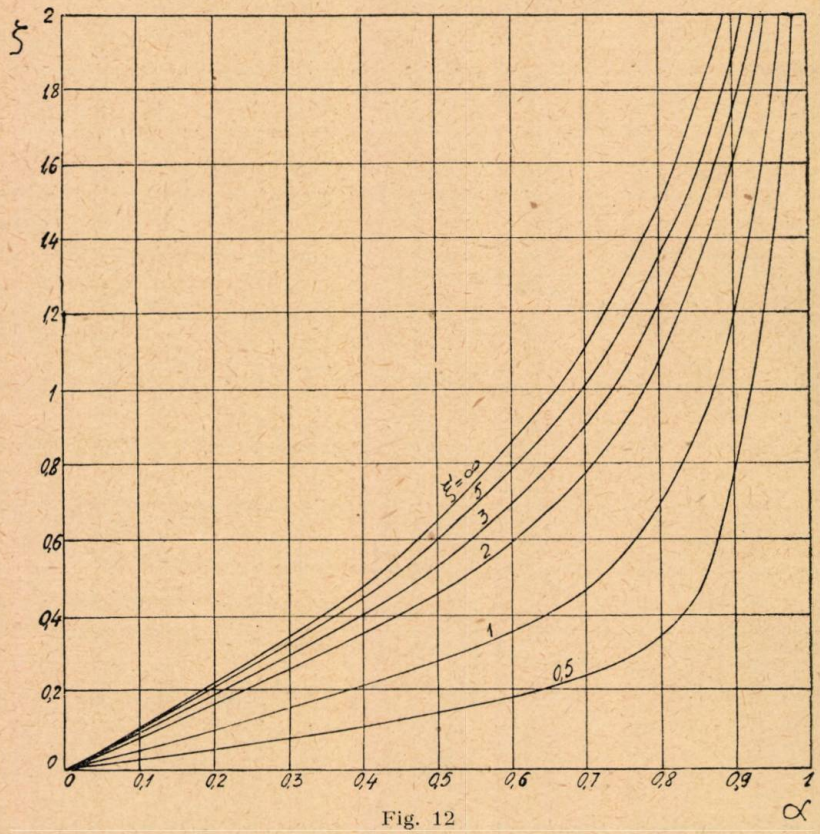


Fig. 12

Variația coeficientului ζ în funcție de α, considerînd $\xi^* = \text{const.}$, este arătată în figura 13 pentru diferite valori α_m. Ca și pentru lagărele circulare [3], în aceste condiții ζ prezintă un maxim în funcție de α, valoarea α_m a maximului depinzînd de ξ^*, și variind între $\alpha_m = 0{,}3$ la $\xi^* = 0$ și $\alpha_m = 1$ la $\xi^* = \infty$.

La valori ξ^* mari trebuie să se facă aceleași rezerve ca și pentru lagărele circulare [3] cu privire la faptul că menținînd δ_2 constant cînd α crește, δ_1 crește, putînd lua valori care să prejudicieze valabilitatea rezultatelor obținute. Aprecierea limitelor de aplicare a acestor considerații se pot face în același mod ca și pentru lagărele circulare.

În figura 14 s-a reprezentat variația poziției rezultantei presiunilor $\bar{x}^*$ în funcție de ξ, la diferite valori α.

Forța de frecare poate fi calculată analitic fără dificultăți.

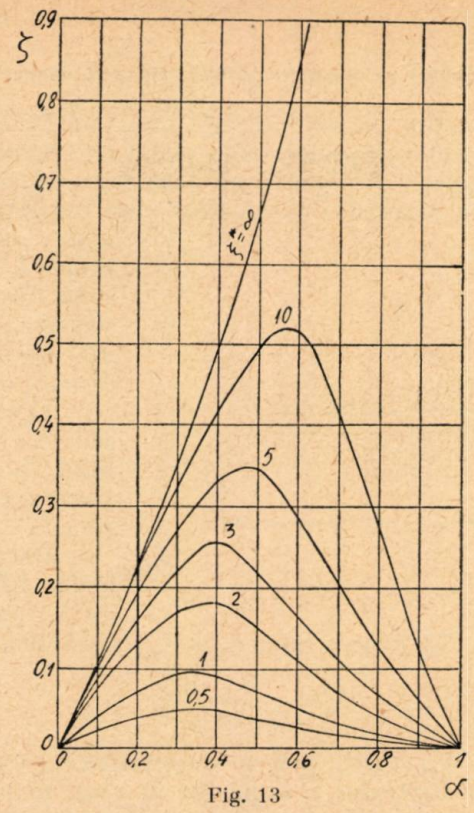

ζ
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
α
∞
10
5
3
2
1
0,5

Fig. 13

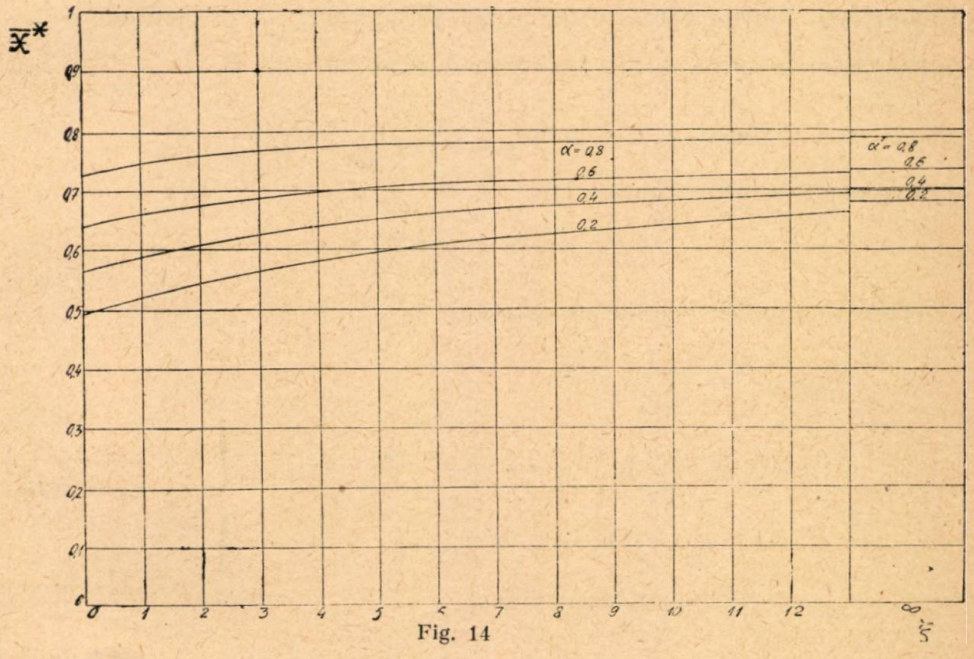

ξ*
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
∞
ζ
α=0,8
0,6
0,4
0,2

Fig. 14

4. Lagăre cu suprafețe paralele plane și înclinate

Să considerăm acum un alt caz care intervine în aplicațiile practice și anume cînd una dintre suprafețe este plană iar cealaltă are o porțiune înclinată sub un unghi ν și o porțiune paralelă cu prima (fig. 15).

Pentru a calcula repartiția presiunilor vom împărți lagărul în două zone: zona AB de lungime l_1 în care grosimea filmului de lubrifiant variază liniar cu x_1 și zona BC de lungime l_2 în care $\delta = \delta_2 = \text{const.}$

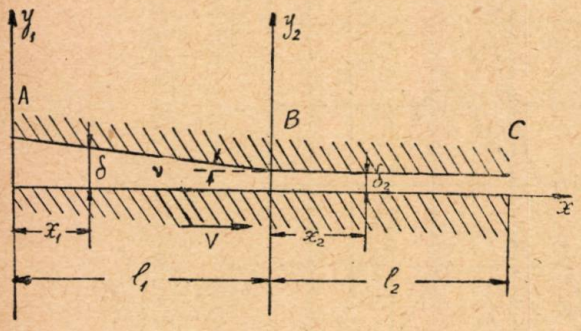


Fig. 15

Pentru zona AB repartiția presiunilor este dată de relația (10), iar pentru zona BC, de relația (27).

Dacă notăm pentru zona AB parametrul (5) cu ξ_1, iar pentru zona BC parametrul (24) cu ξ_2, atunci între ξ_1 și ξ_2 există relația

$$\xi_2 = \frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2}\frac{l_2}{l_1}\xi_1. \tag{75}$$

Constantele k_2, k_3, C_1, C_2 pot fi determinate punînd condițiile la limită ca la capetele lagărului $p = p_0$, iar în plus, în punctul B trebuia să existe racordare între cele două soluții. Într-adevăr se poate arăta că o discontinuitate de speța întîia (punct unghiulos) a grosimii δ nu influențează continuitatea distribuției presiunilor, $\frac{dp}{dx}$ prezentînd o discontinuitate de speța întîia. În consecință în punctul B

$$(\bar{\eta}_{AB})_{\bar{x}_1=1} = (\bar{p}_{BC}\,\bar{\delta}_2)_{x_2=0}; \quad \left(\frac{dp}{dx}\right)_{AB} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{BC}. \tag{76}$$

Ultima condiție (76) impune ca

$$C_1 = \frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2} = \frac{\xi_1 k_3}{2(1-\alpha)}, \tag{77}$$

iar celelalte condiții conduc la sistemul

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \frac{\bar{\delta}_1^2 - 2\xi_1\bar{\delta}_1 + \xi_1^2 k_3}{\bar{\delta}_1^2\chi_1}, \\ C_2 &= 1 + \frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2}\ln\left(\frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2} - 1\right) - \frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2}\frac{l_2}{l_1}\xi_1, \\ \bar{\eta}_1^2 - 2\xi_1\bar{\eta}_2 + \xi_1^2 k_3 &= k_2\bar{\delta}_2^2\chi_2, \\ \bar{p}_2 + \frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2}\ln\left(\frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2} - 1\right) &= C_2. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Pentru regimul critic, pentru determinarea necunoscutelor ξ_{1c}, k_2, C_1, C_2, considerații analoge ne conduc la sistemul

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \frac{\xi_{1c}-\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_1}\exp\left(\frac{\xi_{1c}}{\xi_{1c}-\bar{\delta}_1}\right),\\ C_2 &= 1+\frac{\xi_{1c}}{2\,\bar{\delta}_2}\ln\left(\frac{\xi_{1c}}{2\,\bar{\delta}_2}-1\right)-\frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2}\frac{l_2}{l_1}\xi_{1c},\\ (\xi_{1c}-\bar{\eta}_2)\exp\left(\frac{\xi_{1c}}{\xi_{1c}-\bar{\eta}_2}\right) &= k_2\,\bar{\delta}_2,\\ \bar{p}_2+\frac{\xi_{1c}}{2\,\bar{\delta}_2}\ln\left(\frac{\xi_{1c}}{2\,\bar{\delta}_2}-\bar{p}_2\right) &= C_2. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

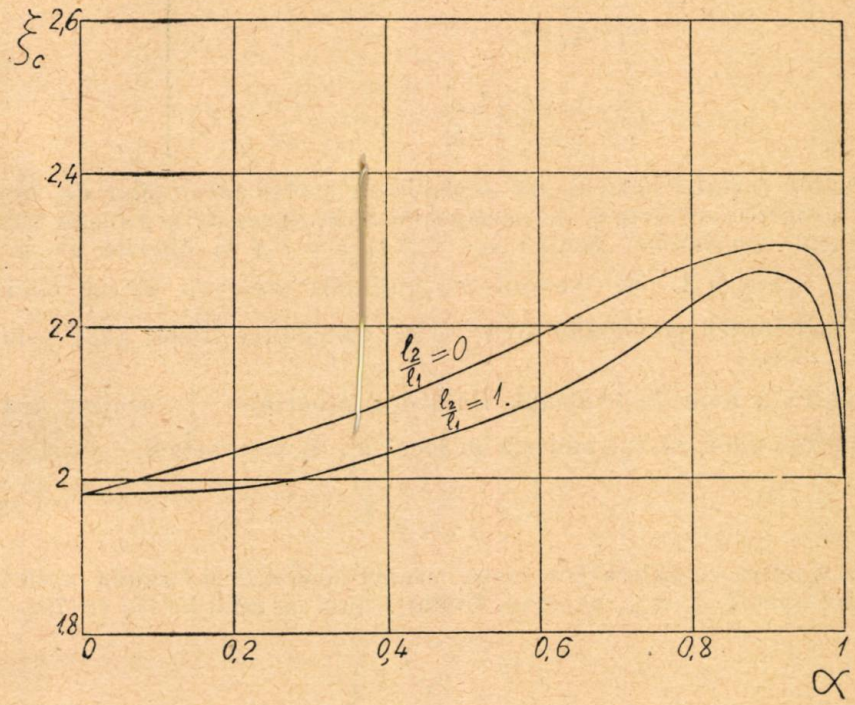


Fig. 16

În ambele sisteme

$$\bar{\eta}_2 = \bar{p}_2\,\bar{\delta}_2, \tag{80}$$

în care s-a notat cu p_2 presiunea în punctul B ($\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$).

Ca și pentru cazurile precedente, în figura 16 s-a reprezentat variația parametrului ξ_{1c} în funcție de α.

Se vede că pentru $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$, ξ_{1c} este același ca și pentru lagărele plane, deoarece pentru aceste cazuri limită condițiile la capetele porțiunii

AB sînt aceleași, ca și pentru un lagăr plan. De asemenea, se constată că atunci cînd $l_1 \to 0$ (3), $V_c \to \infty$, cu alte cuvinte regăsim cazul lagărelor cu suprafețe paralele.

La valori ξ_1 mai mari ($\xi_1 > 3$) rezolvarea sistemului (78) este destul de ușoară, deoarece din calcule se constată că, întocmai ca pentru lagărele plane

$$k_3 \cong 1 - \left(1 - \frac{1+\alpha}{\xi_1}\right)^2, \tag{81}$$

și

$$\bar{\eta}_2 \cong \frac{\xi_1 k_3}{2}; \qquad \bar{p}_2 \cong \frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2}, \tag{82}$$

iar constantele k_2 și C_2 vor fi date de relațiile

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \frac{\xi_1^2 k_3^2}{4\bar{\delta}_2^2 (\chi)_{\bar{\eta}=\frac{\xi_1 k_3}{2}}}, \\ C_2 &= 1 + \frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2} \ln\left(\frac{\xi_1 k_3}{2\bar{\delta}_2} - 1\right) - \frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2} \frac{l_2}{l_1} \xi_1. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Pentru a pune în evidență dependența curbei presiunilor de viteza relativă dintre suprafețe și de parametrul α, în figura 17 și 18 s-au trasat distribuțiile presiunilor, pentru $\alpha = 0{,}2$ și $\alpha = 0{,}6$ la diferite valori ξ_1 și cu $\frac{l_2}{l_1} = 0{,}5$ și 1. Se constată că presiunile cresc cu α, iar cînd ξ_1 crește distribuția presiunilor tinde către distribuția limită (23) pentru cazul $\xi_1 \to \infty$.

Pentru a pune în evidență influența raportului $\frac{l_2}{l_1}$ asupra distribuției presiunilor, să introducem în locul lui ξ_1 parametrul

$$\xi = \frac{3\mu V l}{2\alpha p_0 \Delta^2}, \tag{84}$$

pentru a putea considera $\xi = \text{const.}$ atunci cînd α, Δ și l rămîn aceleași. În funcție de ξ, ξ_1 și ξ_2 se scriu, ținînd seama de relațiile (5) și (75)

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \frac{l_1}{l} = \frac{\xi}{1 + \frac{l_2}{l_1}}, \\ \xi_2 &= \frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2} \frac{\frac{l_2}{l_1}}{1 + \frac{l_2}{l_1}} \xi. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Să considerăm de exemplu un lagăr cu α, Δ și l date și cu un anumit regim de funcționare dat (ξ). De exemplu, fie $\alpha = 0{,}4$ și $\xi = 6$. În acest caz, pentru diferite valori $\frac{l_2}{l_1}$ repartiția presiunilor au aspectul arătat în

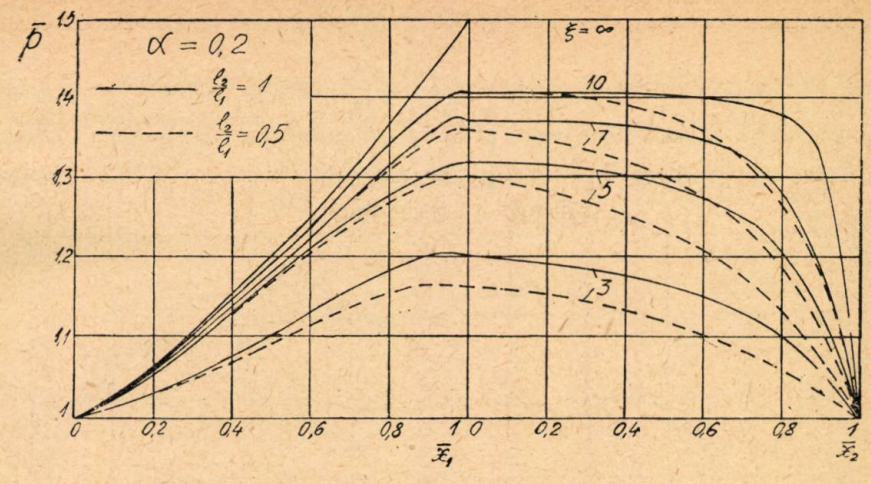

$\bar{p}$
$\alpha = 0,2$
$\frac{l_2}{l_1} = 1$
$\frac{l_2}{l_1} = 0,5$
$\xi = \infty$
10
7
5
3
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{x}_1$
$\bar{x}_2$

Fig. 17

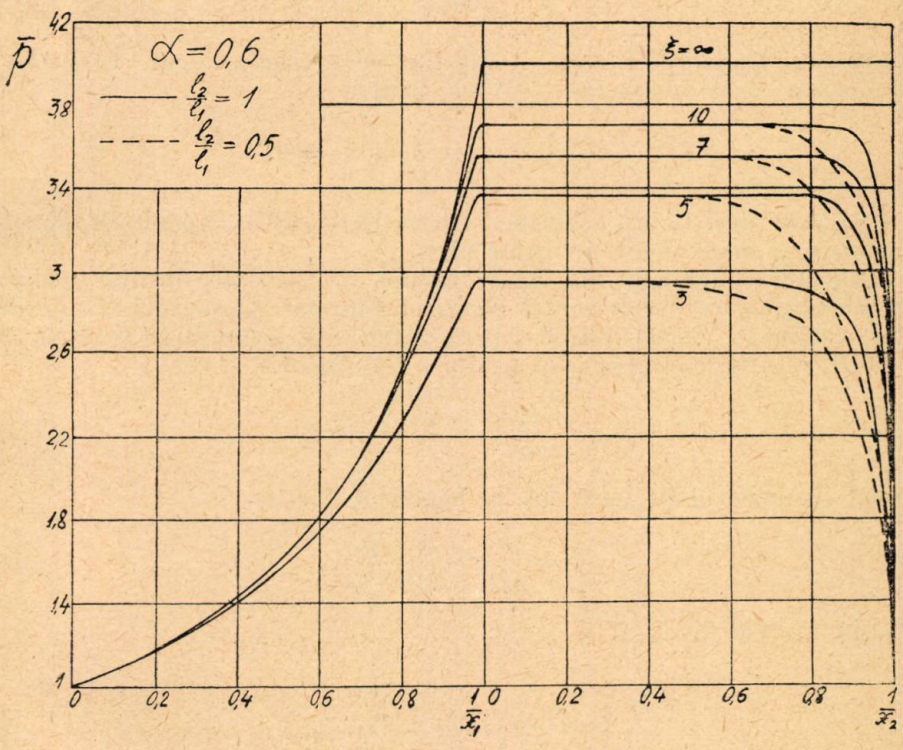

$\bar{p}$
$\alpha = 0,6$
$\frac{l_2}{l_1} = 1$
$\frac{l_2}{l_1} = 0,5$
$\xi = \infty$
10
7
5
3
4,2
3,8
3,4
3
2,6
2,2
1,8
1,4
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{x}_1$
$\bar{x}_2$

Fig. 18

figura 19. Se constată că pe măsură ce $\frac{l_2}{l_1}$ crește, presiunile și deci și forța portantă a lagărului cerc, pînă la un maxim (care pentru exemplul considerat se produce la $\frac{l_2}{l_1} \cong 2$), iar pentru $\frac{l_2}{l_1} = \infty$ forța portantă

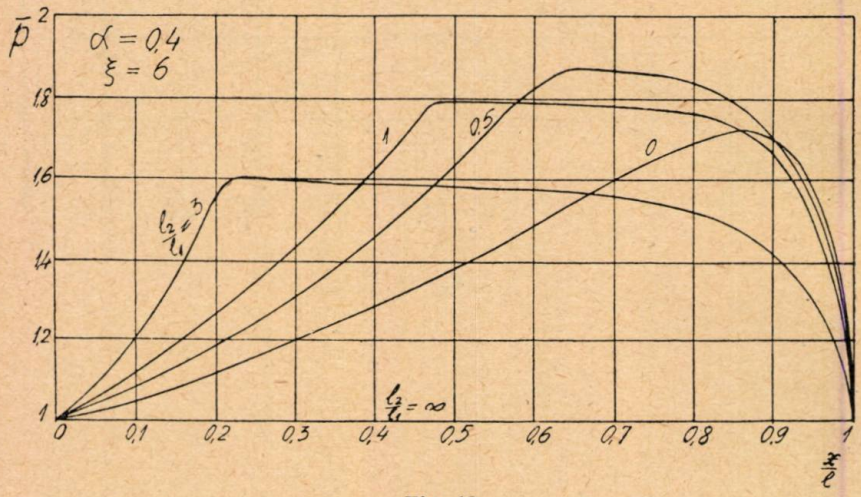


Fig. 19

a lagărului tinde către zero. Acest fapt este fizic evident. El poate fi demonstrat ușor observînd (85) că pentru

$$\frac{l_2}{l_1} = \infty, \; l_1 = 0 \text{ și deci } \xi_1 = 0.$$

Se vede deci că un asemenea tip de lagăr are o capacitate portantă sensibil mai mare decît un lagăr plan.

Elementele globale ale lagărului pot fi calculate imediat utilizînd relațiile obținute anterior pentru lagăre cu suprafețe paralele și cu suprafețe plane înclinate. Astfel notînd cu P_1 rezultanta presiunilor pe zona AB și cu P_2 rezultanta presiunilor pe zona BC (fig. 15) și cu

$$\zeta_1 = \frac{P_1}{p_0 l_1}; \qquad \zeta_2 = \frac{P_2}{p_0 l_2}, \tag{86}$$

atunci coeficientul de încărcare al lagărului ζ este

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l} = \frac{P_1 + P_2}{p_0 (l_1 + l_2)} \tag{87}$$

sau, în funcție de ζ_1 și ζ_2

$$\zeta = \frac{1}{1 + \frac{l_2}{l_1}} \zeta_1 + \frac{\frac{l_2}{l_1}}{1 + \frac{l_2}{l_1}} \zeta_2, \tag{88}$$

în care ζ_1 este dat de una din relațiile (62), (63) sau (64) după cum $\xi_1 < \xi_{1c}$, $\xi_1 = \xi_{1c}$ sau $\xi_1 > \xi_{1c}$, iar ζ_2 este dat de relația (37) în care se pune $p_a = p_2$. Relația (88) este evident valabilă pentru toate cazurile inclusiv $\xi_1 \to 0$ și $\xi_1 \to \infty$.

Pentru poziția sarcinii, notînd

$$\bar{x}^* = \frac{x^*}{l}, \tag{89}$$

în care x^* este distanța de la rezultanta P pînă la originea O și cu

$$\bar{x}_1^* = \frac{x_1^*}{l}; \qquad \bar{x}_2^* = \frac{x_2^*}{l_2}, \tag{90}$$

x_1^* și x_2^* fiind distanțele de la rezultantele P_1 și P_2 la originile respective, atunci

$$x^* = \frac{\zeta_1 \bar{x}_1^* + \frac{l_2}{l_1}\zeta_2\left(\frac{l_2}{l_1}\bar{x}_2^* + 1\right)}{\zeta\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)^2}, \tag{91}$$

în care x_1^* este calculat în § 3, iar $\bar{x}_2^*$ la punctul 2.

Pentru coeficientul de frecare

$$C_{F_{0,\delta}} = \frac{F_{0,\delta}}{p_0 l} \tag{92}$$

se obține

$$C_{F_{0,\delta}} = \frac{\Delta \xi_1}{3l}\left(\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{2\alpha}{1-\alpha}\frac{l_2}{l_1}\right) \pm \alpha \frac{\Delta}{l}\zeta_1. \tag{93}$$

În figura 20 s-a trasat variația coeficientului ζ în funcție de ξ_1 pentru diferite valori α și $\frac{l_2}{l_1}$. Se constată că tipul de lagăr studiat are o capacitate portantă sporită față de un lagăr cu $\frac{l_2}{l_1} = 0$ mai ales la valori α mai mari.

În figura 21 s-a trasat variația distanței $\bar{x}^*$ în funcție de ξ, α și $\frac{l_2}{l_1}$. În sfîrșit, în figura 22 s-a trasat și variația coeficientului de frecare. Se constată din această figură că și frecările cresc o dată cu creșterea raportului $\frac{l_2}{l_1}$, atingînd un maxim, după care scad, tinzînd către valoarea dată de relația (50) pentru suprafețe paralele, cînd $\frac{l_2}{l_1} \to \infty$.

5. Lagăre cu discontinuități de speța a doua

Un alt mijloc eficace pentru a spori capacitatea portantă a lagărului este acela de a realiza îngustări ale grosimii filmului de lubrifiant prin discontinuități de speța a doua (salturi finite). În cazul cînd grosimea δ are o discontinuitate de speța a doua, s-a arătat de către N. T i p e i

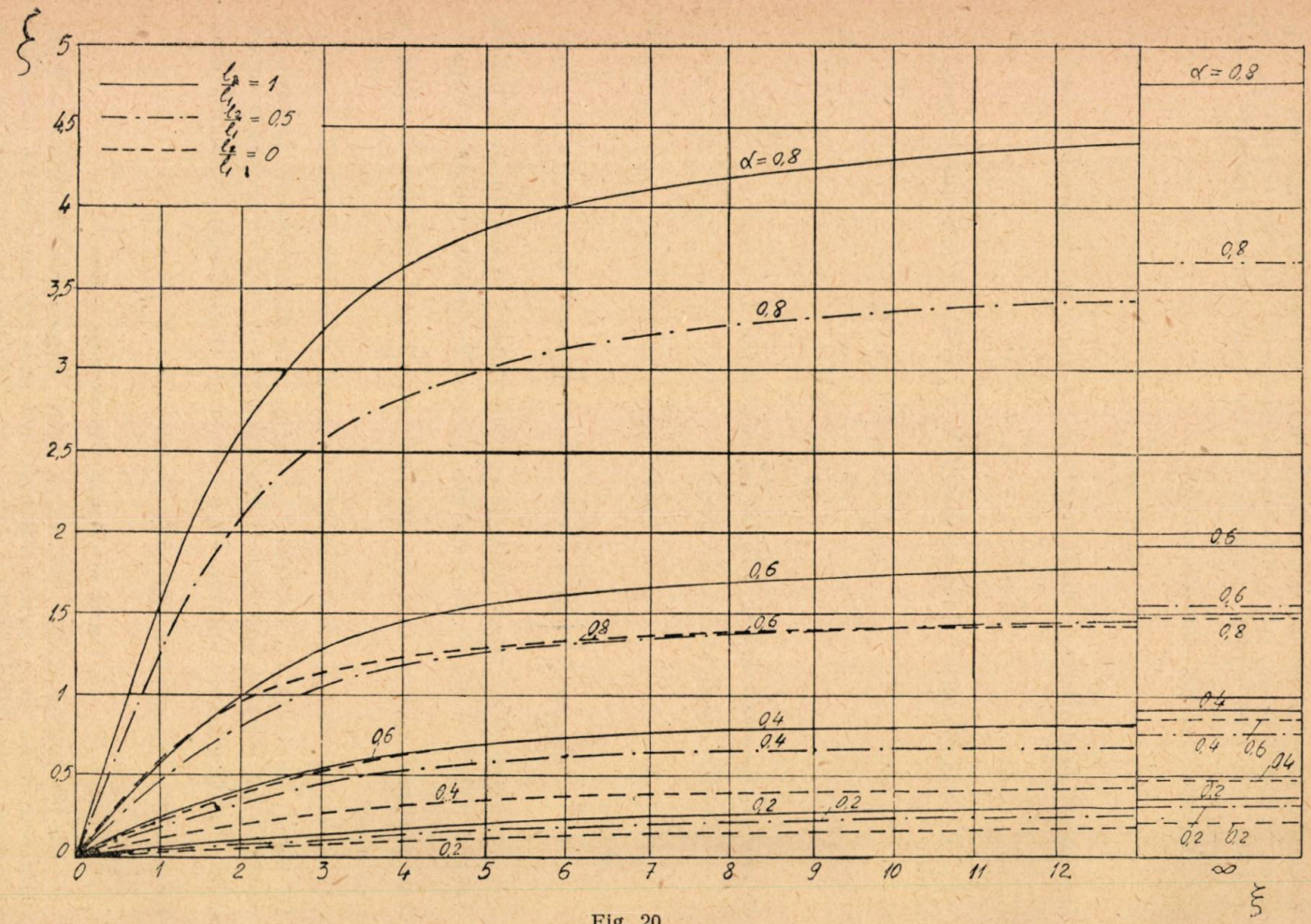

ξ
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ∞
ξ
$\frac{l_2}{l_1} = 1$
$\frac{l_2}{l_1} = 0,5$
$\frac{l_2}{l_1} = 0$
α = 0,8
0,8
0,6
0,4
0,2
α = 0,8
0,8
0,6
0,6
0,8
0,4
0,4
0,6
0,4
0,2
0,2
0,2

Fig. 20

că repartiția presiunilor prezintă un punct unghiulos, bineînțeles în ipoteza că valoarea acestei discontinuități este suficient de mică pentru a nu prejudicia valabilitatea ecuațiilor problemei.

Pentru a pune în evidență modul de calcul al repartiției presiunilor ca și particularitățile funcționării unui asemenea lagăr, vom studia cu titlul de exemplu, cazul unui lagăr compus din suprafețe paralele ca în

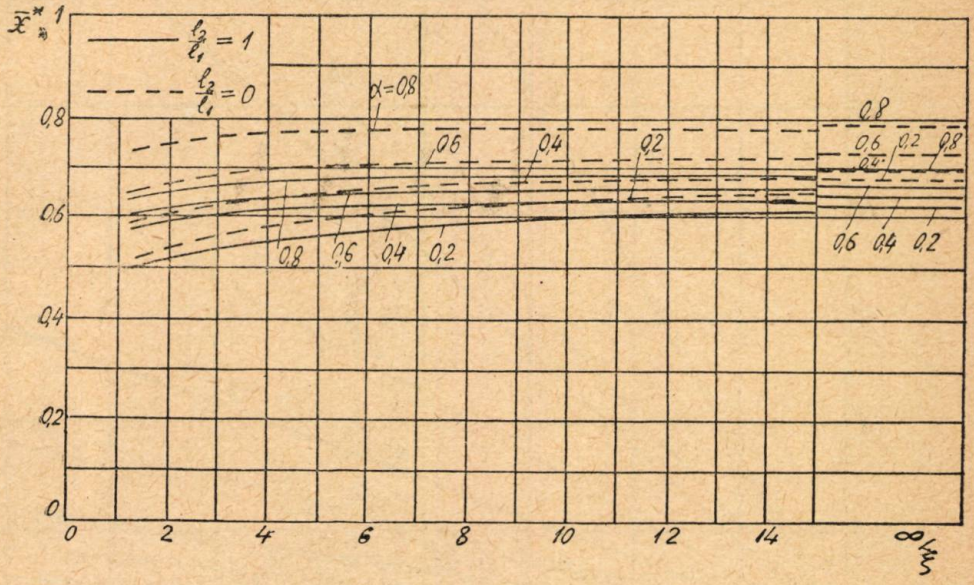


Fig. 21

figura 23, prezentînd o discontinuitate a grosimii δ, de la δ_1 la δ_2, în punctul B.

Vom împărți lagărul în două domenii AB și BC. În zona AB, $\delta = \delta_1 =$ = const. iar în zona BC, $\delta = \delta_2 =$ const.

Pentru zona AB, $\frac{dp}{dx} > 0$ și este valabilă relația (27) adică

$$\bar{p} + C_1 \ln (\bar{p} - C_1) = \xi_1 \bar{x}_1 + C_2, \tag{94}$$

în care

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{l_1}; \qquad \xi_1 = \frac{6\mu V l_1}{\delta_1^2 p_0}. \tag{95}$$

Pentru zona BC, $\frac{dp}{dx} > 0$ și este valabilă relația (29), adică

$$\bar{p} + C_3 \ln (C_3 - \bar{p}) = \xi_2 \bar{x}_2 + C_4, \tag{96}$$

în care

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2}{l_2}; \qquad \xi_2 = \frac{6\mu V l_2}{\delta_2^2 p_0}. \tag{97}$$

Dacă notăm ca și pînă acum grosimea medie cu Δ (4) și introducem parametrul α, atunci între ξ_1 și ξ_2 există relația

$$\xi_1 = \xi_2 \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 \frac{l_1}{l_2} = \xi_2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{l_1}{l_2}. \tag{98}$$

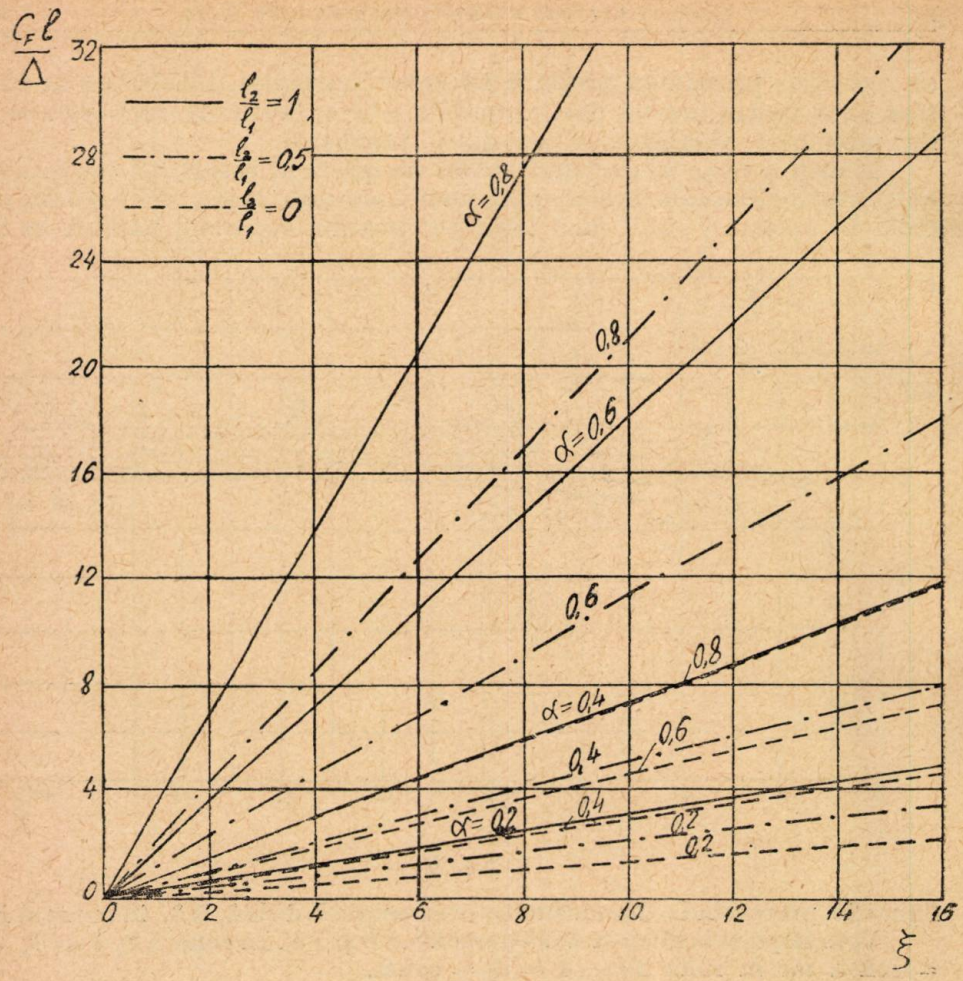

$\frac{C_F l}{\Delta}$
$\frac{l_2}{l_1}=1$
$\frac{l_2}{l_1}=0{,}5$
$\frac{l_2}{l_1}=0$
$\alpha=0{,}8$
$\alpha=0{,}6$
$\alpha=0{,}4$
$\alpha=0{,}2$
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
32
28
24
20
16
12
8
4
0
ξ

Fig. 22

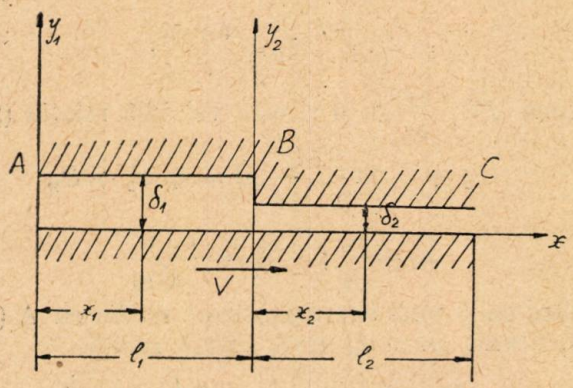

y_1
y_2
A
B
C
δ_1
δ_2
x
V
x_1
x_2
l_1
l_2

Fig. 23

Constantele C_1, C_2, C_3, C_4 se determină punînd condițiile ca la capete $p = p_0$ și în plus, conform celor spuse, în punctul B să existe egalitate între presiuni

$$\bar{p}_{AB} = \bar{p}_{BC}. \tag{99}$$

De asemenea, debitul masic de lubrifiant este același, atît în zona AB cît și în zona BC, condiție care conduce la relația

$$C_1 \delta_1 = C_3 \delta_2, \tag{100}$$

sau

$$C_1 = \frac{\delta_2}{\delta_1} C_3 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} C_3. \tag{101}$$

În acest mod, pentru determinarea constantelor C_2, C_3, C_4 rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} C_3 \ln\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_3\right), \\ C_4 &= 1 + C_3 \ln (C_3 - 1) - \xi_2, \\ \bar{p}_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} C_3 \ln\left(\bar{p}_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_3\right) &= \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 \frac{l_1}{l_2} \xi_2 + C_2, \\ \bar{p}_2 + C_3 \ln (C_3 - \bar{p}_2) &= C_4, \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute C_2, C_3, C_4, $\bar{p}_2$, care se reduce la un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute C_2 și $\bar{p}_2$ deoarece C_2 și C_4 pot fi eliminate din primele două relații (102).

Pentru a pune în evidență dependența curbei presiunilor cu ξ și α, în figura 24 și figura 25 s-au trasat distribuțiile presiunilor la $\frac{l_1}{l_2} = 1$ și $\frac{l_1}{l_2} = 0{,}5$, pentru diferite valori ξ și pentru $\alpha = 0{,}2$, și respectiv $\alpha = 0{,}6$. Se regăsește și aici distribuția presiunilor dată de relația (23) pentru cazul cînd $V \to \infty$.

Și pentru acest caz capacitatea portantă a lagărului are un maxim în funcție de $\frac{l_2}{l_1}$, iar pentru $l_1 = 0$ respectiv $l_2 = 0$ în pelicula de lubrifiant nu se nasc presiuni. În cazul cînd se urmărește influența raportului $\frac{l_2}{l_1}$ asupra curbei presiunilor este util ca în loc de ξ_2 să se utilizeze parametrul

$$\xi^* = \frac{6 \mu V l}{\delta_2^2 p_0}, \tag{103}$$

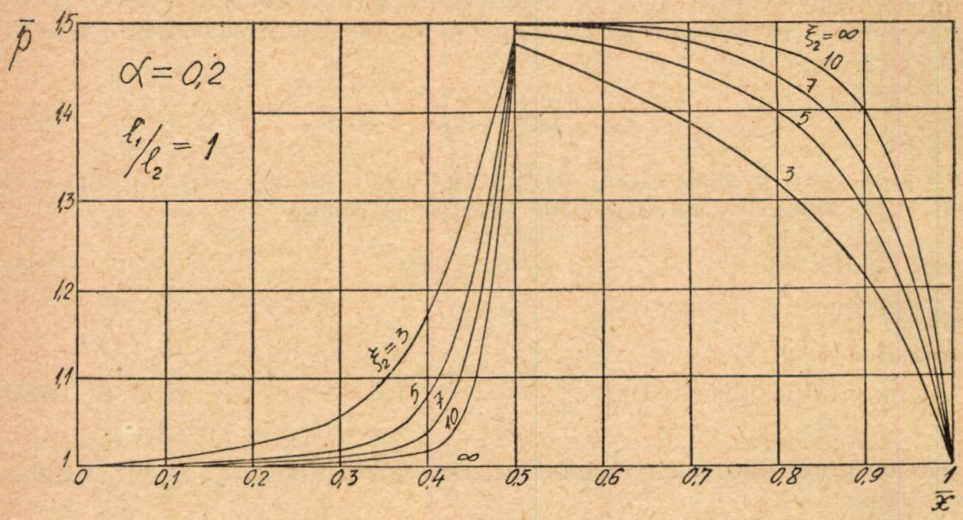

$\bar{p}$
$\alpha = 0{,}2$
$l_1/l_2 = 1$
$\xi_2 = \infty$
10
7
5
3
$\xi_2 = 3$
5
7
10
∞
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
$\bar{x}$

Fig. 24

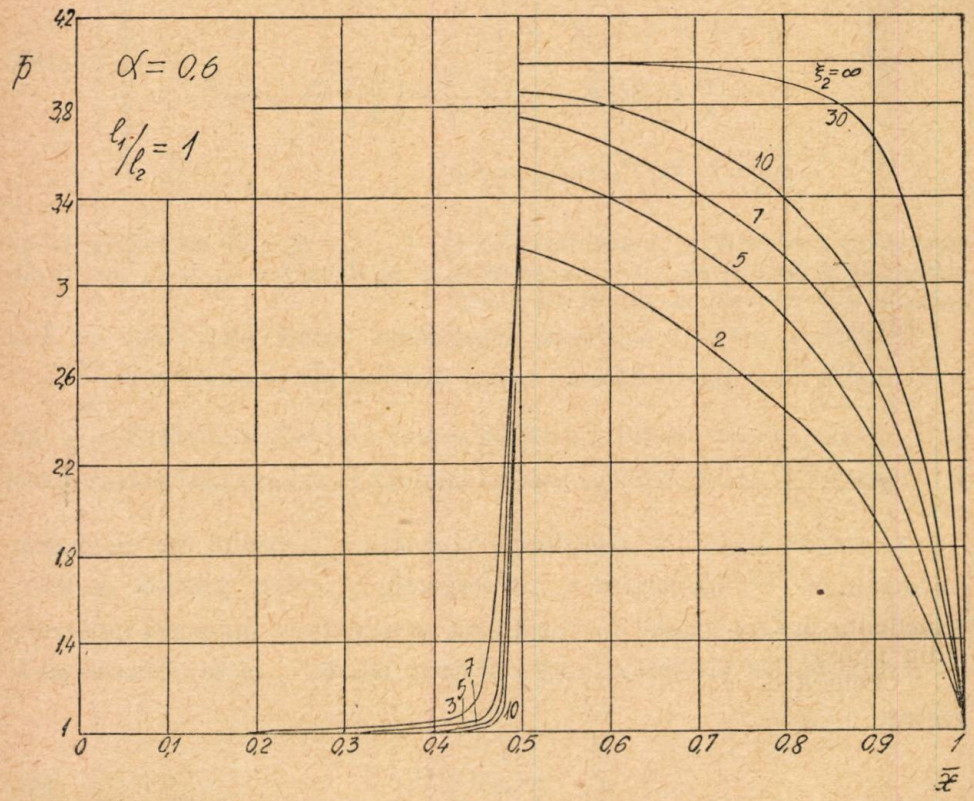

$\bar{p}$
$\alpha = 0{,}6$
$l_1/l_2 = 1$
$\xi_2 = \infty$
30
10
7
5
2
3
5
7
10
4,2
3,8
3,4
3
2,6
2,2
1,8
1,4
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
$\bar{x}$

Fig. 25

în care caz

$$\xi_2 = \xi^* \frac{l_2}{l} = \xi^* \frac{\frac{l_2}{l_1}}{1+\frac{l_2}{l_1}},$$

$$\xi_1 = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{\xi^*}{1+\frac{l_2}{l_1}}. \tag{104}$$

Raportul $\frac{l_2}{l_1}$ pentru care capacitatea portantă a lagărului este maximă depinde de α și ξ^*. În funcție de ξ^* el variază între cel pentru cazul lubrificației cu lichide la $\xi^* = 0$ și $\frac{l_2}{l_1} = \infty$ la $\xi^* \to \infty$.

Este interesant să comparăm repartiția presiunilor rezultată la diferitele tipuri de lagăre studiate pînă acum : lagărul cu suprafețe plane

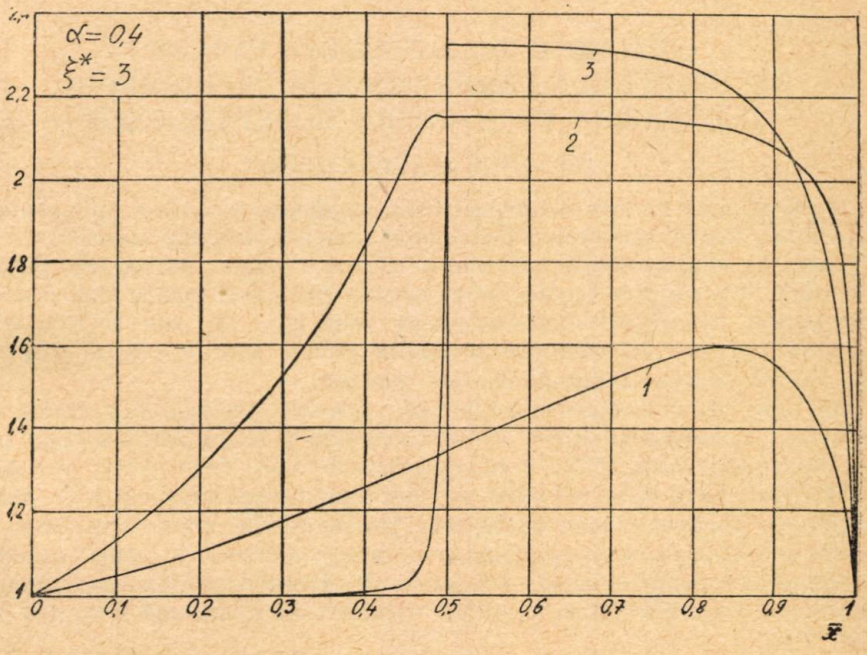


Fig. 26

inclinate îl vom nota cu 1 (fig. 4), lagărul din figura 15 cu 2 și lagărul din figura 23 cu 3.

Pentru aceasta să considerăm de exemplu $\alpha = 0{,}4$ și

$$\bar{\xi}^* = \frac{\mu V l}{\delta_2^2 p_0} \tag{105}$$

același pentru toate lagărele, de exemplu $\bar{\xi}^* = 3$. Repartițiile de presiuni ce rezultă sînt arătate în figura 26. Se constată că lagărele 2 și 3 au

o capacitate portantă sensibil mai mare decît lagărul 1, fapt care justifică utilizarea discontinuităților de speța întîia și în special de speța a doua pentru a spori capacitatea portantă a lagărului.

Elementele globale ale unui lagăr ca în figura 3 se calculează întocmai ca și pentru tipul de lagăr precedent, adică utilizînd relația (88) pentru $\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}_1$ fiind dat de relația (40), iar $\mathfrak{z}_2$ de relația (37), cu $p_a = p_2$) și relația (91) pentru x^*. Coeficientul de frecare C_F va fi

$$C_F = \frac{\mu V}{\delta_2 p_0} \frac{l_1 + l_2 \frac{\delta_1}{\delta_2}}{(l_1+l_2)\frac{\delta_1}{\delta_2}} + \frac{\overline{p}_2 - 1}{2} \frac{\delta_2}{l_1 + l_2}\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) \tag{106}$$

6. Alte tipuri de lagăre

În mod absolut analog pot fi calculate repartițiile presiunilor și studia și funcționarea și pentru alte tipuri de lagăre care pot interveni în diferite aplicații tehnice.

Primită la redacție la 28 octombrie 1955.

О РАСЧЕТЕ СМАЗЫВАЕМЫХ ГАЗАМИ БЕСКОНЕЧНО УДЛИНЕННЫХ ПОДШИПНИКОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе интегрируется дифференциальное уравнение (1) для случая, когда толщина δ смазочной пленки линейно меняется с расстоянием x в направлении движения и для случая, когда эта толщина постоянна. Во втором случае полученные решения точны как при изотермической эволюции смазывающего газа ($\varkappa = 1$), так и при $\varkappa \neq 1$. В первом случае полученные решения точны при $\varkappa = 1$, а для $\varkappa \neq 1$ указывается метод приближенного расчета.

Эти результаты применяются для расчета нескольких типов подшипников: с параллельными поверхностями (§ 2), с наклонными плоскими поверхностями (§ 3), с перерывами первого вида (§ 4), с перерывами второго вида (§ 5), а также других типов подшипников (§6). Вычисляется как распределение давлений, так и общие характеристики подшипников. Полученные результаты представлены в виде диаграмм для облегчения практических применений. Типы исследованных подшипников сравниваются также с точки зрения максимальной несущей мощности.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES PALIERS D'ALLONGEMENT INFINI, LUBRIFIÉS AUX GAZ, COMPOSÉS, DE SURFACES PLANES

(RÉSUMÉ)

Dans cette étude, on commence par l'intégration de l'équation différentielle (1) pour le cas où l'épaisseur δ de la couche de lubrifiant présente une variation linéaire par rapport à la distance x au sens du mouvement et aussi pour le cas où cette épaisseur reste constante. Les solutions

obtenues dans le dernier cas sont rigoureuses aussi bien pour une évolution isothermique du gaz lubrifiant ($\varkappa=1$) que pour $\varkappa\neq1$. Les solutions obtenues pour le premier cas sont rigoureuses pour $\varkappa = 1$ et l'on indique une méthode approximative de calcul pour $\varkappa \neq 1$.

Ces résultats sont appliqués au calcul de quelques types de paliers : à surfaces parallèles (§ 2), à surfaces planes inclinées (§ 3), au cas où la couche de lubrifiant présente des discontinuités de première espèce (§ 4) et de deuxième espèce (§ 5), et aussi aux autres types de paliers (§ 6). On calcule les distributions des pressions qui en résultent aussi bien que les caractéristiques globales des paliers. En vue de faciliter les applications pratiques, les résultats obtenus sont présentés sous forme de diagrammes. On compare également les différents types de paliers étudiés, au point de vue de la capacité portante maximum.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Drescher, *Gleitlager mit Luftschmierung.* V.D.I. 1953, t. 95, nr. 35, p. 1182.
2. V. N. Constantinescu, *Repartiția de presiuni în lagărele de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Comunicările Acad. R.P.R., tom. IV, nr. 2, februarie 1955, p. 377.
3. — *Considerații asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3, 1955, p. 377; t. VII, nr. 1, 1956, p. 81.
4. — *Asupra unor proprietăți și soluții la limită ale ecuațiilor lubrificației cu gaze.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 9, septembrie 1955, p. 1317.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII nr. 3, 1956

STUDII EXPERIMENTALE ASUPRA UNOR MATERIALE ANTIFRICŢIUNE DE ÎNLOCUIRE PENTRU LAGĂRELE DE ALUNECARE

DE

GH. VASILCA şi P. FREUND

Studiile experimentale s-au făcut asupra unor materiale antifricţiune, elaborate în ţară şi cu materiale indigene. Scopul urmărit a fost determinarea caracteristicilor lor funcţionale, menite să arate domeniul în care pot fi aplicate şi prin urmare pot să înlocuiască, cu succes din punct de vedere tehnic şi economic, materialele deficitare utilizate în prezent în construcţia lagărelor de alunecare.

Studiile experimentale s-au extins asupra lagărelor circulare, construite din materialul antifricţiune de încercat, care, în regimuri continui de funcţionare sub sarcini şi viteze constante, prezintă stabilitate din punct de vedere termic.

Au fost alese trei regimuri de funcţionare, continue şi stabile din punct de vedere termic, luînd drept criteriu pentru aprecierea lor temperatura t_c a cuzinetului experimental.

Pentru regimul termic moderat s-a admis $t_c \cong 45°C$, care se poate produce, în condiţiile climatice de vară de la noi, în orice lagăr de alunecare.

Pentru regimul termic mediu s-a ales $t_c \cong 60°C$, apreciat ca practic potrivit pentru lagărele cu răcire slabă, sau care lucrează în medii exterioare mai calde (în apropierea cuptoarelor etc).

Pentru regimul termic ridicat s-a luat $t_c \cong 75°C$, corespunzînd lagărelor, fără răcire artificială, de la numeroase maşini termice.

Pentru aceste regimuri s-au ridicat sub formă de diagrame caracteristicile $p = f(V)$ şi debitul de ulei care trece prin lagăr $q_u = f(V)$. Din caracteristicile $p = f(V)$ au fost calculate şi reprezentate grafic relaţiile $pV = f(V)$, corespunzătoare aceloraşi regimuri. Importanţa din punctul de vedere al aplicaţiilor practice, al acestor caracteristici, a fost arătată într-o lucrare anterioară*).

Au fost încercate patru materiale antifricţiune de înlocuire. Trei din ele au fost elaborate de către Centrul de cercetări metalurgice al Academiei R.P.R. şi anume :

*) Gh. Vas lca, *Asupra utilităţii caracteristicii* $p=f$ (V), *la lagărele circulare de aluneare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, aprilie—iunie 1956, p. 499.

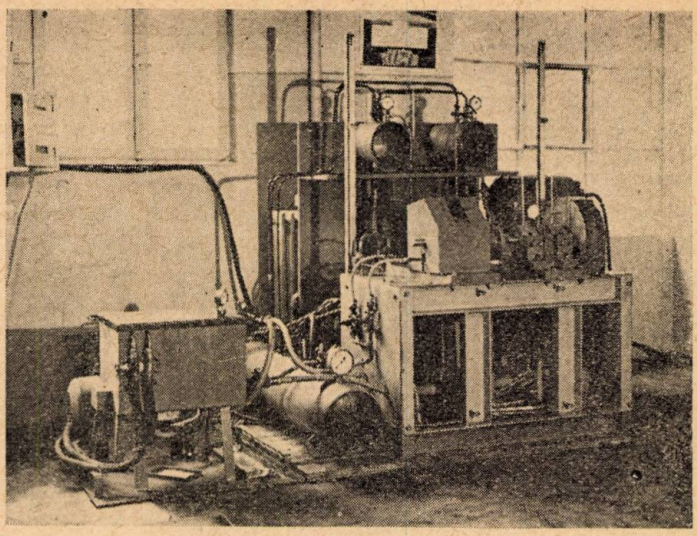


Fig. 1

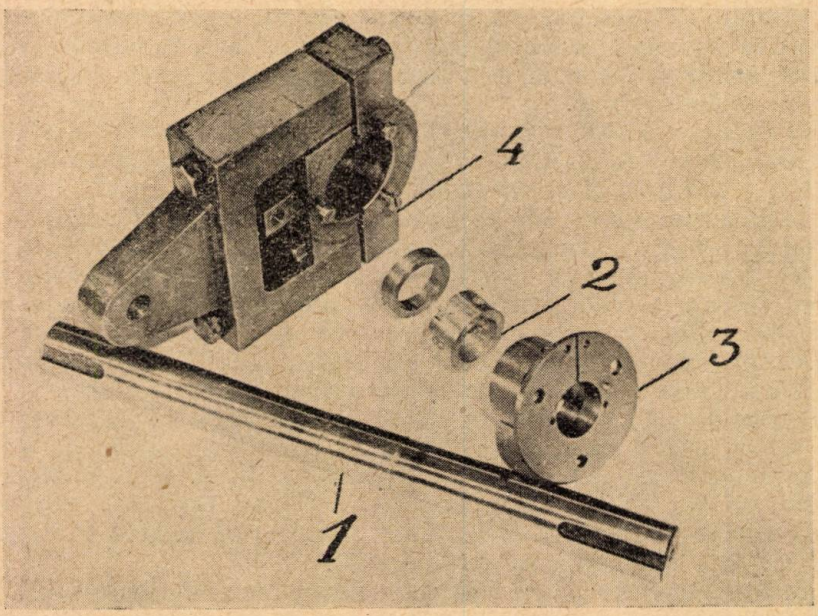


Fig. 2

— două tipuri de aliaje de tipul Zn Al Cu (Studiul: Prepararea aliajelor de lagăre pe bază de Zn și Al, destinate a înlocui aliajele cu conținut de cositor în construcția lagărelor de mașini unelte) și

— un tip de material feros poros.

Al patrulea material experimentat este din masă plastică, elaborat de către Sectorul de mase plastice din Institutul de chimie al Academiei R.P.R.

Încercările experimentale au fost efectuate pe o mașină de încercat lagăre (fig. 1), construită special în acest scop. În cursul unei rotații complete a fusului, viteza sa periferică, precum și sarcina care se aplică asupra cuzinetului experimental (care stă pe loc), sînt constante.

Cuzinetul experimental este fixat în timpul încercării într-o montură cu suport (fig. 2), care se apropie ca formă, dimensiuni și greutate, de elementele constructive ale unui lagăr de construcție curentă. În figură se notează prin: *1* — fusul; *2* — cuzinetul experimental; *3* — montura cuzinetului; *4* — suportul lagărului. Prin aceasta s-au urmărit condiții de evacuare și împrăștiere a căldurii la lagărul experimental, cît mai apropiate de acelea întîlnite în practică. În acest fel sporește valoarea din punctul de vedere al aplicațiilor practice a caracteristicilor $p = f\ (V)$.

Condițiile de experimentare, comune pentru cele patru materiale:

1. Fusul: — materialul: OLC 16, cementat, călit, rectificat,
   — diametrul nominal al fusului: $d = 36$ mm,
   — duritatea suprafeței de lucru: $H_{B\ 2,5/187,5/15} \cong 550$,
   — microgeometria suprafeței de lucru (= înălțimea medie a asperităților): $\sim 0{,}0025$ mm.
2. Cuzinetul: — forma: bucșe cilindrică cu pereți groși (6 mm), diametrul interior nominal $D = 36$ mm,
   — alungirea: $\lambda = b/d = 0{,}7$,
   — microgeometria suprafeței de lucru: $\sim 0{,}0062$ mm (obținută prin strungire simplă).
3. Lubrifiantul: — ulei, tip 305 (STAS).
4. Sistemul de alimentare cu ulei: — ulei sub presiune, în circuit închis.
5. Temperatura băii de ulei: $t_b = 22°C$ (constantă).
6. Presiunea uleiului la alimentare: — $p_u = 1{,}5$ *at* (constantă).
7. Intrarea uleiului: — la 90° avans față de direcția sarcinii, printr-o gaură $\varnothing$ 4,5 mm, situată la mijlocul cuzinetului.
8. Ieșirea uleiului din lagăr: — axial, pe la capete.
9. Măsurarea debitului de ulei scurs prin lagăr: — prin captarea uleiului scurs și măsurarea volumului q_u cu un cilindru gradat în cm^3.

10. Măsurarea sarcinii : — cu dinamometrul (0—1 000 kg) ; eroarea de citire $\pm$ 5 kg. Presiunea medie p, corespunzătoare sarcinii P măsurate, se calculează din

$$p = \frac{P}{bd} \text{ kg/cm}^2.$$

11. Măsurarea temperaturii cuzinetului t_c : — pe direcţia sarcinii, la mijlocul cuzinetului, în zona încărcată, la 1,5 mm distanţă de suprafaţa de lucru, cu ajutorul unui termometru ; eroarea de citire $\pm$ 0,1°C.

12. Influenţe termice exterioare asupra cuzinetului : — căldura produsă în lagărele paliere (cu rulmenţi) ale fusului, este evacuată prin răcirea cu apă a acestora, menţinîndu-le temperatura t_p constantă.

13. Evacuarea şi împrăştierea căldurii produse în cuzinet : — prín suportul cuzinetului pe cale naturală, către mediul ambiant şi prin fus către lagărele paliere (t_p = const.).

14. Temperatura mediului ambiant : — t_l = 22—23°C.

15. Aprecierea echilibrului de temperatură stabilizat : — temperatura cuzinetului t_c să nu varieze mai mult de $\pm$ 0,1°C, timp de 30÷60 minute după atingerea temperaturii de regim.

16. Montajul : — fără ajustare, cuzinetul numai strungit.

17. Rodajul : — 6 ore, cu ridicarea treptată a vitezei şi sarcinii.

18. Caracteristica corpului cuzinetului : — materialul : OL 50
— greutatea : 10,2 kg,
— suprafaţa de răcire : 0,09 m².

Condiţiile de experimentare specifice, precum şi rezultatul lucrărilor efectuate, se arată mai jos pentru fiecare material în parte.

Aliajul tip Zn Al_4 Cu_1

Condiţiile de experimentare specifice :

a) Cuzinetul bucşe experimental a fost strungit dintr-un cilindru plin turnat în cochilă metalică.

b) Regimul termic :

	moderat	*mediu*	*ridicat*
t_c...°C	44	58	72,5
t_p...°C	25	35	35

c) Jocul : $\psi = \frac{D-d}{d} = 1{,}25\,‰$.

S-au ridicat curbele $p = f(V)$ și $q_u = f(V)$ și calculat și trasat curbele $pV = f(V)$ corespunzătoare. Diagramele sînt arătate în figura 3. Presiunile p sînt medii, calculate pe suprafața proectată (bd) a cuzinetului.

Aliajul tip Zn Al_{10} Cu_5

Condițiile de experimentare specifice sînt aceleași ca și pentru aliajul tip Zn Al_4 Cu_1, cu excepția jocului care a fost $\psi = 1{,}73\%_{oc}$. Diagramele sînt arătate în figura 4.

Concluzii cu privire la aliajele Zn Al Cu. *a*) Aliajele Zn Al Cu studiate prezintă stabilitate, din punct de vedere termic în regimurile de funcționare continue experimentate.

b) Ambele aliaje sînt termic mai sensibile la variațiile de viteză decît la variațiile de sarcină.

c) Produsul pV variază, în același regim termic, și de alimentare cu ulei, foarte mult, confirmîndu-se astfel și pe această cale variația coeficientului de frecare f din lagăr cu sarcinile și vitezele.

d) Proprietățile antifricțiune ale aliajului Zn Al_{10} Cu_5 (cu conținut mai mare de aluminiu) sînt mai favorabile decît ale aliajului Zn Al_4 Cu_1, fapt ce rezultă din sarcinile mai mari pe care le poate suporta la aceleași viteze, într-un regim termic dat.

Fierul poros

Condițiile de experimentare specifice:

a) Cuzinetul bucșe experimental a fost mai întîi prestrungit dintr-un calup cilindric plin. A fost apoi ținut timp de patru ore cufundat într-o baie de ulei la circa 130°C pentru impregnare și lăsat să se răcească de o dată cu baia. N-au putut fi respectate recomandările ca impregnarea să se facă după prelucrarea finală. Aceasta nu poate prezenta însă, în cazul de față, vreo importanță, deoarece încercările au fost făcute prin alimentarea lagărului cu ulei din afară.

b) Regimul termic:

	slab	*moderat*
t_e..... °C	34	44
t_p..... °C	25	25

Neobținînd rezultate suficient de concludente în regimul termic mediu și ridicat, fierul poros a fost experimentat și într-un regim termic mai scăzut și anume la $t_e = 34$°C. În regimul moderat, intervalul de variație al vitezelor a fost limitat la acela folosit la experimentarea aliajelor Zn Al Cu.

c) Jocul: $\psi = 2{,}7\ \%_{oo}$.

S-au ridicat și calculat curbele $p = f(V)$, $q_u = f(V)$ și $pV = f(V)$ arătate în figura 5. Presiunile p sînt medii, calculate pe suprafața proiectată (bd) a cuzinetului.

Concluzii. a) Cuzineții din fierul poros experimentat prezintă stabilitate termică la funcționarea continuă în regimurile menționate. Echilibrul termic nu este însă atît de rigid stabil ca la aliajele Zn Al Cu. Fluctuațiile în jurul poziției de echilibru nu au dus însă la ieșirea din starea de echilibru.

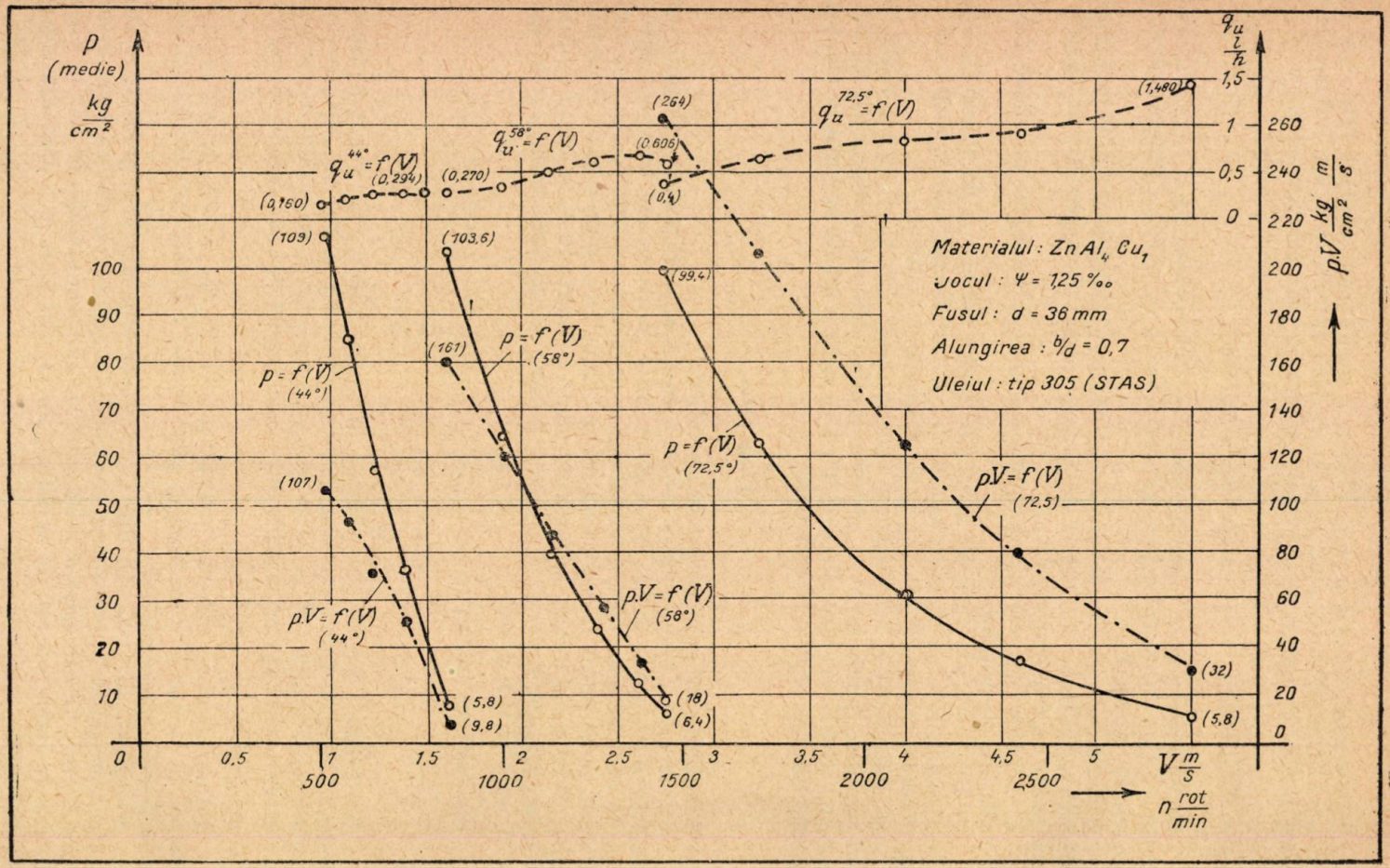

p (medie) kg/cm²
q_u l/h
pV kg/cm² · m/s
V m/s
n rot/min
$q_u^{44°} = f(V)$
$q_u^{58°} = f(V)$
$q_u^{72,5°} = f(V)$
p = f(V) (44°)
p = f(V) (58°)
p = f(V) (72,5°)
p.V = f(V) (44°)
p.V = f(V) (58°)
p.V = f(V) (72,5)
(0,294)
(0,270)
(0,606)
(0,4)
(1,480)
(0,160)
(264)
(109)
(103,6)
(99,4)
(161)
(107)
(5,8)
(9,8)
(18)
(6,4)
(32)
(5,8)
Materialul: Zn Al₄ Cu₁
Jocul: Ψ = 1,25 ‰
Fusul: d = 36 mm
Alungirea: b/d = 0,7
Uleiul: tip 305 (STAS)

Fig. 3

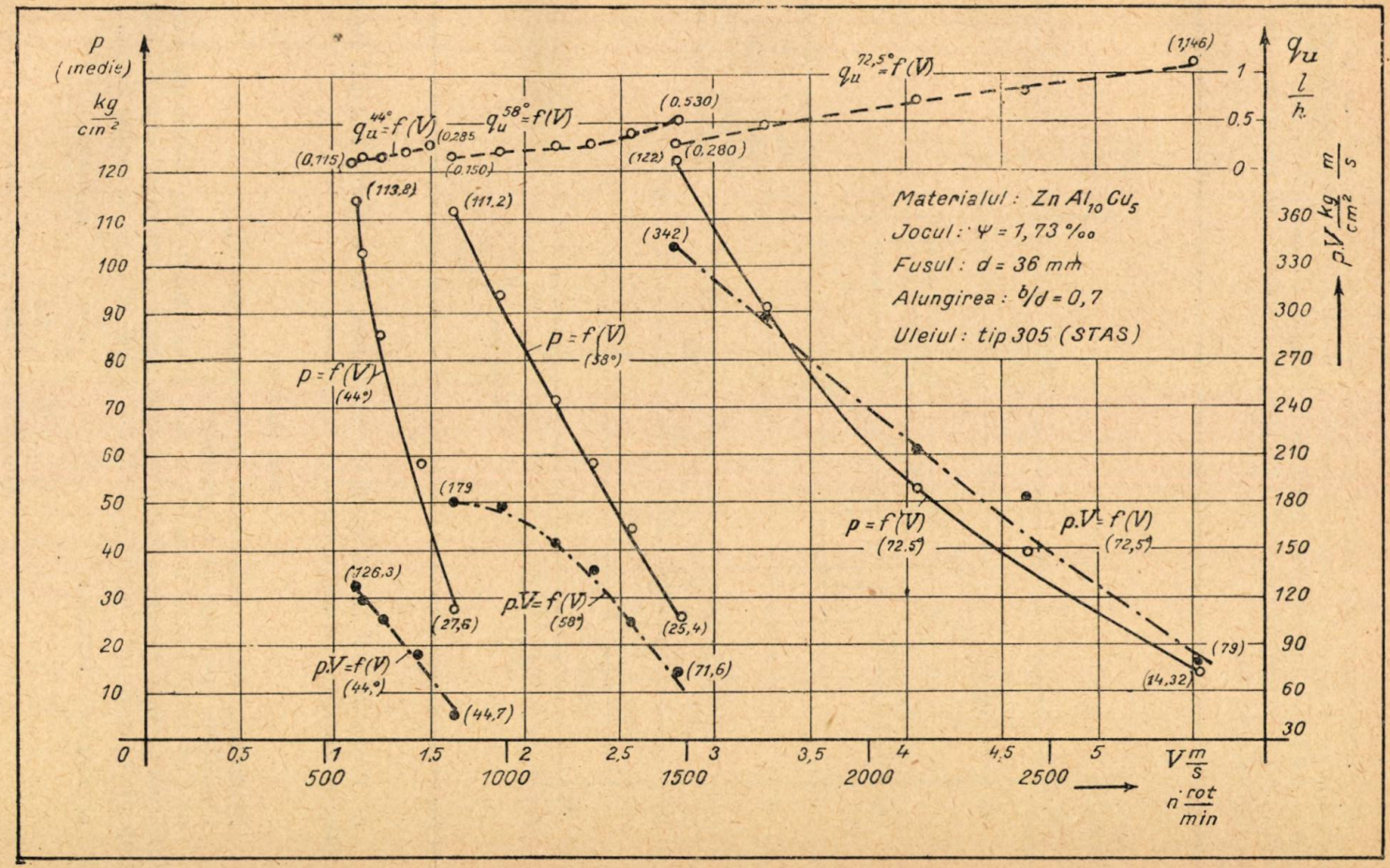

p (medie) kg/cm²
$q_u^{44°}=f(V)$
$q_u^{58°}=f(V)$
$q_u^{72,5°}=f(V)$
q_u l/h
Materialul: Zn Al10 Cu5
Jocul: Ψ = 1,73 ‰
Fusul: d = 36 mm
Alungirea: b/d = 0,7
Uleiul: tip 305 (STAS)
p = f(V) (44°)
p = f(V) (58°)
p = f(V) (72,5°)
p.V = f(V) (44°)
p.V = f(V) (58°)
p.V = f(V) (72,5°)
p.V kg/cm² m/s
V m/s
n rot/min

Fig. 4

b) Fierul poros este termic mai sensibil la variaţiile sarcinii decît la variaţiile de viteză. În regimul termic $t_c = 44°C$, în intervalul de viteză 0,78 ÷ 1,53 m/s, materialul permite o variaţie de sarcină de numai circa 34%, faţă de 310% la aliajul Zn Al_{10} Cu_5 în intervalul de viteze mai redus de 1,11 ÷ 1,62 m/s.

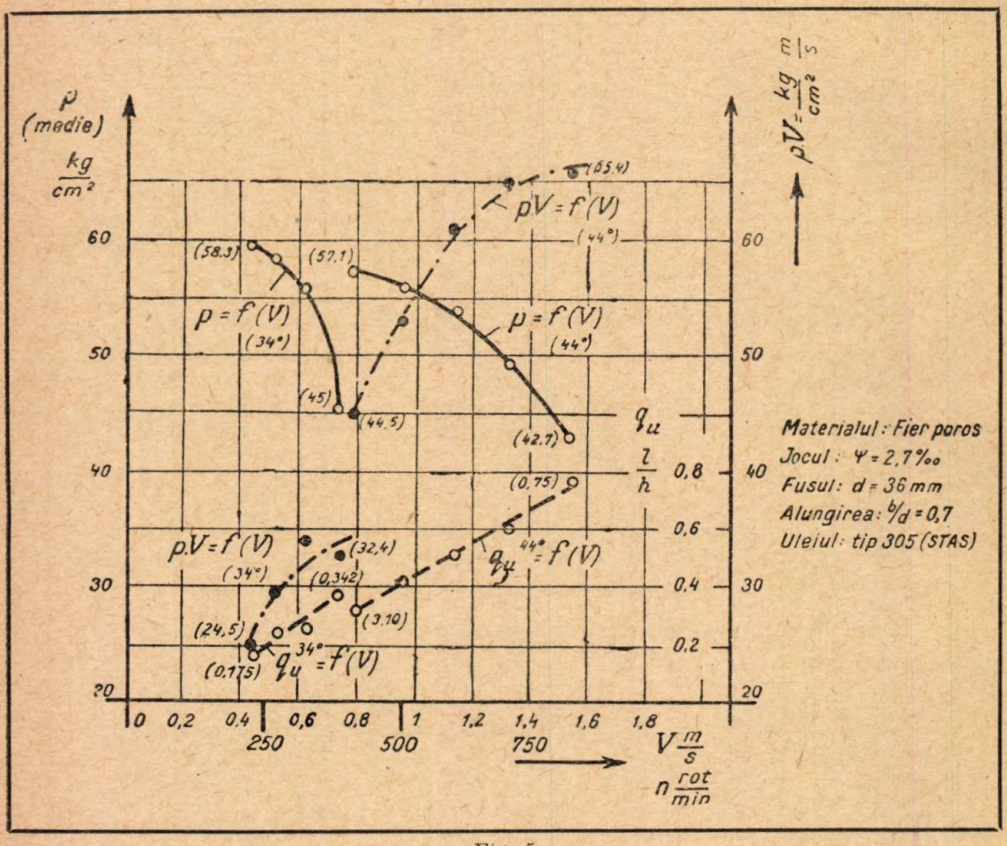


Fig. 5

c) Produsul pV se prezintă de asemenea, ca variabil într-un regim termic şi condiţii de alimentare cu ulei date.

Masa plastică

Materialul este confecţionat cu tocătură textilă.

Condiţiile specifice de experimentare:

a) Cuzinetul bucşe încercat a fost prestrungit, din forma de bucşe cilindrică presată în care a fost elaborată. După impregnare, care s-a făcut timp de 4 ore în ulei la 80°C, cuzinetul a fost strungit la cotele finale.

b) Regimul termic:

	slab	*moderat*
t_c... °C	34	44
t_p... °C	25	25

Rezultatele obținute în regimurile termice mai ridicate nefiind suficient de concludente, materialul a fost experimentat și în regimul termic $t_c = 34°C$ mai scăzut. În regimul moderat, intervalul de variație al vitezelor a fost ales aproximativ același ca și pentru Zn Al Cu și fierul poros.

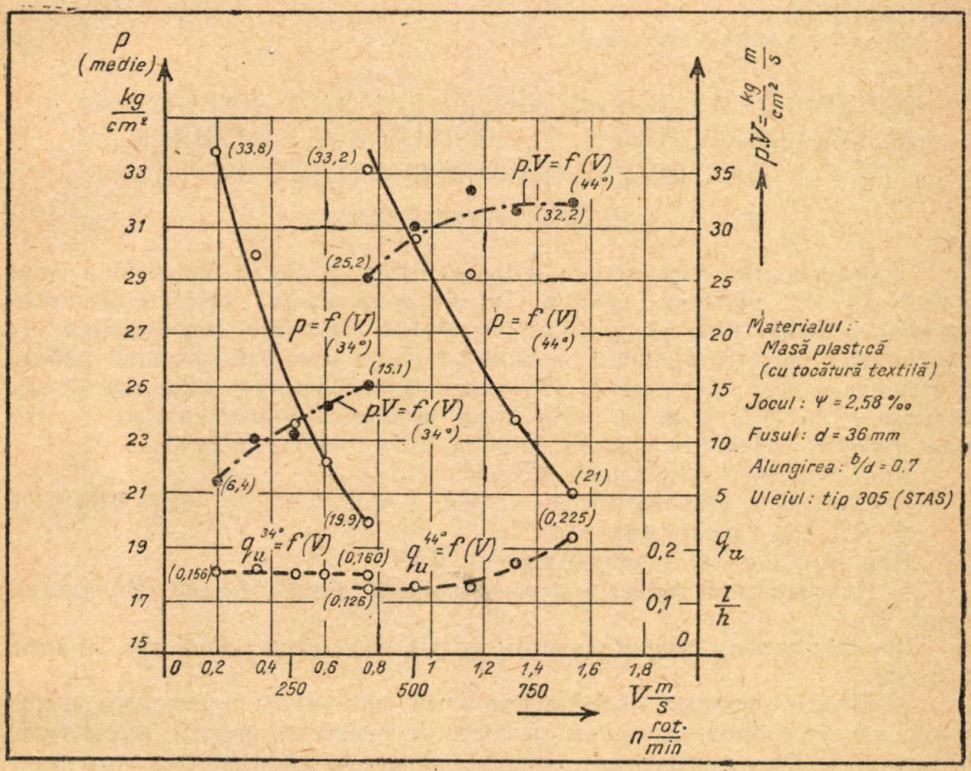


Fig. 6

c) Jocul: $\psi = 2{,}58‰$.

S-au ridicat curbele $p = f(V)$ și $q_u = f(V)$ și calculat $pV = f(V)$. Diagramele sînt arătate în figura 6. Presiunile p sînt medii, calculate pe suprafața proiectată (bd) a cuzinetului.

Concluzii. a) Cuzinetul din masă plastică experimentat prezintă stabilitate termică, la funcționarea continuă, în regimurile menționate. Starea de echilibru se caracterizează, aproximativ la fel ca și la fierul poros, prin ușoare fluctuații ale temperaturii t_c în jurul valorii de regim. Nu s-au constatat ruperi ale echilibrului termic din această cauză.

b) Cuzinetul este de asemenea foarte sensibil termic la sarcină. Suportă, în același regim termic, numai o sarcină pe jumătate față de fierul poros. În același interval de viteze și același regim termic suportă în schimb o variație de sarcină aproape dublă față de acesta.

c) În același regim termic și de alimentare cu ulei produsul pV se prezintă de asemenea variabil cu viteza și cu sarcina.

Observaţie cu caracter general

Curbele $p = f(V)$ prezintă stabilitatea termică cea mai pronunţată în porţiunea centrală a lor. Către capete, fluctuaţiile în jurul temperaturii de regim, sînt mai accentuate. Utilizarea unor puncte de funcţionare stabilă, obţinute prin extrapolarea curbelor $p = f(V)$, trebuie deci făcută cu oarecare prudenţă.

Primită la redacţie la 19 ianuarie 1956.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ АНТИФРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ — ЗАМЕНИТЕЛЕЙ ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Экспериментальным путем определялась рабочая характеристика $p = f(V)$ *) четырех типов антифрикционных материалов-заменителей. Были подвергнуты исследованию круглые подшипники на нескольких теплоустойчивых режимах работы при непрерывной работе и неизмененных нагрузке и скорости. Одновременно были построены кривые $q_u = f(V)$, а из $p = f(V)$ были выведены отношения $pV = f(V)$ для каждого теплоустойчивого режима (t_c = const. отдельно.

Исследовались следующие материалы:

— $Zn\,Al_4\,Cu_1$ [диаграммы $p = f(V)$, $q_u = f(V)$ и $p\,V = f(V)$ рис. 3].

$Zn\,Al_{10}\,Cu_5$ (диаграммы рис. 4).

Пористое железо (диаграммы рис. 5).

— Пластическая масса с измельченными текстилтными волокнами (рис. 6).

Из полученных результатов вытекают следующие наиболее важные выводы:

а) Иссследованные антифрикционные материалы-заменители обладают теплоустойчивостью при различных режимах работы и следовательно могут быть применены для изготовления подшипников скольжения.

б) Характеристика $p = f(V)$ меняется в зависимости от того или другого антифрикционного материала; следовательно эти материалы принимают активное участие в явлении скольжения в подшипнике.

в) При одинаковом тепловом режиме и притоке мсла, произведение pV не является постоянным, а претрепевает изменения, определяемые кривой.

ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR CERTAINS MATÉRIAUX ANTIFRICTION DE SUBSTITUTION POUR LES PALIERS LISSES

(RÉSUMÉ)

Les auteurs ont déterminé, par voie expérimentale, pour quatre types de matériaux antifriction de substitution, la caractér stique fonctionnelle globale $p = f(V)$ **). Les recherches ont porté sur les paliers circulaires pour plusieurs régimes de fonctionnement thermiques stables, pour

*) Cer. . . . cmp. 773.

**) Voir note, page 773.

un fonctionnement continu à charges et vitesses constantes. On a levé en même temps les courbes $q_u = f(V)$ et, de $p = f(V)$, on a déduit les relations $p \cdot V = f(V)$, pour chaque régime thermique stable (t_c = const.) en particu ier.

On a étudié les matériaux suivants :

— $ZnA^{1}{}_{4}Cu_{1}$ [d.agrammes $p = f(V)$, $q_u = f(V)$ et $pV = f(V)$ de la figure 3].

— $ZnAl_{10}Cu_5$ (diagrammes de la figure 4).

— Fer poreux (diagrammes de la figure 5).

— Masse plastique contenant de la charpie (diagrammes de la figure 6).

Les résultats obtenus permettent les constatations suivantes :

a) Les matériaux antifriction de substitution, qu'on a étudiés, offrent des régimes de fonctionnement thermique stables donc, peuvent être utilisés à la construction des paliers lisses.

b) La caractéristique $p = f(V)$ varie d'un matériel antifriction à l'autre ; par conséquent, ces matériaux prennent une part active au phénomène de glissement dans le pa'ier.

c) En régime thermique et d'a'imentation à l'huile identique, le produit pV n'est pas constant, mais présente une variation qui est définie par une courbe.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 3, 1956

VIBRAŢII

IN LEGĂTURĂ CU CALCULUL FRECVENŢELOR VIBRAŢIILOR PROPRII ALE CADRELOR ETAJATE

DE

S. RĂUTU şi M. IFRIM

Lucrarea de faţă îşi propune să dea o nouă metodică pentru calculul dinamic al unui tip de cadru des întîlnit în construcţiile civile şi industriale: cadrul plan, format din stîlpi verticali, rigle şi planşee orizontale (fig. 1).

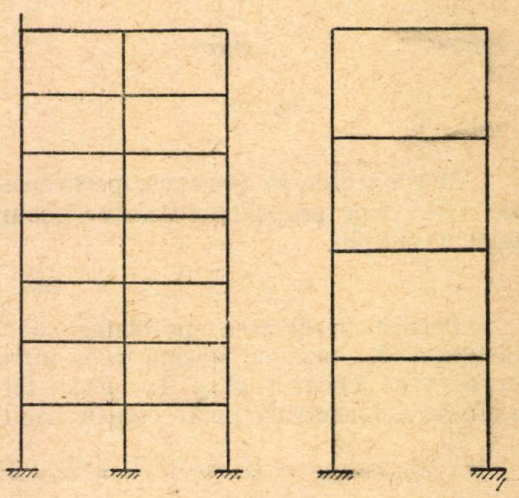


Fig. 1

Ceea ce este specific acestui gen de construcţii este raportul mare între rigiditatea elementelor orizontale faţă de rigiditatea elementelor verticale. La cadrele întîlnite curent în construcţii raportul dintre rigiditatea riglelor $\left[i_r = \frac{EI_r}{l_r} \right]$ şi rigiditatea stîlpilor variază între $3 \div 6$, iar dacă se ţine seama şi de influenţa planşeelor se obţine $\frac{i_r}{i_s} = 5 \div 10$.

Din această cauză, asemenea cadre se calculează în mod obişnuit, pornind de la ipoteza simplificatoare a riglelor infinit rigide. Această ipoteză este indicată de normele sovietice şi este în general acceptată în întreaga literatură tehnică.

Acceptînd această ipoteză de calcul, frecvențele vibrațiilor propri obținute vor fi mai mari decît cele reale.

Această ipoteză simplifică mult calculele. Metodele exacte, precum și cele aproximative, utilizate pînă în prezent sînt laborioase (metodele clasice [1], metoda Vianello Zavriev [2] și [3], metoda deformațiilor [4]), în special în cazul cadrelor cu mai multe etaje, iar alte metode aproximative [5] dau erori la determinarea frecvențelor superioare.

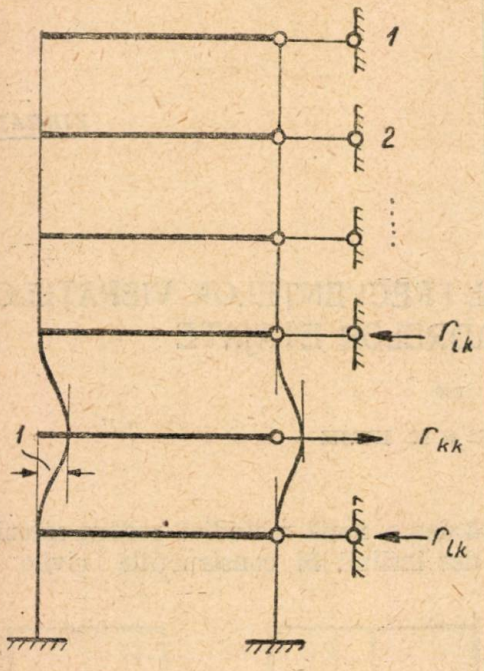


Fig. 2

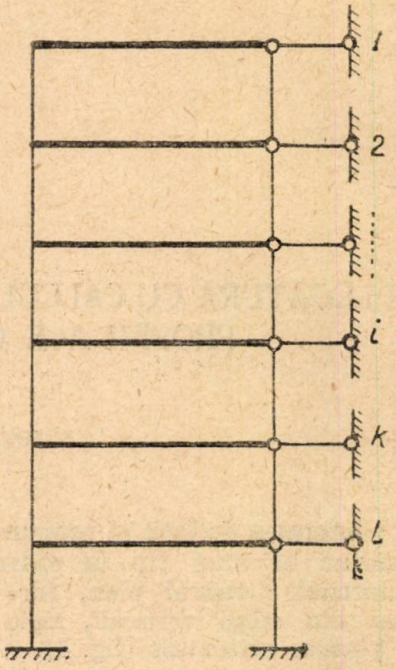


Fig. 3

Metoda care se propune, permite să se determine primele frecvențe ale vibrațiilor proprii ale acestor genuri de construcții, printr-un calcul relativ simplu.

★

Pentru rezolvarea problemei se folosește metoda deformațiilor. Sistemul de bază se obține prin introducerea unor penduli orizontali în dreptul fiecărui etaj. În acest fel se obțin ecuațiile canonice ale metodei deformațiilor, care conțin cîte trei necunoscute în fiecare ecuație

$$Z_{i-1}\, r_{i,i-1} + Z_i\, r_{i,i} + Z_{i+1}\, r_{i,i+1} + r_{ip} = 0, \quad (i = 1,2 \ldots n), \qquad (1)$$

unde

r_{ik}, reprezintă reacția din legătura i datorită deplasării unitare a legăturii k; (fig. 2);

r_{ip}, reacția în legătura i din sistemul de bază datorită solicitărilor exterioare;

Z_i, deplasarea reală a cadrului în nodul i;
n, numărul etajelor.

Ecuația canonică (1) a metodei deformațiilor reprezintă condiția ca sistemul să aibă asemenea deplasări încît reacțiunile totale din legăturile introduse în sistemul de bază (fig. 3) să fie nule.

În cazul vibrațiilor proprii r_{ip} fiind nul, determinarea frecvențelor proprii se face cu ajutorul ecuației seculare

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & r_{n,n-1} & r_{n,n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Fiecare din termenii r_{ik} reprezintă o sumă de funcții trigonometrice. Din această cauză rezolvarea ecuației (2) se poate face numai prin încercări; cînd numărul etajelor este mare rezolvarea este practic imposibilă.

Utilizînd pentru determinarea frecvențelor vibrațiilor proprii metoda aproximațiilor succesive [6] se va da uneia din legăturile suplimentar introduse o deplasare pulsatorie cu o frecvență θ. Se pune condiția ca frecvența vibrației excitatoare să fie astfel aleasă încît reacțiunile din toate barele suplimentare ale cadrului (inclusiv legătura pe direcția căreia s-a dat deplasarea inițială) să fie nule.

În cazul de față toate deplasările fiind translații, convergența iterației este mai slabă decît în cazul deplasărilor unghiulare ale nodurilor. Ca urmare procesul de iterare este lent.

Pentru a evita operațiile de iterare, s-a căutat să se exprime analitic condiția ca dîndu-se unei legături o deplasare finită cu o frecvență, θ să se obțină reacțiunea din legătura respectivă egală cu zero.

Această condiție poate fi exprimată sub forma

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & t_{12} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & t_{23} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots t_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

unde $t_{ik} = \frac{r_{ik}}{r_{ii}}$.

Se observă că această condiție conduce la un determinant similar cu cel dat de metoda deformațiilor, de care diferă prin faptul că fiecare linie este împărțită prin termenul de pe diagonala principală. Ca această operație să fie posibilă este necesar ca toți termenii de pe diagonala principală r_{jj} să fie diferiți de zero.

Pornind de la ecuația secular pusă sub forma $\Delta_n = 0$ se poate calcula prima frecvență (precum și cele superioare) prin încercări.

Calculul primei frecvenţe a vibraţiilor proprii

Se caută o soluţie a ecuaţiei (3) pentru valori ale frecvenţei $\theta < \omega_1^{(n)}$ (θ — frecvenţa cu care se deplasează legătura n a cadrului şi $\omega_1^{(n)}$ — frecvenţa vibraţiei proprii) valoarea determinantului va fi pozitivă; dacă $\theta > \omega_1^{(n)}$, $\Delta_n < 0$ şi numai în cazul $\theta = \omega_1^{(n)}$, $\Delta_n = 0$.

Evaluarea determinantului Δ_n se poate face cu următoarea relaţie de recurenţă

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - a_{n,n-1}\Delta_{n-2}, \tag{4}$$

unde

$$a_{n,n-1} = t_{n,n-1} \cdot t_{n-1,n}.$$

Se constată că pentru valoarea lui θ apropiată de $\omega_1^{(n)}$ toţi determinanţii Δ_{n-k} sînt pozitivi.

Determinantul $\Delta_{n-k} = 0$, reprezintă condiţia care determină frecvenţa proprie a cadrului considerat, avînd k legături suplimentare. Este evident că frecvenţa proprie a unui sistem avînd mai multe legături este mai ridicată decît frecvenţa aceluiaşi sistem fără o parte din legăturile sale, deci $\omega_1^{(n-k)} > \omega_1^{(n)}$ ($\omega_1^{(n-k)}$ — frecvenţa proprie a unui cadru cu $(n-k)$ etaje libere). Cum pentru valori mai mici decît valoarea primei frecvenţe a vibraţiilor proprii, determinanţii Δ_k sînt pozitivi, rezultă că pentru $\theta = \omega_1$ toţi determinanţii Δ_{n-k} sînt pozitivi şi numai $\Delta_n = 0$

$$\Delta_n < \Delta_{n-1} < \Delta_{n-2} \ldots < 1. \tag{5}$$

Calculul lui ω_1 se face prin încercări. Tipul cadrului precum şi numărul său de etaje pot constitui indicaţii asupra domeniului în care se va găsi parametrul $(kl)^4 = \frac{\overline{m}\omega^2}{EI} l^4$ al mişcării (de exemplu pentru cadrele cu un etaj $1{,}00 \leqslant kl \leqslant 2{,}00$ pentru cadrele cu două etaje $0{,}80 \leqslant kl \leqslant 1{,}50$ ş.a.m.d.).

Se alege o valoare (kl) iniţială şi se calculează coeficienţii

$$a_{n,n-1} = t_{n,n-1} \cdot t_{n-1,n} = \frac{r_{n^2,n-1}}{r_{n,n} r_{n-1,n-1}}, \tag{6}$$

unde

$$r_{n,n-1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{i_{n,n-1}^{(j)}}{l^2} F_{n,n-1}^{(j)}(kl), \tag{7}$$

$$r_{n,n} = \sum_{j=1}^{m} \frac{i_{n,n+1}^{(j)}}{l^2} E_{n,n+1}^{(j)}(kl) + \sum_{j=1}^{m} \frac{i_{n,n-1}^{(j)}}{l^2} F_{n,n-1}^{(j)}(kl) - M_n\theta^2. \tag{8}$$

S-au folosit notaţiile:

$i_{n,n-1}$ — rigiditatea stîlpului între etajele n şi $n-1$,

m — numărul de stîlpi paraleli pe care îi are cadrul,

M_n — masa concentrată la etajul n,
θ — frecvența vibrației impuse,
E și F — au următoarele valori

$$E = -(kl)^3 \frac{\operatorname{ch} kl \sin kl + \operatorname{sh} kl \cos kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1},$$
$$F = -(kl)^3 \frac{\operatorname{sh} kl + \sin kl}{\operatorname{ch} kl \cos kl - 1} \tag{9}$$

(semnificația și valorile lor se găsesc în lucrările [6] [7] și [8]).

După calculul coeficienților se trece la calculul minorilor Δ_{n-k} cu ajutorul ecuației (4). Din calculul primilor determinanți Δ_{n-k} ne putem da seama dacă valoarea aleasă satisface inegalitatea (5) și totodată egalitatea (3).

O dată (kl) cunoscut se poate determina prima frecvență circulară a vibrației proprii cu ajutorul formulei

$$\omega = \frac{(kl)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

(unde $\bar{m}$ reprezintă masa pe unitate de lungime).

După cum reiese din exemplele ce urmează, calculul se face simplu și mecanic.

Calculul primei forme de vibrații

Cunoscînd frecvența vibrației proprii se poate determina și forma proprie a vibrației. Într-adevăr, dacă se pornește de la sistemul de ecuații dat de metoda deformațiilor și se ia ca ordonată unitară deplasarea punctului 1 se poate obține și valoarea celorlalte deplasări. Înlocuind în ecuația (1) $Z_1 = 1$ se obține pentru săgeți expresia

$$Z_i = \frac{\Delta_{i-1}}{t_{1,2} t_{2,3} \dots t_{i-1,i}}. \tag{10}$$

Determinanții Δ_i și coeficienții $t_{j,j+1}$ fiind calculați, obținerea formei proprii a vibrației devine o problemă simplă de calcul. Deoarece coeficienții $t_{j,j+1}$ sînt întotdeauna pozitivi (pentru $\theta < \omega_1$) rezultă că Z_i va fi întotdeauna de același semn cu Δ_{i-1}.

★

Calculul frecvențelor proprii ale vibrațiilor superioare se conduce analog primei frecvențe. Singura condiție necesară este ca pentru θ (respectiv kl) ales, toți coeficienții r_{jj} să fie diferiți de zero.

Primul dintre coeficienții de pe diagonala determinantului (2) care se anulează, este r_{11} (numerotarea s-a făcut începînd cu etajul superior).

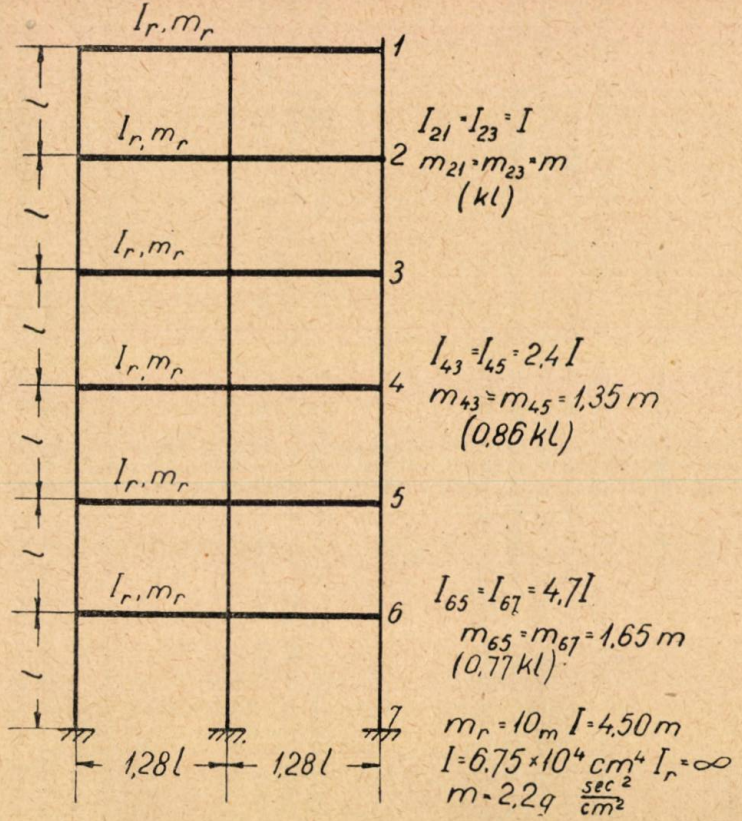


Fig. 4

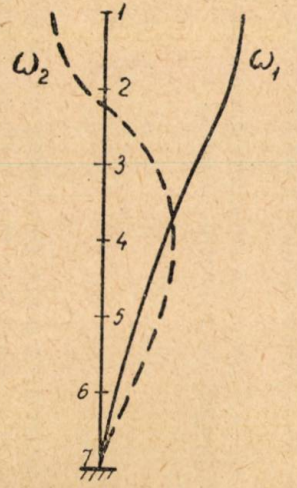


Fig. 5

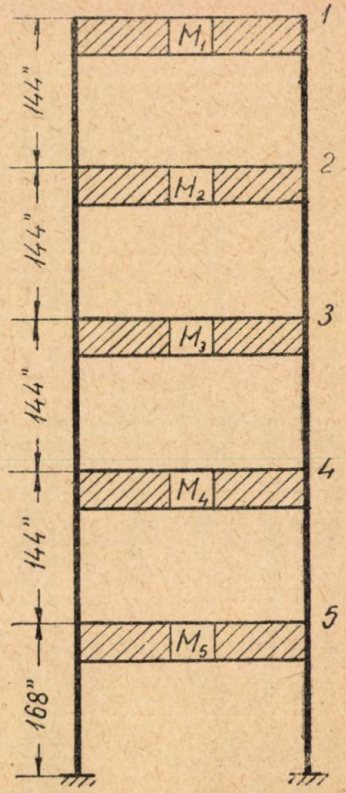


Fig. 6

Teoretic se pot calcula oricîte frecvențe, practic pentru cadrele cu 4—12 etaje se pot calcula primele 3—4 frecvențe. Calculul frecvențelor superioare se face mai greu, deoarece pentru anumite valori ale lui kl coeficienții de tipul r_{jj} pot fi mici și deci coeficienții de transmitere t_{ik} devenind mari eroriile probabile pot crește.

Cînd se calculează frecvențele superioare, minorii determinantului schimbă de semn în dreptul fiecărui punct fix al vibrației respective. În felul acesta după poziția primului punct fix (primul minor care se anulează) ne putem da seama dacă valoareal kl cu care s-a pornit a fost bine aleasă.

În cazul formelor proprii corespunzătoare frecvențelor superioare deplasările Z_i se calculează tot cu ajutorul formulei (10).

★

Pentru a ilustra modul cum se conduc calculele prin metoda propusă s-au făcut cîteva exemple.

În tablourile nr. 1, 2, 3 și 4 sînt cuprinse calculele cadrului cu șase nivele din figura 4 cu momente de inerție și mase variabile pe înălțime.

S-au calculat și primele două forme ale vibrațiilor a căror reprezentare este dată în figura 5.

Metoda este aplicabilă și în cazul cînd se consideră masele concentrate la nivelul planșeelor (neglijînd masele stîlpilor). În această situație coeficienții F și E sînt egali între ei și au valoarea 12.

Din exemplele calculate a rezultat că această aproximație este acceptabilă în calculul primei frecvențe (la cadre cu mai mult de 4 etaje) dînd însă erori în cazul frecvențelor superioare.

Tablourile nr. 5, 6, 7 și 8 cuprind calculul cadrului din figura 6, rezolvat în lucrarea [5]. Este important de observat că metoda propusă conduce la o rezolvare mai rapidă avînd un sens fizic clar și elimină, în același timp, erorile existente în metoda lui M. G. Salvadori în ceea ce privesc frecvențele superioare.

Considerarea diafragmelor de rigidizare

Studiul vibrațiilor cadrelor în ipotezele enunțate mai sus, permit să se ia în considerare și influența diafragmelor de rigidizare (beton, zidărie de cărămidă etc.) asupra frecvenței vibrațiilor proprii.

În general, în calcule se neglijează influența pe care aceste diafragme o au asupra modului de comportare a întregii construcții, ci se consideră zidăria ca o masă ce încarcă construcția. În calculele ce urmează s-a presupus că zidurile sînt legate de rigle și că se opun la deformația lor. S-a presupus deasemenea că deformația zidului (sau a diafragmelor de beton) se produce ca în calculul grinzilor cu pereți subțiri, adică ele se deformează numai prin lunecări. Această ipoteză de calcul acceptată mai în toate calculele asupra sistemelor cu pereți subțiri [9] corespunde întru totul modului de comportare a umpluturilor de zidărie și chiar în cazul diafragmelor subțiri de beton armat.

Pentru a urmări care este influența acestor diafragme s-au calculat primele două frecvențe ale vibrațiilor proprii pentru cadrul din figura 7 în trei ipoteze

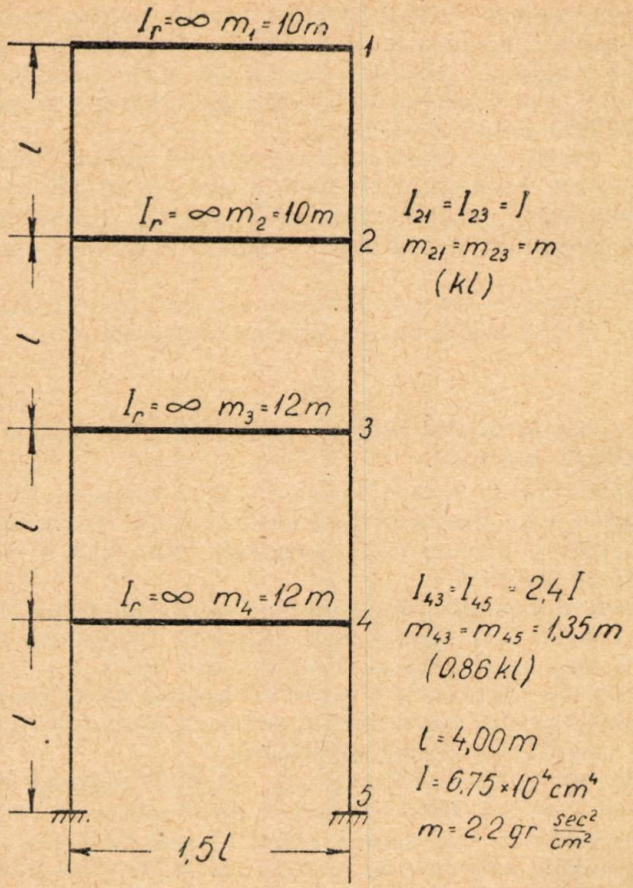


Fig. 7

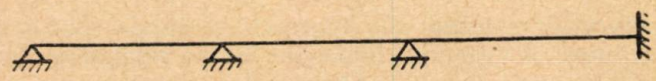


Fig. 8

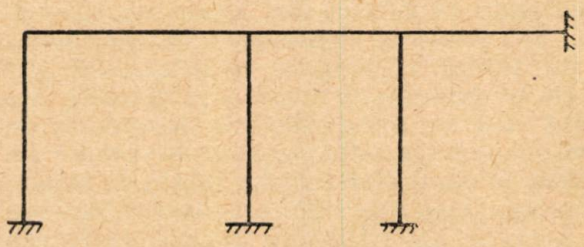


Fig. 9

a) Fără a considera influența diafragmei de rigidizare, adică în situația de cadru, așa cum se calculează obișnuit cu observația că se introduce în calcul masa proprie;

b) Considerînd o difragmă de zidărie de jumătate de cărămidă;

c) Considerînd o diafragmă de beton ușor armat de 6 cm. grosime.

Pentru ipotezele *b*) și *c*) în mersul calculului nu au survenit transformări cu excepția modificării coeficienților de forma r_{ij} și anume, la coeficienții calculați în ipoteza *a* s-au adăugat o serie de termeni r'_{ij} care țin seama de reacțiunile diafragmei la o deplasare unitară

$$r'_{i,i+2} = \frac{E_{st} I_{st}^{(i,i+1)}}{l^3_{i,i+2}} \left[\frac{l_r \, d \, l^2}{2 (1 + \mu) I_{st}} \cdot \frac{E_{diaf.}}{E_{st}} \right]_{i,i+1}, \tag{11}$$

$$r'_{i,i} = r'_{i,i-1} + r'_{i,i+1} . \tag{12}$$

În acest caz dacă $P_i(t)$ sînt forțele dinamice funcție de timp care acționează la nivelul fiecărui etaj se poate descompune vibrația întreținută după formele proprii astfel

$$y_i = \Sigma u_{ik} \cdot f_k(t), \tag{13}$$

unde u_{ik} este deplasarea punctului i corespunzătoare frecvenței k, iar $f_k(t)$ se determină cu ajutorul formulei

$$f_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \Psi(U) \sin \omega_k (t - U) \, du, \tag{14}$$

$$\Psi_k(U) = \frac{\sum_0^n P_i(U) u_{ik}}{\Sigma m_i u_{ik}^2} . \tag{15}$$

În cazul cînd sarcina excitatoare este armonică și are frecvența $\theta < \omega_1$ calculul eforturilor se face mai simplu prin metoda aproximațiilor succesive.

★

Metoda prezentată poate fi aplicată în cazul tuturor tipurilor de construcție a căror ecuații în metoda deformațiilor are forma (1): grinzi continue, cadre deschise cu rigle elastice etc.(fig. 8 și 9) precum și în studiul stabilității acestui gen de cadre.

Concluziile finale sînt cuprinse în tabloul nr. 9.

★

Calculul vibrațiilor întreținute ale acestor construcții se poate efectua suficient de simplu dacă se cunosc formele proprii ale vibrațiilor [10].

★

Caracterul simplu al metodei propuse permite ca ea să poată fi utilizată în calculul de proiectare.

Primită la redacție la 10 decembrie 1955.

Tabloul nr. 1

Calculul coeficienților

r	Valoarea	r	Valoarea
$r_{21} = r_{12}$	$-3\frac{EI}{l^3} F\ (kl)$	r_{33}	$7{,}2\frac{EI}{l^3} E\ (0{,}86\ kl) + 3\frac{EI}{l^3} E\ (kl) - 25{,}6\ (kl)\frac{4\ EI}{l^3}$
r_{11}	$3\frac{EI}{l^3} E\ (kl) - 25{,}6\ (kl)\frac{4\ EI}{l^3}$	$r_{54} = r_{45}$	$-7{,}2\frac{EI}{l^3} F\ (0{,}86\ kl)$
$r_{32} = r_{23}$	$-3\frac{EI}{l^3} F\ (kl)$	r_{44}	$14{,}4\frac{EI}{l^3} E\ (0{,}86\ kl) - 25{,}6\ (kl)\frac{4\ EI}{l^3}$
r_{22}	$6\frac{EI}{l^3} E\ (kl) - 25{,}6\ (kl)\frac{4\ EI}{l^3}$	$r_{55} = r_{65}$	$-14{,}1\frac{EI}{l^3} F\ (0{,}77\ kl)$
$r_{43} = r_{34}$	$-7{,}2\frac{EI}{l^3} F\ (0{,}86\ kl)$	r_{55}	$14{,}1\frac{EI}{l^3} E\ (0{,}77\ kl) + 7{,}2\frac{EI}{l^3} E\ (0{,}86\ kl) - 25{,}6\ (kl)\frac{4\ EI}{l^3}$
		$r_{66} =$	$28{,}2\frac{EI}{13}(0{,}77\ kl) - 25{,}6\ (kl)\frac{4\ EI}{l^3}$

Tabloul nr. 2

Coeficienții de transmiterea deformațiilor

t	$\theta_1 = 5{,}5\frac{1}{2\pi s}$	$\theta_2 = 12{,}67\frac{1}{2\pi s}$		t	$\theta_1 = 5{,}5\frac{1}{2\pi s}$	$\theta_2 = 12{,}67\frac{1}{2\pi s}$	
	$kl = 0{,}68$	$kl = 1{,}02$	$kl = 1{,}04$		$kl = 0{,}68$	$kl = 1{,}02$	$kl = 1{,}04$
t_{12}	−1,165	−4,73	−9,68	t_{21}	−0,541	−0,851	−0,982
t_{23}	−0,541	−0,851	−0,982	t_{32}	−0,313	−0,392	−0,424
t_{34}	−0,740	−0,935	−1,000	t_{43}	−0,524	−0,617	−0,640
t_{45}	−0,524	−0,617	−0,640	t_{54}	−0,352	−0,381	−0,397
t_{56}	−0,681	−0,733	−0,779	t_{65}	−0,516	−0,564	−0,568

Tabloul nr. 3

Calculul primelor două frecvențe

Expresia Δ_n	θ_1			θ_2					
	$kl = 0{,}68$			$kl = 1{,}02$			$kl = 1{,}04$		
	$\sum a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}\Delta_{n-2}$	Δ_n	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}\Delta_{n-2}$	Δ_n	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}\Delta_{n-2}$	Δ_n
$\Delta_2 = 1 - a_{12}$	0,630	—	0,370	4,04	—	−3,04	9,52	—	−8,52
$\Delta_3 = \Delta_2 - a_{23}$	0,169	—	0,201	0,333	—	−3,337	0,416	—	−8,936
$\Delta_4 = \Delta_3 - a_{34}\Delta_2$	0,388	0,144	0,057	0,577	−1,764	−1,573	0,640	−5,460	−3,476
$\Delta_5 = \Delta_4 - a_{45}\Delta_3$	0,184	0,037	0,020	0,235	−0,786	−0,787	0,254	−2,271	−1,205
$\Delta_6 = \Delta_5 - a_{56}\Delta_4$	0,352	0,020	0	0,416	−0,656	−0,131	0,441	−1,532	+0,327

rezultă $(kl)_1 = 0{,}68$ și $(kl)_2 \simeq 1{,}025$

Tabloul nr. 4

Formele proprii

Z	$\omega_1 = 5{,}5\ \frac{1}{2\pi\ \text{s}}$	$\omega_2 = 12{,}62\ \frac{1}{2\pi\ \text{s}}$
Z_1	1	1
Z_2	0,859	0,211
Z_3	0,588	−0,748
Z_4	0,431	−0,889
Z_5	0,233	−0,678
Z_6	0,121	−0,405
Z_7	0,000	0

Tabloul nr. 5

Coeficienții (r) *)

M $\frac{(\text{livre s}^2)}{\text{țoli}}$ masele concentrate la nivelul fiecărui etaj	r_{ii}	$\frac{(\text{livre})}{\text{țoli}}$	$r_{ij} = r_{ji}$	$\frac{(\text{livre})}{\text{țoli}}$
M_1 11,65	r_{11}	6828,35	r_{12}	6 840
M_2 15,53	r_{22}	1484,47	r_{23}	7 980
M_3 15,53	r_{33}	17084,47	r_{34}	9 120
M_4 15,53	r_{44}	19364,47	r_{45}	10 260
M_5 15,53	r_{55}	21644,47	r_{56}	11 400

*) Valorile cuprinse în acest tablou s-au obținut prin prelucrarea rezultatelor din tabloul nr. 1 al lucrării [5].

Tabloul nr. 6

Coeficienții de transmitere a deplasărilor

t	$7{,}557\,\frac{1}{2\pi\,s}$	$20{,}62\,\frac{1}{2\pi\,s}$	$31{,}78\,\frac{1}{2\pi\,s}$	t	$7{,}557\,\frac{1}{2\pi\,s}$	$20{,}62\,\frac{1}{2\pi\,s}$	$31{,}78\,\frac{1}{2\pi\,s}$
t_{12}	−1,107751	−3,6190	+1,3892	t_{21}	−0,490917	−0,8319	+7,9442
t_{23}	−0,572737	−0,9703	+9,2682	t_{32}	−0,492195	−0,7599	−5,6237
t_{34}	−0,562508	−0,8683	−6,4271	t_{43}	−0,493157	−0,7135	−2,4655
t_{45}	−0,554802	−0,8027	−2,7737	t_{54}	−0,493908	−0,6811	−1,7160

Tabloul nr. 7

Verificarea primelor trei frecvențe

Expresia Δ_n	$\omega_1 = 7{,}557\,\frac{1}{2\pi\,s}$			$\omega_2 = 20{,}62\,\frac{1}{2\pi\,s}$			$\omega_3 = 31{,}78\,\frac{1}{2\pi\,s}$		
	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}\,\Delta_{n-2}$	Δ_n	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}\Delta_{n-2}$	Δ_n	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1.n}\,\Delta_{n-2}$	Δ_n
$\Delta_2 = 1 - a_{12}$	0,5438	—	0,4562	3,0107	—	−2,0107	11,0361	—	− 10,0361
$\Delta_3 = \Delta_2 - a_{23}$	0,2819	—	0,1743	0,7373	—	−2,7480	−52,0216	—	+ 42,0755
$\Delta_4 = \Delta_3 - a_{34}\Delta_2$	0,2774	0,1265	0,0478	0,6195	−1,2456	−1,5024	15,8260	−158,812	+200,8875
$\Delta_5 = \Delta_4 - a_{45}\Delta_3$	0,2740	0,0478	0,00	0,5467	−1,5024	0	47,5967	200,3130	$\simeq 0$

Tabloul nr. 8

Modurile de deformare *)

Z	$\omega_1 = 7{,}557\,\frac{1}{2\pi\,s}$	$\omega_2 = 20{,}62\,\frac{1}{2\pi\,s}$	$\omega_3 = 31{,}78\,\frac{1}{2\pi\,s}$
Z_1	1	−1	1
Z_2	0,9027	−0,2763	−0,7198
Z_3	0,7191	0,5726	−0,7794
Z_4	0,4880	0,9012	0,5086
Z_5	0,2414	0,6138	0,8757
Z_6	0	0	0

*) Aceleași rezultate au fost obținute în lucrarea [5], tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 9

Tabloul vibrațiilor proprii

Ipoteza de calcul	prima frecvență $\frac{1}{2\pi s}$	diferența %	a doua frecvență $\frac{1}{2\pi s}$	diferența % față de ipoteza (*a*)
(*a*)	8,56	0	13,97	0
(*b*)	9,07	5,95	15,24	9,09
(*c*)	9,72	13,55	17,10	22,44

О РАСЧЕТЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЯРУСНЫХ РАМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы показывают способ расчета частот собственных колебаний рам в предположении, что ригели бесконечно жестки.

Способ этот дает возможность вычислить собственные формы колебаний, что позволяет вычислить сравнительно легко и вынужденные колебания.

Приводится несколько примеров расчета. В некоторых из них исследуется и влияние жесткости диафрагм или кладки на частоту собственных колебаний.

À PROPOS DU CALCUL DES FRÉQUENCES DES VIBRATIONS PROPRES DES CADRES ÉTAGÉS

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, les auteurs présentent une méthode de calcul des fréquences des vibrations propres des cadres, dans l'hypothèse des poutres horizontales infiniment rigides.

La méthode offre la possibilité de calculer les formes propres de la vibration, ce qui permet le calcul des vibrations entretenues, dans des conditions relativement simples.

On donnes aussi quelques exemples de calcul. Pour certains de ces calculs, on a également étudié l'influence de la rigidité des diaphragmes ou de la maçonnerie sur la fréquence des vibrations propres.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, *Théorie des vibrations.* Paris-Liége, 1947.
2. K. S. Zavriev, *Dinamika sooruzenii*, Moscova, 1946.
3. S. Răutu și M. Ifrim, *Unele probleme ale vibrațiilor construcțiilor cu mai multe etaje.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 3—4, 1955, p. 457.
4. Korcinski, *Kolebania vîsotnih zdanii.* Moscova, 1953.

5. M. G. Salvadori, *Earthquake Stresses in Shear Buildings*. American Society of Civil Engineers, vol. 119, New York, 1954.
6. S. Răutu, *Calculul vibraţiilor cadrelor prin metoda aproximaţiilor succesive*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, nr. 1, 1956 p. 151.
7. V. Kolousek, *Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen*. Leipzig, 1953.
8. I. V. Ananiev, *Spravocinik po rasciotu sobstbennth kolebanii uprughih sistem*. Moscova, 1946.
9. A. A. Umanski, *Prostranstvennte sistemt*. Moscova, 1948.
10. Ponomarev, *Asnovt sovremennth metodov rasceta na procinosti v maşinostroenti*. Moscova 1952.

S. N. NIKIFOROV, *Teoria uprugosti i plasticinosti* (Teoria elasticității și plasticității), Moscova, 1955, 283 pag.

Lucrarea lui S. N. Nikiforov cuprinde următoarele părți:

I. *Ecuațiile de bază ale teoriei elasticității*

II. *Aplicarea ecuațiilor de bază ale teoriei elasticității la cîteva probleme.*

III. *Problema plană a teoriei elasticității.*

IV. *Aplicarea teoriei elasticității.*

V. *Elemente de teoria plasticității.*

În prima parte a lucrării, autorul prezintă problemele principale ale teoriei tensiunilor, teoriei deformațiilor, făcînd legătura între tensiuni și deformații. Față de alți autori, Nikiforov insistă deosebit de mult asupra semnificației fizice a fiecărei relații matematice. Autorul are în vedere faptul că lucrarea se adresează și inginerilor și caută în acest scop să intre mai mult în intimitatea fenomenelor, păstrînd tot timpul legătura cu latura matematică a problemei. Meritul lucrării constă și în aceia că autorul deși diluează mai mult explicarea unor probleme, vrînd să fie accesibil unei pături mai largi de cititori, nu reduce nivelul științific al lucrării. Aceasta face ca lucrarea lui N. S. Nikiforov să fie folosită atît de cercetătorii cît și de inginerii care se preocupă de problemele teoriei elsticității și plasticității.

Partea a doua a lucrării, prezintă modul în care pot fi aplicate ecuațiile de bază ale teoriei elasticității în generalizarea unor probleme tehnice.

Particularizînd problema spațială a teoriei elasticității, autorul prezintă în partea a treia a lucrării, problema plană a teoriei elasticității. Sînt deduse, din relațiile generale, toate relațiile privitoare la tensiuni și deformații pentru cazul plan. Sînt prezentate metode matematice moderne pentru soluționarea problemelor plane. Lucrarea abundă în exemple practice care pot fi la îndemîna oricărui inginer.

Partea a patra a lucrării prezintă cîteva aplicații ale teoriei elasticității pentru cazul încovoierii corpurilor cu profile complicate, încovoierea plăcilor, problema analogiei cu membrana etc.

Ultima parte a lucrării este dedicată prezentării cîtorva noțiuni fundamentale privitoare la teoria plasticității.

Analizată în ansamblu, lucrarea lui N. S. Nickiforov este deosebit de folositoare rezolvării a o serie de probleme tehnice. Tratînd problemele la un înalt nivel științific indicînd metode matematice moderne pentru rezolvarea problemelor de teoria elasticității și plasticității, lucrarea poate fi folosită de cercetătorii din aceste domenii. Ea este totodată o exemplificare a modului în care trebuie realizată îmbinarea dintre aspectul fizic și cel matematic al problemelor de teoria elasticității. Exemplele practice ușurează înțelegerea problemelor și face ca lucrarea să fie accesibilă unui număr mare de cititori.

Adrian Lezer

I. BABUŠKA, K. REKTORYS, F. VYČICHLO, *Matematická theorie rovinné pružnosti* (Teoria matematică a elasticității plane), Praga, 1955, 528 pag.

Acest volum, alcătuit în cadrul Academiei de științe a Republicii Cehoslovace, cuprinde o trecere în revistă a problemelor noi care se pun în cadrul teoriei elasticității plane.

Într-un capitol introductiv se trec pe larg în revistă diverse aspecte ale problemei plane. După ce se face distincția între stare de tensiune plană și stare de deformație plană, se studiază diversele forme pe care le poate lua un domeniu plan, precum și diversele proprietăți de conexiune. Apoi se arată posibilitățile de găsire a stării de tensiune și a stării de deformație, diferitele relații suplimentare care intervin în cazul liniar sau neliniar, precum și unele posibilități de

integrare. Remarcăm expunerea clară și riguroasă a acestui capitol care cuprinde de fapt numai chestiuni clasice.

Capitolul II cuprinde formularea problemei plane și diversele metode de rezolvare a ei, prin intermediul funcției lui Airy sau folosind funcțiile de variabilă complexă. Se insistă asupra posibilității de a pune condițiile pe contur în diverse cazuri. Se arată influența diverselor încărcări locale pe contur și posibilitatea de exprimare a lor. Remarcăm în special un studiu detaliat pentru domenii multiplu conexe.

Se dau și cîteva exemple elementare clasice și se arată posibilitatea de rezolvare a problemei în cazul unor forțe masice provenind din greutatea proprie sau a forțelor de inerție provenind dintr-o mișcare de rotație. Se arată apoi ce particularități prezintă rezolvarea problemei în cazul unui domeniu infinit.

Capitolul III se ocupă de rezolvarea problemei în cazul unor domenii finite. Se tratează pe larg metodele de soluționare date de Mushelișvili și de Lauricella și Șerman. Autorii se ocupă de cîteva cazuri practice atît de stare de tensiune plană cît și de stare de deformație plană. Cu această ocazie se cercetează și limitele de valabilitate ale principiului lui B. de St. Venant. Se trec apoi în revistă diverse metode aproximative care se pot aplica practic (în cazul unor contururi complicate de pildă) și se precizează gradul de valabilitate al soluțiilor obținute.

În capitolul IV autorii arată cum se poate folosi metoda transformărilor conforme, reducînd problema dată la rezolvarea unei probleme analoge pe o circonferință, cu alte condiții pe contur.

Capitolul V conține unele dezvoltări matematice, în special din domeniul funcțiilor de variabilă complexă, utile înțelegerii și aplicării metodelor tratate în carte.

Volumul prezentat de autorii cehi are merite incontestabile. El cuprinde cele mai noi studii în problema respectivă, bazate în general pe metoda funcțiilor de variabilă complexă. Remarcăm faptul că autorii au căutat să lege atît cercetările clasice, cît și studiile personale pe care le-au întreprins de probleme practice și au căutat încontinuu să dea exemple care să corespundă cu cele întîlnite în realitate. Figurile, care în general lipsesc la lucrări de acest gen, sînt numeroase și ilustrează foarte bine textul corespunzător.

P. P. Teodorescu

AL. I. CIȘMIGIU și P. V. VERNESCU, *Aplicații ale teoriei elasticității în construcție-plăci curbe și plane* E.S.A.C., București 1955, 375 pag.

Lucrarea se adresează inginerilor constructori și constituie prezentarea pentru prima oară în limba română a problemelor legate de proiectarea și calculul plăcilor subțiri, cilindrice și plane. Conținutul lucrării este împărțit în cinci capitole :

Capitolul I prezintă teoria de încovoiere a plăcilor cilindrice, circulare într-o dezvoltare dată de V.Z. Vlasov în care se dau elementele necesare pentru obținerea formulelor plăcilor cilindrice circulare indicîndu-se firul conducător de rezolvare și pentru alte curbe directoare. Se trece apoi la studiul sistematic al problemei examinîndu-se echilibru static, studiul geometric al deformațiilor, legătura dintre deformații și eforturi. Pe baza rezultatelor obținute se face o analiză asupra simplificărilor posibile în cazul plăcilor foarte subțiri, cazul ce mai des întîlnit în practica inginerului constructor. În continuare se trece la formulările teoriei tehnice a plăcilor cilindrice circulare subțiri, în deplasări și mixtă. În încheiere se arată limitele de aplicare a rezultatelor obținute din care (prin simplificări) se deduc formulele de bază în calculul : membranelor cilindrice, plăcilor plane, rezervoarelor și silozurilor circulare. De asemenea se prezintă o clasificare calitativă a învelitorilor cilindrice bazată pe raportul dintre lungime și deschidere.

Capitolul II, tratează teoria de membrană a plăcilor cilindrice. Capitolul începe prin analiza stărilor de solicitare interioară posibilă în cazul plăcilor cilindrice, făcîndu-se o serie de considerații asupra teoriei de membrană din care au rezultat condițiile de rezistență ale solicitării de membrană precum și condițiile impuse reazemelor.

Se examinează și cazul învelitorilor pe mai multe deschideri foarte des întîlnite în practică, precum și problema determinării deplasărilor. Capitolul se încheie cu examinarea condițiilor în care teoria de membrană poate constitui o bază de calcul, legată de clasificarea făcută și de modul de rezemare.

Capitolul III, se ocupă cu problema plăcilor plane. Într-o expunere prescurtată se trece în revistă atît partea clasică a problemei cît și unele rezultate noi importante pentru proiectare. Se dezvoltă problema plăcii circulare pentru diferite încărcări și rezemări cu numeroase tabele și diagrame.

Expunerea diferitelor soluții de calcul pentru placa dreptunghiulară este făcută cu exemplificarea cazurilor caracteristice ce pot fi rezolvate. În încheierea capitolului se dau o serie de tabele pentru calculul curent privind placa dreptunghiulară cu diferite situații de încărcare și rezemare, deasemenea și pentru placa triunghiulară și trapezoidală.

Capitolul IV, cuprinde teoria rezervoarelor și a silozurilor circulare. Teoria este dezvoltată într-un sipirit modern bazat pe lucrarea lui

O v e c i k i n. Ecuația diferențială este obținută însă prin particularizarea formulelor din capitolul I. Se tratează determinarea și interpretarea constantelor de integrare, deformațiile cilindrului circular închis solicitat de presiunea hidrostatică sau diferite solicitări pe contur, pentru a obține relațiile necesare la calculul rezervoarelor.

În continuare se arată simplificările ce se pot face în cazul cilindrilor lungi și se expun apoi metodele generale de calcul: metoda forțelor și metoda deformațiilor pentru calculul rezervoarelor.

Capitolul V, pe care-l considerăm cel mai important cuprinde metode de calcul a învelitorilor cilindrice prin teoria de încovoiere. Se dau procedeele de calcul pentru diferitele forme de învelitori conform clasificării făcute, și anume: lungi, medii și scurte, după ce se face în prealabil o analiză a modului în care apar eforturile de încovoiere în plăcile curbe pentru diferite forme caracteristice de învelitori și se expun critic neajunsurile teoriei de membrană.

Pentru învelitorile lungi sau medii cu rigidizări transversale se prezintă teoria elaborată de V. Z. V l a s o v, corespunzătoare structurilor cu pereți subțiri. Se indică pe scurt calculul diafragmelor de rigidizare și se dă un exemplu de calcul pentru o construcție șhed de 24 m cu console.

La rezolvarea învelitorilor de lungime medie se expune teoria învelitorilor prismatice și cilindrice după V. Z. V l a s o v corespunzătoare acestui caz, dîndu-se toate tabelele necesare aplicațiilor practice. Paragraful se încheie cu rezolvarea unui cilindru ce acoperă o suprafață în plan de 45 × 45 m rezemat pe generatoarele de margine.

Învelitorile cilindrice scurte sînt tratate prin metoda generalizată a lui M. L e v y corespunzătoare cilindrilor circulari.

Ultimul paragraf este rezervat expunerii considerentelor care fac necesară o clasificare mai detaliată a cilindrilor în funcție de modul lor caracteristic de comportare. Legat de aceasta se expun cîteva principii de proiectare menite să dea o orientare de ansamblu în această problemă dificilă.

Partea originală a lucrării o constituie încercarea de a concretiza modul real de comportare a diferitelor tipuri de învelitori și a scoate în evidență elementele lor caracteristice propunîndu-se o clasificare. Autorii își bazează concluziile pe rezultatele teoretice și pe observațiile rezultate din practica construcțiilor existente.

Poziția realistă și critică față de teoria de membrană (mult răspîndită în rîndurile tehnicienilor), arătarea limitelor ei de valabilitate, precum și cazurile în care este greșit folosită constituie un factor pozitiv al lucrării.

Lucrarea constituie o contribuție adusă la sintetizarea acestor probleme ca rezultat a experienței inginerești de proiectare cît și a celei didactice din cadrul catedrei de rezistența materialelor a Institutului de construcții din București.

Mihail Ifrim

ABONAMENTELE SE FAC PRIN FACTORII POȘTALI
ȘI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI
ȘI INSTITUȚII

F2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL VII
OCTOMBRIE—DECEMBRIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL VII

OCTOMBRIE — DECEMBRIE 1956

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VII, nr. 4 Octombrie-decembrie 1956

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

AEROMECANICĂ

Pag.

E. CARAFOLI şi Ş. SĂNDULESCU, Influenţa bracajului aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii triunghiulare în regim supersonic 815

Al. MARINESCU, Formulele undei mixte pentru sistemele liniare stabile . . 841

V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra arderii laminare în camere de secţiune variabilă 851

E. LARISCH, Propagarea arderii în canale cu secţiune variabilă 863

HIDROMECANICĂ

T. OROVEANU, Cîteva probleme de scurgere printr-un mediu poros cu variaţie unidimensională a permeabilităţii 875

M. KAHAN, Studiul scurgerilor în albii naturale cu ajutorul modelării în curenţi de aer 881

CRISTIAN STĂNESCU şi LUCIAN DUMITRESCU, Mişcarea unidimensională a două fluide vîscoase grele separate printr-o suprafaţă plană . . 891

REZISTENŢA MATERIALELOR

N. S. PÎRVULESCU, Instabilitatea prăjinilor grele în rotaţie 901

V. VISARION, Calculul elastic al învelitorilor subţiri în formă de elicoid drept 925

D. MORARU, Stabilirea stării de efort în grinzi pereţi, prin metoda analogiei cu o reţea 937

A. PETRE, C. STĂNESCU şi L. LIBRESCU, Asupra structurilor ortotrope optime 955

C. C. POPOVICI, O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor 971

M. MIŞICU, Notă asupra unei formulări a problemei spaţiale în cazul dinamic al teoriei corpurilor elastice 995

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

N. VASILESCU-KARPEN, Aderenţa fierului la beton în betonul armat. Determinarea experimentală a aderenţei şi a contracţiei betonului 1001

I. DUMITRESCU şi V. VISARION, Influenţa compoziţiei mineralogice a cimentului asupra comportării grinzilor de beton armat la încovoiere . . 1013

MECANICA PĂMÎNTURILOR

Pag.

R. BALLY şi I. ANTONESCU, Contribuţii la problema electrosilicatării pămînturilor 1037

TEHNOLOGIA MATERIALELOR

GH. I. PANĂ, M. DUPU şi S. OCSKAY, Proprietăţile fizice, mecanice şi tehnologice ale lemnului speciilor exotice 1057

REFERATE TEHNICE ŞI ŞTIINŢIFICE

T. OROVEANU, Dezvoltarea cercetărilor de mecanica fluidelor şi aerodinamică în ţara noastră 1073

R. N. VARLAN, Un aparat de laborator pentru determinarea modulului de deformaţie al pămînturilor 1087

RECENZII 1099

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene etc.).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică.

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра и пр.).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным продлемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем, составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотруднических работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Букарест ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VII, № 4 Октябрь—декабрь 1956

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА Стр.

Е. КАРАФОЛИ и С. САНДУЛЕСКУ, Влияние отклонения элеронов на аэродинамические характеристики треугольного крыла в сверхзвуковом режиме 815

А. МАРИНЕСКУ, Формулы волны смешанного типа для устойчивых линейных систем 841

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, К вопросу о ламинарном горении в камерах переменного сечения 851

Е. ЛАРИШ, Распространение горения в каналах с переменным сечением . 863

ГИДРОМЕХАНИКА

Т. ОРОВЯНУ, Несколько задач, относящихся к протеканию через пористую среду с одноразмерно изменяющейся проницаемостью 875

М. КАГАН, Исследование течения в натуральных руслах путем моделирования его в воздушных струях 881

К. СТАНЕСКУ и Л. ДУМИТРЕСКУ, Одноразмерное движение двух тяжелых вязких жидкостей, разделенных плоской поверхностью 891

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Неустойчивость тяжелых бурильных труб при вращении 901

В. ВИССАРИОН, Расчет упругости тонких покрытий, имеющих форму прямого геликоида 925

Д. МОРАРУ, Определения усилий в балках-стенах путем проведения аналогии с сетью 937

А. ПЕТРЕ, К. СТАНЕСКУ и И. ЛИБРЕСКУ, Об оптимальных ортотропных структурах 955

К. К. ПОПОВИЧ, Общая теория метода распределения усилий 971

М. МИШИКУ, О формулировке пространственной задачи в динамическом случае теории упругих тел 995

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Н. ВАСИЛЕСКУ-КАРПЕН, Сцепление железа с бетоном в железобетоне. Экспериментальное определение сцепления и усадки бетона 1001

И. ДУМИТРЕСКУ и В. ВИССАРИОН, Влияние минералогического состава цемента на поведение железобетонных балок при изгибе 1013

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

Р. БАЛЛИ и И. АНТОНЕСКУ, К вопросу электросиликатизации грунтов . 1037

ТЕХНОЛОГИЯ МАТЕРИАЛОВ

Г. И. ПАНА, М. ДУПУ, и С. ОСКАИ, Физические, механические и технологические свойства древесины экзотических пород 1057

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Т. ОРОВЯНУ, Развитие исследований в РНР в области механики жидкостей и аэродинамики 1073

Р. Н. ВАРЛАН, Лабораторный прибор для определения модуля деформации грунтов 1087

РЕЦЕНЗИИ 1099

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VII, n° 4 Octobre-décembre 1956

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

AÉROMÉCANIQUE Page

E. CARAFOLI et Ş. SĂNDULESCU, Influence du braquage des ailerons sur les caractéristiques aérodynamiques de l'aile triangulaire en régime supersonique 815

AL. MARINESCU, Formules de l'onde mixte pour les systèmes linéaires stables 841

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur la combustion laminaire dans les chambres à section variable 851

E. LARISCH, Propagation of flames in channels with variable cross section 863

HYDROMÉCANIQUE

T. OROVEANU, Quelques problèmes d'écoulement à travers un milieux poreux avec variation unidimensionnelle de la perméabilité 875

M. KAHAN, Étude des écoulements dans des lits naturels à l'aide du modelage dans des courants d'air 881

CRISTIAN STĂNESCU et LUCIAN DUMITRESCU, Mouvement unidimensionnel de deux fluides visqueux pesants, séparés par une surface plane 891

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

N. S. PÎRVULESCU, L'instabilité de rotation des tiges lourdes 901

V. VISARION, Calcul élastique des couvertures minces en forme d'hélicoide droit 925

D. MORARU, Détermination de l'état d'effort dans les poutres-paroi par la méthode de l'analogie avec un réseau 937

A. PETRE, C. STĂNESCU et L. LIBRESCU, Sur les meilleures structures orthotropes 955

C. C. POPOVICI, Une théorie générale de la méthode de distribution des efforts 971

M. MIŞICU, Note sur une énonciation du problème spatial dans le cas dynamique de la théorie des corps élastiques. 995

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

N. VASILESCU-KARPEN, L'adhérence du fer au béton dans le béton armé. Détermination expérimentale de l'adhérence et de la contraction du béton 1001

I. DUMITRESCU et V. VISARION, Influence de la composition minéralogique du ciment sur le comportement des poutres en beton armé soumises à la flexion 1013

MÉCANIQUE DES SOLS Pag.

R. BALLY et I. ANTONESCU, Contribution au problème de l'électrosilicatisation des sols 1037

TECHNOLOGIE DES MATÉRIAUX

GH. I. PANĂ, M. DUPU şi S. OCSKAY, Les propriétés physiques, mécaniques et technologiques des essences exotiques 1057

NOTES TECHNIQUES ET SCIENTIFIQUES

T. OROVEANU, L'essor des recherches dans le domaine de la mécanique des fluides et de l'aérodynamique dans la République Populaire Roumaine . 1073

R. N. VARLAN, Un appareil de laboratoire pour la détermination du module de déformation des sols 1087

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1099

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.,

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment:

— *Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).*

— *Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énérgie éolienne).*

— *Construction mécanique (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces).*

— *Tehnique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation de l'ultrason et des isotopes radio-actifs en technique).*

— *Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique du sol, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).*

— *Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliograhiques. seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doiven être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician E. CARAFOLI — redactor responsabil; academician N. PROFIRI; A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.; C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. BĂRGLĂZAN, membrn corespondent al Academiei R.P.R.; R. BOGDAN; N. TIPEI; M. ARCAN.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

AEROMECANICĂ

INFLUENŢA BRACAJULUI ARIPIOARELOR ASUPRA CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE ARIPII TRIUNGHIULARE ÎN REGIM SUPERSONIC

DE

E. CARAFOLI şi Ş. SĂNDULESCU

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Vom considera o aripă triunghiulară subţire OAB prevăzută cu aripioare triunghiulare (fig. 1) şi ne propunem să determinăm influenţa bracajului aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii în regim supersonic.

Să presupunem că aripa nu are incidenţă, iar aripioarele sînt bracate de unghi β în jurul şarnierelor O_1D şi O_2C.

În această situaţie, în punctele O_1 şi O_2 apar două conuri MACH care pot acoperi aripioarele O_1DB şi O_2AC parţial sau integral.

Mişcările din interiorul celor două conuri sînt independente atît timp cît conurile MACH nu se întretaie, situaţie în care problema aripioarelor poate fi tratată separat.

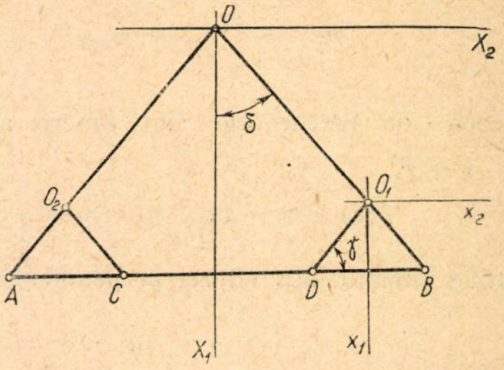


Fig. 1

În cazul cînd şi aripa are incidenţă, va apărea şi în punctul O un con MACH, iar mişcarea în jurul aripii capătă un caracter general.

Prin ipoteză, incidenţa aripii (α_0) şi creşterea incidenţei aripioarelor (α) obţinută prin bracaj, au valori mici, deci vitezele de perturbaţie corespunzătoare vor fi de asemenea mici.

Deoarece în cazul ecuaţiilor referitoare la perturbaţiile mici, efectele se adună, caracteristicile globale ale aripii cu incidenţă şi aripioare bracate

vor fi obținute însumînd termenii corespunzători incidenței aripii, bracajului aripioarelor și interferenței celor două mișcări.

Relația dintre creșterea incidenței aripioarei (α) și unghiul de bracaj β este dată de expresia

$$\alpha = \beta \cos \gamma. \tag{1}$$

În dezvoltările ulterioare intervine viteza axială de perturbație u.

Pentru calculul acestei viteze vom folosi metoda analogiei hidrodinamice [1].

Fie U_∞ viteza curentului la infinit, a_∞ viteza sunetului în condițiile de la infinit; să notăm mai departe cu M_∞ numărul MACH, μ unghiul conului MACH și B un coeficient, definiți de relațiile

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \tag{2}$$

iar componentele vitezelor le vom nota

$$U = U_\infty + u, \qquad V = v, \qquad W = w, \tag{3}$$

unde u, v, w sînt vitezele de perturbație, care derivă dintr-un potențial de viteze și au valori mici.

În planul lui BUSEMANN $\omega\eta\zeta$ (fig. 2, *c*), obținut prin transformarea planului *Oyz* (fig. 2, *b*) rezultat din intersecția aripioarei cu un plan normal la direcția lui U_∞ la distanța $x_1 = 1$ (fig. 2 *a*), definit de relația

$$Br = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{4}$$

vitezele de perturbație sînt funcții analitice de variabilă complexă $\xi = \eta + i\zeta$

$$f(\xi) = u + iu', \quad g(\xi) = v + iv', \quad h(\xi) = w + iw', \tag{5}$$

w fiind componenta vitezei perpendiculare pe aripă, dată de expresia

$$w = \pm \alpha U_\infty. \tag{6}$$

S-a arătat anterior [1], că unei variații a vitezei verticale Δw ce are loc într-un punct P îi corespunde în sensul hidrodinamic:

a) O sursă de intensitate $2\,q_i$ și imaginea sa față de cercul MACH, q_i fiind dat de relația

$$q_i = -\frac{\Delta w}{B} \frac{By_i}{\sqrt{1 - B^2 y_i^2}}, \tag{7}$$

dacă punctul P_i se află în interiorul conului MACH.

b) Dacă punctul P_e se găsește în afara conului MACH, saltul de viteză va fi reprezentat prin două vîrtejuri de intensități $-2(u_e' - u_e)$ și $2(u_e' -$

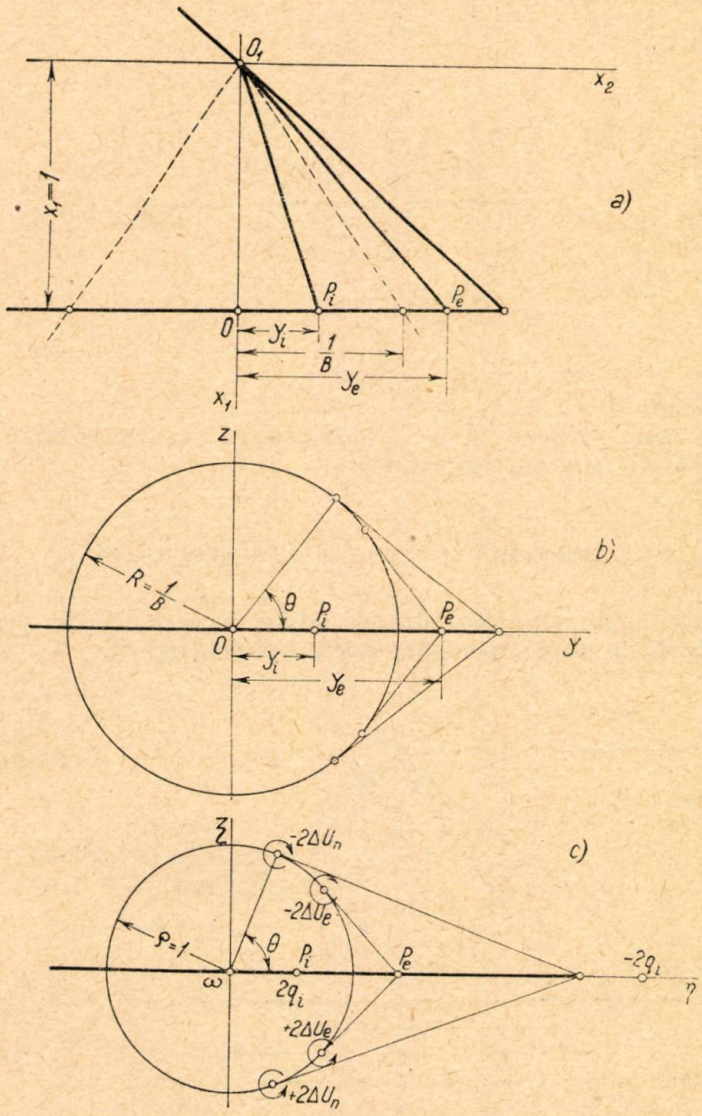


Fig. 2

$-u_e$) așezate în punctele $e^{i\sigma}$ și respectiv $e^{-i\sigma}$.

$$2(u_e' - u_e) = -\frac{\Delta w}{B}\frac{By_e}{\sqrt{B^2 y_e^2 - 1}}. \qquad (\quad)$$

În sfîrșit, dacă bordul de atac este subsonic, viteza tinde către infinit ca $(\xi - \lambda_1)^{-\frac{1}{2}}$ în punctul Λ_1 (fig. 3), corespunzător punctului L_1

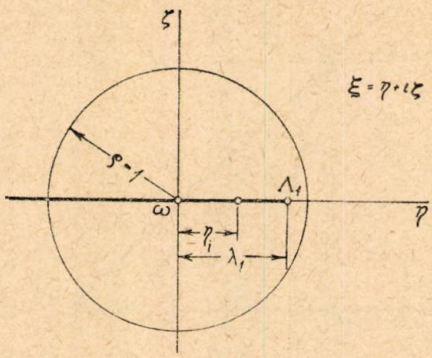


Fig. 3

din planul fizic, ceea ce în sens hidrodinamic se reprezintă printr-un dublet așezat în punctul respectiv.

2. ARIPIOARĂ CU BORD DE ATAC SUPERSONIC

Să determinăm expresia vitezei axiale de perturbație pentru aripioara cu bord de atac supersonic luată separat (fig. 4).

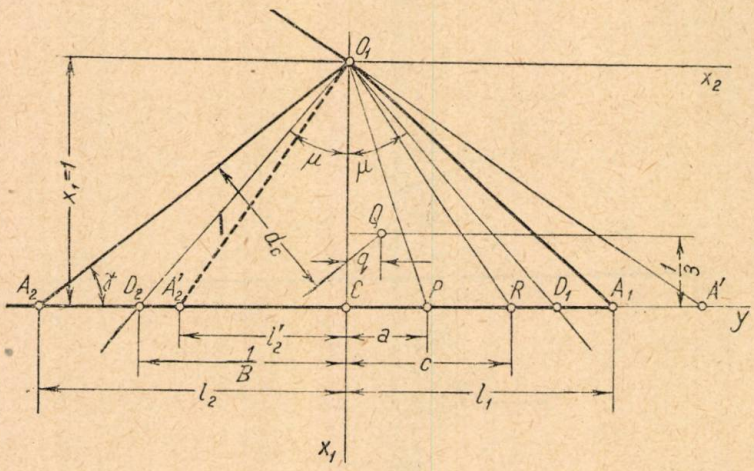


Fig. 4

Vom remarca că urma șarnierei în planul $\omega\eta\zeta$ (fig. 2, *c*) reprezintă un salt de incidență, celălalt găsindu-se în punctul corespunzător bordului de atac.

Pentru simplificarea dezvoltărilor ulterioare, se va face o nouă transformare definită de relația

$$X = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \tag{8}$$

care face ca în planul $X = Y + iZ$ urma aripii să fie reprezentată de partea pozitivă a axei absciselor, iar cercul $\rho = 1$ să fie reprezentat pe ordonată.

În acest plan expresia potențialului, considerînd șarniera subsonică, rezultă imediat

$$f(X) = -\frac{i\alpha U_\infty}{\pi B}\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}\ln\frac{X + iH_1}{X - iH_1} + \frac{\alpha U_\infty}{\pi B}\frac{Bl_2'}{\sqrt{1 - B^2 l_2'^2}}\ln\frac{X - L_2'}{X + L_2'} -$$

$$-\frac{\alpha U_\infty}{B}\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \tag{9}$$

Să notăm cu u_1 viteza de perturbație la bordul de atac supersonic și cu u_2' o expresie similară

$$u_1 = -\frac{\alpha U_\infty}{B}\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \quad u_2' = \frac{\alpha U_\infty}{B}\frac{Bl'_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2'^2}}, \tag{10}$$

iar dacă considerăm numai punctele de pe aripă, expresia precedentă a potențialului devine

$$f(Y) = u = Re\,\frac{1}{\pi}\left[iu_1 \ln\frac{Y + iH_1}{Y - iH_1} + u_2' \ln\frac{Y - L_2'}{Y + L_2'}\right] + u_1, \tag{11}$$

în care L_2' Y și H_1 sînt abscisele și ordonata din p'anul X corespunzătoare lui l_2', y și respectiv punctului $e^{i\sigma}$ din planul auxiliar și sînt deduse din relațiile de transformare (4) și (8),

$$Y = \sqrt{\frac{1 + By}{1 - By}}, \quad L_2' = \sqrt{\frac{1 - Bl_2'}{1 + Bl_2'}}, \quad H_1 = \sqrt{\frac{Bl_1 + 1}{Bl_1 - 1}}. \tag{12}$$

Dacă șarniera este supersonică ($Bl_2' > 1$) atunci rezultă

$$u_2' = iu_2, \qquad u_2 = -\frac{\alpha U_\infty}{B}\frac{Bl_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}, \tag{13}$$

$$L_2' = iH_2, \qquad H_2 = \sqrt{\frac{Bl_2 - 1}{Bl_2 + 1}},$$

iar expresia vitezei axiale de perturbație (11) este valabilă în mod automat, deoarece am pus *Re* înaintea ei. Datorită acestui fapt, dezvoltările ulterioare vor fi mult simplificate, iar rezultatele obținute vor avea un caracter general.

2.1. Calculul coeficienților de portanță și rezistență de undă

În cazul micilor perturbații, coeficientul de presiune este dat de

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty} \tag{14}$$

și este constant (ca și viteza de perturbație u) de-a lungul unei raze vectoare ce pornește din vîrful conului MACH.

Pentru calculul coeficientului de portanță, avînd în vedere prima relație (12), se deduce

$$\frac{c-a}{2} C_{zm} = \int_a^c C_p \, dy = -Re \frac{4}{BU_\infty} \int_A^C u \, d\left(\frac{1}{1+Y^2}\right) =$$

$$= -Re \frac{4}{BU_\infty} \left[\frac{u}{1+Y^2} - \int \frac{du}{1+Y^2}\right]_A^C. \tag{15}$$

Ținînd seama de expresia vitezei axiale de perturbație u (11), se obține din expresia precedentă formula generală a coeficientului de portanță pentru aripioara cu bord de atac supersonic, care poate fi pusă sub forma :

$$\frac{c-a}{2} C_{zm} = -Re \frac{4}{BU_\infty} \left[\frac{u}{1+Y^2} - \frac{2u_1 H_1}{\pi(1-H_1^2)}\left(\frac{1}{H_1} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} - \operatorname{arctg} Y\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2u_2' L_2'}{\pi(1+L_2'^2)}\left(\frac{1}{L_2'} \operatorname{argth} \frac{Y}{L_2'} + \operatorname{arctg} Y\right)\right]_A^C, \tag{16}$$

unde limitele A și C corespund valorilor a și c din planul fizic (fig. 4) și sînt deduse din relațiile de transformare (4) și (8),

$$A = \sqrt{\frac{1+Ba}{1-Ba}}, \quad C = \sqrt{\frac{1+Bc}{1-Bc}}. \tag{17}$$

Să aplicăm formula (16) pentru diferitele poziții ale șarnierei.

a. *Aripioară cu șarnieră subsonică*

În acest caz șarniera ocupă poziția O_1A_2' (fig. 4), iar conul MACH generat de vîrful O_1 acoperă și o parte din aripă, respectiv suprafața $(O_1 D_2 A_2')$.

Limitele de integrare din planul fizic vor fi

$$a = -(1/B - \varepsilon), \quad c = (l_1 - \varepsilon) \tag{18}$$

cărora, după (17), le corespund în planul X valorile

$$A = \varepsilon_2, \quad C = -i(H_1 + \varepsilon_1), \tag{19}$$

unde $H_1 > 1$, iar ε, ε_1 și ε_2 tind către 0.

Avînd în vedere că avem pentru $Y = -i(H_1 + \varepsilon_1)$

$$Re \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} = \frac{\pi}{2}, \quad Re \operatorname{argth} \frac{Y}{L_2'} = 0 \quad Re \operatorname{arctg} Y = \frac{\pi}{2}, \tag{20}$$

$$Re \operatorname{arctg} \frac{H_1}{Y} = 0, \quad Re \operatorname{argth} \frac{L_2'}{Y} = 0$$

coeficientul de portanță va fi

$$C_{za}' = -\frac{4\alpha}{B} \frac{B(l_1 + l_2')}{Bl_1 + 1}. \tag{21}$$

Să calculăm acum coeficientul de portanță numai pentru suprafața mobilă ($O_1A_2'A_1$), relație care se va vedea că intervine în expresia coeficientului de moment de șarnieră.

În acest caz, limitele de integrare vor fi:

$$\begin{aligned} a &= -(l_2' - \varepsilon), \quad c = (l_1 - \varepsilon) \\ A &= (L_2' - \varepsilon_2), \quad C = -i(H_1 + \varepsilon_1) \end{aligned} \tag{22}$$

și făcînd calculele indicate de (16) se găsește

$$C_{za} = -\frac{8\alpha}{\pi B} \operatorname{arctg} \frac{1}{L_2'} - \frac{4\alpha}{\pi B^2} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \frac{1}{l_1 + l_2'} \left[\frac{2}{1 + L_2'} + Bl_1 - 1 \right] \operatorname{arctg} \frac{L_2'}{H_1}. \tag{23}$$

Coeficientul de rezistență se obține numai din integrala extinsă la suprafața mobilă și rezultă imediat

$$C_{xa} = -\alpha C_{za}. \tag{24}$$

b. *Aripioara cu șarnieră supersonică*

Să presupunem că șarniera se găsește în afara conului MACH și ocupă poziția O_1A_2 (fig. 4).

În această situație, după cum am indicat anterior, L_2' și u_2' iau valorile (13), iar limitele de integrare din planul fizic și cel auxiliar vor fi:

$$\begin{aligned} a &= -(l_2 - \varepsilon), \quad c = (l_1 - \varepsilon) \\ A &= i(H_2 - \varepsilon_2), \quad C = -i(H_1 + \varepsilon_1), \end{aligned} \tag{25}$$

în care $H_2 < 1 < H_1$.

Avînd în vedere egalitățile, pentru $Y = i(H_2 - \varepsilon_2)$,

$$Re \operatorname{arctg} \frac{H_1}{Y} = \frac{\pi}{2}, \quad Re \operatorname{arctg} \frac{H_2}{Y} = \frac{\pi}{2},$$

$$Re \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_1} = 0, \quad Re \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_2} = 0, \quad Re \operatorname{arctg} Y = 0 \tag{26}$$

e (20), se obţine

$$C_{za} = -\frac{4\alpha}{B}, \tag{27}$$

din care se vede că în această situaţie aripioara se comportă ca o aripă independentă, lucru care era de aşteptat, deoarece conul MACH acoperă numai aripioara.

2.2. Calculul coeficienţilor de moment de ruliu şi de giraţie

Vom deduce expresia coeficientului de moment de ruliu al unei aripioare în raport cu axa Ox_1 (fig. 4) pornind de la relaţia

$$\frac{(c-a)^2}{2} C_{lm} = \frac{2}{3}\int C_p\, y\, \mathrm{d}y, \tag{28}$$

în care C_p este dat de (14), iar produsul $y\,\mathrm{d}y$ va fi calculat din prima relaţie (12) şi va putea fi pus sub forma

$$y\,\mathrm{d}y = \frac{2}{B^2}\left[d\,\frac{1}{(1+Y^2)^2} - d\,\frac{1}{1+Y^2}\right], \tag{29}$$

care, introdusă în (28), conduce la expresia

$$\frac{(c-a)^2}{2} C_{lm} = -Re\,\frac{8}{3\,B^2\,U_\infty}\int_A^C u\left[\mathrm{d}\,\frac{1}{1+Y^2} - \mathrm{d}\,\frac{1}{(1+Y^2)^2}\right] =$$

$$= -Re\,\frac{8}{3\,B^2\,U_\infty}\left[\frac{u}{1+Y^2} - \int\frac{\mathrm{d}u}{1+Y^2} - \frac{u}{(1+Y^2)^2} + \int\frac{\mathrm{d}u}{(1+Y^2)^2}\right]_A^C. \tag{30}$$

Prima integrală din relaţia de mai sus apare şi în expresia coeficientului de portanţă şi a fost determinată cu această ocazie

$$I_1 = \int\frac{\mathrm{d}u}{1+Y^2} = \frac{2u_1 H_1}{\pi\left(1-H_1^2\right)}\left(\frac{1}{H_1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{Y}{H_1} - \mathrm{arctg}\,Y\right) -$$

$$-\frac{2u_2' L_2'}{\pi\left(1+L_2'^2\right)}\left(\frac{1}{L_2'}\,\mathrm{argth}\,\frac{Y}{L_2'} + \mathrm{arctg}\,Y\right) + C^t. \tag{31}$$

Pentru cea de-a doua integrală, se deduce succesiv:

$$I_2 = \int\frac{\mathrm{d}u}{(1+Y^2)^2} = \frac{2u_1 H_1}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}Y}{(1+Y^2)\left(H_1^2+Y^2\right)} + \frac{2u_2' L_2'}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}Y}{(1+Y^2)\left(Y^2-L_2'^2\right)} =$$

$$= -\frac{2u_1 H_1}{\pi\left(1-H_1^2\right)^2}\left[\frac{1-H_1^2}{2}\left(\frac{Y}{1+Y^2} + \mathrm{arctg}\,Y\right) + \mathrm{arctg}\,Y - \frac{1}{H_1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{Y}{H_1}\right] -$$

$$-\frac{2u_2' L_2'}{\pi\left(1+L_2'^2\right)}\left[\frac{1+L_2'^2}{2}\left(\frac{Y}{1+Y^2} + \mathrm{arctg}\,Y\right) + \mathrm{arctg}\,Y -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{L_2'}\,\mathrm{argth}\,\frac{Y}{L_2'}\right] + C^t. \tag{32}$$

În felul acesta relația generală a coeficientului de moment de ruliu va putea fi pusă sub forma

$$\frac{(c-a)^2}{2} C_{lm} = -Re \frac{8}{3B^2 U_\infty} \left[\frac{u}{1+Y^2} - I_1 - \frac{u}{(1+Y^2)^2} + I_2 \right]_A^C. \tag{33}$$

a. *Aripioară cu șarnieră subsonică*

Pentru aripioară și porțiunea de aripă acoperită de conul MACH, limitele de integrare au fost indicate anterior (18) și (19) și făcînd calculele se găsește

$$C'_{la} = -\frac{4\alpha}{3B} \frac{B^2(l_1^2 - l_2'^2)}{(Bl_1+1)^2}. \tag{34}$$

Utilizînd aceeași relație (22) dar dînd limitelor de integrare a și c, respectiv A și C, valorile (22) se găsește

$$C_{la} = -\frac{8\alpha}{3\pi B} \frac{1}{B^2(l_1+l_2')^2} \left[B^2(l_1^2 - l_2'^2) \operatorname{arctg} \frac{1}{L_2'} + \right.$$

$$\left. + B(l_1+l_2') \frac{L_2'}{1+L_2'^2} + \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \left(\frac{4L_2'}{(1+L_2'^2)^2} + B^2 l_1^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{L_2'}{H_1} \right]. \tag{35}$$

b. *Aripioară cu șarnieră supersonică*

În cazul șarnierei supersonice, avînd în vedere relațiile (25), care definesc limitele de integrare pentru această situație, se va obține

$$C_{la} = -\frac{4\alpha}{3B} \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}. \tag{36}$$

Expresia coeficientului de moment de girație se deduce imediat, atît pentru aripioara cu șarnieră supersonică, cît și cea cu șarnieră subsonică, din formula

$$C_{na} = \alpha C_{la}, \tag{37}$$

în care vom remarca că C_{la} se referă exclusiv la suprafața mobilă.

3. ARIPIOARĂ CU BORD DE ATAC SUBSONIC

Cînd bordul de atac al aripioarei este subsonic (fig. 5), vom utiliza transformarea

$$X^2 = \frac{Bl_1(\xi^2+1) - 2\xi}{(1+\xi)^2}, \tag{38}$$

care reprezintă semicercul superior și urma aripii din planul auxiliar $\omega\eta\zeta$ (obținut prin transformarea lui BUSEMANN) pe semiplanul superior X, extradosul găsindu-se la stînga originii.

Pentru punctele de pe aripă folosind indicațiile anterioare (§ 1) și considerînd șarniera subsonică, rezultă imediat :

$$f(Y) = u = Re\left[\frac{u_2'}{\pi}\left(\ln\frac{Y - L_2'}{Y + L_2'} - i\pi\right) + \frac{m_1}{Y}\right], \tag{39}$$

în care u_2' are semnificația arătată anterior (10), iar L_2' și Y sînt abscisele

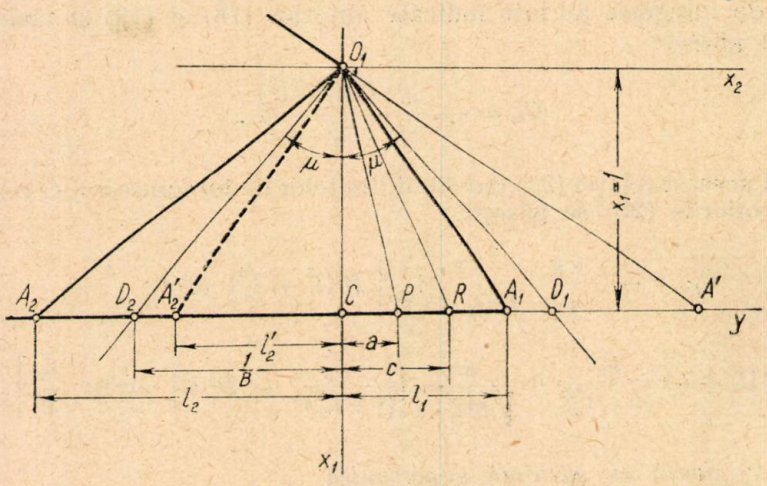


Fig. 5

din planul X corespunzătoare urmei șarnierei și unui punct oarecare y din planul fizic ; în baza relațiilor (4) și (38) valorile lor sînt date de :

$$Y = -\sqrt{\frac{B(l_1 - y)}{1 + By}}, \quad L_2' = -\sqrt{\frac{B(l_1 + l_2')}{1 - Bl_2'}}. \tag{40}$$

Din condiția de irotaționalitate

$$dw + i\,dw' = \frac{iB}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)df, \tag{41}$$

se poate deduce valoarea constantei m_1.

Într-adevăr, în origine ($\xi = 0$) și pentru a evita o singularitate, trebuie ca $df = 0$. Punînd această condiție și în (39) se găsește :

$$m_1 = \frac{2u_2'}{\pi}\,\frac{Bl_1 L_2'}{Bl_1 - L_2'}. \tag{42}$$

În felul acesta expresia vitezei axiale de perturbație este perfect determinată.

3.1. Calculul coeficientului de portanță

Ca și în cazul aripioarei cu bord de atac supersonic, la deducerea expresiei generale a coeficientului de portanță pornim de la relația

$$\frac{c-a}{2} C_{zm} = \int_a^c C_p \, dy, \tag{43}$$

în care însă elementul diferențial dy, în funcție de variabila din planul transformat X, se calculează din prima relație (40):

$$dy = \frac{1 + Bl_1}{B} d\left(\frac{1}{1+Y^2}\right). \tag{44}$$

În felul acesta, pentru coeficientul de portanță al aripioarei cu bord de atac subsonic vom deduce succesiv:

$$\frac{(c-a)}{2} C_{zm} = Re \frac{2(1+Bl_1)}{BU_\infty} \int_A^C u \, d \frac{1}{1+Y^2} =$$

$$= Re \frac{2(1+Bl_1)}{BU_\infty} \left[\frac{u}{1+Y^2} - \int \frac{du}{1+Y^2}\right]_A^C. \tag{45}$$

Punînd $I_3 = \int \frac{du}{1+Y^2}$ și avînd în vedere expresia vitezei axiale de perturbație (39) se poate scrie:

$$I_3 = \int \frac{du}{1+Y^2} = \frac{2u_2' L_2'}{\pi} \int \frac{dY}{(1+Y^2)(Y^2 - L_2'^2)} - m_1 \int \frac{dY}{(1+Y^2)Y^2} =$$

$$= -\frac{2u_2' L_2'}{\pi(1+L_2'^2)} \left(\frac{1}{L_2'} \operatorname{argth} \frac{Y}{L_2'} + \operatorname{arctg} Y\right) + m_1 \left(\frac{1}{Y} + \operatorname{arctg} Y\right) + C'. \tag{46}$$

În felul acesta relația generală a coeficientului de portanță devine:

$$\frac{(c-a)}{2} C_{zm} = Re \frac{2(1+Bl_1)}{BU_\infty} \left[\frac{u}{1+Y^2} + \frac{2u_2' L_2'}{\pi(1+L_2'^2)} \left(\frac{1}{L_2'} \operatorname{argth} \frac{Y}{L_2'} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{arctg} Y\right) - m_1 \left(\frac{1}{Y} + \operatorname{arctg} Y\right)\right]_A^C. \tag{47}$$

a. *Aripioară cu șarnieră subsonică*

Coeficientul de portanță raportat la întreaga suprafață acoperită de conul MACH se obține, dînd limitelor de integrare valorile

$$a = -\left(\frac{1}{B} - \varepsilon\right), \quad c = l_1 - \varepsilon$$

$$A = -\infty \quad , \quad C = -\varepsilon_1, \tag{48}$$

ε şi ε_1 fiind infiniţi mici. Vom găsi astfel,

$$C'_{za} = -\frac{4\alpha}{B}\,\frac{B\left(l_1 + l'_2\right)}{Bl_1 + 1}\sqrt{\frac{B\left(l_1 + l'_2\right)}{1 + Bl'_2}}. \tag{49}$$

Dacă se calculează expresia (47) între limitele

$$a = -(l'_2 - \varepsilon), \qquad c = l_1 - \varepsilon, \tag{50}$$
$$A = -(L'_2 - \varepsilon_2), \qquad C = -\varepsilon_1$$

se găseşte coeficientul de portanţă al aripioarei propriu-zise (suprafaţa OA'_2A_1, fig. 5)

$$C_{za} = \frac{8\alpha}{\pi B}\sqrt{\frac{B\left(l_1 + l'_2\right)}{1 + Bl'_2}}\left[\operatorname{arctg} L'_2 + \frac{l_1}{l_1 + l'_2}\,\frac{L'_2}{1 + L'^2_2}\right]. \tag{51}$$

b. *Aripioară cu şarnieră supersonică*

În această situaţie, limitele de integrare capătă valorile

$$a = -(l_2 - \varepsilon), \qquad c = l_1 - \varepsilon$$
$$A = i(H_2 - \varepsilon_2), \qquad C = -\varepsilon_1 \tag{52}$$

care, introduse în (47) ne conduc la expresia

$$C_{za} = -\frac{4\alpha}{B}\sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}. \tag{53}$$

Pentru determinarea coeficientului de rezistenţă de undă, rămîne valabilă formula (24).

3.2. Calculul coeficientului de moment de ruliu

Să luăm din nou în consideraţie formula (28) în care însă produsul $y\mathrm{d}y$ este dat de expresia

$$y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\frac{(Bl_1 + 1)^2}{B^2}\,\mathrm{d}\,\frac{1}{(1 + Y^2)^2} - \frac{Bl_1 + 1}{B^2}\,\mathrm{d}\,\frac{1}{1 + Y^2}. \tag{54}$$

Vom avea astfel

$$\frac{(c-a)^2}{2}\,C_{lm} = Re\left\{\frac{2}{3U_\infty}\,\frac{(Bl_1 + 1)^2}{B^2}\int_A^C u\mathrm{d}\,\frac{1}{(1 + Y^2)^2} - \frac{4}{3U_\infty}\,\frac{Bl_1 + 1}{B^2}\int_A^C u\mathrm{d}\,\frac{1}{1 + Y^2}\right\} =$$

$$= Re\left\{\frac{2}{3\,U_\infty}\,\frac{(Bl_1 + 1)^2}{B^2}\left[\frac{u}{(1 + Y^2)^2} - \int\frac{\mathrm{d}u}{(1 + Y^2)^2}\right] - \frac{4}{3\,U_\infty}\,\frac{Bl_1 + 1}{B^2}\left[\frac{u}{1 + Y^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\frac{\mathrm{d}u}{1 + Y^2}\right]\right\}_A^C. \tag{55}$$

Ţinînd seama de expresia vitezei de perturbaţie (39) vom putea scrie

$$I_4 = \int \frac{du}{(1+Y^2)^2} = \frac{2u_2' L_2'}{\pi(1+L_2'^2)^2}\left[\frac{1+L_2'^2}{2}\left(\frac{Y}{1+Y^2}+\operatorname{arctg} Y\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg} Y - \frac{1}{L_2'}\operatorname{argth}\frac{Y}{L_2'}\right] + m_1\left(\frac{1}{Y}+\frac{Y}{2(1+Y^2)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} Y\right)+C^t, \quad (56)$$

iar coeficientul de moment de ruliu poate fi pus sub o formă mai concentrată

$$\frac{(c-a)^2}{2} C_{lm} = Re\left\{\frac{2}{3U_\infty}\frac{(Bl_1+1)^2}{B^2}\left[\frac{u}{(1+Y^2)^2}-I_4\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3U_\infty}\frac{Bl_1+1}{B^2}\left[\frac{u}{1+Y^2}-I_3\right]\right\}_A^C, \quad (57)$$

I_3 fiind dat de formula (46).

a. *Aripioară cu şarnieră subsonică*

Raportînd coeficientul de moment de ruliu la întreaga suprafaţă acoperită de conul MACH, şarniera fiind subsonică, în baza relaţiilor (48) se găseşte

$$C_{la}' = -\frac{2\alpha}{3B}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2')}{1+Bl_2'}}\left[\frac{Bl_2'+3Bl_1}{1+Bl_1}-2\frac{B^2 l_2'^2+Bl_2'-2Bl_1}{(1+Bl_1)^2}\right], \quad (58)$$

iar dacă pentru a şi c respectiv A şi C, se atribuie valorile (50), se obţine coeficientul de moment de ruliu pentru aripioara propriu-zisă:

$$C_{la} = \frac{4\alpha}{3\pi B}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2')}{1+Bl_2'}}\left[\frac{Bl_1(Bl_2'-1)-Bl_2'(2Bl_2'+1)+3B^2 l_1^2}{B^2(l_1+l_2')^2}\operatorname{arctg} L_2' + \right.$$

$$\left.+\frac{Bl_2'+3B^2 l_1^2-Bl_1}{B^2(l_1+l_2')^2}\frac{L_2'}{1+L_2'^2}+\frac{3Bl_1(Bl_1+1)}{B^2(l_1+l_2')^2}\frac{L_2'^2}{(1+L_2'^2)^2}\right]. \quad (59)$$

b. *Aripioară cu şarnieră supersonică*

Limitele de integrare pentru această situaţie au fost indicate anterior (52); efectuînd calculele, sîntem conduşi la expresia:

$$C_{la} = -\frac{2\alpha}{3\beta}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_2}}\left(\frac{Bl_1(Bl_2'-1)-Bl_2(2Bl_2+1)+3B^2 l_1^2}{B^2(l_1+l_2)^2}\right). \quad (60)$$

Expresia coeficientului de moment de giraţie se obţine înlocuind în (37) pe C_{la} cu relaţia corespunzătoare.

4. COEFICIENTUL DE MOMENT DE ŞARNIERĂ

Notînd cu Q punctul de aplicaţie al rezultantei aerodinamice pe aripioară (fig. 4) şi cu q distanţa de la aceasta pînă la axa conului MACH, vom avea

$$q = (l_1+l_2)\frac{C_{la}}{C_{za}}. \quad (61)$$

Însemnînd mai departe cu d_c distanța de la punctul Q la șarniera OA_2 (sau OA_2') se va putea scrie :

$$d_c = \left(\frac{2}{3} l_2 + q\right) \sin \gamma = \left[\frac{2}{3} l_2 + (l_1 + l_2) \frac{C_{la}}{C_{za}}\right] \sin \gamma. \tag{62}$$

În aceste condiții, pentru coeficientul de moment de șarnieră al aripioarei pe care-l notăm cu C_{mca} rezultă

$$(l_1 + l_2)\, C_{mca} = d_c\, C_{za} = \left[\frac{2}{3} l_2\, C_{za} + (l_1 + l_2)\, C_{la}\right] \sin \gamma, \tag{63}$$

care se mai poate scrie

$$C_{mca} = \left[\frac{2}{3} \frac{l_2}{l_1 + l_2} C_{za} + C_{la}\right] \sin \gamma. \tag{64}$$

Vom preciza că atît C_{za} cît și C_{la} se referă exclusiv la partea mobilă (aripioara propriu-zisă).

5. ARIPA CU INCIDENȚĂ, AVÎND ARIPIOARELE BRACATE ANTISIMETRIC. DEDUCEREA RELAȚIILOR GENERALE

Vom considera acum cazul general al aripii triunghiulare subțiri cu aripioare bracate antisimetric.

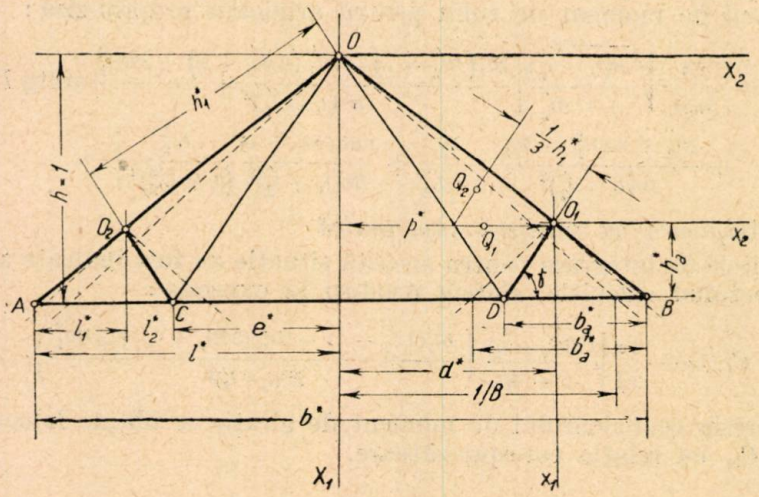


Fig. 6

Presupunem că aripioara din dreapta este bracată în sens pozitiv, iar cea din stînga în sens negativ, sensul pozitiv corespunzînd unei scăderi de portanță.

Bracajul antisimetric al aripioarelor nu modifică coeficientul de portanță al aripii, deoarece componentele suplimentare ce apar pe cele două aripioare sînt egale și de sens contrar, deci $\Delta C_z = 0$.

La calculul coeficientului total de rezistență de undă vor trebui luate în considerație următoarele trei componente :

1) Rezistența datorită incidenței α_0 a aripii.

2) Rezistența corespunzătoare portanței aripioarelor rezultată din bracajul acestora.

3) Rezistența suplimentară ca efect al înclinării de unghiul $(+\alpha)$ și respectiv $(-\alpha)$ a componentelor coeficientului de portanță a aripii, ce revin aripioarelor, care vor fi notate cu C_{zp}.

Cunoscînd coeficientul de portanță al aripii C_z, prima componentă se obține imediat

$$C_{x_1} = -\alpha_0 C_z. \tag{65}$$

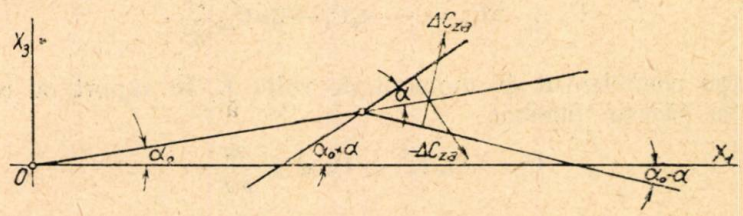


Fig. 7

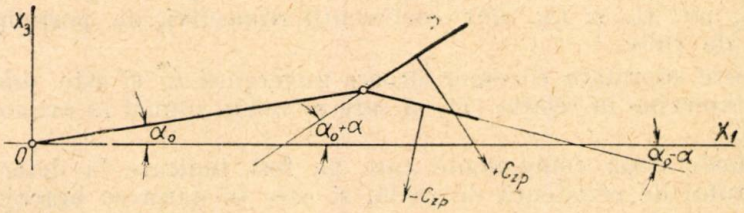


Fig. 8

Notînd cu ΔC_{za} coeficientul de portanță al unei aripioare provenit din bracajul acesteia și raportat la întreaga suprafață a aripii, se vede urmărind figura 7 că pentru cea de-a doua componentă a coeficientului de rezistență de undă, indicată mai sus, se va putea scrie

$$\Delta C_{x1} = -\Delta C_{za}(\alpha_0 + \alpha) + \Delta C_{za}(\alpha_0 - \alpha) = -2\alpha\Delta C_{za}, \tag{66}$$

în care

$$\Delta C_{za} = C_{za}\frac{s^*}{S^*}, \tag{67}$$

C_{za} fiind coeficientul de portanță al aripioarei dedus anterior, iar s^* și S^* sînt suprafețele aripioarei și, respectiv, aripii de coardă maximă unitară.

Din figura 8 se vede că, pentru cea de-a treia componentă a coeficientului total de rezistență de undă, pe care o vom însemna cu ΔC_{x2}, avem

$$\Delta C_{x2} = -C_{zp}(\alpha_0 + \alpha) - C_{zp}(\alpha_0 - \alpha) = -2\alpha_0 C_{zp}. \tag{68}$$

cum însă

$$C_{zp} = f(\alpha_0) \tag{69}$$

rezultă din formula (68)

$$\Delta C_{x2} = f_1(\alpha_0^2), \tag{70}$$

deci termenul astfel obținut este inclus în relația (65) care este de asemenea o funcție de α_0^2.

Cu aceste considerații, conform indicațiilor de la paragraful (1), formula generală a coeficientului de rezistență de undă, pentru bracaj antisimetric de aripioare este

$$C_x + \Delta C_x = -\alpha_0 C_z - 2\alpha C_{za} \frac{s^*}{S^*}. \tag{71}$$

Pentru coeficientul de moment de ruliu C_l în raport cu axa OX_1, (fig. 6) se găsește imediat

$$C_l = (C'_{la}\, b'^*_a + C'_{za}\, d^*) \frac{2s'^*}{b^* S^*}, \tag{72}$$

d^* fiind distanța între axele aripioarei și aripii, b^*, anvergura aripii, b'^*_a anvergura suprafeței afectate de mișcarea conică generată de vîrful unei aripioare, iar C'_{za} și C'_{la} sînt coeficienții respectivi, de portanță și de moment de ruliu.

s'^* este suprafața corespunzătoare anvergurii b'^*_a și este diferită de s^*, care intervine în relația (71) și care se referă numai la aripioara propriu-zisă.

Ultimele două componente care au fost indicate la determinarea coeficientului de rezistență de undă, și care se datoresc bracajului aripioarelor, vor da naștere unui moment în jurul axei OX_3 perpendiculare pe planul aripii.

Înmulțind cu α_0 coeficientul de moment de ruliu al aripii (72), găsim prima componentă a coeficientului de moment de girație ca efect exclusiv al bracajului.

Datorită incidenței aripii, asupra aripioarei acționează componenta C_{zp} de mărime și punct de aplicație necunoscute și care sînt greu de determinat din integralele extinse la suprafața aripioarei.

Rezistențele suplimentare care apar pe cele două aripioare datorită înclinării componentelor C_{zp} cu $(+\alpha)$ și respectiv $(-\alpha)$ și care după cum se vede sînt de sens contrar, vor contribui la momentul de girație.

Notînd cu C_{np1}, respectiv C_{np2}, coeficienții de moment de girație parțiali, datorați rezistenței de undă de pe suprafețele ODB și $OD'O_1$, și raportați la aceste suprafețe, aportul lui C_{xp} la coeficientul de moment de girație, apare ca o diferență a celor doi coeficienți de moment de girație parțiali.

În felul acesta expresia generală a coeficientului de moment de girație va fi

$$C_n = \alpha_0 C_l + C_{np1} \frac{(l^* - e^*)^2}{S^* b^*} - C_{np2} \frac{l_1^{*2} h_1^*}{S^* b^*}. \tag{73}$$

Relaţia coeficientului de moment de şarnieră dedusă pentru aripa fără incidenţă va trebui completată cu termenul dat de rezultanta aerodinamică ce acţionează asupra aripioarei, datorită incidenţei aripii.

Pentru aceleaşi motive arătate în cazul coeficientului de moment de giraţie şi această problemă o vom rezolva în etape.

Să notăm cu C_{lp1} coeficientul de moment de ruliu calculat pentru suprafaţa ODB în raport cu axa OX_1 şi cu C_{zp1} coeficientul de portanţă pentru aceeaşi suprafaţă (fig. 6).

Punctul de aplicaţie al rezultantei aerodinamice ce lucrează pe suprafaţa ODB se găseşte pe linia centrelor de presiune la o distanţă de axa OX_1 dată de raportul

$$\frac{C_{lp1}(l^* - e^*)}{C_{zp1}}. \tag{74}$$

Notînd cu p^* lungimea liniei centrelor de presiune cuprinsă între axa OX_1 şi şarniera O_1D (fig. 6), se vede că distanţa de la punctul de aplicaţie Q_1 pînă la şarnieră va fi

$$\left| \frac{C_{lp1}(l^* - e^*)}{C_{zp1}} - p^* \right| \sin \gamma, \tag{75}$$

iar distanţa dintre punctul de aplicaţie Q_2 de pe suprafaţa ODO_1 şi şarnieră este de $1/3\ h_1^*$.

Formula coeficientului de moment de şarnieră se poate deduce acum imediat

$$C_{mc} = C_{mca} \frac{s^* b_a^*}{S^* b^*} - C_{zp1} \left| \frac{C_{lp1}(l^* - e^*)}{C_{zp1}} - p^* \right| \frac{s^* \sin \gamma}{S^* b^*} + C_{zp2} \frac{l_1^* h_1^{*2}}{6 S^* b^*}, \tag{76}$$

în care C_{zp2} este coeficientul de portanţă al suprafeţei ODO_1.

6. ARIPĂ CU BORDURI DE ATAC SUBSONICE

Să aplicăm formulele deduse în paragraful precedent la aripa cu borduri de atac subsonice şi aripioare bracate antisimetric.

Coeficientul de portanţă al acestei aripi este [1]

$$C_z = -\frac{2\pi l^* \alpha_0}{E(\sqrt{1 - B^2 l^{*2}})}, \tag{77}$$

rămînînd neschimbat şi în cazul bracajului antisimetric de aripioare.

Dacă şarnierele aripioarelor sînt subsonice, înlocuind în (71) pe C_{za} cu (51) şi pe C_z cu (77), iar pe s^* şi S^* cu expresiile corespunzătoare, se găseşte pentru coeficientul total de rezistenţă de undă

$$C_x + \Delta C_x = \frac{2\pi l^* \alpha_0^2}{E(\sqrt{1 - B^2 l^{*2}})} - \frac{8\alpha^2}{\pi B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2')}{1 + B l_2'}} \left[\operatorname{arctg} L_2' + \right.$$

$$\left. + \frac{l_1}{l_1 + l_2'} \frac{L_2'}{1 + L_2'^2} \right] \frac{(l_1^* + l_2^*) h_a^*}{l^*}, \tag{78}$$

iar dacă șarnierele sînt supersonice, în baza relației (53) se găsește

$$C_{\alpha} + \Delta C_{\alpha} = \frac{2\pi l^{*} \alpha_0^2}{E(\sqrt{1 - B^2 l^{*2}})} + \frac{4\alpha^2}{B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \frac{(l_1^{*} + l_2^{*}) h_a^{*}}{l^{*}} . \tag{79}$$

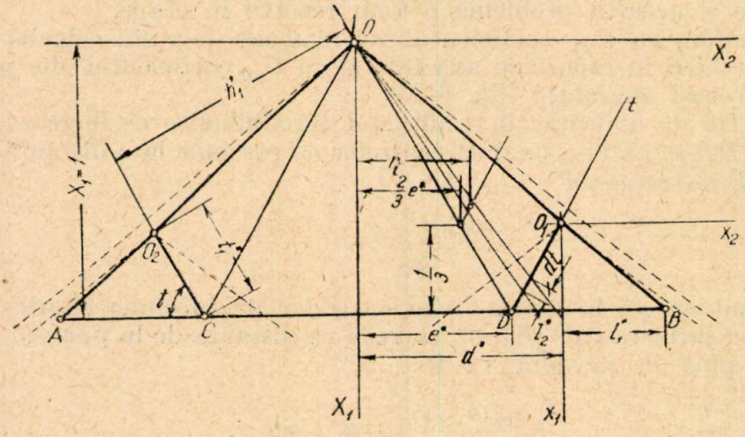


Fig. 9

Înlocuind în formula (72) pe C'_{za} și C'_{la} cu relațiile (49) și respectiv (58), iar pe b_a^{*}, b^{*}, s^{*} și S^{*} cu valorile corespunzătoare (fig. 9), coeficientul de moment de ruliu, cînd aripioarele au șarniere subsonice, va fi

$$C_l = -\frac{2\alpha}{3B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l'_2)}{1 + Bl'_2}} \left[\left(\frac{Bl'_2 + 3Bl_1}{1 + Bl_1} - 2 \frac{B^2 l'^2_2 + B l'_2 + 2Bl_1}{(1 + Bl_1)^2} \right) \frac{Bh^{*} + l_1^{*}}{6l^{*}} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^{*} B(l_1 + l'_2)}{l^{*}(B l_1 + 1)} \right] \frac{(l_1^{*} + Bh^{*}) h_a^{*}}{l^{*}} , \tag{80}$$

iar cînd șarnierele sînt supersonice, $C'_{la} = C_{za}$ (60), $C'_{la} = C_{za}$ (53), și rezultă

$$C_l = -\frac{2\alpha}{3B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left[\left(\frac{Bl_1(Bl_2 - 1) - Bl_2(2Bl_1 + 1) + 3B^2 l_1^2}{B^2 (l_1 + l_2)^2} \right) \frac{l_1^{*} + l_2^{*}}{6l^{*}} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^{*}}{l^{*}} \right] \frac{(l_1^{*} + l_2^{*}) h_a^{*}}{l^{*}} . \tag{81}$$

În expresia generală a coeficientului de moment de girație (73) intervine coeficientul de moment de ruliu, care este dat de una din formulele (80) sau (81) funcție de poziția șarnierei, iar coeficienții de moment de girație C_{np1} și C_{np2} urmează să fie calculați.

În acest scop, vom considera expresia vitezei axiale de perturbație pentru o aripă cu borduri de atac subsonice care, în funcție de variabilele din planul real (fig. 9), este

$$u = \frac{q}{\sqrt{l^{*2} - y^2}} \tag{82}$$

a fost găsită utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [1].

Avînd în vedere relația (28), care va fi înmulțită cu α, și (82) se poate scrie

$$\frac{(l^*-e^*)^2}{2} C_{np1} = -\frac{4q\alpha}{3U_\infty} \int_{e^*}^{l^*} \frac{y\,dy}{\sqrt{l^{*2}-y^2}} . \tag{83}$$

Integrînd relația de mai sus, în care q este dat de

$$q = -\frac{\alpha_0 l^{*2} U\infty}{E(\sqrt{1-B^2 l^{*2}})}, \tag{84}$$

rezultă

$$C_{np1} = -\frac{8\alpha\alpha_0 l^{*3}}{3(l^*-e^*)^2 E(\sqrt{1-B^2 l^{*2}})} \sqrt{1-\left(\frac{e^*}{l^*}\right)^2} \tag{85}$$

Pentru calculul lui C_{np2} pornind de la aceeași relație (28), însă integrînd de astă dată de-a lungul șarnierei Dt (fig. 9) se găsește

$$\frac{t_1^{*2}}{2} C_{np2} = -\frac{2\alpha}{U_\infty} \int_0^{t_1^*} u r_i \, dt, \tag{86}$$

în care u este viteza axială de perturbație (82), iar r_i și elementul diferențial dt exprimate în funcție de aceeași variabilă y, ca și viteza u, vor fi

$$r_i = \frac{2}{3}\left(e^* + \frac{y-e^*}{1+y\operatorname{tg}\gamma}\right), \tag{87}$$

respectiv

$$dt = \frac{K_0\,dy}{(1+y\operatorname{tg}\gamma)^2}, \tag{88}$$

unde cu K_0 s-a notat

$$K_0 = \frac{1+e^*\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma} . \tag{89}$$

Făcînd înlocuirile în (86), se obține

$$\frac{t_1^{*2}}{2} C_{np2} = \frac{4\alpha q K_0}{3U_\infty}\left[\int_{e^*}^{l^*} \frac{e^*\,dy}{\sqrt{l^{*2}-y^2}(1+y\operatorname{tg}\gamma)^2} + \int_{e^*}^{l^*} \frac{(y-e^*)\,dy}{\sqrt{l^{*2}-y^2}(1+y\operatorname{tg}\gamma)^3}\right] \tag{90}$$

și integrînd între limitele indicate, sîntem conduși la formula

$$C_{np2} = -\frac{8\alpha\alpha_0 e^* K_0 l^{*2}}{3t_1^{*2} E(\sqrt{1-B^2 l^{*2}})}\left[\frac{K_1-K_2}{2K_1K_2}\frac{L}{K_1L^2+K_2} + \frac{K_1+K_2}{2\sqrt{K_1^3K_2^3}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}L + \right.$$

$$+\frac{2l^*}{e^*}\left(\frac{K_1^2-K_2^2}{4K_1^2K_2^2}\frac{L^2}{(K_1L^2+K_2)^2} + \frac{3K_1^2+5K_2^2}{8K_1^2K_2^2}\frac{L}{K_1L^2+K_2} + \right. \tag{91}$$

$$+\frac{3(K_1^2-K_2^2)}{8K_1^2K_2^2\sqrt{K_1K_2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}L\Bigg) - 2\left(\frac{K_1^2+2K_1K_2-3K_2^2}{4K_1^2K_2}\frac{L^2}{(K_1L^2+K_2)^2} + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{3K_1^2-2K_1K_2-K_2^2(9-8K_2)}{8K_1^2K_2^2\sqrt{K_1K_2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}L\right)\right],$$

în care au fost utilizate notațiile

$$K_1 = 1 - l^* \operatorname{tg}\gamma, \quad K_2 = 1 + l^* \operatorname{tg}\gamma, \quad L = \sqrt{\frac{l^* - e^*}{l^* + e^*}}. \tag{92}$$

Pentru coeficientul de moment de șarnieră, a fost găsită relația (76) în care C_{mca} a fost definit în prima parte a lucrării (64), C_{lp1} poate fi obținut imediat împărțind (85) cu α, iar pentru C_{zp1} și C_{zp2} urmează să determinăm expresiile corespunzătoare,

$$\frac{l^* - e^*}{2} C_{zp1} = \frac{2}{U_\infty} \int_{e^*}^{l^*} u \, dy = \frac{2q}{U_\infty} \int_{e^*}^{l^*} \frac{dy}{\sqrt{l^{*2} - y^2}}. \tag{93}$$

Integrînd și avînd în vedere (84), se găsește

$$C_{zp1} = - \frac{4\alpha_0 l^{*2}}{(l^* - e^*) E(\sqrt{1 - B^2 l^{*2}})} \arccos \frac{e^*}{l^*}. \tag{94}$$

Ținînd seama că C_{zp2} rezultă dintr-o integrare extinsă la suprafața ODO_1 se poate scrie

$$\frac{t_1^*}{2} C_{zp2} = \frac{2}{U_\infty} \int_0^{t_1^*} u \, dt = \frac{2q K_0}{U_\infty} \int_{e^*}^{l^*} \frac{dy}{\sqrt{l^{*2} - y^2}\,(1 + y \operatorname{tg}\gamma)^2}. \tag{95}$$

Făcînd calculele și simplificările posibile în (95) se obține în cele din urmă

$$C_{zp2} = - \frac{4\alpha_0 l^{*2}}{t_1^* E(\sqrt{1 - B^2 l^{*2}})} \left[\frac{K_1 - K_2}{K_1 K_2} \frac{L}{K_1 L^2 + K_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2 \sqrt{K_1 K_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} L \right]. \tag{96}$$

7. ARIPA CU BORDURI DE ATAC SUPERSONICE

Cînd bordurile de atac ale unei aripi sînt supersonice, coeficientul de portanță este

$$C_z = - \frac{4\alpha_0}{B} \tag{97}$$

și rămîne neschimbat și după bracajul antisimetric al aripioarelor.

Pentru coeficientul de rezistență de undă, făcînd înlocuirile necesare în relația (71), vom găsi

a) *aripioară cu șarnieră subsonică*

$$C_x + \Delta C_x = \frac{4\alpha_0^2}{B} + \left\{ \frac{8\alpha^2}{\pi B} \operatorname{arctg} \frac{1}{L_2'} + \frac{4\alpha^2}{\pi B^2} \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \frac{1}{l_1 + l_2'} \left[\frac{2}{1 + L_2'} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + Bl_1 - 1 \right] \operatorname{arctg} \frac{L_2'}{H_1} \right\} \frac{(l_1^* + l_2^*) h_a^*}{l^*}, \qquad (98)$$

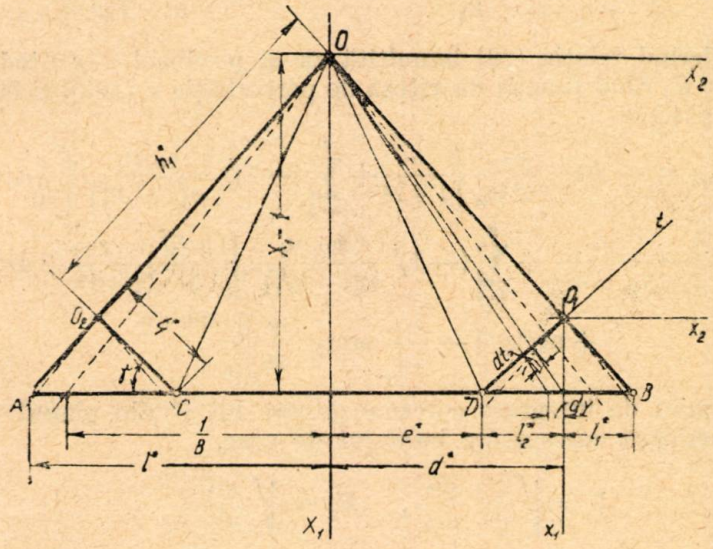


Fig. 10

b) *aripioare cu șarnieră supersonică*

$$C_x + \Delta C_x = \frac{4\alpha_0^2}{B} + \frac{4\alpha^2}{B} \frac{(l_1^* + l_2^*) h_a^*}{l^*}. \qquad (99)$$

Relațiile coeficientului de moment de ruliu se obțin înlocuind în formula generală (72) pe C_{la}' și C_{za}' cu expresiile corespunzătoare fiecărui caz :

a) *aripioară cu șarnieră subsonică*

$$C_l = -\frac{4\alpha}{B} \left[\frac{B(l_1 - l_2')}{3(Bl_1 + 1)} (l_1^* + Bh_a^*) + d^* \right] \frac{B(l_1 + l_2')}{Bl_1 + 1} \frac{(l_1^* + l_2^*) h_a^*}{l^{*2}}; \qquad (100)$$

b) *aripioare cu șarnieră supersonică*

$$C_l = -\frac{4\alpha}{B} \left[\frac{l_1 - l_2'}{3(l_1 + l_2')} (l_1^* + Bh_a^*) + d^* \right] \frac{(l_1^* + l_2^*) h_a^*}{l^{*2}}. \qquad (101)$$

La determinarea expresiei coeficientului de moment de giratie vom proceda ca și în cazul aripii cu borduri de atac subsonice.

Viteza axială de perturbație exprimată în funcție de variabila din planul X se poate deduce din (9), avînd în vedere că aripa este simetrică,

$$u = Re\left[\frac{iu_1}{\pi}\ln\frac{Y+iH_1}{Y-iH_1}+\frac{iu_2}{\pi}\ln\frac{Y-iH_2}{Y+iH_2}\right]+u_1 \tag{102}$$

în care, pe baza relațiilor (12) și (10), putem scrie

$$H_1=\sqrt{\frac{Bl^*+1}{Bl^*-1}}=\frac{1}{H_2},\qquad u_1=u_2=-\frac{\alpha_0 U_\infty}{B}\frac{Bl^*}{\sqrt{B^2l^{*2}-1}}. \tag{103}$$

Considerînd relația (28) înmulțită cu α, produsul $y'y$ fiind înlocuit cu (29), iar C_p fiind funcție de viteza de perturbație u (102), și făcînd calculele, se găsește

$$\frac{(l^*-e^*)^2}{2}C_{np1}=-Re\frac{8\alpha}{3B^2U_\infty}\left\{\frac{u}{1+Y^2}+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{2u_1H_i}{\pi(1-H_i^2)}\left[\frac{1}{H_i}\operatorname{arctg}\frac{Y}{H_i}-\right.\right.$$

$$-\operatorname{arctg}Y\Big]-\frac{u}{(1+Y^2)^2}+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{2u_1H_i}{\pi(1-H_i^2)^2}\left[\frac{1-H_i^2}{2}\left(\frac{Y}{1+Y^2}+\operatorname{arctg}Y\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{arctg}Y-\frac{1}{H_i}\operatorname{arctg}\frac{Y}{H_i}\right]\right\}_{\!L}^{-i(H_1+\varepsilon)} \tag{104}$$

L fiind limita de integrare corespunzătoare lui e^* din planul fizic, iar limita superioară corespunde bordului de atac,

$$L=\sqrt{\frac{1+Be^*}{1-Be^*}},\qquad H_1=\sqrt{\frac{Bl^*+1}{Bl^*-1}}. \tag{105}$$

Introducînd limitele de integrare și ținînd seama de relațiile (26), obținem

$$C_{np1}=\frac{16\,\alpha\alpha_0\,Bl^*}{3B^3(l^*-e^*)^2\sqrt{B^2l^{*2}-1}}\left\{\frac{1}{1-H_1^2}-\frac{2}{\pi(1+L^2)}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{H_1}{L}+\right.\right.$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{H_2}{L}\Big)+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{2H_i}{\pi(1-H_i^2)}\left[\frac{1}{H_i}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{L}{H_i}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{arctg}L\right)\right]-\frac{1}{(1-H_1^2)^2}+\frac{2}{\pi(1+L^2)^2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{H_1}{L}+\operatorname{arctg}\frac{H_2}{L}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{2H_i}{\pi(1-H_i^2)^2}\left[\frac{1-H_i^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}L-\frac{L}{1+L^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}L-\frac{1}{H_i}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{L}{H_i}\right)\right]\right\}. \tag{106}$$

Pentru calculul lui C_{np2}, vom considera relația (86), în care u va fi înlocuit cu (102), iar pentru r_i și dt rămîn valabile relațiile găsite anterior (87) și (88).

Produsul $r_i\,dt$ exprimat în funcție de variabila Y capătă forma

$$r_i\,dt = \frac{8K_0e^*}{3B}\frac{Y\,dY}{(K_1Y^2+K_2)^2} + \frac{8K_0}{3B^2}\frac{(K_3Y^2-K_4)Y\,dY}{(K_1Y^2+K_2)^3}, \tag{107}$$

în care s-a notat

$$K_0 = \frac{1+e^*\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma},\quad K_1 = 1+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{B},\quad K_2 = 1-\frac{\operatorname{tg}\gamma}{B}, \tag{108}$$

$$K_3 = 1-Be^*,\quad K_4 = 1+Be^*.$$

Cu aceste precizări, în loc de (86), pentru aripa cu borduri de atac supersonice se găsește

$$\frac{t_1^{*2}}{2}C_{np2} = -Re\,\alpha\left\{\left(\frac{8K_0e^*}{3K_1BU_\infty}+\frac{8K_0K_3}{3B^2K_1^2U_\infty}\right)\left[\frac{u}{K_1Y^2-K_2}+\right.\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{u_1H_i}{\pi(K_2-K_1H_i^2)}\left(\frac{1}{H_i}\operatorname{arctg}\frac{Y}{H_i}-\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}Y\right)\Bigg]-$$

$$-\frac{4K_0(K_3K_2+K_1K_4)}{3B^2K_1^2U_\infty}\left[\frac{u}{(K_1Y^2+K_2)^2}-\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{2u_1H_i^2}{\pi(K_2-K_1H_i^2)^2}\left[\frac{K_2-K_1H_i^2}{2}\left(\frac{K_1}{K_2}\frac{Y}{K_1Y^2+K_2}+\right.\right. \tag{109}$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{\frac{K_1}{K_2^3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}Y\right)+\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}Y-\frac{1}{H_i}\operatorname{arctg}\frac{Y}{H_i}\right]\right]\Bigg\}_L^{-i(H_1+\varepsilon_1)}$$

Deoarece pentru $Y=-i(H_1+\varepsilon_1)$ avem

$$Re\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}Y = \frac{\pi}{2},\quad Re\operatorname{arctg}\frac{Y}{H_1} = \frac{\pi}{2},\quad Re\operatorname{arctg}\frac{Y}{H_2} = \frac{\pi}{2} \tag{110}$$

expresia finală a lui C_{np2} va fi

$$C_{np1} = \frac{2\alpha\alpha_0Bl^*}{t_1^{*2}B\sqrt{B^2l^{*2}-1}}\left\{\left(\frac{8K_0e^*}{3K_1B}+\frac{8K_0K_3}{3B^2K_1^2}\right)\left[\frac{1}{K_2-K_1H_1^2}-\frac{2}{\pi(K_2+K_1L^2)}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{H_1}{L}+\right.\right.\right.$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{H_2}{L}\Big)+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{H_i}{\pi(K_2-K_1H_i^2)}\left(\frac{1}{H_i}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{L}{H_i}\right)-\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right. \tag{111}$$

$$\left.\left.\left.-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}L\right)\right)\right]-\frac{4K_0(K_3K_2+K_1K_4)}{3B^2K_1^2}\left[\frac{1}{(K_2-K_1H_1)^2}-\frac{2}{\pi(K_2+K_1L^2)^2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{H_1}{L}+\right.\right.$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{H_2}{L}\Big)-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{2H_i}{\pi(K_2-K_1H_i^2)^2}\left[\frac{K_2-K_1H_i^2}{2}\left(\sqrt{\frac{K_1}{K_2^3}}\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.\right.$$

$$-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\Big)L-\frac{K_1}{K_2}\frac{L}{K_2+K_1L^2}\Big)+\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}L\right)-\frac{1}{H_i}\left(\frac{\pi}{2}-$$

$$\left.\left.\left.-\operatorname{arctg}\frac{L}{H_i}\right)\right]\right]\Bigg\}.$$

O dată determinați C_{np1} și C_{np2}, iar C_l fiind cunoscut rezultă că relația coeficientului de moment de girație (73), în cazul aripii cu borduri de atac supersonice, este perfect determinată.

Ca și la aripa cu borduri de atac subsonice, C_{lp1} se obține împărțind cu α expresia (106), iar pentru C_{zp1} și C_{zp2} care apar de asemenea în relația generală a coeficientului de moment șarnieră (76), vom căuta acum expresiile corespunzătoare.

În acest scop, se va folosi relația (30), în care u trebuie înlocuit cu expresia (102).

Făcînd calculele în această situație, se găsește formula

$$\frac{(c-a)}{2} C_{zm} = -Re \frac{4}{BU_\infty} \left[\frac{u}{1+Y^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \frac{2u_1 H_i}{\pi (1-H_i^2)} \left(\frac{1}{H_i} \operatorname{arctg} \frac{Y}{H_i} - \operatorname{arctg} Y \right) \right]_A^C . \qquad (112)$$

Dînd limitelor a și c, respectiv A și C, valorile

$$a = e^*, \quad c = l^* - \varepsilon,$$
$$A = L, \quad C = -i\ (H_1 + \varepsilon_1) \qquad (113)$$

se obține coeficientul de portanță al suprafeței (ODB), pe care l-am notat cu C_{zp1},

$$C_{zp1} = \frac{8\alpha_0 Bl^*}{(l^*-e^*)B^2\sqrt{B^2 l^{*2}-1}} \left\{ \frac{1}{1-H_i^2} - \frac{2}{\pi(1+L^2)} \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \operatorname{arctg} \frac{H_i}{L} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \frac{2H_i}{\pi(1-H_i^2)} \left[\frac{1}{H_i} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{L}{H_i} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} L \right) \right] \right\} . \qquad (114)$$

Procedînd în mod analog, însă integrînd de-a lungul șarnierei Dt (fig. 10) și deci ținînd seama de (88), vom obține

$$C_{zp2} = \frac{8K_0 Bl^*}{t_1^* K_1 B^2 \sqrt{B^2 l^{*2}-1}} \left\{ \frac{1}{K_2 - K_1 H_1^2} - \frac{2}{\pi(K_2 + K_1 L^2)} \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \operatorname{arctg} \frac{H_i}{L} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \frac{2H_i}{\pi(K_2 - K_1 H_i^2)} \left[\frac{1}{H_i} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{L}{H_i} \right) - \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} L \right) \right] \right\} . \qquad (115)$$

Primită la redacție la 23 decembrie 1955

ВЛИЯНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ЭЛЕРОНОВ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы исследовали в связи с теорией конических движений влияние отклонения треугольных элеронов на аэродинамические характеристики треугольного крыла в сверхзвуковом режиме.

В первой части работы (пункты 2, 3, 4) исследуются аэродинамические характеристики элеронов, рыссматриваемых отдельно для нижеследующих двух положений.

а) Элероны с сверхзвуковой передней кромкой.

б) Элероны с подзвуковой передней кромкой.

Определяя осевую скорость возмущения u (11) и (39) при помощи метода гидродинамической аналогии, авторы в дальнейшем выводят общие соотношения для коэффициента подъемной силы (16), (47), коэффициента момента боковой качки (33), (57) и коэффициента шарнирного момента (64).

В дальнейшем эти формулы выведены для частных случаев в зависимости от положения шарнира.

В следующих параграфах (пункты 5, 6, 7) исследуется общий случай наклонного крыла с отклоненными элеронами.

В этом положении характеристики движений вдоль радиуса, проходящего через точку 0 (рис. 6), не постоянны.

Принимая во внимание, что в рамках уравнений, приведенных к линейным и соответствующих мелким возмущениям, эффекты суммируются, а также на основании интерференции этих двух движений, авторы нашли общие зависимости для глобальных аэродинамических коэффициентов крыла с несимметрично отклоненными элеронами (71), (72), (73), (76); члены, соответствующие интерференции, даны выражениями: (85), (91), (94), (96), для крыла с подзвуковой передней кромкой и (106), (111), (114) и (115) для элерона с сверхзвуковой передней кромкой.

INFLUENCE DU BRAQUAGE DES AILERONS SUR LES CARACTÉRISTIQUES AÉRODYNAMIQUES DE L'AILE TRIANGULAIRE EN RÉGIME SUPERSONIQUE

(RÉSUMÉ)

Les auteurs s'occupent de l'influence du braquage des'ailerons triangulaires sur les caractéristiques aérodynamiques de l'aile triangulaire en régime supersonique, dans le cadre de la théorie des mouvements coniques.

Dans la première partie du travail (nos 2, 3, 4) on étudie les caractéristiques aérodynamiques des ailerons, considérés séparément, pour les deux situations suivantes :

a) aileron à bord d'attaque supersonique,

b) aileron à bord d'attaque subsonique.

Ayant déterminé la vitesse axiale de perturbation u (11) et (39), en utilisant la méthode de l'analogie hydrodynamique, on a déduit les relations générales pour le coefficient de portance (16), (47), le coefficient de moment de roulis (33), (57) et le coefficient de moment de charnière (64).

Ces formules sont ensuite exprimées pour des cas particuliers en fonction de la position de la charnière.

Aux paragraphes suivants (nos 5, 6, 7), on étudie le cas général de l'aile à incidence et à ailerons braqués.

Dans cette situation, les caractéristiques du mouvement ne sont plus constantes le long d'un rayon passant par le point 0 (fig. 6).

Compte tenu du fait que dans le cadre des équations rendues linéaires qui correspondent aux petites perturbations, les effets s'ajoutent en considération l'interférence des deux mouvements aussi, on a trouvé des relations générales pour les coefficients aérodynamiques globaux de l'aile à ailerons braqués antisymétriquement (71), (72), (73), (76), les termes correspondant à l'interférence étant donnés sous forme explicite par les expressions (87), (91), (94), (96), pour l'aileron à bords d'attaque subsoniques et par (106), (111), (114) et (115) pour l'aileron à bords d'attaque supersoniques.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 9—10, septembrie-octombrie 1952, p. 629.

2 — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mișcările conice la aripile groase și cu incidența variabilă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 3—4, martie-aprilie 1953, p. 141.

3. P. A. Lagerstrom and Martha E. Graham, *Linearized Theory of Supersonic Control Surfaces.* Journal of the Aeronautical Sciences, ianuarie 1949, nr. 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

AEROMECANICĂ

FORMULELE UNDEI MIXTE PENTRU SISTEMELE LINIARE STABILE

DE

AL. MARINESCU

Pentru sistemele liniare stabile întîlnite la comenzile automate ale aeronavelor sau la studiul mişcării aeronavelor, în lucrările [1] şi [2] s-a indicat calculul funcţiei de răspuns pentru o funcţie de transfer dată, ca şi calculul funcţiei de transfer pentru o funcţie de răspuns dată, cînd funcţia de intrare (perturbaţia) este rectangulară respectiv în treaptă oblică.

Menţionăm că atunci cînd se studiază mişcarea unei aeronave, perturbaţia poate reprezenta, de exemplu, un bracaj, iar funcţia de răspuns un unghi de tangaj sau e ruliu etc.

Referindu-ne în special la cazul mişcării aeronavelor în lucrarea de faţă utilizînd metodele cunoscute ale calculului operaţional, vom calcula funcţia de răspuns pentru o funcţie de transfer dată, ca şi funcţia de transfer pentru o funcţie de răspuns dată, cînd perturbaţia pe care o numim „undă mixtă" arată ca în figura 3. Aceasta are avantajul că, spre deosebire de cele studiate în [1] şi [2], include şi efectul inerţiei mecanice în cazul deplasărilor bruşte ale comenzii, şi în plus, conduce la formule care generalizează pe cele din lucrările citate.

I. DETERMINAREA FUNCŢIEI DE INTRARE (PERTURBAŢIA)

a. Cazul perioadei finite

Notînd cu ω frecvenţa perturbaţiei vom admite că perioada acesteia $T = \frac{2\pi}{\omega}$ este finită şi astfel aleasă încît funcţia de răspuns $h\ (t)$ pentru $t = \frac{T}{2}$ să aibă o variaţie neglijabilă în jurul valorii constante G_0 (vezi fig. 6).

Funcția de variabilă x de la care pornim reprezentată în figura 1 este definită astfel

$$f(x)\begin{cases} h_1 + \frac{h_2}{a}\,x, & \text{pentru } 0 < x < a, \\ h_1 + h_2, & \text{pentru } a < x < \pi - a, \\ h_1 + (\pi - x)\frac{h_2}{a} & \text{pentru } \pi - a < x < \pi, \end{cases}$$

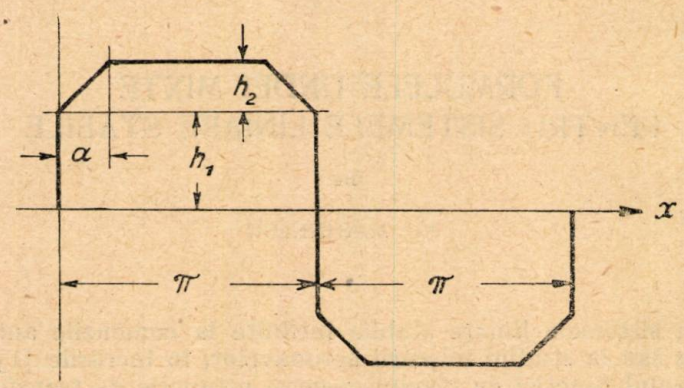


Fig. 1

și se exprimă printr-o serie Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_1^\infty a_m \cos mx + \sum_1^\infty b_m \sin mx. \tag{1}$$

Deoarece se vede că

$$f(x) = -f(x) \tag{2}$$

vom avea $a_0 = 0$, $a_m = 0$ și

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin mx\, dx. \tag{3}$$

Efectuînd integralele (3), relația (1) devine

$$f(x) = \sum_{m=1,3,}^{\infty} \left(\frac{4h_1}{\pi m} + \frac{4h_2}{\pi a m^2} \sin ma \right) \sin mx \tag{4}$$

sau sub forma complexă utilizînd formulele lui Euler

$$f(x) = \sum_{m=\pm 1,\pm 3,}^{\infty} \left(\frac{2h_1}{\pi}\,\frac{e^{imx}}{im} + \frac{h_2}{\pi a}\cdot\frac{e^{im(x-a)} - e^{im(x+a)}}{m^2} \right). \tag{5}$$

După cum lesne se poate constata perturbația din figura 2 va avea expresia

$$f(x) = h_1 + h_2 + \sum_{m=\pm 1,\pm 3,}^{\infty} \left(\frac{2h_1}{\pi} \frac{e^{imx}}{im} + \frac{h_2}{\pi a} \cdot \frac{e^{im(x-a)} - e^{im(x+a)}}{m^2} \right). \qquad (6)$$

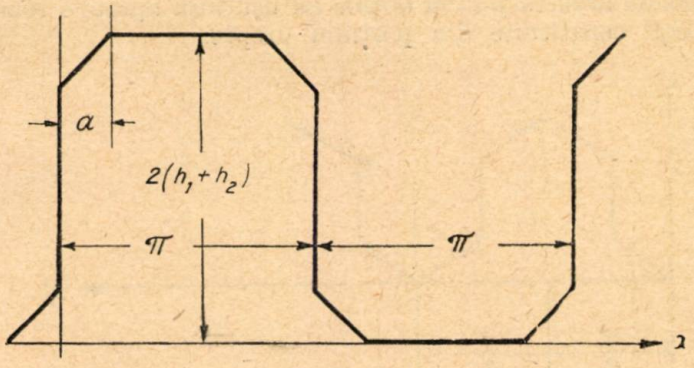


Fig. 2.

Perturbația în treaptă mixtă din figura 3 se va obține ca funcție de t din relația (3) făcînd

$$x = \omega \left(t - \frac{\theta}{2} \right),$$

$$a = \omega \frac{\theta}{2}$$

și avem

$$f(t) = h_1 + h_2 + \sum_{m=\pm 1,\pm 3,}^{\infty} \left[e^{im\omega t} \left(\frac{2h_1}{\pi} \cdot \frac{e^{-im\omega\frac{\theta}{2}}}{im} + \frac{2h_2}{\pi\omega} \cdot \frac{e^{-im\omega t} - 1}{m^2\theta} \right) \right] \qquad (7)$$

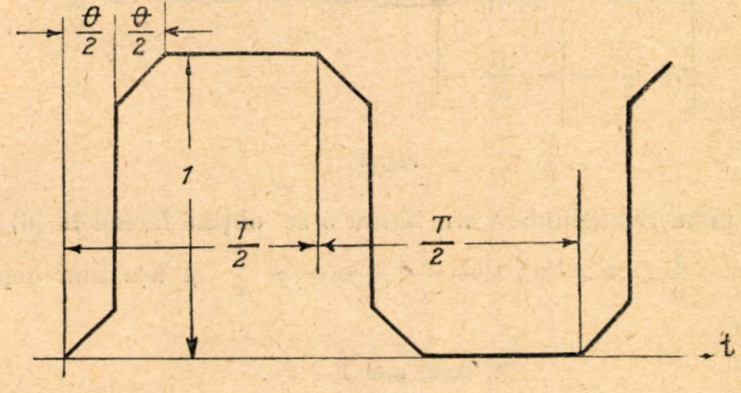


Fig. 3

bineînțeles cu condiția

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2}. \qquad (8)$$

Se poate ușor vedea că relația (7) generalizează cazurile studiate în [1] și [2] căci făcînd $h_2 = \theta = 0$ și $h_1 = \frac{1}{2}$ obținem cazul studiat în [1] și făcînd $h_1 = 0$, $h_2 = \frac{1}{2}$ obținem cazul studiat în [2].

În afară de aceasta putem obține cu ușurință aproape toate genurile de perturbații constituite din porțiuni drepte.

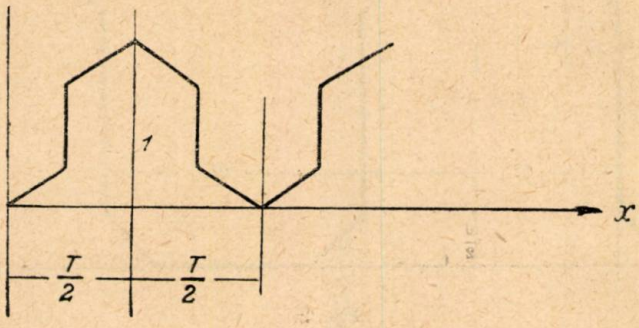


Fig. 4

Ca exemplu unda din figura 4 se obține făcînd în (6)

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2}, \quad x = \omega\left(t - \frac{T}{4}\right), \quad a = \omega\,\frac{T}{4}.$$

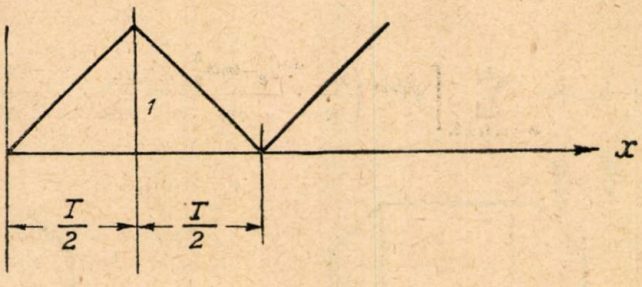


Fig. 5

Apoi unda triunghiulară din figura 5 se obține făcînd în (6)

$h_1 = 0$, $h_2 = \frac{1}{2}$, $x = \omega\left(t - \frac{T}{4}\right)$, $a = \omega\,\frac{T}{4}$ și așa mai departe.

b. Cazul cînd $T \to \infty$

Punînd $p = im\omega$ și notînd distanța între două puncte consecutive de-a lungul curbei funcției de transfer cu $\Delta p = 2i\omega$, la limită cînd $\omega \to 0$ suma infinită din relația (7) se poate transpune unor integrale de-a lungul axei imaginare.

Deoarece $p = 0$ este un pol pentru funcțiile $\frac{e^{pt}\, e^{-p\frac{\theta}{2}}}{p}$ și $\frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p^2\theta}$, vom ocoli originea (fig. 6) cu un semicerc de rază r oricît de mică vrem și vom avea

$$f(t) = h_1 + h_2 + 2h_1 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}\, e^{-p\frac{\theta}{2}}}{p}\, dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon} \frac{e^{pt}\, e^{-p\frac{\theta}{2}}}{p}\, dp \right\} + \tag{9}$$

$$+ 2h_2 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p^2\theta}\, dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon} \frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p^2\theta}\, dp \right\}.$$

Pe semicercul ε punem

$$p = re^{i\psi}$$
$$dp = ire^{i\psi}\, d\psi$$

și avem

$$\int_{\varepsilon} \frac{e^{pt}\, p^{-p\frac{\theta}{2}}}{p}\, dp = i \lim_{r\to 0} \int_{0}^{\pi} (e^{pt} e^{-p\frac{\theta}{2}})\, d\psi = \pi i,$$

$$\int_{\varepsilon} \frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p^2\theta}\, dp = i \lim_{r\to 0} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p\theta} \right) d\psi = \pi i$$

deoarece este lesne de văzut că

$$\lim_{r-0} (e^{pt}\, e^{-p\frac{\theta}{2}}) = 1,$$

$$\lim_{r\to 0} \left[\frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p\theta} \right] = 1.$$

Rezultă

$$f(t) = 2h_1 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}\, e^{-p\frac{\theta}{2}}}{p}\, dp \right\} + 2h_2 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p^2\theta}\, dp \right\}, \tag{10}$$

care arată că perturbația în treaptă mixtă atunci cînd $T \to \infty$ nu este altceva decît $2h$, înmulțit cu inversa transformatei Laplace a funcției $e^{-p\frac{\theta}{2}}$ căreia i se adaugă $2h_2$ înmulțit cu inversa transformatei Laplace a funcției în treaptă oblică unitară.

II. CALCULUL FUNCȚIEI DE RĂSPUNS CÎND FUNCȚIA DE TRANSFER ESTE DATĂ

a. Cazul perioadei finite

Definind funcția de transfer dată de $G(p) = G_m\, e^{i\nu_m}$, $G(0) = G_0$ ca raportul dintre funcția de răspuns și cea de intrare, vom avea pentru funcția de răspuns expresia

$$h(t) = G_0(h_1 + h_2) + \sum_{m=\pm 1, \pm 3}^{\infty} \left(\frac{2h_1}{\pi} \frac{G_m}{im}\, e^{i\left(m\omega t - m\omega\frac{\theta}{2} + \nu m\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2h_2}{\pi\omega} \cdot \frac{G_m}{m_2}\, e^{i(m\omega t + \nu_m)} \cdot \frac{e^{i - m\omega\theta} - 1}{\theta} \right). \tag{11}$$

b. Cazul cînd $T \to \infty$

Întrucît sistemele la care aplicăm aceste relații le-am presupus stabile funcția de transfer $G(p)$ este olomorfă în domeniul din dreapta axei imaginare și urmînd același raționament ca în cazul b din I obținem

$$h(t) = 2h_1 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}\, e^{-p\frac{\theta}{2}}}{p} G(p)\, dp \right\} + 2h_2 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}(1 - e^{-p\theta})}{p^2\theta} G(p)\, dp \right\}, \tag{12}$$

care arată că atunci cînd $T \to \infty$, funcția de răspuns nu este altceva decît $2h_1$ înmulțit cu inversa transformatei Laplace a răspunsului cauzat de funcția $e^{-p\frac{\theta}{2}}$ căreia i se adaugă $2h_2$ înmulțit cu inversa transformatei Laplace a răspunsului cauzat de funcția în treaptă oblică unitară.

III. CALCULUL FUNCȚIEI DE TRANSFER CÎND FUNCȚIA DE RĂSPUNS ESTE DATĂ

a. Cazul perioadei finite

În ipoteza perturbației în treaptă mixtă să considerăm funcția de răspuns ca în figura 7, o funcție periodică de perioadă T astfel că la $t = \frac{T}{2}$, $h(t) = G_0$.

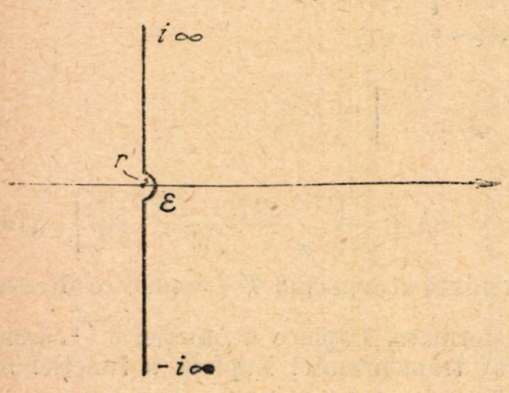


Fig. 6

Putem aproxima expresia funcției de răspuns prin însumarea a q suprafețe elementare, fie dreptunghiulare fie trapezoidale.

H o h e n e m s e r a arătat în [2] că fîșiile trapezoidale prezintă o mai bună aproximație față de cele dreptunghiulare fapt pentru care le vom utiliza și în lucrarea de față.

Notînd cu $\Delta_n h$ înălțimea unui trapez elementar și ținînd seama că funcția trapezoidală unitară se exprimă prin următoarea serie Fourier scrisă sub forma complexă *)

$$f_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\omega} \sum_{m=\pm 1,\pm 3,}^{\infty} \frac{e^{im\omega t}}{m^2} \cdot \frac{e^{-im\omega\theta} - 1}{\theta}. \tag{13}$$

Înlocuind în (13) pe t cu $t - t_n$ și pe θ cu θ_n (fig. 7), obținem funcția

*) Această expresie se obține din (7) făcînd $h_1 = 0$ și $h_2 = \frac{1}{2}$

răspunsului ca o sumă de q serii Fourier

$$h(t) = \sum_{1}^{q} \Delta_n h \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\omega} \sum_{m=\pm 1,\pm 3}^{\infty} \frac{e^{im\omega(t-t_n)}\,(e^{-im\omega\theta} - 1)}{m^2\,\theta_n} \right\}. \tag{14}$$

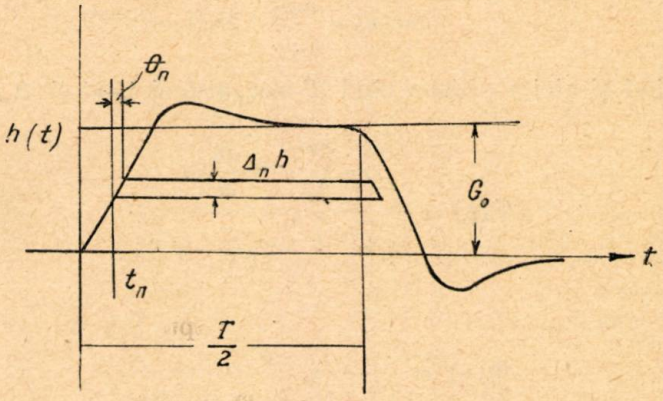


Fig. 7

Pe de altă parte, din (11) avem expresia lui $h(t)$ pe care o scriem sub forma echivalentă

$$h(t) = G_0\,(h_1 + h_2) + \sum_{m=\pm 1,\pm 3}^{\infty} \left(\frac{2h_1\,\omega m}{\pi i \omega m^2} G_m\, e^{i\nu_m}\, e^{im\omega t}\, e^{-im\omega\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{2h_2}{\pi\omega m^2} G_m\, e^{i\nu_m}\, e^{im\omega t} \cdot \frac{e^{-im\omega\theta} - 1}{\theta} \right). \tag{15}$$

Identificînd (14) cu (15) obținem expresiile funcției de transfer

$$G_0 = \frac{1}{2\,(h_1 + h_2)} \cdot \sum_{1}^{2} \Delta_n h,$$

$$G_m\, e^{i\nu_m} = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{q} e^{-im\omega t_n} \cdot \frac{e^{-im\omega\theta} - 1}{\theta_n}\ \Delta_n h}{\dfrac{2h_1\omega m}{i} \cdot e^{-im\omega\frac{\theta}{2}} + 2h_2 \dfrac{e^{-im\omega\theta} - 1}{\theta}} \tag{16}$$

b. Cazul cînd $T \to \infty$

Făcînd în (16) pe θ_n să tindă către zero vom obține după ce aplicăm regula lui L'Hôpital

$$G_m\, e^{i\nu_m} = \frac{-im\omega \displaystyle\sum_{n=1}^{q} e^{-im\omega t_n} \cdot \Delta_n h}{\dfrac{2h_1\,\omega m}{i}\, e^{-im\omega\frac{\theta}{2}} + 2h_2(1 - e^{-im\omega\theta})}. \tag{17}$$

Înmulțind la numărător și la numitor cu $-\theta$ obținem

$$G_m e^{i\nu_m} = \frac{im\omega\theta \sum_{n=1}^{q} e^{-im\omega t_n} \Delta_n h}{2h_1 im\omega . e^{-im\omega \frac{\theta}{2}} + 2h_2(1 - e^{-im\omega\theta})}. \tag{18}$$

Înlocuind și aici $p = im\omega$ cînd $T \to \infty$, atunci $t_n \to t$ și $\Delta_n h \to 0$ și vom obține

$$G(p) = \frac{\theta . p. \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dh}{dt} dt}{2h_1 pe^{-p\frac{\theta}{2}} + 2h_2(1 - e^{-p\theta})}. \tag{19}$$

Punem

$$\Phi(p) = \frac{\theta}{2h_1 pe^{-p\frac{\theta}{2}} + 2h_2(1 - e^{-p\theta})} \tag{20}$$

și scriem (19) sub forma

$$G(p) = \Phi(p) . p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{dh}{dt} dt \tag{21}$$

care arată că atunci cînd $T \to \infty$ funcția de transfer pentru perturbația în treaptă mixtă este produsul dintre o funcție dată de (20) și transformata Laplace a derivatei funcției de răspuns în raport cu timpul.

Se constată din cele de mai sus că formulele obținute pe baza undei mixte, pe lîngă faptul că includ și efectul inerției mecanice în cazul deplasărilor bruște ale comenzii, generalizează în mod simplu formulele obținute pe baza undei rectangulare și a celei în treaptă oblică.

Primit la redacție la 14 martie 1956

ФОРМУЛ ВОЛНЫ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(КРАТКОЕ С ДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе рассматриваются выражения волны смешанного типа, на основании которых вычисляется ответная функция, когда дана функция передачи и, соответственно, функция пер дачи, когда дана ответная функция для устойчивых линейных систем автоматических управлений.

Рассматривается как случай конечных, так и случай бесконечных периодов.

Получаемые зависимости обобщают соотношения, рассматриваемые в (1) и (2).

FORMULES DE L'ONDE MIXTE POUR LES SYSTEMÈS LINÉAIRES STABLES

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, on développe les expressions de l'onde mixte, en vertu desquelles on calcule la fonction de réponse lorsque la fonction de transfert est donnée ou, inversement, la fonction de transfert lorsque la fonction de réponse est donnée, pour les systèmes linéaires stables des commandes automatiques.

On considère le cas des périodes finies ainsi que celui des périodes infinies.

Les relations obtenues généralisent celles qui sont développées dans [1] et [2].

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Seamans, B. G. Bromberg, L. E. Payne, *Application of the Performance Operator to Aircraft Automatic Control.* Journal of the Aeronautical Sciences, septembrie 1948, nr. 9.
2. K. Hohenemser, *Equations for the Aproximate Solution of Dynamic Problems Stable Linear Systems.* Journal of the Aeronautical Sciences, decembrie 1949, nr. 12.
3. M. Denis Papin et K. Kaufmann, *Cours de calcul opérationnel.* Paris, 1950.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

AEROMECANICĂ

CONSIDERAŢII ASUPRA ARDERII LAMINARE ÎN CAMERE DE SECŢIUNE VARIABILĂ

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Problema arderii laminare într-un curent omogen de amestec gazos combustibil, pusă de Scurlock în 1948, a fost rezolvată atît pentru cazul mişcărilor bidimensionale [1], cît şi al mişcărilor axialsimetrice [2], [3] în ipoteza că dimensiunile camerei de ardere sînt constante în direcţia mişcării.

Pentru acest gen de mişcări fenomenul poate fi studiat în întregime, fiind conduşi la ecuaţii integrale care dau legătura între lăţimea frontului flăcării şi viteza amestecului near s ; fenomenul mai poate fi studiat, mai simplu, urmînd ideia lui H. S. Tsien [1] de a înlocui distribuţia vitezelor rezultată prin rezolvarea ecuaţiilor integrale amintite, cu unele aproximative, respectiv cu o variaţie liniară în cazul problemei bidimensionale sau cu una parabolică, în cazul arderilor axial-simetrice. Acest mod de a trata problema permite şi luarea în considerare a compresibilităţii amestecului, fapt care conduce la relevarea unei particularităţi interesante : dacă numărul Mach al scurgerii în amontele zonei de combustie depăşeşte o anumită valoare critică, arderea nu se mai poate produce complet. În aceste situaţii este evident necesar ca, fie să se micşoreze viteza de scurgere a amestecului, fie, dacă aceasta nu este posibil, să se mărească progresiv dimensiunile camerei de ardere. Sîntem deci conduşi la a studia problema în cazul cînd dimensiunile camerei de ardere sînt variabile în direcţia scurgerii.

Într-o lucrare anterioară [2] s-a afirmat că consideraţiile făcute cu privire la arderile în camere cu secţiune constantă pot fi extinse şi pentru cazul cînd camera de combustie este cu secţiune variabilă, în ipoteza că variaţia secţiunii este suficient de lentă pentru ca să se poată presupune că liniile de curent nu diferă prea mult de linii drepte. În aceste condiţii se pot reface raţionamentele lui Scurlock, obţinînd ecuaţii integrale asemănătoare. Se poate însă considera că variaţiile secţiunii fiind suficient de lente, ele nu influenţează alura distribuţiei vitezelor într-o secţiune normală pe direcţia scurgerii. În acest mod problema poate fi tratată într-un fel absolut analog cu cel indicat.

Ipoteza că profilul vitezelor nu este afectat de variațiile secțiunii camerei de ardere introduce desigur o aproximație în plus. Totuși, avînd în vedere faptul că variațiile de secțiune sînt lente, această ipoteză pare ca logică și introduce erori mici (din cauza faptului că în virtutea ecuației continuității, distribuția de viteze propusă va media distribuția reală), în special în ceea ce privește influența compresibilității (calculul numărului Mach critic de la care combustia nu se mai poate efectua complet) care este una din laturile cele mai importante ale acestei probleme. În schimb, după cum se va arăta, ipoteza făcută prezintă marele avantaj

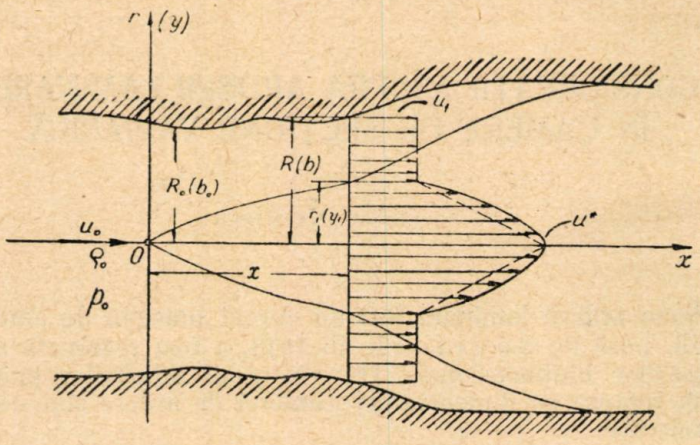


Fig. 1

de a permite obținerea rezultatelor prin mijloace simple și aplicabile direct în calcule.

Să considerăm deci că ipotezele simplificatoare ale problemei sînt aceleași, adică atît amestecul de gaze, nears cît și cel ars, sînt gaze perfecte, omogene și cu structură chimică stabilă (nu se produce disociație). Căldurile specifice ale gazului se consideră constante. În sfîrșit, se neglijează conductibilitatea termică a gazelor și difuzia lor.

Să presupunem pentru început că atît amestecul omogen nears cît și cel ars sînt incompresibile, adică scurgerea în camera de ardere se face la un număr Mach inițial (fig. 1)

$$M_0 = \frac{u_0}{a_0} \tag{1}$$

foarte redus. În relația (1) u_0 este viteza gazului nears în secțiunea inițială a zonei de combustie ($x = 0$) în care este plasat arzătorul, iar a_0 viteza respectivă a sunetului.

La traversarea frontului flăcării se poate considera că fenomenul nu diferă de unul unidimensional și deci, dacă w_1 și w_2 sînt vitezele înainte și după frontul flăcării, față de acesta, și ρ_1, ρ_2, p_1, p_2, T_1, T_2 respectiv densitatea, presiunea, temperatura înainte și după frontul flăcării și dacă se notează cu

$$\lambda = \frac{T_0'}{T_0} \tag{2}$$

raportul dintre temperatura de stagnare a gazului ars și nears, atunci la traversarea frontului combustiei există relațiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} = \lambda, \\ p_2 = p_1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Deoarece s-a făcut ipoteza că fluidul este perfect, în zona nearsă viteza va avea o distribuție uniformă $u_1(x)$. În porțiunea centrală viteza va varia, conform ipotezelor făcute, între valoarea u_1 și o valoare maximă u^*, în axa camerei. Valoarea vitezei u^* poate fi găsită aplicînd formula lui Bernoulli între secțiunea inițială $x = 0$ și secțiunea x considerată, pe o linie de curent în zona nearsă și pe axa camerei. Se obține astfel relația

$$\frac{u^*}{u_0} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_0^2} - 1\right)}. \tag{4}$$

În cazul problemei plane, notînd cu y_1 lățimea frontului flăcării în secțiunea x, distribuția vitezelor în zona arsă va fi dată de relația

$$\frac{u}{u_0} = \frac{u^*}{u_0} - \left(\frac{u^*}{u_0} - \frac{u_1}{u_0}\right)\frac{y}{y_1} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_0^2} - 1\right)} - \left[\sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_0^2} - 1\right)} - \frac{u_1}{u_0}\right]\frac{y}{y_1}. \tag{5}$$

Pentru problema axial-simetrică, notînd cu r_1 raza frontului flăcării în secțiunea x, distribuția vitezelor este

$$\frac{u}{u_0} = \frac{u^*}{u_0} - \left(\frac{u^*}{u_0} - \frac{u_1}{u_0}\right)\frac{r^2}{r_1^2} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_0^2} - 1\right)} - \left[\sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_0^2} - 1\right)} - \frac{u_1}{u_0}\right]\frac{r^2}{r_1^2}. \tag{6}$$

Pentru a găsi legătura dintre lățimea frontului flăcării și viteza gazului nears, ca și în cazurile precedente [1], [2], ne vom folosi de ecuația de continuitate, aplicată între secțiunea inițială și secțiunea x. Astfel, pentru cazul camerelor de ardere de lărgime infinită (problema bidimensională) se poate scrie

$$\rho_2 \int_0^{y_1} u\,dy + \rho_1 (b - y_1)\, u_1 = \rho_1 b_0 u_0, \tag{7}$$

sau, ținînd seama de relația (3),

$$\frac{1}{\lambda}\frac{y_1}{b}\int_0^1 \frac{u}{u_0}\,d\left(\frac{y}{y_1}\right) + \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)\frac{u_1}{u_0} = \frac{b_0}{b} \tag{8}$$

şi, în sfîrşit, ţinînd seama de relaţia (5),

$$y_1 = f(U, x) = \frac{bU - b_0}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}, \tag{9}$$

în care s-a notat cu

$$U = \frac{u_1}{u_0}. \tag{10}$$

Pentru problema axial-simetrică, ecuaţia continuităţii se scrie

$$\rho_2 \int_0^{r_1} 2\pi r u \, dr + \rho_1 \pi (R^2 - r_1^2) u_1 = \rho_1 \pi R_0^2 u_0, \tag{11}$$

în care s-a notat cu R raza camerei de ardere în secţiunea x, şi cu R_0 raza camerei de ardere în secţiunea iniţială. Efectuînd operaţii analoge, se obţine

$$r_1 = \sqrt{\frac{R^2 U - R_0^2}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}}, \tag{12}$$

în care U are aceeaşi semnificaţie (10).

Fracţiunea de gaze arse, este pentru problema bidimensională

$$f = 1 - \frac{\rho_1 (b - y_1) u_1}{\rho_1 b_0 u_0} = 1 - \frac{b - y_1}{b_0} \frac{u_1}{u_0}, \tag{13}$$

sau (9)

$$f = \frac{\left(\frac{b_0}{b} U - 1\right)\left[\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)} + U\right]}{(2\lambda - 1) U - \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}. \tag{14}$$

Pentru problema axial-simetrică, fracţiunea de gaze arse în secţiunea x este

$$f = 1 - \frac{\rho_1 \pi (R^2 - r_1^2) u_1}{\rho_1 \pi R_0^2 u_0} = 1 - \frac{R^2 - r_1^2}{R_0^2} \frac{u_1}{u_0}, \tag{15}$$

sau (12)

$$f = \frac{\left(\frac{R_0^2}{R^2} U - 1\right)\left[\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)} + U\right]}{(2\lambda - 1) U - \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}. \tag{16}$$

Rezultă deci relaţii asemănătoare cu cele obţinute în cazul cînd dimensiunile camerei de ardere sînt constante. Singura deosebire este că în relaţiile respective apare $b(x)$, respectiv $R(x)$, ca funcţie de x. În consecinţă problema determinării mişcării pentru o anumită fracţiune de gaze arse, sau pentru o anumită viteză u_1 a gazului nears, nu mai poate fi despărţită de variaţia caracteristicilor mişcării în direcţia axei x.

Pentru aceasta se poate scrie relaţia care dă înclinarea frontului flăcării,

$$\sin \alpha = \frac{w_1}{u_1}, \tag{17}$$

sau, considerînd α suficient de mic pentru a aproxima sinusul cu tangenta,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{w_1}{u_1} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U} \tag{18}$$

pentru problema bidimensională, și

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{w_1}{u_1} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U} \tag{19}$$

pentru problema axial-simetrică.

Relațiile (9) și (12) dau respectiv pe y_1 și r_1 în funcție de U. Pentru problema bidimensională, diferențiind relația (9) și egalînd rezultatul cu relația (18) se obține

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\partial f}{\partial U}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U}, \tag{20}$$

adică

$$\left\{\frac{b}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(u^2-1)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{bU - b_0}{2\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} \frac{2\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{1+\lambda(U^2-1)} - U}{\left[\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]^2}\right\}\frac{dU}{dx} +$$

$$+ \frac{U}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}\frac{db}{dx} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U}. \tag{21}$$

În mod analog, pentru problema axial-simetrică se obține

$$\left\{\frac{R^2}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{R^2 u - R_0^2}{2\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} \frac{2\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{1+\lambda(U^2-1)} - U}{\left[\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]^2}\right\} \cdot \tag{22}$$

$$\cdot \left[\frac{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}{R^2 U - R_0^2}\right]^{1/2}\frac{dU}{dx} +$$

$$+ \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}}\frac{dR}{dx} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U}.$$

Soluția ecuației diferențiale (21), respectiv (22), dă legătura dintre viteza gazelor nearse și x. O dată cunoscută această legătură, problema poate fi integral rezolvată, deoarece, pentru un anumit x, relația (9), respectiv (12), dă lățimea frontului flăcării, relațiile (5) și (6) distribuția vitezelor, relațiile (14) și (16) procentul de gaze arse etc.

Ecuațiile diferențiale (21) sau (22) au forme relativ complicate și din această cauză nu se pretează la soluționări sub forme simple. Ele pot fi însă integrate prin diferite metode numerice sau grafice de la caz la caz. Dacă $b = \text{const.}$ ($R = \text{const}$), aceste ecuații devin cu variabile separate, iar rezolvarea lor se reduce evident la problema arderii în camere cu secțiune constantă, deja studiată [1], [2].

*

Problema pusă în acest fel, permite să se țină seama și de influența compresibilității fluidului în mișcare. Astfel, considerînd valabile aceleași ipoteze ca și pentru cazul camerelor de secțiune constantă, adică alura distribuției vitezelor nu este influențată de efectul compresibilității, coeficientul λ constant și de asemenea densitatea

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{\lambda} \tag{23}$$

constantă într-o secțiune x în zona arsă, aproximații justificate [1], atunci, ținînd seama de relația dintre densitatea amestecului nears din secțiunea x și secțiunea inițială $x = 0$,

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_0^2 (u^2 - 1) \right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \tag{24}$$

rezultă pentru $\frac{u^*}{u_0}$ aceeași valoare (4) și deci distribuția vitezelor are aceeași expresie (5), sau (6).

Aplicînd ecuația continuității între secțiunile x și $x = 0$ se poate scrie, pentru problema bidimensională

$$\rho_2 \int_0^{y_1} u\,dy + \rho_1 (b - y_1) u_1 = \rho_0 b_0 u_0 \tag{25}$$

și, ținînd seama de relațiile (5), (23) și (24), rezultă legătura dintre y_1 și U și b de forma

$$y_1 = \frac{bU - b_0 \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_0^2 (U^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}}}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda} \right) U - \frac{1}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda (U^2 - 1)}}, \tag{26}$$

în care dacă se pune $M_0 = 0$ se regăsește evident relația (9).

În mod analog, pentru problema axial-simetrică, ecuația continuității se scrie

$$\rho_2 \int_0^{r_1} 2\pi r u\,dr + \rho_1 \pi (R^2 - r_1^2) u_1 = \rho \pi R_0^2 u_0 \tag{27}$$

și, ținînd seama de relațiile (6), (23) și (24), se obține, în locul relației (12), relația

$$r_1 = \sqrt{\frac{R^2 U - R_0^2\left[1 - \frac{\varkappa-1}{2} M_0^2 (U^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}}. \tag{28}$$

Fracțiunea de gaze arse f este

$$f = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{b-y_1}{b_0} U \tag{29}$$

pentru problema bidimensională, și

$$f = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{R^2 - r_1^2}{R_0^2} U \tag{30}$$

pentru problema axial-simetrică.

Relațiile (18) și (19) rămîn aceleași și în consecință, diferențiind relațiile (26) și (28) și egalîndu-le cu relațiile (18) și (19) se obțin ecuații diferențiale asemănătoare ecuațiilor (21) și (22), și anume

$$\left\{\frac{b-b_0 U M_0^2\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2(U^2-1)\right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{bU - b_0\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2(U^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{2\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} \cdot \frac{2\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{1+\lambda(U^2-1)} - U}{\left[\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]^2}\right\}\frac{dU}{dx} +$$

$$+ \frac{U}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}\frac{db}{dx} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U} \tag{31}$$

pentru problema bidimensională, și

$$\left\{\frac{R^2 - R_0^2 U M_0^2\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2(U^2-1)\right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{R^2 U - R_0^2\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2(U^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{2\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} \cdot \frac{2\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{1+\lambda(U^2-1)} - U}{\left[\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]^2}\right\}\left[\frac{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}{R^2 U - R_0^2\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2(U^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}\right]^{1/2}\frac{dU}{dx} + \tag{32}$$

$$+ \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}}\frac{dR}{dx} = \frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U}$$

pentru problema axial-simetrică.

În cazul arderilor în camere de secțiune constantă, s-a arătat [1], [2] că dacă numărul M_0 al scurgerii în zona inițială depășește o anumită valoare critică, arderea nu se mai poate efectua complet. Acest fenomen se poate produce evident și în cazul camerelor de secțiune variabilă. În comparație cu camerele de secțiune constantă, la camerele cu $\frac{db}{dx} < 0$, respectiv $\frac{dR}{dx} < 0$, M_{0c} va avea valori mai mici, iar la cele cu $\frac{db}{dx} > 0$, respectiv cu $\frac{dR}{dx} > 0$, valori mai mari. Mai mult, în cazul cînd camera de

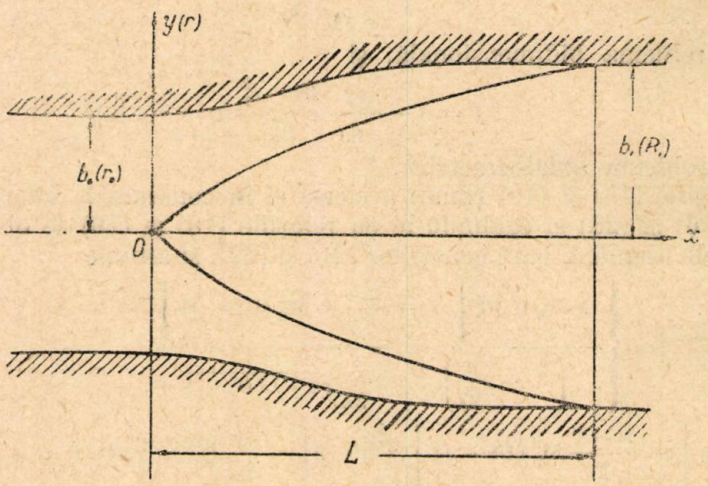


Fig. 2

combustie are o variație a secțiunii oarecare cu $\frac{db}{dx}$, respectiv $\frac{dR}{dx}$, alternativ negativ și pozitiv, arderea se poate întrerupe și amestecul nears se reaprinde la o distanță anumită în aval, în cazul cînd temperatura gazelor arse mai este încă suficient de ridicată pentru a reamorsa arderea (jucînd rolul arzătorului din secțiunea inițială $x = 0$). Aceste considerații fizice pot fi de altfel verificate și matematic, prin examinarea ecuațiilor (31), (32) și a relațiilor (26), (28).

Să examinăm acum următoarea situație, mai interesantă din punct de vedere aplicativ : să presupunem că considerente constructive și funcționale impun o secțiune inițială a camerei de ardere la care ar corespunde un număr Mach $M_0 > M_{0c}$, în ipoteza că s-ar construi camera de ardere cu secțiune constantă. Desigur, în acest caz este necesar ca secțiunea camerei de ardere să fie mărită progresiv, ajungînd la b_1 în loc de b_0 ($b_1 > b_0$), respectiv la R_1 în loc de R_0 ($R_1 > R_0$). Determinarea valorii minime b_1 respectiv R_0 pentru ca arderea să se poată efectua totuși complet, poate fi făcută ținînd seama de considerațiile precedente.

Într-adevăr, presupunînd că secțiunea camerei de ardere se termină cu $b = b_1 = \text{const} \cdot (R = R_1 = \text{const.})$ (fig. 2), la această dimensiune,

trebuie să punem condițiile

$$\frac{\partial y_1}{\partial u_1} = 0 \text{ la } y = b_1 ; u_1 = u_{1c} (U = U_c) \tag{33}$$

pentru problema bidimensională, și

$$\frac{\partial r_1}{\partial u_1} = 0 \text{ la } r_1 = R_1 ; u_1 = u_{1c} (U = U_c) \tag{34}$$

pentru problema axial-simetrică.

Punînd aceste condiții, cu ajutorul relațiilor (26) și (28), se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U_c - \frac{1}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda (U_c^2 - 1)} &= U_c - \frac{b_0}{b_1} \left[1 - \right. \\ &\left. - \frac{\varkappa - 1}{2} M_{0c}^2 (U_c^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}} \\ 1 - \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2} \frac{U_c}{\sqrt{1 + \lambda (U_c^2 - 1)}} &= 1 - \frac{b_0}{b_1} M_{0c}^2 U_c \left[1 - \right. \\ &\left. - \frac{\varkappa - 1}{2} M_{0c}^2 (U_c^2 - 1) \right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

pentru problema bidimensională, și sistemul

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U_c - \frac{1}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda (U_c^2 - 1)} &= U_c - \frac{R_0^2}{R_1^2} \left[1 - \right. \\ &\left. - \frac{\varkappa - 1}{2} M_{0c}^2 (U_c^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}} \\ 1 - \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2} \frac{U_c}{\sqrt{1 + \lambda (U_c^2 - 1)}} &= 1 - \frac{R_0^2}{R_1^2} M_{0c}^2 U_c \left[1 - \right. \\ &\left. - \frac{\varkappa - 1}{2} M_{0c}^2 (U_c^2 - 1) \right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

pentru problema axial simetrică.

Din aceste sisteme, se poate calcula pentru o anumită valoare λ și raport $\frac{b_0}{b_1}$, respectiv $\frac{R_0}{R_1}$, valoarea numărului Mach critic M_{oc}. Trasînd curba M_{0c} în funcție de $\frac{b_0}{b_1} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)$ pentru dat, se poate determina valoarea b_1, respectiv R_1, necesară, sau direct, considerînd cunoscute valorile M_{0c} și λ. Din examinarea sistemelor (35) și (36) apare ca evident avantajul

camerei de combustie circulare, deoarece în acest caz intervine raportul $\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2$ şi nu $\frac{R_0}{R_1}$, cum este cazul în problema bidimensională.

În sfîrşit, se poate calcula şi forma de variaţie a secţiunii camerei de ardere, pentru a avea o lungime de ardere minimă, pentru a evita întreruperi ale frontului flăcării etc.

*

Din consideraţiile de mai sus rezultă că păstrînd aceleaşi ipoteze ca şi pentru problema arderii în camere cu secţiune constantă, problema arderii laminare în camere cu secţiune variabilă poate fi tratată de o manieră analogă, dacă variaţiile secţiunii sînt suficient de lente încît să nu afecteze sensibil profilul distribuţiei vitezelor în secţiune. Problema se poate astfel rezolva complet în mod simplu, evitînd necesitatea rezolvării unor ecuaţii integrale complicate. Mai mult, se poate ţine seama şi de efectul compresibilităţii scurgerii, care este foarte important, deoarece chiar de la numere Mach mici ($\sim$ 0,10—0,15), face imposibilă o ardere completă în anumite condiţii.

Se pot astfel calcula în mod judicios forma şi dimensiunile camerei de combustie, astfel încît arderea să aibă loc în condiţii optime.

De asemenea, urmînd exact acelaşi procedeu se pot studia şi alte cazuri de ardere care pot interesa practic, ca arderi amorsate de la perete şi nu de la centru, arderi în camere inelare etc.

Primită la redacţie la 4 mai 1956

К ВОПРОСУ О ЛАМИНАРНОМ ГОРЕНИИ В КАМЕРАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследуется вопрос ламинарного горения в камерах сгорания переменного сечения при тех же предположениях, как и в уже исследованном случае камер сгорания постоянного сечения. Предполагается сверх того, что изменения сечения достаточно медленны и потому не влияют чувствительно на профиль распределения скоростей в сечении.

Вопрос исследуется как для случая несжимаемого протекания, так и для сжимаемого, причем определяются условия, при которых сгорание не может быть полным. Указывается, таким образом, способ, позволяющий правильно определить формы и размеры камер сгорания.

CONSIDÉRATIONS SUR LA COMBUSTION LAMINAIRE DANS LES CHAMBRES À SECTION VARIABLE

(RÉSUMÉ)

On étudie le problème de la combustion laminaire dans des chambres de combustion à section variable, dans les mêmes hypothèses que le cas déjà étudié, des chambres de combustion à section constante. On suppose

en plus que les variations de la section de la chambre sont suffisamment lentes, afin qu'elles n'affectent pas sensiblement le profil de la distribution des vitesses.

Le problème est traité pour les écoulements incompressibles aussi bien que pour les écoulements compressibles. On détermine, dans le dernier cas, les conditions dans lesquelles la combustion ne peut plus être effectuée complètement. On indique ainsi une méthode permettant d'établir judicieusement la forme et les dimensions de la chambre de combustion.

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. Tsien, *Influence of the Flame Front on the Flow Field.* Journal of Applied Mechanics Transaction of the ASME, t. 18, nr. 2, 1951, p. 188.
2. V. N. Constantinescu, *Asupra extinderii problemei Tsien-Scurlock la mișcări axial-simetrice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, aprilie-mai-iunie, 1956, p. 323.
3. C. Ernst, *Propagation à faible vitesse d'une flamme dans un écoulement compressible.* Technique et Science Aéronautique, 1955, nr. 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

AEROMECANICĂ

PROPAGAREA ARDERII ÎN CANALE CU SECŢIUNE VARIABILĂ

DE

E. LARISCH

Propagarea arderii lente într-un canal plan de secţiune constantă cu un stabilizator plasat în centru a fost întîi calculată de A. S. Scurlock [1]. H. S. Tsien [2] a dat pentru aceeaşi problemă o soluţie mult mai simplă. Metoda lui Tsien a fost apoi aplicată de G. Ernst [3] şi de V. N. Constantinescu [4], pentru cazul unui canal în formă de cilindru circular. Importanţa acestor studii rezultă din posibilitatea lor de aplicare la arderea în statoreactoare, unde fenomenele se încadrează oarecum în schema examinată.

În lucrarea de faţă se rezolvă problema propagării flăcării într-un amestec combustibil omogen ce se scurge într-un canal plan simetric sau cu simetrie de revoluţie, cu un stabilizator în centru. Soluţia, ca şi în lucrările [1] . . [4], este dedusă pentru cazul că mişcarea este cvasiuni dimensională. În plus se va considera că vitezele sînt suficient de mici pentru a putea neglija compresibilitatea amestecului.

1. Ipoteze

După cum se ştie, tabloul mişcării unui amestec în care pot avea loc reacţii chimice exoterme este următorul. Zona în care amestecul a reacţionat este separată de amestecul proaspăt prin frontul flacării. Grosimea lui fiind de ordinul 0,1 mm, frontul se poate trata în toate problemele practice ca o suprafaţă de discontinuitate.

Viteza c de propagare a arderii în amestecul proaspăt este o constantă ce depinde numai de starea amestecului şi este o funcţie foarte sensibilă de intensitatea turbulenţei scurgerii.

Rezultatele deduse ulterior sînt valabile atît pentru mişcări laminare cît şi pentru mişcări turbulente. Trebuie însă ca scara turbulenţei să fie mică faţă de dimensiunile transversale ale canalului, iar pentru c trebuie luată valoarea ce corespunde pulsaţiilor la scara respectivă.

Arderea lentă, cercetată aici, se propagă totdeauna cu viteze mici față de viteza sunetului.

Ţinînd seamă de acest lucru, ecuaţiile de energie şi impuls conduc la următoarele relaţii între mărimile de stare ale gazului înainte (indicele 1) şi după combustie (indicele 2)

$$\frac{p_2}{p_1} = 1, \quad \frac{T_2}{T_1} = \lambda, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\lambda}, \tag{1.1}$$

unde λ este raportul temperaturilor de impact ale gazului

$$\lambda = \frac{T_{02}}{T_{01}}.$$

Componenta normală la axa tubului a vitezei gazelor arse este de ordinul λc. Pentru ca mişcarea să poată fi considerată ca şi unidimensională, trebuie deci ca

$$\frac{\lambda c}{V_0} \ll 1, \tag{1.2}$$

V_0 fiind viteza gazului înainte de combustie. Deoarece gazul se va considera incompresibil, rezultă că

$$\lambda c \ll V_0 \ll a_0, \tag{1.3}$$

unde a_0 este viteza sunetului în gazele proaspete.

Afară de condiţia (1.3) trebuie bineînţeles ca secţiunea canalului să varieze suficient de încet.

Relţiile (1.1) arată că arderea nu este legată de o schimbare a presiunii. Deoarece mişcarea este cvasiun dimensională rezultă că presiunea este constantă în orice secţiune normală la axul tubului.

2. Tubul plan

Se notează cu $2b$ lărgimea canalu'ui într-o secţiune oarecare, cu L frontul flacării, iar cu $M'M$ un tub de curent. Celelalte notaţii ca în figura 1. Procedeul folosit este cel din lucrarea [2] a lui H. T s i e n.

Între secţiunile X' şi $X' + \mathrm{d}X'$ debitul gazelor nearse variază cu cantitatea

$$\mathrm{d}Q = -\rho_0 \mathrm{d}\,[(b' - y')v']. \tag{2.1}$$

Ecuaţia de continuitate în tubul de curent $M'M$ este

$$dQ = \frac{\rho_0}{\lambda} v \mathrm{d}y. \tag{2.2}$$

Aplicînd formula lui Bernoulli între $M'M$ şi între $M'\ M''$ se obţine

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{2\lambda} v'^2 + p' &= \frac{\rho_0}{2\lambda} v^2 + p, \\ \rho_0 \frac{v'^2}{2} + p' &= \rho_0 \frac{v''^2}{2} + p''. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Deoarece, cum s-a arătat $p = p''$, rezultă că

$$v = \sqrt{\lambda}\sqrt{v''^2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)v'^2}, \tag{2.4}$$

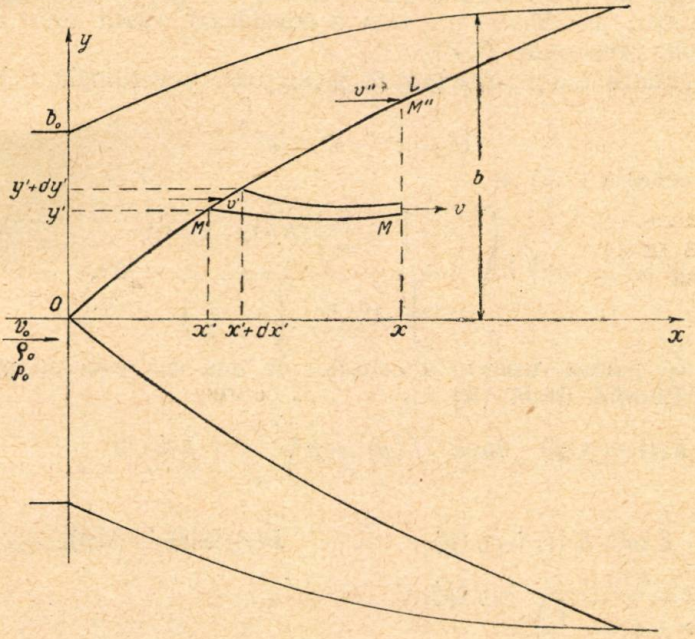


Fig. 1

iar din formulele (2.1), (2.2) și (2.4) se deduce

$$dy = -\sqrt{\lambda}\,\frac{d\left[(b'-y')\,v'\right]}{\sqrt{v''^2-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)v'^2}} \tag{2.5}$$

Metoda folosită constă în a considera la început $b = b\left(\frac{v'}{v_0}\right)$ urmînd ca dependența $b = b\,(x)$ să se deducă mai tîrziu. Cu această condiție egalitatea (2.5) poate fi integrată între 0 și y'. Se obține ecuația integrală de bază a problemei:

$$y'' = -\sqrt{\lambda}\int_{v'=v_0}^{v'=v''}\frac{d\left[(b'-y')\,v'\right]}{\sqrt{v''^2-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)v'^2}} \tag{2.6}$$

Se introduc variabilele adimensionale (notate cu majuscule)

$$y = Y b_0,\quad v'' = U v_0,\quad v' = V v_0,\quad b = (1+B)\,b_0. \tag{2.7}$$

Ecuația (2.6) devine

$$Y(U) = -\sqrt{\lambda}\int_1^U \frac{dV + d\{[B(V) - Y(V)]V\}}{\sqrt{U^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)V^2}}. \tag{2.8}$$

Această ecuație de speța a doua diferă de cea din [2] prin termenul $B(V)$ de la numărător. H. T s i e n, care a considerat cazul unui canal cu pereți paraleli, presupune $B(V) = 0$.

Soluția ei dată mai jos este bazată pe metoda operațională. Schimbarea de variabile

$$U = e^t, \quad V = e^\tau \tag{2.9}$$

transformă ecuația (2.8) în

$$Y(e) = -\sqrt{\lambda}\int_0^t \frac{1 + \left(+\frac{d}{d\tau}\right)[B(e^\tau) - Y(e^\tau)]}{\sqrt{e^{2(t-\tau)} - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}}\, d\tau. \tag{2.10}$$

Se observă că partea dreaptă a ecuației de mai sus este un produs de compoziție. Punînd după [6]

$$h(t) = f(p) \quad \text{dacă} \quad f(p) = p\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} h(t)\, dt \tag{2.11}$$

și notînd

$$Y(e^t)\, E(t) \doteq \eta(p) \quad , \quad B(e^t)\, E(t) \doteq \beta(p),$$

$$\frac{E(t)}{\sqrt{e^{2t} - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}} \doteq f(p),$$

$$\text{unde } E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

transformata Laplace a ecuației (2.10) este următoarea ecuație, liniară în $\eta(p)$

$$\eta(p) = -\sqrt{\lambda}\,[1 + (1 + p)(\beta - \eta)]f. \tag{2.13}$$

Soluția ei este

$$\eta(p) = \frac{1}{p}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{\lambda} f(p)}}\,[1 + (1 + p)\beta] =$$

$$= [1 + (1 + p)\beta]\,\eta_0(p). \tag{2.14}$$

Prin $\eta_0(p)$ s-a notat soluția pentru canalul cu pereții paraleli.

Ecuația (2.14) permite să se deducă imediat influența secțiunii variabile a canalului asupra propagării arderii. Din ea rezultă revenind la originale

$$Y(e^t)E(t) = Y_0(e^t)\, E(t) + E(t)\int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} + \frac{d^2}{d\tau^2}\right)\beta(e^\tau)\, Y_0(e^{t-\tau})\, d\tau \tag{2.15}$$

sau

$$Y(U) = Y_0(U) + \int_1^U \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left[1 + V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\right]\beta(V)\cdot Y_0\left(\frac{U}{V}\right)\mathrm{d}V. \tag{2.16}$$

Originalul lui $\eta_0(p)$, soluția pentru canalul cu pereți paraleli, este

$$Y_0(e^t)\,E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{1}{p^2}\,\frac{e^{pt}\,\mathrm{d}p}{1+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}\,f(p)}} \tag{2.17}$$

sau

$$Y_0(U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{1}{p^2}\,\frac{U^p\,\mathrm{d}p}{1+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}\,f(p)}}. \tag{2.18}$$

Calculul uneia din integralele (2.17) sau (2.18) cere cunoașterea rădăcinilor ecuației

$$1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}\,f(p)} = 0 \tag{2.19}$$

în semiplanul $Re\ p < C$.

În loc de a rezolva această ecuație complicată, în cele ce urmează se va utiliza soluția aproximativă în bun acord cu experiența, care a fost dată de T s i e n :

$$Y_0(U) = \frac{U-1}{\left(1-\dfrac{1}{2\lambda}\right)U - \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sqrt{U^2\left(1-\dfrac{1}{\lambda}\right)}}. \tag{2.20}$$

Această expresie, valabilă cînd $\lambda \gtrsim 4$, este bazată pe ipoteza că în spatele flăcării într-o secțiune oarecare, viteza variază liniar cu ordonata.

Pentru completarea soluției trebuie găsit profilul canalului care realizează distribuția dată de viteza $B(U)$. Aceasta se face ușor prin ecuația frontului flăcării. Notînd cu c viteza constantă de propagare a arderii, poziția frontului flăcării este definită de ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}Y(U)}{\mathrm{d}X(U)} = \frac{c}{v} = \frac{C}{U}, \tag{2.21}$$

unde

$$C = \frac{c}{v_0}. \tag{2.22}$$

Notînd

$$X(e^t) = \xi(p) \tag{2.23}$$

rezultă imediat

$$\xi(p) = \frac{1}{C}\,\eta(p-1) \tag{2.24}$$

şi deci

$$X(U) = \frac{1}{b}(U\,Y - \int_1^U Y\,(V)\,dV). \tag{2.25}$$

Ecuaţia (2.25) împreună cu relaţia

$$B = B(U)$$

dau reprezentarea parametrică a profilului canalului

$$B = B\,(X). \tag{2.26}$$

Combustia se termină în secţiunea în care frontul flăcării atinge pereţii, deci unde

$$1 + B(U) = Y\,(U) \tag{2.27}$$

Soluţia $U = U_m$ a ecuaţiei (2.27) dă valoarea maximă a vitezei, iar

$$X(U_m) = X_m \tag{2.28}$$

este lungimea pe care trebuie s-o aibă canalul pentru a avea o combustie completă.

Trebuie remarcat că relaţiile deduse sînt valabile dacă viteza maximă atinsă în canal este depărtată de viteza sunetului. Influenţa compresibilităţii gazului poate modifica mult aspectul mişcării.

3. Tubul de revoluţie

Teoria expusă pentru canalul plan poate fi cu uşurinţă extinsă la canale cu secţiune circulară.

Într-adevăr, repetînd raţionamentele de la începutul punctului 2 se reobţine ecuaţia (2.8) în care se fac înlocuirile

$$Y\,(U) \to S_f\,(U) = \frac{s_f}{s_0} \qquad B\,(U) \to S\,(U) = \frac{s}{s_0} - 1 \tag{3.1}$$

s_f fiind aria unei secţiuni normale prin frontul flăcării şi s aria unei secţiuni normale prin canal.

Se deduce de aici că relaţiile ce nu conţin coordinata pe axă sînt aceleaşi în două canale, unul plan şi altul de revoluţie, dacă secţiunile lor variază la fel cu viteza.

În particular, este aceeaşi „proporţie de gaze arse" :

$$f\,(U) = 1 - (1 + B - Y)U = 1 - (1 + S - S_f)U. \tag{3.2}$$

Într-un canal de revoluţie se modifică însă ecuaţia frontului flăcării care este acum definită de

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{S_f}}{\mathrm{d}X} = \frac{C}{U}, \text{ unde } X = \frac{x}{\sqrt{\frac{s_0}{\pi}}} \tag{3.3}$$

şi deci

$$X\,(U) = \frac{1}{C}\int_1^U V\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{S_f}}{\mathrm{d}V}\,\mathrm{d}V. \tag{3.4}$$

4. Exemplu

Formulele date la punctul 2 și 3 permit găsirea mișcării într-un tub cu variație dată a vitezei cu secțiunea, precum și determinarea profilului canalului care realizează această variație. Mai jos se analizează aceste

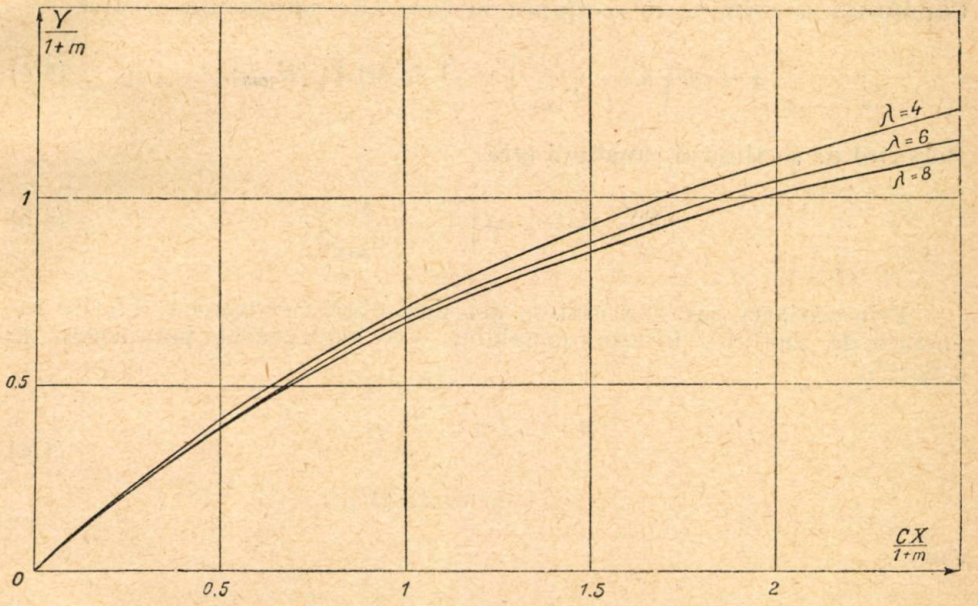


Fig. 2

rezultate pe exemplul unei familii de canale pentru care calculul este deosebit de simplu.

Se cercetează cazul

$$B = m\left(1 - \frac{1}{U}\right), \tag{4.1}$$

unde m este un parametru. Se vede că

$$B = \frac{m}{1+p}.$$

Din formula (2.14) rezultă

$$\eta(p) = (1+m)\,\eta_0(p).$$

Se deduce imediat

$$X(U) = (1+m)\,X_0(U), \quad Y(U) = (1+m)\,Y_0(U). \tag{4.2}$$

Se observă că în acest caz frontul flăcării este omotetic cu cel din canalul cu pereții paraleli, raportul de omotetie fiind $1+m$. Forma lui este reprezentată în figura 2.

Proporția de gaze arse este

$$f = 1 - \left[1 + m\left(1 - \frac{1}{U}\right) - (1+m)\,Y_0\right] U = \\ = (1+m)\,[1 - (1 - Y_0)\,U] = (1+m)\,f_0. \tag{4.3}$$

Combustia se termină în secțiunea în care este satisfăcută ecuația

$$1 + m\left(1 - \frac{1}{U_{max}}\right) = (1+m)\,Y_0\,(U_{max}). \tag{4.4}$$

Raportul de secțiuni al canalului este

$$\frac{s_{max}}{s_0} = 1 + m\left(1 - \frac{1}{U_{max}}\right). \tag{4.5}$$

Prin variația parametrului se pot deci obține canale cu diferite raporturi de secțiuni. Profilul canalului este reprezentat parametric de ecuațiile

$$B = m\left(1 - \frac{1}{U}\right) \\ X = (1+m)\,X_0\,(U) \tag{4.6}$$

sau

$$X = (1+m)\,X_0\left(\frac{1}{1 - \frac{B}{m}}\right). \tag{4.7}$$

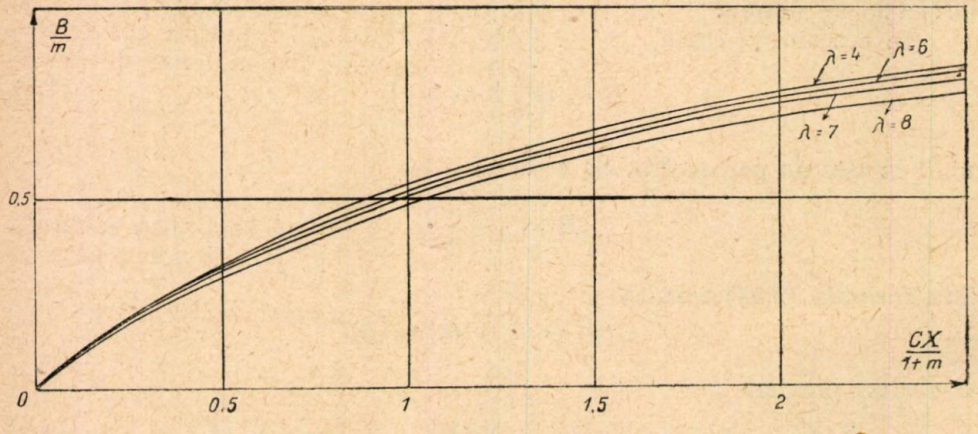


Fig. 3

Familia de profile definită de ecuația (4.7) este reprezentată în figura 3.

Cum se vede, pentru o anumită valoare a capacității calorice a combustibilului (parametrul λ) profilul canalului depinde de doi parametri: C și m. Rezultă că metoda expusă permite calculul riguros al unui canal numai pentru un anumit regim nominal, definit de viteza v_0. Totuși, variații ale parametrului C, pot fi compensate prin variații ale lui m astfel încît curba din figura 3 să se suprapună destul de bine peste ea însăși. Aceasta permite calculul aproximativ al unui anumit canal la orice regim.

5. Canal cu pereți poligonali

Problema directă a determinării mișcării într-un canal dat se poate rezolva cînd profilul canalului este poligonal.

Exemplul de mai jos se referă la cazul cel mai simplu al unui canal conic de ecuație

$$B = \mu X. \tag{5.1}$$

Se ia pentru $B = B(U)$ o expresie cu coeficienți nedeterminați de forma

$$B = \sum B_n U^{-n} \quad \text{cu} \quad \sum B_n = 0. \tag{5.2}$$

Formulele (3.30) și (2.25) care reprezintă parametric frontul flăcării devine acum

$$Y(U) = (1 - \sum_n B_n) Y_0 + \sum (n^2 - n) B_n U^{-n} \int_1^U V^{n-1} Y_0(V)\, dV, \tag{5.3}$$

$$CX(U) = (1 - \sum n B_n) U Y_0 - \int_1^U Y_0(V)\, dV + \\ + \sum n^2 B_n U^{-n+1} \int_1^U V^{n-1} Y_0(V)\, dV. \tag{5.4}$$

Coeficienții B_n trebuie determinați astfel ca expresiile (5.2) și (5.4) să dea reprezentarea parametrică a ecuației $B = \mu X$. Limitînd dezvoltarea la n termeni, aceasta revine la rezolvarea unui sistem liniar de $(n-1)$ ecuații cu $(n-1)$ necunoscute.

6. Caz particular

Calculele anterioare au fost bazate pe faptul că secțiunea canalului poate fi considerată ca o funcție de viteză: $B = B(U)$. Evident asta nu este posibil cînd viteza este constantă.

Pentru a vedea cînd are loc acest caz, se pune în formula (2.5), $v' = v'' = v_0$. Rezultă imediat

$$Y = \frac{\lambda}{\lambda - 1} B. \tag{6.1}$$

Viteza fiind constantă, frontul flăcării are ecuația

$$Y = CX \tag{6.2}$$

în canalul plan, şi

$$S_f = C^2 X^2 \tag{6.3}$$

în canalul de revoluţie. Profilele canalelor respective sînt deci

$$B = \frac{C(\lambda - 1)}{\lambda} X , \qquad S = \frac{C^2(\lambda - 1)}{\lambda} X^2. \tag{6.4}$$

Cele două profile sînt rectilinii însă de pante diferite.

Trebuie remarcate următoarele. Dacă se face ipoteza propusă de T s i e n de a considera că în spatele fl cării profilul vitezelor este liniar, se obţine pentru lărgimea frontului fl cării expresia

$$Y = Y_0(U)\left[1 + \frac{U}{U-1} B(U)\right] \tag{6.5}$$

care conţine evident rezultatele acestui punct. Simplitatea exemplului de la punctul 4 este datorită faptului că scurgerea este de acest tip. În alte cazuri însă, formula (6.5) nu dă rezultate corecte.

7. Concluzii

Metoda dezvoltată aici permite determinarea unui canal în care propagarea combustiei are proprietăţi date. De asemenea, este posibilă găsirea mişcării într-un canal cu un profil poligonal oarecare.

Din păcate, deoarece datele asupra arderii în tuburi cu secţiune variabilă lipsesc în literatură, o confruntare a teoriei cu experienţa nu a fost posibilă.

Compresibilitatea amestecului a fost neglijată. Valabilitatea rezultatelor este deci limitată la valori mici ale vitezei curentului neperturbat. Autorul îşi propune ca într-o lucrare viitoare să le extindă, luînd în considerare compresibilitatea gazului.

Primită la redacţie la 10 aprilie 1956.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГОРЕНИЯ В КАНАЛАХ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Выводится интегральное уравнение распространения ламинарного пламени в каналах с расходящимися стенками. Использованный способ идентичен способу, предложенному Х. Цзиеном для каналов с параллельными стенками. В результате решения этого уравнения получаются формулы для профиля канала, при котором распространение пламени порождает определенное течение. Далее указывается способ, дающий решение прямой задачи для канала с многоугольными стенками. Изложенная теория может найти себе применение при расчете горения в прямоточном двигателе.

PROPAGATION OF FLAME IN CHANNELS WITH VARIABLE CROSS SECTION

(ABSTRACT)

An integral equation, describing laminar flame propagation in divergent channels, is deduced. The procedure is the same as that given by H. Tsien for channels with parallel walls. By solving this equation, formulae are obtained for the channel profiles in which flame propagation generates a definite flow. A method is then indicated furnishing the solution of the direct problem for a channel whose walls are polygonal. The exposed theory may be useful in calculating burning in ramjet.

BIBLIOGRAFIE

1. A. S. Scurlock, *Flame Stabilisation and Propagation in High Velocity Gas* [*Streams*. Mass. Inst. of Technology, Meteor Report, 1948, nr. 19.
2. H. S. Tsien, *Influence of Flame Front on the Flow Field*. J. of Applied Mechanics, 1951, vol. 18, nr. 2.
3. G. Ernst, *Propagation à faible vitesse d'une flamme dans un écoulement compressible*. Technique et Science Aéronautique, 1955, nr. 1.
4. V. N. Constantinescu, *Asupra extinderii problemei Tsien-Scurlock la mișcări axiale simetrice*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, aprilie-iunie 1956, p. 323.
6. B. van der Pol a. H. Bremer, *Operational Calculus*. Cambridge, 1950.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

HIDROMECANICĂ

CÎTEVA PROBLEME DE SCURGERE PRINTR-UN MEDIU POROS CU VARIAŢIE UNIDIMENSIONALĂ A PERMEABILITĂŢII

DE

T. OROVEANU

1. Într-o lucrare anterioară [2], am arătat că problemele de filtrare a unui fluid incompresibil printr-un mediu poros neomogen, cu variaţie continuă a permeabilităţii, pot fi studiate cu ajutorul ecuaţiei*)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{2\varkappa}\left\{\frac{\partial^2\varkappa}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varkappa}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varkappa}{\partial z^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\Phi\cdot \tag{1}$$

în ipoteza valabilităţii legii lui Darcy. În această ecuaţie am introdus notaţia

$$\varkappa=\frac{k}{k_0}, \tag{2}$$

$k(x, y, z)$ fiind permeabilitatea, iar k_0 o valoare constantă a acesteia. Funcţia Φ rezultă din relaţia

$$\Phi=\varkappa^{\frac{1}{2}}\varphi, \tag{3}$$

în care

$$\varphi=-\frac{k_0}{\mu}p, \tag{4}$$

*) În lucrarea citată [2], s-a strecurat o eroare de semn în această ecuaţie, pe care o rectificăm aici.

$p(x, y, z)$ fiind presiunea și μ viscozitatea fluidului, iar vitezele se calculează cu ajutorul formulei

$$\bar{v} = \varkappa \nabla \varphi = \varkappa \nabla \left(\varkappa^{-\frac{1}{2}} \Phi\right). \tag{5}$$

În cele ce urmează, vom considera numai cazul în care permeabilitatea variază după o singură direcție. Alegînd sistemul de axe de coordonate astfel încît axa Oz să fie verticală, vom admite că permeabilitatea este funcție numai de z.

2. Dacă permeabilitatea depinde numai de variabila z, ecuația (1) devine

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{d^2\varkappa}{dz^2} - \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{d\varkappa}{dz}\right)^2\right]\Phi. \tag{6}$$

Se observă ușor că, dacă permeabilitatea variază după o lege de forma

$$\varkappa = (Az + B)^2, \tag{7}$$

membrul al doilea al ecuației (6) devine egal cu zero, aceasta reducîndu-se prin urmare la ecuația lui Laplace. Să considerăm un strat permeabil orizontal, de grosime h și să alegem originea axelor de coordonate la marginea superioară a stratului, axa Oz avînd sensul pozitiv în jos. Notînd cu k_0 ($\varkappa = 1$) permeabilitatea pentru $z = 0$ și cu $k_1\left(\varkappa_1 = \frac{k_1}{k_0}\right)$ aceeași mărime pentru $z = h$, relația (7) devine

$$\varkappa = \left[\left(\varkappa_1^{\frac{1}{2}} - 1\right)\frac{z}{h} + 1\right]^2, \tag{8}$$

unde am presupus $\varkappa_1 < 1$ ($k_1 < k_0$).

Calculele numerice arată că valorile lui $\varkappa$ date de expresia precedentă nu diferă cu mai mult de 3% de acelea date de legea de variație liniară

$$\varkappa = 1 - (1 - \varkappa_1)\frac{z}{h}, \tag{9}$$

cu condiția ca să avem $1 > \varkappa_1 \geqslant 0{,}5$ ($k_0 > k_1 \geqslant 0{,}5\ k_0$). Relația (7) aproximează prin urmare foarte bine variația liniară a permeabilității, atît timp cît aceasta nu scade sub 50% din valoarea ei maximă. Rezultă de aici că toate problemele de filtrare prin straturi a căror permeabilitate variază liniar în limitele arătate mai sus, pot fi tratate prin metodele utilizate în cazurile cînd permeabilitatea este constantă, modificîndu-se numai condițiile la limite conform relației (3).

3. Numeroase probleme plane din teoria filtrării sînt, în ceea ce privește condițiile la limite, mixte, pe anumite porțiuni ale frontierei domeniului de filtrare fiind cunoscute valorile funcției φ, iar pe altele valorile funcției de curent ψ. Dacă alegem sistemul de axe de coordonate așa cum se procedează de obicei, axa Ox fiind orizontală, iar axa Oy verticală

şi admitem ca şi mai sus că permeabilitatea variază numai pe verticală, fiind deci funcţie numai de y, ecuaţia (1) devine

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{d^2\varkappa}{dy^2}-\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)^2\right]\Phi, \tag{10}$$

toate consideraţiile anterioare rămînînd valabile, cu simpla înlocuire a variabilei z prin y.

În lucrarea citată mai înainte [2], am arătat că în locul funcţiei de curent putem introduce o funcţie Ψ, legată de ψ prin relaţia

$$\Psi=\varkappa^{-\frac{1}{2}}\psi, \tag{11}$$

care satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-\frac{1}{2\varkappa}\left\{\frac{\partial^2\varkappa}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varkappa}{\partial y^2}-\frac{3}{2\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\Psi. \tag{12}$$

Dacă permeabilitatea depinde numai de y, avem

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-\frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{d^2\varkappa}{dy^2}-\frac{3}{2\varkappa}\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)^2\right]\Psi, \tag{13}$$

iar dacă permeabilitatea este dată de o lege de forma

$$\varkappa=\frac{1}{(Cy+D)^2}, \tag{14}$$

membrul al doilea al ecuaţiei (13) este nul, funcţia Ψ fiind deci armonică.

Referindu-ne la stratul permeabil orizontal, considerat mai sus, cu aceleaşi caracteristici, ţinînd seama numai de faptul că în locul variabilei z apare y, expresia (14) devine

$$\varkappa=\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\varkappa_1^{\frac{1}{2}}}-1\right)\frac{y}{h}+1\right]^2}. \tag{15}$$

Faţă de legea de variaţie liniară (9) expresia precedentă dă pentru $\varkappa$ valori care diferă cu cel mult 5% dacă avem $1>\varkappa_1\geqslant 0{,}6$ ($k_0>k_1\geqslant 0{,}6\ k_0$). Pentru valori mai apropiate de unitate ale lui $\varkappa_1$, diferenţele devin practic neglijabile aşa că, în limitele indicate, expresia (15) este o aproximaţie acceptabilă pentru (9). Rezultă de aici că pentru problemele la care ne referim, dacă permeabilitatea stratului variază liniar fără a ieşi din limita de mai sus, funcţiile Φ şi Ψ pot fi considerate armonice. Problemele respective se tratează deci prin metodele cunoscute, modificîndu-se numai condiţiile la limite conform relaţiilor (3) şi (11).

4. În coordonate cilindrice, ecuaţia (1) capătă forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{2\varkappa}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varkappa}{\partial r}\right)+\right.\\ \left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varkappa}{\partial z^2}-\frac{1}{2\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\Phi,\end{aligned} \tag{16}$$

iar dacă scurgerea este plană şi permeabilitatea variază numai radial obţinem

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}=\frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\Phi. \tag{17}$$

Ca şi în cazurile precedente, vom căuta variaţia lui $\varkappa$ care anulează membrul al doilea al ecuaţiei precedente. Aceasta revine la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}^2\varkappa}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}r}\right)^2=0. \tag{18}$$

Ne vom referi la cazul unei sonde de rază r_s situată în centrul unui contur circular de alimentare de rază r_e. Introducînd variabila adimensională

$$\rho=\frac{r}{r_s} \tag{19}$$

ecuaţia (18) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\varkappa}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}\rho}-\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}\rho}\right)^2=0. \tag{20}$$

Făcînd succesiv substituţiile

$$u=\frac{1}{\varkappa}\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}\rho} \tag{21}$$

şi

$$v=u^{-1} \tag{22}$$

găsim ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}-\frac{1}{\rho}v=\frac{1}{2}, \tag{23}$$

a cărei soluţie este

$$v=\rho\left(C+\frac{1}{2}\log\rho\right). \tag{24}$$

Revenind la funcţia iniţială, soluţia ecuaţiei (20) are forma

$$\varkappa^{\frac{1}{2}}=C_1+C_2\log\rho. \tag{25}$$

Pentru determinarea constantelor, vom lua ca permeabilitate de referinţă pe aceea de pe conturul de alimentare, k_e, de unde rezultă

$$\varkappa=\frac{k}{k_e} \tag{26}$$

și avem evident $\varkappa_c = 1$, $\varkappa_s = \frac{k_s}{k_c}$. Un calcul simplu ne dă

$$\varkappa^{\frac{1}{2}} = \varkappa_s^{\frac{1}{2}} - \frac{\varkappa_s^{\frac{1}{2}} - 1}{\log \rho_c} \log \rho, \tag{27}$$

unde $\rho_c = \frac{r_c}{r_s}$.

În figură este trasată variația lui $\varkappa$ pentru cazul în care $\rho_c = 1000$, $\varkappa_s = 2$. Se observă că permeabilitatea variază mult în jurul găurii de sondă,

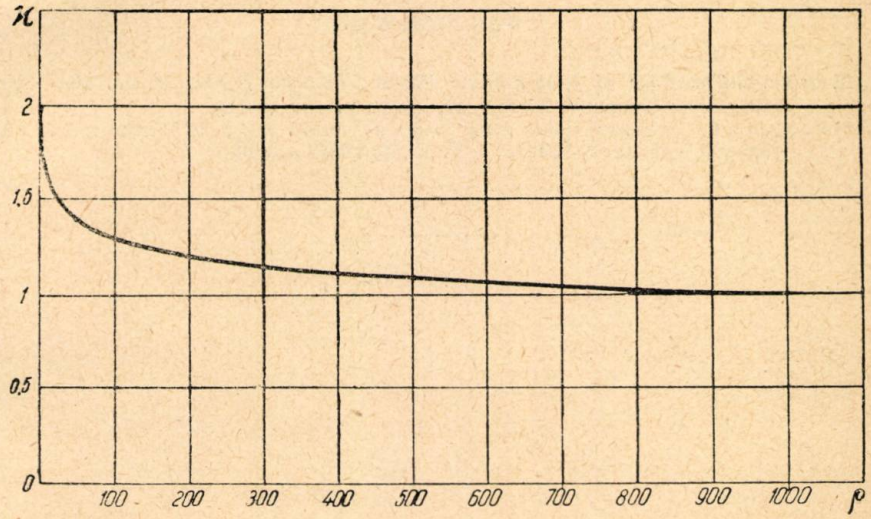


Fig. 1

tinzînd repede spre o valoare puțin diferită de $\varkappa_c$ ($\varkappa_c = 1$). O astfel de variație s-ar putea obține printr-una din metodele care se întrebuințează pentru mărirea permeabilității în jurul găurii de sondă. Debitul sondei poate fi calculat în acest caz prin metodele cunoscute [1], presiunea pe contururile de rază r_s și r_s putînd fi constantă sau variabilă.

Primită la redacție la 12 Ianuarie 1956

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ПРОТЕКАНИЮ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ С ОДНОРАЗМЕРНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей заметке автор возвращается к уравнению, выведенному в одной из более ранних работ [2] и исследует несколько случаев изменения проницаемости, для которых это уравнение сводится к уравнению Лапласа.

QUELQUES PROBLÈMES D'ÉCOULEMENT À TRAVERS UN MILIEUX POREUX AVEC VARIATION UNIDIMENSIONNE LLE DE LA PERMÉABILITÉ

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note, l'auteur examine une équation obtenue dans un travail antérieur [2] et étudie quelques cas de variation de la perméabilité, pour lesquels l'équation se réduit à celle de Laplace.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media.* Mac Graw — Hill Book Company, New-York, 1937, p. 150 şi 163.
2. T. Oroveanu, *Scurgerea unui fluid printr-un mediu poros cu neomogenitate redusă.* Comunicările Acad. R.P.R., t V, nr. 5, 1955, p. 843.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

HIDROMECANICĂ

STUDIUL SCURGERILOR ÎN ALBII NATURALE CU AJUTORUL MODELĂRII ÎN CURENŢI DE AER

DE

M. KAHAN

În modelarea diferitelor sisteme hidraulice, în ultimul timp se utilizează cu succes aerul.

Lucrarea de faţă se referă la modelarea cu ajutorul aerului a scurgerilor hidraulice cu nivel liber. Modelarea scurgerilor cu nivel liber cu ajutorul aerului, a fost introdusă de către A. G. Averkiev la Institutul unional hidrotehnic din Leningrad în 1950 [1], [2] şi [3].

★

Aşa cum s-a arătat într-o lucrare anterioară [9] esenţa metodei constă în considerarea scurgerilor cu suprafaţă liberă drept scurgeri sub presiune. Ea presupune modelarea construcţiilor hidrotehnice la o scară foarte mică (pînă la 1/1000 — 1/2500); materializarea suprafeţei libere a apei cu o suprafaţă plană din material transparent (plexiglas, geam etc.), şi reproducerea fenomenelor hidraulice cu ajutorul unui curent de aer care se lansează pe model.

Această metodă s-a impus ca o consecinţă a necesităţii de a lucra cu modele la o scară redusă, care să permită o evaluare rapidă a fenomenelor hidraulice.

Limita micşorării scării de modelare, în cercetarea construcţiilor hidrotehnice, o constituie însă păstrarea regimului turbulent. În acelaşi timp la modelarea cu scurgere cu suprafaţă liberă, necesitatea de a respecta criteriul Froude, conduce pe măsura micşorării scării, la viteze din ce în ce mai mici.

În aceste condiţii, păstrarea regimului turbulent desigur că limitează scara de modelare.

La modelarea cu aer însă, în scurgerea sub presiune, păstrarea regimului turbulent poate fi asigurată chiar la scări de modelare foarte mici printr-o mărire corespunzătoare a vitezei, astfel încît să se păstreze numărul Re mai mare decît valoarea lui critică.

Fără îndoială că verificarea obiectivă a metodei, precum și a utilizării ei practice, în actualul ei stadiu de dezvoltare, o poate da compararea, pe un număr cît mai mare de cazuri, a rezultatelor obținute pe modelele cu aer sub presiune și cu apă cu nivel liber, avînd în vedere că cele din urmă s-au verificat în practica încercărilor de laborator.

În această direcție se cunosc deja studiile lui A. G. Averkiev. Vom da mai jos cîteva aspecte din studiile metodologice efectuate de autor.

1. Studiul liniilor de curent și al repartiției vitezelor în albia unui rîu

Modelul cu apă a fost executat la scara 1 : 50 nedeformat, iar cel cu aer, la scara 1 : 500, 1 : 200 deformat, conform figurii 1.

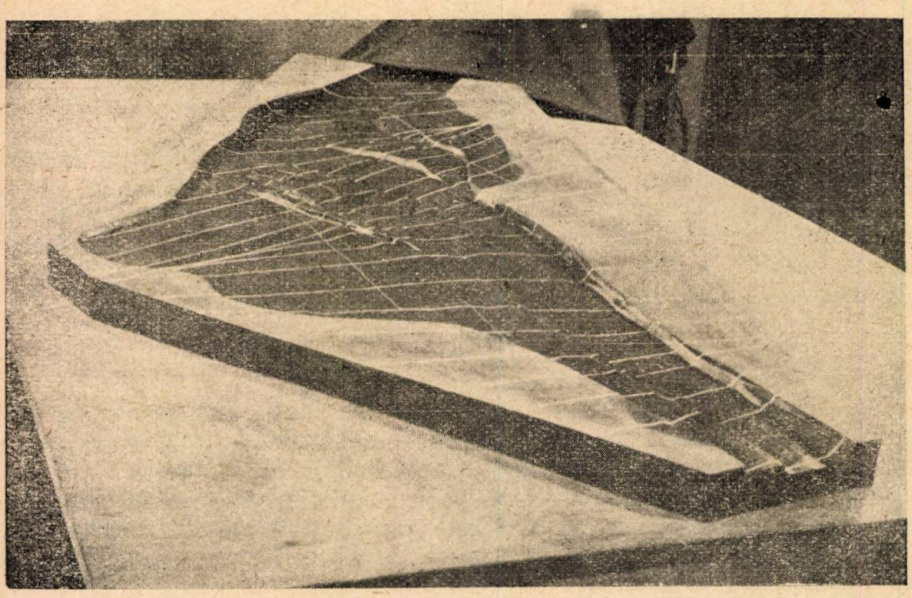


Fig. 1

Modelul cu aer a fost executat cu fund fix.

Pe modelul cu apă, din motive de spațiu, nu s-a putut modela întreaga albie majoră a rîului, ci așa cum se indică în figura 1 s-a neglijat o parte din albia majoră, care pe modelul cu aer s-a modelat integral.

S-au studiat :

a) Influența numărului Re, pe modelul cu aer, asupra repartiției vitezelor într-o secțiune transversală a rîului.

Așa cum se arată în figura 2, pentru numere Re, scrise cu raza hidraulică, variind de la 800 la 10 000, epura vitezelor transformată la valorile din natură rămîne practic neschimbată.

b) Influența zonei neglijate, la modelarea cu apă, asupra scurgerii. Acest studiu s-a făcut pe modelul cu aer la care s-a comparat repartiția vitezelor și liniile de curent (vizualitate cu fum) pentru întreaga albie modelată cu aer și pentru albia îngrădită ca și pe modelul cu apă. Repar-

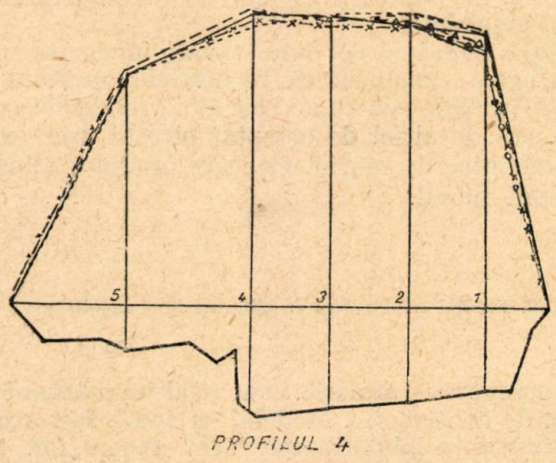


Fig. 2

tiția vitezelor într-o secțiune oarecare, așa cum se indică în figura 3, a dat o imagine asupra repartiției debitului pe albia modelată parțial și total. Planul scurgerii vizualizat cu fum ne-a permis să constatăm că delimitarea avută în vedere inițial pe modelul parțial (cu apă) introduce niște zone de vîrtejuri în mod artificial, care denaturează scurgerea față de cea care are loc în mod natural cînd mișcarea are loc pe întreaga albie. Aceste constatări ne-a permis să delimităm scurgerea pe modelul

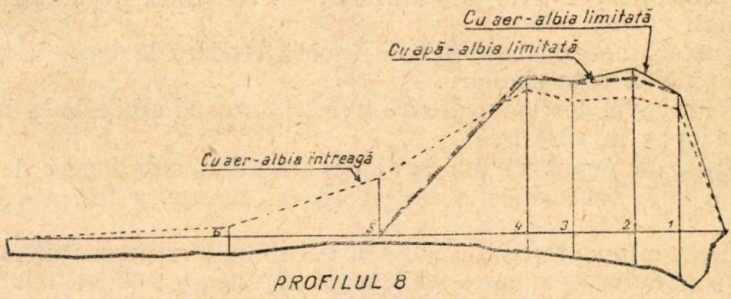


Fig. 3

parțial (cu apă) astfel încît să obținem o mișcare plană mai aproape de realitate.

c) S-au comparat repartițiile vitezelor într-o secțiune transversală pe modelul cu apă și cel cu aer (cu albia limitată ca pe modelul cu apă).

Rezultatele prezentate în figura 3, indică o suprapunere satisfăcătoare a curbelor obținute.

Încercările de mai sus au arătat că distorsiunea de 1/2,5 a scării utilizate pe modelul cu aer este acceptabilă.

Adîncimi ale curentului pe modelul cu aer de circa 10 ÷ 20 mm dau rezultate satisfăcătoare la un astfel de studiu. Încercări ce s-au efectuat pe un model cu aer, cu adîncimi ale curentului mai mari (50 ÷ 80 mm) au dat rezultate îndoielnice.

Modelul cu apă avînd o porțiune (aval) modelată cu fund mobil ne-a permis să tragem concluzia că rezultatele obținute pe un model cu fund fix, nu sînt valabile pentru aceeași albie modelată cu fund mobil. Rezultatul acesta era de altfel de așteptat și este ușor explicabil, dacă ținem seama de modificările morfologice ale fundului albiei care au loc pe modelul cu fund mobil.

2. Studiul unui model de albie cu fund mobil

S-au studiat scurgerea și afuierile în dreptul unui batardou de devierea apelor în perioada de construcție. Modelul cu apă a fost realizat la scara 1 : 60 și a fost studiat în laboratoarele VUV Praga (fig. 4) iar modelul cu aer a fost realizat la scara 1 : 600 — 1 : 300 deformat (fig. 5), și a fost studiat în laboratoarele Institutului de mecanică aplicată. Modelele au fost realizate cu fund mobil.

Fundul albiei a fost realizat pe modelul cu apă, din nisip $dm = 2$ mm, iar pe modelul cu aer din nisip $dm = 0{,}50 \div 0{,}75$ mm (fig. 5) și $dm = 1 \div 1{,}2$ mm (fig. 6) și cărbune $dm = 0{,}50 \div 0{,}75$ mm (fig. 7).

Din compararea rezultatelor s-a observat o asemănare foarte mare a afuierilor și depunerilor ce au avut loc.

S-au constatat depunerile ce au loc imediat în aval de colțul batardoului, care ating atît la modelul cu apă, cît și la cel cu aer, aceleași cote.

La malul opus, în aval de batardou, s-a constatat de asemenea aceleași afuieri.

Se constată aceeași tendință de ușoară erodare la baza batardoului spre aval pînă la cote similare.

Liniile de nivel corespunzătoare trec transversal albia de la batardou spre malul opus în spre aval.

Tendința de depuneri din aval de batardou sub formă de *insulă*, care a apărut la toate încercările cu apă și cu aer, a fost verificată și în natură.

O ridicare a liniei terenului la baza batardoului reprezentată în figura 8, ne arată aceeași asemănare satisfăcătoare obținută la modelul cu apă și aer.

Concluziile generale ce s-au putut trage pe modelul cu aer asupra comportării batardoului la ape mari, sînt aceleași ca și pe modelul cu apă.

Din aceste încercări s-a putut constata că rezultatele cele mai bune s-au obținut la modelarea fundului cu nisip și cărbune de $dm = 0{,}5 \div 0{,}75$ mm.

La nisipul mai grosier, $dm = 1{,}0 \div 1{,}2$ mm, afuierile s-au reprodus mai puțin intens față de modelul cu apă.

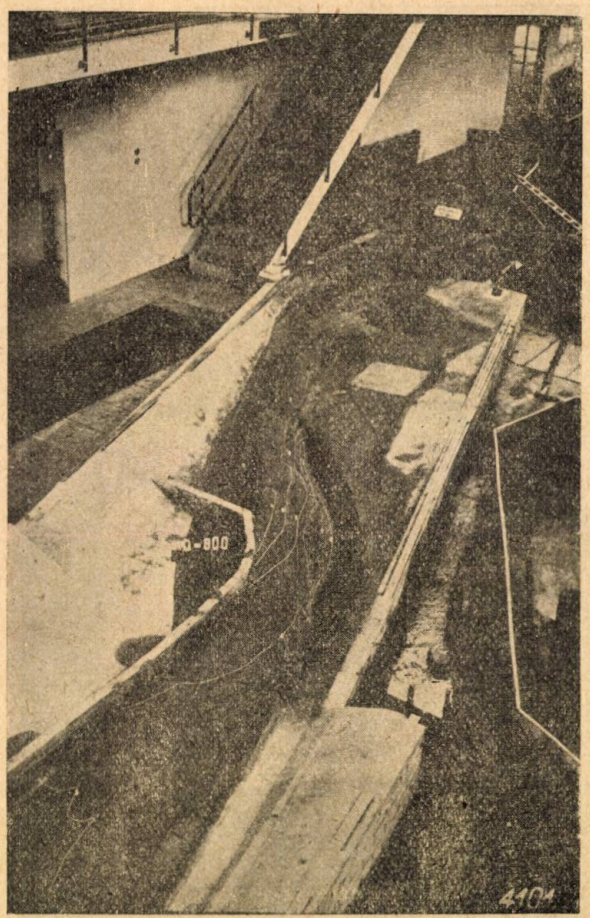


Fig. 4

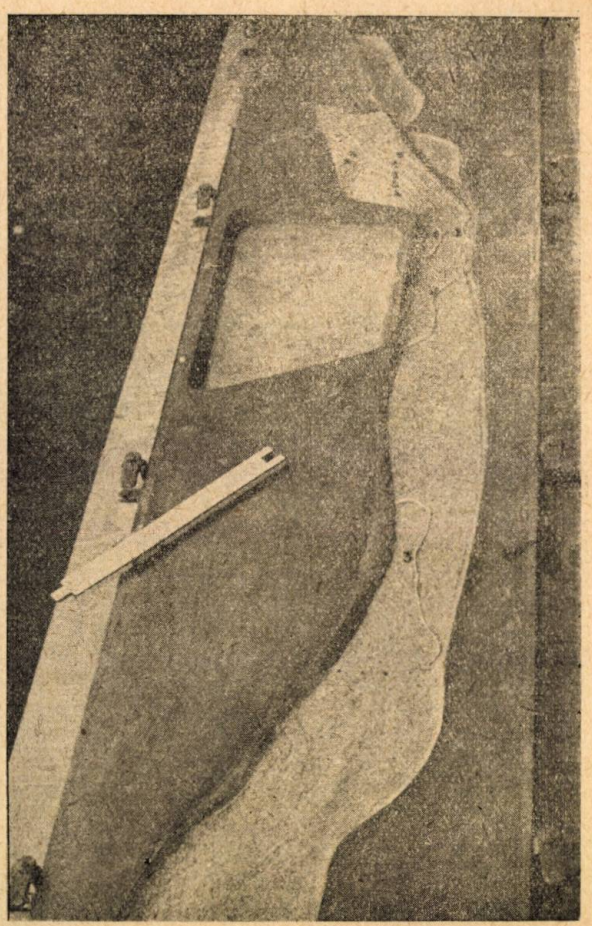


Fig. 5

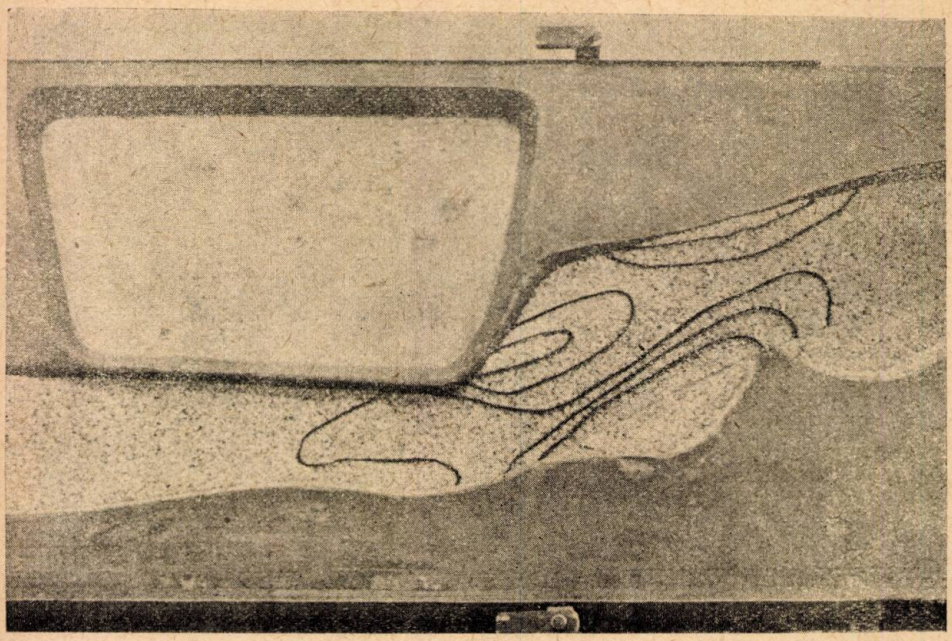


Fig. 6

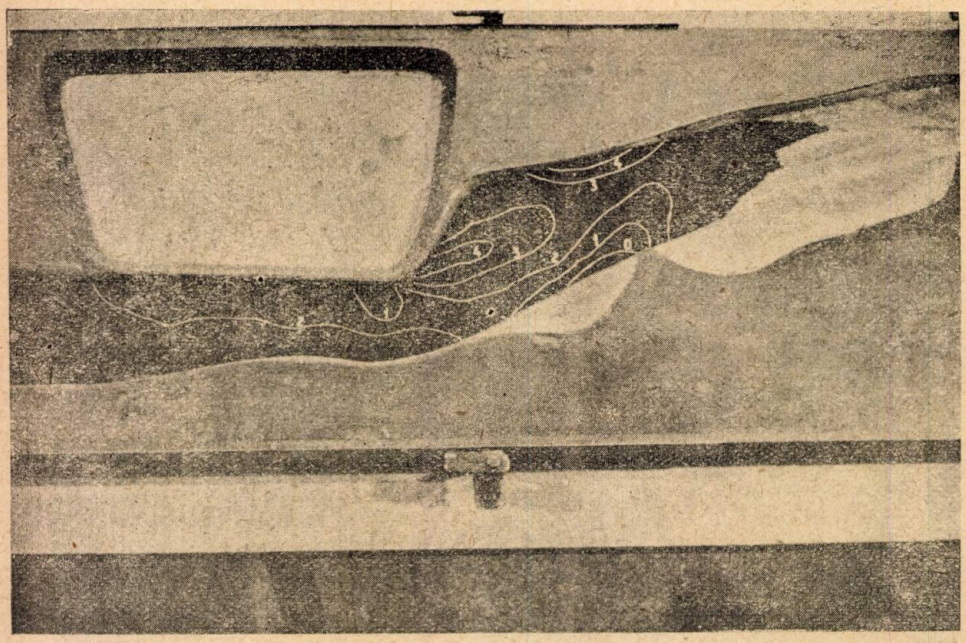


Fig. 7

S-a constatat de asemenea că pe modelul cu aer au existat unele depuneri locale mult mai accentuate decît pe modelul cu apă. Astfel au fost depunerile ce au avut loc pe malul stîng, în aval de batardou, care s-au întins pînă la suprafața geamului. Aceste depuneri nu și-au găsit încă o explicație.

În sfîrșit, a existat o diferență în tendința de afuieri la piciorul batardoului, care la modelele cu aer era mai accentuată spre amonte. Această tendință se explică prin faptul că pe modelul cu apă, albia în regiunile

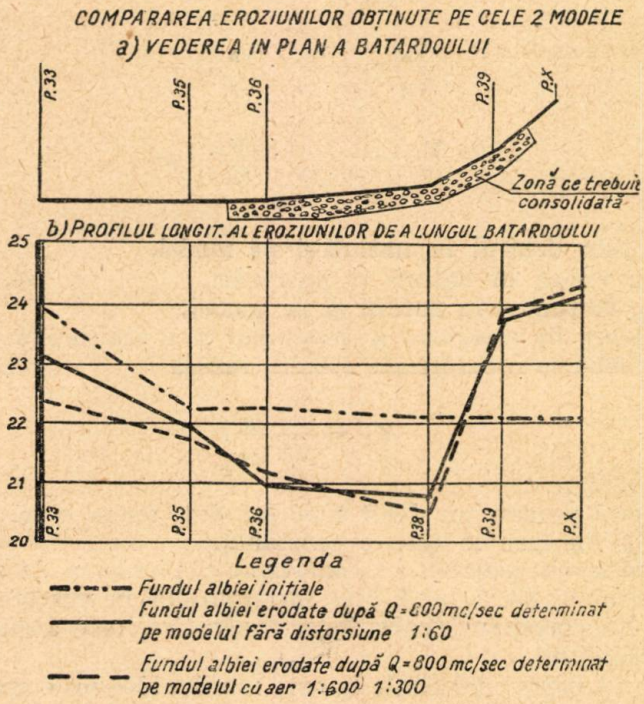


Fig. 8

amonte ale batardoului, în imediata apropiere a acestuia, a fost modelată cu fund fix.

În cursul încercării s-a confirmat că adîncimi medii ale curentului de 1,5÷2 cm și o distorsiune a scării de 1/2 sînt elemente potrivite în modelarea cu aer a unor astfel de probleme.

S-a verificat de asemenea, un lucru care era de altfel de așteptat, că fenomenele de dinamica albiei se reproduc mai mult sau mai puțin exact numai în măsura în care se asigură un debit solid corespunzător pe model în amonte.

În prelucrarea datelor de mai sus, s-au utilizat următoarele relații : Relația de debit și viteză

$$Q_N = V_N \cdot \omega_N,$$

$$Q_M = V_M \cdot \omega_M,$$

$$\frac{Q_N \cdot \omega_M}{Q_M \cdot \omega_N} = \frac{V_N}{V_M},$$

$$\frac{\omega_N}{\omega_M} = \alpha_e \cdot \alpha_h,$$

$$\frac{V_N}{V_M} = \frac{1}{\alpha_l \cdot \alpha_h} \cdot \frac{Q_N}{Q_M},$$

$$V_N = \frac{1}{\alpha_l \cdot \alpha_h} \cdot \frac{Q_N}{Q_M} \cdot V_M,$$

în care

Q_N, Q_M este debitul în natură și pe model,
V_N, V_M, viteza în natură și pe model,
ω_N, ω_M, secțiunea în natură și pe model,
$\alpha_l . \alpha_h$, scara de modelare a lungimilor și a înălțimilor.
Pentru modele nedeformate rezultă relația

$$V_N = \frac{1}{\alpha_l^2} \frac{Q_N}{Q_M}.$$

În general pentru un debit modelat dat, avem o relație de forma $V_N = A . V_M$, în care A este o constantă.

Conform teoriei generale s-a considerat că pierderea de sarcină exprimată în coloană de fluid, la un fluid incompresibil în mișcare permanentă cu numere Re corespunzătoare zonei cuadratice, este aceeași indiferent de natura fluidului.

Desigur că pentru mișcările la care numărul Re nu corespunde zonei patratice în determinarea valorii, trebuie să se asigure același număr Re pe prototip și model, deci vitezele de aer trebuie să fie de 10÷15 ori mai mari ca vitezele corespunzătoare unui curent de apă.

În determinarea mărimii granulelor pentru modelele cu fund mobil, s-a plecat de la viteza de antrenare a particulelor.

S-a calculat viteza de antrenare (U_{aN}) a particulelor solide avute în vedere pentru prototip (modelul cu apă) — cu ajutorul relațiilor date de I. I. Levi [10].

S-a determinat apoi viteza de antrenare (U_{aM}) corespunzătoare granulelor ce s-au utilizat pe model, pe baza relațiilor determinate într-o lucrare anterioară [9].

Iar pe baza relației

$$U_{aN} = \frac{1}{\alpha_l \cdot \alpha_h} \cdot \frac{Q_N}{Q_M} \cdot U_{aM},$$

s-a determinat debitul de aer necesar pe model

$$Q_M = \frac{1}{\alpha_l \alpha_h} \cdot \frac{U_{aM}}{U_{aN}} Q_N.$$

Relația de mai sus a fost utilizată cu succes pentru încercările descrise mai sus. În cursul experiențelor s-a constatat că relația dă debite pe model (Q_m) în general majorate cu (5÷10)%, ceea ce desigur constituie o aproximație satisfăcătoare pentru astfel de probleme.

★

Din cele de mai sus rezultă că metoda modelării albiilor de rîuri cu ajutorul aerului, poate constitui o metodă de cercetare fructuoasă, expeditivă și economică.

În special este de subliniat rapiditatea pe care o oferă metoda în rezolvarea unor probleme speciale puse de practică. În unele cazuri metoda poate furniza rezultate care să se folosească direct în proiectare. Aceasta este cazul în special pentru problemele plane cum ar fi de exemplu, scurgerea în bieful amonte la nodurile hidrotehnice, regularizări de albii și oricare altă mișcare care se caracterizează printr-o scurgere liniștită și suprafață liberă plană.

Metoda permite utilizarea tehnicii experimentale moderne ale aerodinamicii, care pentru vitezele mici de experimentare are un instrumentaj de măsură comod, clar și rapid.

Metoda cere o instalație redusă, o putere energică relativ mică și de aceea poate fi utilizată și în condiții mai puțin pretențioase.

Metoda modelării albiilor naturale cu ajutorul aerului, permite în același timp studii mai delicate ale mișcării în regim turbulent care nu se pot ataca în încercările curente ale laboratoarelor hidraulice.

Primită la redacție la 21 noiembrie 1955

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В НАТУРАЛЬНЫХ РУСЛАХ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕГО В ВОЗДУШНЫХ СТРУЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе приводятся первые методологические результаты, относящиеся к моделированию в струях воздуха при исследовании вопросов течения в русле. Сравниваются результаты исследований на моделях, получающихся в воздухе с результатами исследований на моделях, получающихся в воде, а также с данными, получающимися в природных условиях.

Настоящее исследование показывает удобство использования воздушных струй при разрешении гидротехнических задач и эффективность этого способа с техно-экономической точки зрения.

ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS DANS DES LITS NATURELS À L'AIDE DU MODELAGE DANS DES COURANTS D'AIR

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on a donné les premiers résultats méthodologiques sur le modelage, sous forme de courants d'air, pour les problèmes des lits de rivière. On compare les résultats obtenus sur des modèles à courant d'air, aux résultats obtenus sur des modèles à courants d'eau et les données existantes dans la nature.

L'étude montre la validité de l'utilisation des courants d'air dans les recherches sur des problèmes hydrodynamiques et l'efficience de la méthode, au point de vue technico-économique.

BIBLIOGRAFIE

1. Averkiev A. G., *Novîi metod ghidrovliseskih modelnîh issledovanii.* Izvestia VNIIG, 1952, t. 47, p. 3.
2. — *Novîi metod ghidrovlireskih modelnîh issledovanii.* Leningrad, 1952.
3. — *Opît primenenia aerodinamiceskoi modeli dlia ghidravlireskih issledovanii rek.* Izvestia VNIIG, 1954, t. 52, p. 148.
4. Carafoli E., *Aerodinamica.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1951.
5. Dimitriev G. T., *Opît primenenia aerodinamiceskoi modeli dlia ghidravlireskih issledovanii.* Referatvnîi jurnal-Mehanika, 1954, t. 1, nr. 1606.
6. Escande L., *Similitude des ondulations de sable des modèles réduits et des dunes du désert.* Houille Blanche, 1950, nr. A, p. 273.
7. Goncearov V. N., *Ravnomernîi turbulentinîi potok.* Gosenergoizdat, Leningrad-Moscova, 1951.
8. Iorgulescu F., *Poteri napora v derivationnîh voornjeniah ghidroelektrostanţii.* Disertaţie, Moscova, 1953.
9. Kahan M., *Contribuţii la metoda cercetării construcţiilor hidrotehnice cu ajutorul aerului.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, 1954, p. 521.
10. Levi I. I., *Dinamika ruslovîh potokov.* Gosenergoizdat, Leningrad, Moscova, 1948.
11. Minski E. M., *Turbulentnost ruslovovo potoka.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1952.
12. Vîlcovici V., *Asupra unei teorii a aluviunilor.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., t. IV, nr. 4, 1952, p. 238.
13. Velicanov M. A., *Dinamica ruslovih potokov.* Ghidrometeoizdat, Leningrad, 1949.
14. White C. M., *Equilibrium of Grains on the bed of a Stream.* Londra, 1939.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

HIDROMECANICĂ

MIŞCAREA UNIDIMENSIONALĂ A DOUĂ FLUIDE VÎSCOASE GRELE SEPARATE PRINTR-O SUPRAFAŢĂ PLANĂ

DE

CRISTIAN STĂNESCU şi LUCIAN DUMITRESCU

1. Introducere

Se ştie că în mişcarea unidimensională a unui fluid vîscos greu incompresibil viteza u satisface unei ecuaţii Poisson [1] şi [2]

$$\Delta u\,(x, y) = k, \tag{1}$$

axa Oz fiind orientată în direcţia scurgerii.

În cele ce urmează vom studia mişcarea a două fluide de densităţi şi viscozităţi diferite, care se scurg în condiţiile ecuaţiei (1) într-un tub cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz, suprafaţa lor de contact fiind plană.

Această problemă corespunde de exemplu scurgerii printr-un tub necomplet umplut cu lichid dacă se ţine seama de efectul frecării cu aerul, sau scurgerii a două lichide nemiscibile prin acelaşi tub.

În primul caz se ţine seama de influenţa gravitaţiei, constanta k fiind

$$k = -\frac{g \sin \alpha}{\nu}.$$

În al doilea caz se neglijează forţele masice, mişcarea fiind întreţinută de un gradient de presiune; constanta k devine

$$k = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Pentru comoditate se vor alege axele de coordonate conform figurii 1.

Dacă se notează cu D_1 și D_2 domeniile ocupate de fluide, cu u_1 și u_2 vitezele lor și cu k_1 și k_2 membrii drepți ai ecuațiilor Poisson respective, acestea din urmă se scriu:

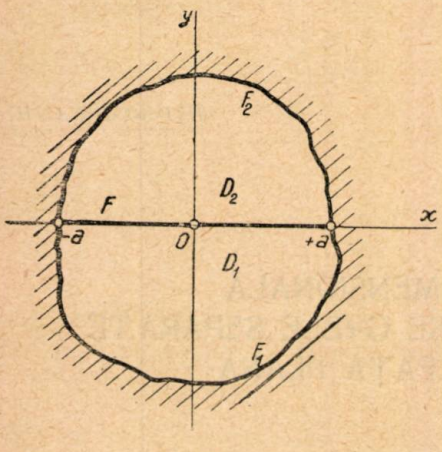


Fig. 1

$$\Delta u_1 = k_1, \tag{2}$$

$$\Delta u_2 = k_2. \tag{3}$$

2. Condițiile de limită

Fie F_1 și F_2 frontierele distincte ale domeniilor D_1 și D_2; ele determină în ansamblu conturul tubului în care are loc mișcarea. Pe acestea se aplică condițiile obișnuite, adică

$$u_1 = 0, \quad \text{pe frontiera } F_1,$$

$$u_2 = 0, \quad \text{pe frontiera } F_2.$$

Notînd cu F frontiera comună a celor două domenii și exprimînd condițiile fizice de aderență a celor două fluide pe de o parte și de egalitate a acțiunii și reacțiunii tangențiale pe de altă parte, se obține

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} - m\frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{pe frontiera } F. \tag{4, 5}$$

Prin m s-a notat raportul coeficienților de viscozitate dinamică a celor două fluide

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{6}$$

3. Metoda generală de rezolvare

Dacă se efectuează asupra funcțiilor $u_1(x, y)$ și $u_2(x, y)$ transformările

$$u_1(x, y) = U_1(x, y) + \frac{k_1}{4}(x^2 + y^2 - a^2), \tag{7}$$

$$u_2(x, y) = U_2(x, y) + \frac{k_2}{4}(x^2 + y^2 - a^2), \tag{8}$$

problema se reduce la găsirea funcțiilor $U_1(x, y)$ și $U_2(x, y)$ care sînt armonice, condițiile la limite de mai sus devenind

$$U_1 = -\frac{k_1}{4}(x^2 + y^2 - a^2) \text{ pe frontiera } F_1, \tag{9}$$

$$U_2 = -\frac{k_2}{4}(x^2 + y^2 - a^2) \text{ pe frontiera } F_2, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \frac{1}{4}(k_1 - k_2)(x^2 - a^2), \qquad (11)\\ \frac{\partial U_1}{\partial y} - m\frac{\partial U_2}{\partial y} &= 0, \qquad (12)\end{aligned}\right\} \text{ pe frontiera F.}$$

Dacă se notează cu $h_1(x)$ valoarea funcției $U_1(x, y)$ pe frontiera F, adică

$$U_1(x, 0) = h_1(x),$$

și analog (13)

$$U_2(x, 0) = h_2(x),$$

condiția (11) devine

$$h_2(x) - h_1(x) = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)(x^2 - a^2). \tag{14}$$

Necunoscutele sînt funcțiile $h_1(x)$ și $h_2(x)$.

Fie $T_j(z, \zeta)$ $(j = 1,2)$ nucleul lui Schwarz al domeniului D_j, $\zeta = \xi + i\eta$ fiind afixul unui punct de pe contur, iar $z = x + iy$ afixul unui punct din interiorul domeniului.

Avem,

$$U_j(x, y) = (-1)_j \operatorname{Re}\left\{-\frac{k_j}{8\pi}\int_{F_j}(\zeta\bar{\zeta} - a^2)\, T_j(z, \zeta)\, d\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} h_j(\xi)\, T_j(z, \xi)\, d\xi \right\}, \tag{15}$$

integralele pe F_j fiind cunoscute.

Folosind condiția la limită (12) și eliminînd funcția necunoscută $h_2(x)$ se obține o ecuație integrală pentru funcția $h_1(x)$. Determinarea acestei funcții permite găsirea vitezelor $u_1(x, y)$ și $u_2(x, y)$.

4. Aplicația I. Tub de secțiune circulară

Vom considera cazul particular cînd domeniile D_1 și D_2 sînt două semicercuri (fig. 2). Vom presupune că raza este egală cu unitatea, caz la care ne putem reduce totdeauna printr-o schimbare a unității de lungime.

Condițiile (9), (10), (11) și (12) devin în acest caz

$$U_1 = 0, \quad \text{pe frontiera } F_1, \tag{16}$$

$$U_2 = 0, \quad \text{pe frontiera } F_2, \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \frac{1}{4}(k_1 - k_2)(x^2 - 1), \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} - m\frac{\partial U_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{pe frontiera } F. \tag{18, 19}$$

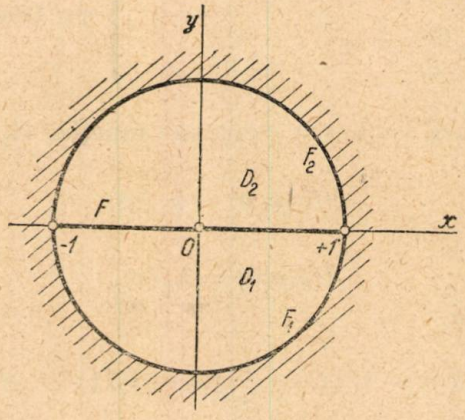


Fig. 2

Nucleul lui Schwarz pentru semicerc este cunoscut [3], iar funcțiile $U_1(x, y)$ și $U_2(x, y)$ se scriu

$$U_j = (-1)^j \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{+1} h_j(\xi)\left[\frac{1}{z-\xi} - \frac{z}{z\xi - 1}\right] d\xi\right\}, \quad (j = 1,2). \tag{20}$$

Derivînd relațiile (20) în raport cu y și ținînd seama că $h_j(\pm 1) = 0$ se obține

$$\left(\frac{\partial U_j}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{(-1)^{j+1}}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{dh_j}{d\xi}\left[\frac{1}{x-\xi} + \frac{\xi}{x\xi - 1}\right] d\xi. \tag{21}$$

Introducerea relațiilor precedente în (19), ținînd seama de (18), conduce la următoarea ecuație integrală cu funcția necunoscută $\frac{dh_1}{dx}$:

$$(1+m)\int_{-1}^{+1} \frac{dh_1}{d\xi}\left[\frac{1}{x-\xi} + \frac{\xi}{x\xi - 1}\right] d\xi = \tag{22}$$

$$= -\frac{m(k_1 - k_2)}{2}\int_{-1}^{+1} \xi\left[\frac{1}{x-\xi} + \frac{\xi}{x\xi - 1}\right] d\xi.$$

Se vede imediat că soluția ecuației (22) este următoarea :

$$\frac{dh_1}{dx} = -\frac{m(k_1 - k_2)}{2(1+m)}\, x, \tag{23}$$

de unde

$$h_1(x) = -\frac{m(k_1 - k_2)}{4(1+m)}(x^2 - 1). \tag{24}$$

Rezultă din (18)

$$h_2(x) = \frac{k_1 - k_2}{4(1+m)}(x^2 - 1). \tag{25}$$

Se observă că distribuția vitezelor pe suprafața de separație este parabolică.

Vitezele $u_1(x, y)$ și $u_2(x, y)$ se calculează ușor cu ajutorul formulelor (20), (7) și (8).

Dăm mai jos distribuția vitezelor pe axa Oy

$$u_1(0, y) = \frac{m(k_1 - k_2)}{4\pi(1+m)}\left[2\left(y - \frac{1}{y}\right) + \frac{2(1+y^2)^2}{y^2}\operatorname{arc\,tg} y + \pi(y^2+1)\right] + \frac{k_1}{4}(y^2 - 1), \tag{26}$$

$$u_2(0, y) = \frac{k_1 - k_2}{4\pi(1+m)}\left[2\left(y - \frac{1}{y}\right) + \frac{2(1+y^2)^2}{y^2}\operatorname{arc\,tg} y - \pi(y^2+1)\right] + \frac{k_2}{4}(y^2 - 1). \tag{27}$$

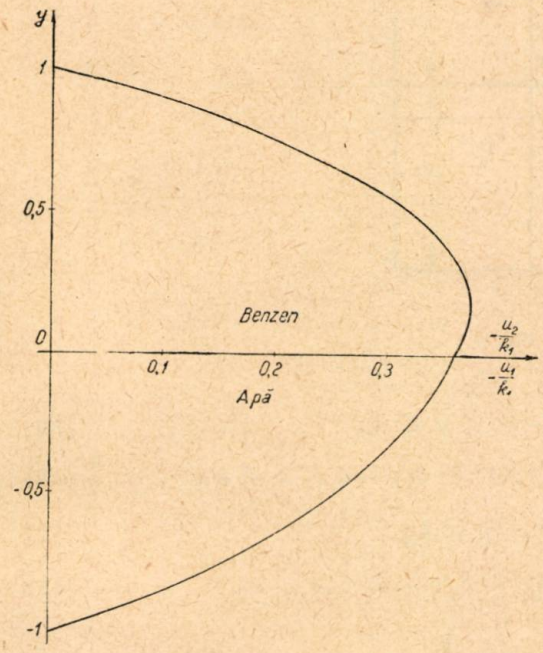


Fig. 3

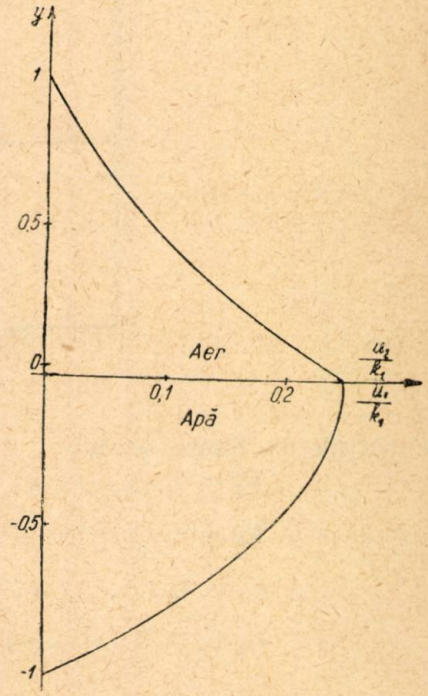


Fig. 4

În figurile 3 și 4 se dau ca exemplu diagramele vitezelor de-a lungul axei Oy pentru apă și benzen, respectiv apă și aer. În ultimul caz s-a

luat constanta k_2 pentru aer, nulă, deoarece uniformitatea presiunii atmosferice la infinit amonte şi aval impune acest lucru.

Se observă în figura 3 că scurgerea benzenului este frînată de prezenţa apei, la rîndul său apa fiind antrenată de benzen; din acest motiv maximul vitezei nu are loc pe suprafaţa de separaţie ci într-un punct oarecare de pe ordonată.

Un fenomen analog se poate observa şi în figura 4.

5. Aplicaţia II. Tub de secţiune dreptunghiulară

Configuraţia este arătată în figura 5, notaţiile fiind aceleaşi ca în cazurile precedente.

Este avantajos a defini aici funcţiile $U_j(x, y)$, prin relaţiile

$$u_j(x, y) = U_j + \frac{k_j}{2}(x^2 - a^2), \quad (j = 1,2). \tag{28}$$

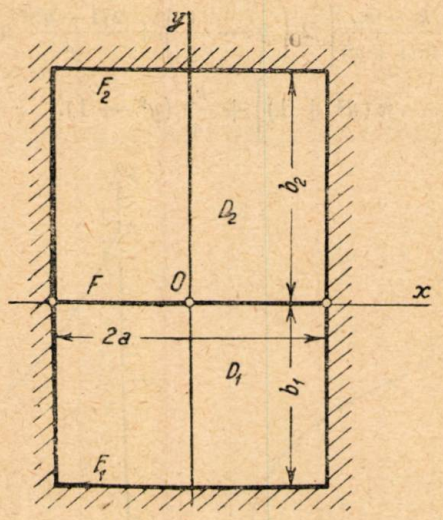


Fig. 5

Condiţiile la limite devin

$$U_1 = 0, \quad (x = \pm a; -b_1 \leqslant y \leqslant 0), \tag{29}$$

$$U_1 = -\frac{k_1}{2}(x^2 - a^2), \quad (y = -b_1; -a \leqslant x \leqslant a), \tag{30}$$

$$U_2 = 0, \quad (x = \pm a; 0 \leqslant y \leqslant b_2), \tag{31}$$

$$U_2 = -\frac{k_2}{2}(x^2 - a^2), \quad (y = b_2; -a \leqslant x \leqslant a), \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \frac{1}{2}(k_1 - k_2)(x^2 - a^2), \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} - m\frac{\partial U_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (y = 0; -a \leqslant x \leqslant a). \tag{33, 34}$$

Aplicarea metodei generale prezintă în cazul de față dificultăți însemnate. De aceea vom utiliza un alt procedeu [4], încercînd pentru U_1 și U_2 soluții de forma

$$U_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} ny + B_n \operatorname{ch} ny) \cos nx, \tag{35}$$

$$U_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} ny + D_n \operatorname{ch} ny) \cos nx. \tag{36}$$

Vom alege pe n funcție de i, astfel încît cos nx să se anuleze pe laturile $x = \pm a$. Pentru aceasta este suficient să se ia

$$n = \frac{(2i+1)\pi}{2a}, \qquad (i = 0,1,2,\ldots). \tag{37}$$

În acest mod condițiile (29) și (31) sînt satisfăcute. Presupunînd că seriile (35) și (36) sînt absolut și uniform convergente, se pot determina coeficienții A_n, B_n, C_n și D_n astfel ca să fie satisfăcute celelalte condiții la limite. Astfel, condiția (34) conduce la relația

$$A_n = m\, C_n, \tag{38}$$

iar condiția (33) la

$$\sum_{i=0}^{\infty} (D_n - B_n) \cos nx = \frac{1}{2} (k_1 - k_2)(x^2 - a^2). \tag{39}$$

În sfîrșit condițiile (30) și (32) devin

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-A_n \operatorname{sh} nb_1 + B_n \operatorname{ch} nb_1) \cos nx = -\frac{k_1(x^2 - a^2)}{2}, \tag{40}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} nb_2 + D_n \operatorname{ch} nb_2) \cos nx = -\frac{k_2(x^2 - a^2)}{2}. \tag{41}$$

Din (39), (40) și (41) rezultă relațiile

$$D_n - B_n = \frac{2(k_1 - k_2)(-1)^{i+1}}{a\, n^3}, \tag{42}$$

$$-A_n \operatorname{sh} nb_1 + B_n \operatorname{ch} nb_1 = \frac{2(-1)^i k_1}{a\, n^3}, \tag{43}$$

$$C_n \operatorname{sh} nb_2 + D_n \operatorname{ch} nb_2 = \frac{2(-1)^i k_2}{a\, n^3}, \tag{44}$$

care împreună cu (38) formează un sistem de 4 ecuații cu patru necunoscute. Rezolvarea acestui sistem dă soluția problemei. Se poate vedea ușor că seriile (35) și (36) sînt absolut și uniform convergente, ceea ce

justifică ipoteza făcută apriori asupra lor. În cazul particular cînd $b_1 = b_2 = b$, se obține

$$A_n = \frac{2(-1)^i m}{an^3(1+m)}(k_1 - k_2)\,\mathrm{th}\,\frac{nb}{2},$$

$$B_n = \frac{2(-1)^i}{an^3(1+m)}\left[\frac{k_1 + mk_2}{\mathrm{ch}\,nb} + m(k_1 - k_2)\right], \tag{45}$$

$$C_n = \frac{2(-1)^i}{an^3(1+m)}(k_1 - k_2)\,\mathrm{th}\,\frac{nb}{2},$$

$$D_n = \frac{2(-1)^i}{an^3(1+m)}\left[\frac{k_1 + mk_2}{\mathrm{ch}\,nb} + k_2 - k_1\right].$$

Vitezele u_1 și u_2 sînt astfel determinate în orice punct din interiorul tubului. Pe suprafața de separație se deduce următoarea distribuție de viteze :

$$u_1 = u_2 = \frac{(k_1 + mk_2)(x^2 - a^2)}{2(1+m)} + \frac{2(k_1 + mk_2)}{1+m}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{an^3}\,\frac{\cos nx}{\mathrm{ch}\,nb}. \tag{46}$$

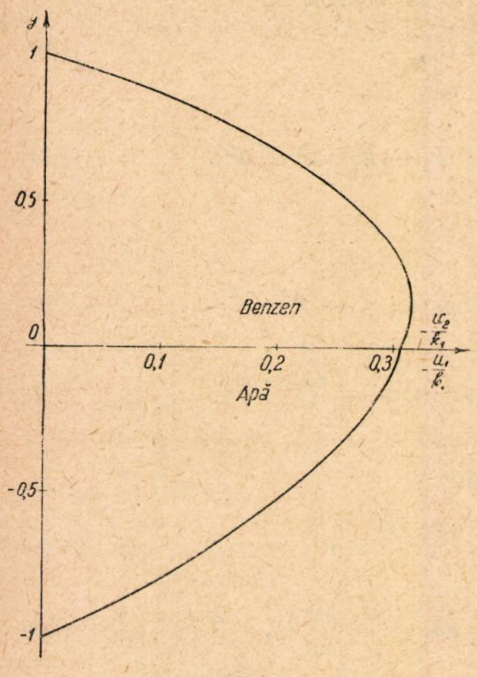


Fig. 6

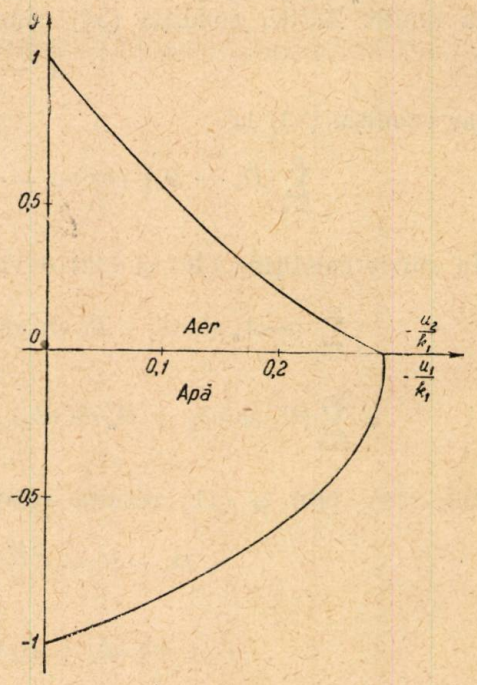


Fig. 7

Se observă că în acest caz o repartiție parabolică a vitezei pe suprafața de separație este aproximativă. Pentru comparație cu rezultatele aplicației I s-au reprezentat în figurile 6 și 7 vitezele u_1 și u_2 pe axa Oy în cazul cînd cele două fluide sînt apă și benzen, respectiv apă și aer, luîndu-se $a = b = 1$.

CONCLUZII

Studiul mișcării unidimensionale a două fluide vîscoase grele prin același tub, suprafața lor de separație fiind plană, conduce, în general, la o ecuație integrală a cărei rezolvare este dificilă pentru un contur oarecare al tubului.

De aceea ne-am mărginit în aplicații la două cazuri, considerînd contururi de forme uzuale; soluțiile obținute dau indicații asupra tendinței generale a fenomenului fizic.

Rezolvarea problemei oferă distribuția de viteze în orice punct, în particular pe suprafața de separație. Din exemplele numerice prezentate se observă că frecarea dintre cele două fluide deplasează punctele de maxim ale vitezelor, care nu se mai află astfel pe suprafața de separație.

În cazul cînd unul dintre fluide este aerul, se constată că influența frecării cu el este redusă, ceea ce justifică aproximația făcută de obicei la studiul scurgerii fluidelor grele cu suprafața liberă, cînd se neglijează efectul frecării cu aerul.

Primită la redacție la 13 mai 1956

ОДНОРАЗМЕРНОЕ ДИЖЕНИЕ ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЕННЫХ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы исследуют движение двух жидкостей, имеющих разные плотности и вязкость, протекающих в цилиндрической трубе, поверхности соприкосновения которых плоские (рис. 1).

Скорости u_1 и u_2 этих двух жидкостей удовлетворяют уравнениям (2) и (3) со следующими краевыми условиями: на границах F_1 и F_2, $u_1 = u_2 = 0$; на поверхности соприкосновения F применимы условия (4) и (5), представляющие сцепление двух жидкостей и равенство касательного действия и противодействия.

После преобразований (7) и (8) задача сводится к определению двух гармонических функций, с условиями (9), (10), (11) и (12). Решение задачи приводит к интегральному уравнению.

Далее рассматриваются два случая. Первый относится к течению в трубе круглаго сечения (рис. 2), второй — в трубе прямоугольного сечения (рис. 5). Скорости могут распределяться во всех точках и, в частности, на разделяющей поверхности.

Как пример дается распределение скоростей по оси „ОУ“ в случае, когда вышеупомянутые две жидкости являются водой и бензолом (рис. 3 и 6) или, соответственно, водой и воздухом (рис. 4 и 7).

MOUVEMENT UNIDIMENSIONNEL DE DEUX FLUIDES VISQUEUX PESANTS, SÉPARÉS PAR UNE SURFACE PLANE

(RÉSUMÉ)

Les auteurs étudient le mouvement de deux fluides de différentes densités et viscosités, qui s'écoulent dans un tube cylindrique, leur surface de contact étant plane (fig. 1).

Les vitesses u_1 et u_2 des deux fluides satisfont aux équations (2) et (3), avec les conditions aux limites suivantes : aux frontières F_1 et F_2, $u_1 = u_2 = 0$; sur la surface de contact F, on a les conditions (4) et (5) qui expriment l'adhérence des deux fluides et l'égalité de l'action et de la réaction tangentielles.

En opérant les transformations (7) et (8), le problème se réduit à la détermination de deux fonctions harmoniques, avec les conditions (9), (10), (11) et (12). La résolution du problème conduit à une équation intégrale.

On traite ensuite deux cas. Le premier représente l'écoulement dans un tube de section circulaire (fig. 2), le deuxième, dans un tube rectangulaire (fig. 5). La méthode permet d'obtenir la distribution des vitesses en tout point, en particulier sur la surface de séparation.

A titre d'exemples, on a représenté la distribution des vitesses sur l'axe Oy, pour les cas où les deux fluides sont l'eau et le benzène (fig. 3 et 6), ou l'eau et l'air (fig. 4 et 7).

BIBLIOGRAFIE

1. D. Dumitrescu, *O soluţie exactă a sistemului de ecuaţii diferenţiale Navier-Stokes, pentru fluidele grele cu suprafaţa liberă.* Comunicările Acad. R.P.R.,t. IV, nr. 3—4, martie-aprilie 1954, p. 115.
2. W. Müller, *Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten.* Leipzig, 1932, p. 67.
3. Caius Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Ed. Acad. R.P.R.,1952, p. 50.
4. L. V. Kantorovici şi V. I. Krîlov, *Metode de aproximaţie ale analizei superioare.* I.S.R.S., Bucureşti, 1956, vol. I, p. 14.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR

INSTABILITATEA PRĂJINILOR GRELE ÎN ROTAŢIE

DE

N. S. PÎRVULESCU

Studiul stabilităţii prăjinilor de foraj sub influenţa rotaţiei a fost abordat anterior [1] şi dezvoltat ulterior [2] într-o primă aproximaţie. Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (6), [3], a fibrei medie deformate, ne permite să dezvoltăm acest studiu cu o aproximaţie mai bună şi necesară calculului de rezistenţă al prăjinilor în forajul forţat.

Prin dezvoltarea acestui studiu s-au conturat cîteva noţiuni ale căror notaţii le dăm mai jos :

1) α — raportul de compresiune (adimensional) dat de expresia

$$\alpha = \alpha(L) = -\alpha' = \frac{h}{L}, \tag{1}$$

în care L este lungimea coloanei de prăjini, iar h lungimea porţiunii comprimate.

Pentru $L = x$ însemnăm

$$\alpha'(x) = \alpha(x) = -\frac{h}{x}.$$

2) z — cubul supleţei la gravitaţie (adimensional) dat de expresia

$$z = z(L) = \frac{L^3}{A}, \tag{2}$$

$\sqrt[3]{z}$ fiind simpla suplee la gravitaţie.

Pentru $L = x$ notăm $z(x) = \frac{x^3}{A}$.

3) A — volumul de rigiditate faţă de gravitaţie care se măsoară în lungime la cub şi este dat de expresia

$$A = \frac{EI}{q}, \tag{3}$$

în care E este coeficientul de rigiditate longitudinal, I momentul de inerție al secțiunii, q greutatea aparentă a prăjinii pe unitatea de lungime, $\sqrt[3]{A}$ fiind lungimea de rigiditate față de gravitație.

4) β — modulul centrifugal (adimensional) dat de expresia

$$\beta(L) = \beta = wL^4, \tag{4}$$

$$w = \frac{B}{A} = \frac{\omega^2 q}{gEI}, \tag{5}$$

în care ω este viteza de rotație a prăjinei, iar g accelerația gravitației.

Pentru $L = x$ notăm $\beta(x) = wx^4$.

Am arătat [3] că integrala ecuației fibrei medii deformate

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{A}\frac{d}{dx}\left[(x-h)\frac{dy}{dx}\right] + wy, \tag{6}$$

în care y este săgeata liniei medii deformate la depărtarea x de origină, este dată de relația

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{3} j!\, a_j x^j \Psi_j^{(i)}(x), \tag{7}$$

în care

$$\Psi_j^{(i)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta^r(x)\, \Xi_{j+4r}^{(i)}, \tag{8}$$

iar

$$\Xi_{j+4r}^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x) \frac{N_{j+4r}^{k,k-u}}{(j+4r+2k+u-i)!}, \tag{9}$$

valabile pentru $j \geqslant 2$; pentru $j = 1$

$$\Psi_1(x) = \frac{N_1^{0,0}}{1!} + z(x)\,\Xi_4(x) + \sum_{r=1}^{\infty} (w x^4)^r\, \Xi_{1+4r}(x); \tag{10}$$

pentru $j = 0$

$$\Psi_0(x) = \frac{N_0^{0,0}}{0!} + \sum_{r=1}^{\infty} (wx^4)^r\, \Xi_{4r}(x); \tag{11}$$

i din paranteză reprezintă ordinul de derivare numai pentru funcțiile $y(x)$ nu și pentru funcțiile $\Psi(x)$ și $\Xi(x)$.

Numerele $N_{j+4r}^{k,k-u}$ sînt date de formula de recurență

$$N_{j+4r}^{k,k-u} = N_{j+4r}^{k-1,k-u-1} + (j+4r+2k+u-3)\, N_{j+4r}^{k-1,k-u} + N_{j+4(r-1)}^{k,k-u}, \tag{12}$$

valabilă pentru $k-u \geqslant 1$, $u \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ și $j \leqslant 4$; pentru $u = 0$ avem

$$N_j^{k,k} = 1, \tag{13}$$

iar pentru $k - u = 0$ avem

$$N_j^{k,0} = [j + 3(k - 1)]!!!$$

Numerele $N_{j+4r}^{k,k-u}$ se găsesc calculate în tablourile din lucrarea citată [3].

Constantele de integrare a_j se determină ca și în cazul flambajului simplu [4] punînd condițiile de legare a extremităților. Se ajunge astfel la un sistem de ecuații omogene din care rezultă condiția de instabilitate.

Condițiile de stabilitate [4] pentru flambajul simplu sînt valabile și sub acțiunea rotației, cu deosebirea că $\Xi(L)$ se înlocuiește cu $\Psi(L)$; astfel condiția de instabilitate devine

$$\Psi_j^{(i)}(L)\,\Psi_{j'}^{(i')}(L) - \Psi_j^{(i')}(L)\,\Psi_{j'}^{(i')}(L) = 0, \tag{14}$$

în care $j = 1$ pentru articulație la extremitatea inferioară,
$j = 2$ pentru incastrare la extremitatea inferioară,
$j' = 3$ în ambele cazuri,
$i = 1$ pentru incastrare la extremitatea superioară,
$i = 2$ pentru articulație la extremitatea superioară,
$i' = 0$ fără deplasare laterală,
$i' = 3$ cu deplasare laterală normală a extremității superioare.

Cazul $C_{1,3}^{2,0}$ cu ambele capete articulate și fără deplasare laterală

Am păstrat [4] însemnarea simbolică $C_{j,j'}^{i,i'}$ a diferitelor cazuri de legare a extremităților.

Cazul $C_{1,3}^{2,0}$ este cel mai interesant pentru următoarele motive:

Condițiile de articulație la extremitatea inferioară și fără deplasare laterală a extremității superioare sînt cele mai apropiate de condițiile unei garnituri de prăjini de foraj. Dacă uneori, în realitate, extremitatea superioară se găsește cvasi incastrată, considerarea ca articulație este mai acoperitoare în evitarea condiției critice.

Prin pierderea stabilității și deformarea fibrei medii pe mai multe bucle, punctele de inflexiune pot fi socotite ca articulații și această situație revine la cazul ambelor legături articulate pentru toate buclele, în afară de ultima, chiar dacă extremitatea superioară ar fi incastrată. În această situație lungimea L a tijei din relațiile precedente, devine lungimea l dintre două puncte de inflexiune, adică lungimea buclei considerate.

În cazul $C_{1,3}^{2,0}$ facem

$$j = 1;\ j' = 3;\ i = 2;\ i' = 0,$$

și condiția de instabilitate (14) devine

$$\Psi_1^{(2)}(L)\,\Psi_3(L) - \Psi_1(L)\,\Psi_3^{(2)}(L) = 0. \tag{15}$$

La această relație se ajunge în modul următor.

Luînd originea axelor de referință în extremitatea inferioară, $a_0 = 0$.

Expresia momentului încovoietor M este dat de expresia

$$M = -EIy^{(2)}. \tag{16}$$

Considerînd articulație în extremitatea inferioară pentru $x = 0$, $M_0 = 0$ și deci, din (7), $a_2 = 0$.

Anulînd pe a_0 și a_2, relația (7) devine

$$y^{(i)}(x) = a_1 x^{-i} \Psi_1^{(i)}(x) + 3! a_3 x^{3-i} \Psi_3^{(i)}(x). \tag{17}$$

Considerînd extremitatea superioară fără deplasare laterală pentru $x = L$, $y = 0$ și deci relația (17) devine

$$a_1 \Psi_1(L) + 3! a_3 L^3 \Psi_3(L) = 0. \tag{18}$$

Considerînd și extremitatea superioară articulată $y^{(2)}(L) = 0$ și deci

$$a_1 L^{-2} \Psi_1^{(2)}(L) + 3! a_3 L \Psi_3^{(2)}(L) = 0. \tag{19}$$

Condiția de compatibilitate a ecuațiilor omogene este

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(L) & 3! L^3 \Psi_3(L) \\ \Psi_1^{(2)}(L) & 3! L^3 \Psi_3^{(2)}(L) \end{vmatrix} = 0, \tag{20}$$

adică tocmai condiția (15).

Pentru simplificarea scrisului vom nota

$$\Psi(L) = \Psi, \quad \text{și} \quad \Xi(L) = \Xi$$

Dezvoltînd relația (7) în condițiile menționate, care ne interesează în vederea condiției exprimată de relația (15), se obține

$$\Psi_1 = \frac{N_1^{0,0}}{1!} + z\frac{N_4^{0,0}}{4!} + z^2\left[\alpha'\frac{N_4^{1,1}}{6!} + \frac{N_4^{1,0}}{7!}\right] + \ldots$$
$$+ \beta\left\{\frac{N_5^{0,0}}{5!} + z\left[\alpha'\frac{N_5^{1,1}}{7!} + \frac{N_5^{1,0}}{8!}\right] + z^2\left[\alpha'^2\frac{N_5^{2,2}}{9!} + \alpha'\frac{N_5^{2,1}}{10!} + \frac{N_5^{2,0}}{11!}\right] + \ldots\right\}$$
$$+ \beta^2\left\{\frac{N_9^{0,0}}{9!} + z\left[\alpha'\frac{N_9^{1,1}}{11!} + \frac{N_9^{1,0}}{12!}\right] + \ldots\right\} + \ldots$$
$$\Psi_1^{(2)} = z\frac{N_4^{0,0}}{2!} + z^2\left[\alpha'\frac{N_4^{1,1}}{4!} + \frac{N_4^{1,0}}{5!}\right] + z^3\left[\alpha'^2\frac{N_4^{2,2}}{6!} + \alpha'\frac{N_4^{2,1}}{7!} + \frac{N_4^{2,0}}{8!}\right] + \ldots$$
$$+ \beta\left\{\frac{N_5^{0,0}}{3!} + z\left[\alpha'\frac{N_5^{1,1}}{5!} + \frac{N_5^{1,0}}{6!}\right] + \ldots\right\} + \beta^2\left\{\frac{N_9^{0,0}}{7!} + \ldots\right\} + \ldots \tag{21}$$
$$\Psi_3 = \frac{N_3^{0,0}}{3!} + z\left[\alpha'\frac{N_3^{1,1}}{5!} + \frac{N_3^{1,0}}{6!}\right] + z^2\left[\alpha'^2\frac{N_3^{2,2}}{7!} + \alpha'\frac{N_3^{2,1}}{8!} + \frac{N_3^{2,0}}{9!}\right] + \ldots$$
$$+ \beta\left\{\frac{N_7^{0,0}}{7!} + z\left[\alpha'\frac{N_7^{1,1}}{5!} + \frac{N_7^{1,0}}{6!}\right] + z^2\left[\alpha'^2\frac{N_7^{2,2}}{7!} + \alpha'\frac{N_7^{2,1}}{8!} + \frac{N_7^{2,0}}{9!}\right] + \ldots\right\} +$$
$$+ \beta^2\left\{\frac{N_{11}^{0,0}}{11!} + z\left[\alpha'\frac{N_{11}^{1,1}}{13!} + \frac{N_{11}^{1,0}}{14!}\right] + \ldots\right\} + \beta^3\left\{\frac{N_{15}^{1,0}}{15!} + \ldots\right\} + \ldots$$
$$\Psi_3^{(2)} = \frac{N_3^{0,0}}{1!} + z\left[\alpha'\frac{N_3^{1,1}}{3!} + \frac{N_3^{1,0}}{4!}\right] + z^2\left[\alpha'^2\frac{N_3^{2,2}}{5!} + \alpha'\frac{N_3^{2,1}}{6!} + \frac{N_3^{2,0}}{7!}\right] + \ldots +$$
$$+ \beta\left\{\frac{N_7^{0,0}}{5!} + z\left[\alpha'\frac{N_7^{1,1}}{7!} + \frac{N_7^{1,0}}{8!}\right] + \ldots\right\} + \beta^2\left\{\frac{N_{11}^{0,0}}{9!} + \ldots\right\} + \ldots$$

Efectuînd diferența produselor în conformitate cu (15) se obține

$$0 = \frac{N_1^{0,0}\,N_3^{0,0}}{1!\;1!} + z\left[\alpha'\,\frac{N_1^{0,0}\,N_3^{1,1}}{1!\;3!} + \frac{N_1^{0,0}\,N_3^{1,0}}{1!\;4!} + \frac{2\cdot3-3\cdot4}{4!\;3!}\,N_4^{0,0}\,N_3^{0,0}\right] + \ldots$$

$$+\beta\left\{\frac{N_1^{0,0}\,N_7^{0,0}}{1!\;5!} + \frac{2\cdot3-4\cdot5}{5!\;3!}\,N_5^{0,0}\,N_3^{0,0} + z\left[\alpha'\left(\frac{N_1^{0,0}\,N_7^{1,1}}{1!\;7!} + \frac{2\cdot3-6\cdot7}{7!\;3!}\,N_5^{1,1}\,N_3^{0,0}\right) + \right.\right.$$

$$+\frac{N_1^{0,0}\,N_7^{1,0}}{1!\;8!} + \frac{6\cdot7-3\cdot4}{4!\;7!}\,N_4^{0,0}\,N_7^{0,0} + \frac{5\cdot6-4\cdot5}{5!\;6!}\,N_5^{0,0}\,N_3^{1,0} +$$

$$\left.\left.+\frac{2\cdot5-7\cdot8}{8!\;3!}\,N_5^{1,0}\,N_3^{0,0}\right] + \ldots\right\} + \beta^2\left\{\frac{N_1^{0,0}\,N_{11}^{1,0}}{1!\;9!} + \frac{6\cdot7-4\cdot5}{5!\;7!}\,N_5^{0,0}\,N_7^{0,0} + \right.$$

$$\left.+\frac{2\cdot3-8\cdot9}{9!\;3!}\,N_9^{0,0}\,N_3^{0,0} + \ldots\right\} + \ldots \qquad (22)$$

Înlocuind valorile N calculate cu ajutorul formulei (12) se obține

$$0 = 1 + z\left[-\frac{\alpha}{3!} + \frac{2}{4!}\right] + z^2\,\frac{\alpha^2}{1!\,5!} - \alpha\left(\frac{8}{1!\,6!} - \frac{24}{3!\,6!} + \frac{8}{4!\,5!}\right) +$$

$$+\frac{18}{1!\,7!} - \frac{144}{3!\,7!} + \frac{54}{3!\,8!}\Big] + \ldots - \beta\left\{\frac{-1}{1!\,5!} + \frac{14}{3!\,5!} - z\left[-\alpha\left(\frac{2}{1!\,7!} - \frac{36}{3!\,7!}\right) + \right.\right.$$

$$+\frac{10}{1!\,8!} + \frac{30}{4!\,7!} + \frac{30}{5!\,6!} - \frac{300}{3!\,8!}\Big] + \ldots\Big\} + \beta^2\left\{\frac{1}{1!\,9!} + \right.$$

$$\left.+\frac{22}{5!\,7!} - \frac{66}{3!\,9!} + \ldots\right\} + \ldots \qquad (23)$$

Înlocuind valorile factorialelor și efectuînd calculul numeric se ajunge la ecuația

$$0 = 1 - \frac{z}{100}\begin{bmatrix} 16{,}666\,67\;\alpha \\ -\;8{,}333\,33 \end{bmatrix} + \left(\frac{z}{100}\right)^2\begin{bmatrix} 83{,}333\,33\;\alpha^2 \\ -\;83{,}333\,33\;\alpha \\ +\;19{,}345\,24 \end{bmatrix} -$$

$$-\left(\frac{z}{100}\right)^3\begin{bmatrix} 198{,}412\,70\;\alpha^3 \\ -\;297{,}619\,05\;\alpha^2 \\ +\;141{,}093\,47\;\alpha \\ -\;20{,}943\,56 \end{bmatrix} + \ldots - \frac{\beta}{100}\left\{1{,}111\,111 - \frac{z}{100}\begin{bmatrix} 7{,}936\,508\;\alpha \\ -\;3{,}968\,255 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left.+\left(\frac{z}{100}\right)^2\begin{bmatrix} 22{,}045\,853\;\alpha^2 \\ -\;22{,}045\,854\;\alpha \\ +\;5{,}294\,350 \end{bmatrix} - \ldots\right\} + \left(\frac{\beta}{100}\right)^2\left\{0{,}088\,183\,43 - \right.$$

$$\left.-\frac{z}{100}\begin{bmatrix} 0{,}400\,833\,74\;\alpha \\ 0{,}200\,416\,87 \end{bmatrix} + \ldots\right\} - \left(\frac{\beta}{100}\right)^3\left\{0{,}001\,468\,253 - \ldots\right\} + \ldots \qquad (24)$$

Facem verificarea calculului numeric mergînd pe o a doua cale și anume pornind de la relațiile (14) din lucrarea [3] :

$$\Psi_1 = \frac{1}{1!} + \frac{z}{4!} + z^2\left[\frac{\alpha'}{6!} + \frac{4}{7!}\right] + z^3\left[\frac{\alpha'^2}{8!} + \frac{10\,\alpha'}{9!} + \frac{28}{10!}\right] + \ldots +$$

$$+ \beta\left\{\frac{1}{5!} + z\left[\frac{\alpha'}{7!} + \frac{6}{8!}\right] + z^2\left[\frac{\alpha'^2}{9!} + \frac{14\alpha'}{10!} + \frac{52}{11!}\right] + \ldots\right\} +$$

$$+ \beta^2\left\{\frac{1}{9!} + z\left[\frac{2\alpha'}{11!} + \frac{15}{12!}\right] + \ldots\right\} + \beta^3\left\{\frac{1}{13!} + \ldots\right\} + \ldots$$

$$\Psi_1^{(2)} = \frac{z}{2!} + z^2\left[\frac{\alpha'}{4!} + \frac{4}{5!}\right] + \ldots + \beta\left\{\frac{1}{3!} + z\left[\frac{\alpha'}{5!} + \frac{6}{6!}\right] + \ldots\right\} + \ldots \tag{25}$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{3!} + z\left[\frac{\alpha'}{5!} + \frac{3}{6!}\right] + z^2\left[\frac{\alpha'^2}{7!} + \frac{8\alpha'}{8!} + \frac{18}{9!}\right] + z^3\left[\frac{\alpha'^3}{9!} + \frac{15\,\alpha'^2}{10!} +\right.$$

$$\left. + \frac{82\,\alpha'}{11!} + \frac{162}{12!}\right] + \ldots + \beta\left\{\frac{1}{7!} + z\left[\frac{2\alpha'}{9!} + \frac{10}{10!}\right] + z^2\left[\frac{3\,\alpha'^2}{11!} + \frac{36\,\alpha'}{12!} + \frac{118}{13!}\right] + \ldots\right\}$$

$$+ \beta^2\left\{\frac{1}{11!} + z\,\frac{3\alpha'}{13!} + \frac{21}{14!}\right] + \ldots\right\} + \beta^3\left\{\frac{1}{15!} + \ldots\right\} + \ldots$$

$$\Psi_3^{(2)} = \frac{1}{1!} + z\left[\frac{\alpha'}{3!} + \frac{3}{4!}\right] + \ldots + \beta\left\{\frac{1}{5!} + z\left[\frac{2\alpha'}{7!} + \frac{10}{8!}\right] + \ldots\right\} + \ldots$$

Procedînd în mod analog ca și pe calea precedentă, adică făcînd înlocuirile în relația (13) și efectuînd calculul numeric, se ajunge la aceeași ecuație (24).

Dacă în ecuația (24), se dau diferite valori pentru raportul de compresiune α, se obțin ecuații de forma :

Aproximația	0°	1°	2°	3°	
0°	$0 = d_{0,0}$	$+ d_{0,1}\,\frac{z}{100}$	$+ d_{0,2}\left(\frac{z}{100}\right)^2$	$+ d_{0,3}\left(\frac{z}{100}\right)^3$	$+ \ldots$
1°		$-\frac{\beta}{100}\left[d_{1,0}\right.$	$+ d_{1,1}\,\frac{z}{100}$	$+ d_{1,2}\left(\frac{z}{100}\right)^2$	$+ \ldots\left.\right]$
2°			$+\left(\frac{\beta}{100}\right)^2\left[d_{2,0}\right.$	$+ d_{2,1}\,\frac{z}{100}$	$+ \ldots\left.\right]$
3°				$-\left(\frac{\beta}{100}\right)^3\left[d_{3,0}\right.$	$+ \ldots\left.\right]$

Valorile coeficienților $d_{p,q}$ pentru diferite valori ale raportului de compresiune α sînt trecuți în tabloul nr 1.

Tabloul nr. 1

Valorile coeficienților $d_{p,q}$

α	-1	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+5$	$+10$
$d_{0,0}$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
$d_{0,1}$	+25,00000	+8,333 333	0	−8,333 333	−25,000 00	−75,000 00	−138,333 3
$d_{0,2}$	+186,0119	+19,345 24	−1,488 0952	+19,345 24	+186,011 9	+1 686,012	+7 519,345
$d_{0,3}$	+658,0688	+20,943 56	0	−20,943 56	−658,068 8	−18 045,63	−170 082,9
$d_{1,0}$	+1,111 1111	+1,111 111 1	+1,111 111 1	+1,111 111 1	+1,111 111 1	+1,111 111 1	+1,111 111 1
$d_{1,1}$	+11,904 76	+3,968 255	0	−3,968 252	−11,904 76	−35,714 00	−75,396 8
$d_{1,2}$	+49,386 06	+5,294 350	−0,217 114	+5,294 35	+49,386 06	+446,211 3	+1 989,4200
$d_{2,0}$	+0,088 1834	+0,088 183 4	+0,088 183 4	+0,088 183 4	+0,088 183 4	+0,088 183 4	+0,088 183 4
$d_{2,1}$	+0,601 2506	+0,200 4169	0	−0,200 416 9	−0,601 2506	−1,803 752	−4,207 920
$d_{3,0}$	+0,001 468 25	+0,001 468 25	+0,001 468 25	+0,001 468 25	+0,001 468 25	+0,001 468 25	+0,001 468 25

Observăm că membrul al doilea al ecuației (25) este o serie dublă față de variabilele z și β. Am delimitat prin linii întrerupte termenii seriei duble, în diferite grade de aproximație.

Din examinarea tabloului nr.1 se observă că valorile coeficienților sînt simetrice și antisimetrice față de coloana $\alpha = \frac{1}{2}$, după cum indicile q este respectiv par sau impar, ceea ce constituie o verificare a calculului numeric.

Soluțiile în primă aproximație

Dacă ne oprim la o primă aproximație, cu termenii delimitați după cum se arată în ecuația (25), această ecuație devine

$$\beta = \frac{d_{0,1}}{d_{1,0}} z + 100 \frac{d_{0,0}}{d_{1,0}}. \tag{26}$$

Din diferite valori pentru supleța la gravitație z se obține pentru modulul centrifugal β valorile trecute în tabloul nr. 4 ale căror variații sînt trasate în diagrama din figura 1.

Soluțiile în a treia aproximație

Dacă ne oprim la a treia aproximație cu termenii delimitați, după cum se arată în ecuațiile (25), și se dau diferite valori pentru supleța la gravitație z, se obțin ecuații de forma

$$0 = e_0 + e_1\beta + e_2\beta^2 + e_3\beta^3, \tag{27}$$

în care e_3 rămîne neschimbat, adică $e_3 = d_{3,0} = 0{,}001\,468\,25$; valorile celorlalți coeficienți sînt trecute în tabloul nr. 2.

Rezolvarea ecuațiilor (27) o facem prin metoda de recurență [5]. Facem mai întîi transformarea

$$y = \frac{e_1}{e_0}\beta \tag{28}$$

și ecuația (27) devine

$$-y = 1 + e_{1,2}\, y^2 + e_{1,3} y^3, \tag{29}$$

în care

$$e_{1,2} = \frac{e_0 e_2}{e_1^2}, \quad e_{1,3} = \frac{e_0^2 e_3}{e_1^3}.$$

Valorile coeficienților $e_{1,2}$ și $e_{1,3}$ sînt trecute tot în tabloul nr. 2.

Prin eliminarea succesivă a necunoscutei din primii termeni ai membrului al doilea, se obține o serie infinită S, care nu conține necunoscuta și care reprezintă valoarea cu semn schimbat al rădăcinii de rest nul y_1, și restul R, care conține necunoscuta și care tinde către o valoare diferită de zero pentru celelalte rădăcini ale ecuației (29).

Tabloul nr. 2

Valorile coeficienților e

α	z	e_0	e_1	$e_{1,2}$	$e_{1,2}$	$e_{1,3}$
	0,1	+0,849 015 9	−1,037 703 7	+0,083 975 5	+0,072 943 6	
+10	0,5	+0,375 056 6	−0,783 863	+0,067 143 8	+0,040 984 1	
	1,105	0	0	0	0	
	0,1	+0,926 686 0	−1,075 843	+0,086 379 68	+0,060 517 48	
+5	0,5	+0,664 895 3	−0,943 696 4	+0,079 164 67	+0,057 981 57	
	1	+0,400 555 6	−0,798 492 2	+0,070 145 91	+0,044 068 04	
	2,09	0	0	0	0	0
	0,1	+0,976 185 4	−1,099 256 7	+0,087 582 18	+0,070 753 80	
	0,5	+0,879 568 04	−1,052 822 2	+0,085 177 18	+0,067 590 03	
+2	1	+0,767 943 1	−0,997 002 11	−0,082 170 92	+0,063 482 66	
	5	+0,132 771 4	−0,639 340 75	+0,058 120 09	+0,014 218 97	
	6,29	0	0	0	0	
	0,1	+0,991 686 0	−1,107 148 1	+0,087 983 01	+0,071 777	+0,001 148 613
	0,5	+0,958 814 3	−1,091 402 2	+0,087 181 35	+0,070 092 02	
+1	1	+0,918 580 2	−1,071 958 0	+0,086 179 26	+0,068 912 90	+0,001 005 777
	5	+0,629 078 6	−0,925 934 2	+0,078 162 58		
	10	+0,339 175 5	−0,767 229 3	+0,068 141 74	+0,039 263 34	+0,000 374 002
	18,2	0	0	0	0	0
	0,1	+0,999 998 5	−1,111 110 9	+0,088 183 43	+0,089 364 98	+0,001 468 364
$+\frac{1}{2}$	1	+0,998 851 2	−1,111 089 4	+0,088 183 43	+0,078 481 57	+0,001 175 894
	10	+0,985 119 0	−1,108 940 0	+0,088 183 43	+0,070 641 1	+0,001 044 85
	50	+0,627 976 2	−1,056 832 6	+0,088 183 43	+0,049 581 28	
	82	0	0	0	0	0
	0,1	+1,008 352 7	−1,115 084 7	+0,088 383 85	+0,071 675 33	0
	0,5	+1,042 152 9	−1,131 084 7	+0,089 185 51	+0,072 649 98	
0	1	+1,085 288 8	−1,151 323 1	+0,090 187 60	+0,073 841 02	
	5	+1,467 647 7	−1,322 759 7	+0,048 204 27	+0,082 374 00	
	10	+2,047 729 3	−1,560 880 1	+0,108 225 12	+0,090 962 32	
	0,1	+1,025 186 7	−1,123 065 3	+0,088 784 68	+0,072 165 73	
−1	0,5	+1,129 732 6	−1,171 869 6	−0,092 189 68	+0,075 840 18	
	1	+1,269 259 3	−1,235 097 4	+0,094 195 94	+0,078 375 55	
	5	+2,797 288 4	−1,829 814 4	+0,118 245 96	+0,098 789 19	

Mărginindu-ne la primii doi termeni ai seriei S se obține

$$-y_1 = S_2 = \frac{1 - e_{1,2}}{1 - 2e_{1,2}}. \tag{30}$$

Pentru ameliorarea aproximației putem folosi metoda de iterație la seria finită.

Fie de exemplu $\alpha = 1$ și $z = 1$. Relația (30) ne dă $S_2 = 1{,}073$, iar valorile restului R_1', dat de expresia

$$R_1' = (e_{1,2} + e_{1,3}\, y)\, y^2, \tag{31}$$

şi a diferenţelor δ ale restului de la o încercare la cea următoare sînt trecute în tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

Operaţii de iteraţie

Nr.	$-\nu_1'$	R_1'	δ
1	1,073	0,07753	+0,00453
2	1,0775	0,07817	+0,00067
3	1,078	0,07823	+0,00023
4	1,0785	0,0783	−0,0002

Dacă renunţăm la ameliorarea prin iteraţie observăm că diferenţa rămîne de $(1{,}078 - 1{,}073)\ /1{,}078 \approx 5^0/_{00}$, ceea ce este neglijabilă.

Tabloul nr. 4

Valorile β

α	z / Aproximaţie	0,1	0,5	1	5	10	50
+10	1°	75,768	18,75				
	3°	81,817	49,97				
+5	1°	83,25	56,25	22,5	—	—	—
	3°	92,065	70,456	52,588	—	—	—
+2	1°	87,75	78,75	67,5	—	—	—
	3°	96,123	90,068	82,845	21,078	—	—
+1	1°	89,25	86,25	82,5	52,5	15, —	
	3°	97,08	95,013	92,376	72,34	46,09	
+ ½	1°	90	90	90	90	90	90
	3°	99,793		98,36		96,14	62,691
0	1°	90,7	93,7	97,5	127,5	165	
	3°	97,994	99,969	102, 431	121,896	145,042	
−1	1°	92,25	101,25	112,5	202,5		
	3°	98,935	105,246	112,317	171,694		

Prin urmare ne mărginim la valorile date de relaţia (30), care, înlocuite în (28), ne dau valorile modulului centrifugal β în aproximaţia 3° (tabloul nr. 4).

Pentru determinarea valorilor critice ale supleţei la gravitaţie z, pentru $\beta = 0$, ceea ce corespunde flambajului fără rotaţie, ne folosim de relaţia (30) din [6], care devine

$$z = \left(\frac{c_{1,3}^{2,0}}{\alpha} \right)^3, \tag{32}$$

în care $c_{1,3}^{2,0}$ este coeficientul de flambaj în cazul ambelor legături articulate și fără deplasare laterală [6]*).

În tabloul nr. 5 sînt trecute valorile critice z calculate cu relația (32), în aproximațiile 1°, 3° și 5°.

Tabloul nr. 5

Tabloul valorilor critice z în flambajul fără rotație

Aproximație \ α	+1/2	+1	+2	+5	+10
1°	—	12	4	1,33	0,6316
3°	82	18,2	6,29	2,09	1,105
5°	82,88	18,61	6,54		

Se observă că valorile în aproximația 5° diferă neglijabil față de aproximația 3° și prin urmare nu este necesar de a împinge la o aproximație mai mare de 3°.

În diagrama din figura 1 sînt trasate variațiile modulului centrifugal β în funcție de suplețea la gravitație z pentru diferite valori ale raportului de compresiune α, chiar și pentru valori negative ale acestuia din urmă, ceea ce corespunde barei întinse.

Se observă că diferențele dintre aproximațiile 1° și 3° sînt considerabile pe cînd cele dintre 3° și 5° sînt neglijabile, ceea ce înseamnă că este necesară împingerea aproximației la 3°, iar limitarea la acest grad de aproximație este suficientă.

Cu ajutorul acestei diagrame și al relațiilor (1) . . . (5) se pot determina turațiile critice în funcție de lungimea buclei sau invers, pentru diferite valori ale rigidității la gravitație A și ale raportului de compresie α, ceea ce corespunde la diferite prăjini grele de foraj și în diferite condiții de lucru (apăsarea pe sapă).

Valorile în aproximația 1° sînt trasate întrerupt, cele în aproximația 3° sînt trasate plin, iar în aproximația 5° sînt trasate îngroșat și numai în apropierea de $\beta = 0$.

Examinînd tabloul nr. 4 și diagrama din figura 1, se observă că la valori din ce în ce mai mici pentru z, adică ale lungimii l a buclei (34), și totodată pentru $\frac{h}{l}$ mic, β se apropie de $\pi^4 \approx 97{,}41$. Prin urmare la limită, avînd în vedere relația (5), relația (4) devine

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}, \tag{33}$$

adică tocmai formula cunoscută a turației critice a tijelor de greutate neglijabilă.

*) Tabloul nr. 1.

Într-adevăr, ținînd seama de (2), relația (3) devine

$$z = \frac{L^3 q}{EI} \tag{34}$$

și deci neglijînd greutatea proprie q, $z \to 0$.

Din examinarea diagramelor din figurile 3 și 4, se constată că lungimea buclei l scade cînd turația n crește și prin urmare această condiție apropie fenomenul de acela exprimat prin relația (33).

APLICAȚII LA PRĂJINI GRELE UZUALE ÎN FORAJ SOLICITATE LA FORȚE DE COMPRESIUNE AXIALE

În aplicațiile practice la prăjinile de foraj, este necesar să se cunoască lungimea l a buclei în funcție de turația n și de apăsarea pe sapă qh.

Pentru a pune în evidență turația, împărțim pe β din (4) cu z din (3) și se obține raportul adimensional

$$\frac{\beta}{z} = \frac{\omega^2 l}{g} \approx \left[\frac{n}{30}\right]^2 l,$$

în care l este dat în metri, iar n în ture pe minut.

Folosind această relație, cu valorile din tabloul nr. 4 se obțin valorile β din tabloul nr. 6 și diagramele din figura 2, în funcție de z și $\frac{h}{L}$.

Tabloul nr. 6

Valorile raportului $\frac{\beta}{z}$ în funcție de z și $\frac{h}{L}$

$\frac{h}{L}$	z / Aproximația	0,1	0,5	1	5	10	50
10	1°	758	37,5				
	3°	818	99,9				
5	1°	833	112,5	22,5			
	3°	921	140,9	52,6			
2	1°	878	157,5	67,5			
	3°	961	180,1	82,8	4,22		
1	1°	893	173	81,5	10,5	1,5	
	3°	971	190	92,4	14,5	4,61	
$\frac{1}{2}$	1°	900	180	90	18	9	1,80
	3°	998		98,4		9,61	1,254
0	1°	907	187,4	97,5	24,5	16,5	
	3°	980	199,9	102,4	24,4	14,5	
−1	1°	931	211	121,5	48,5		
	3°	989	210	112,3	34,3		

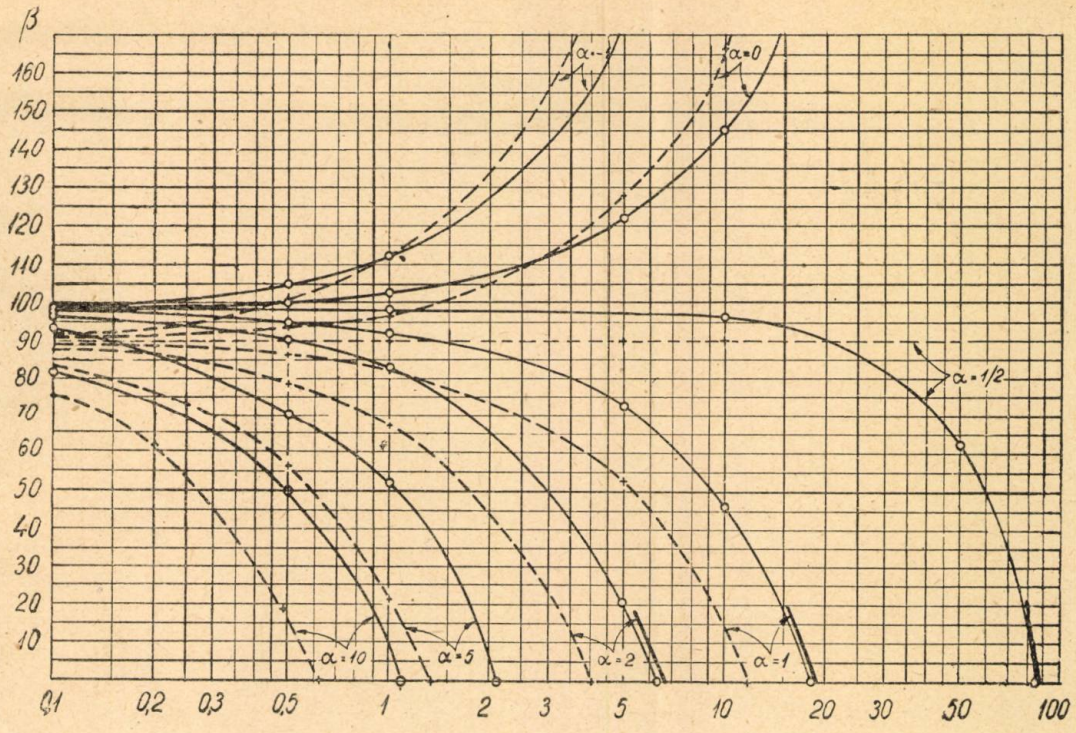

β
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
α=0
α=1/2
α=10
α=5
α=2
α=1
0,1
0,2
0,3
0,5
1
2
3
5
10
20
30
50
100

Fig. 1

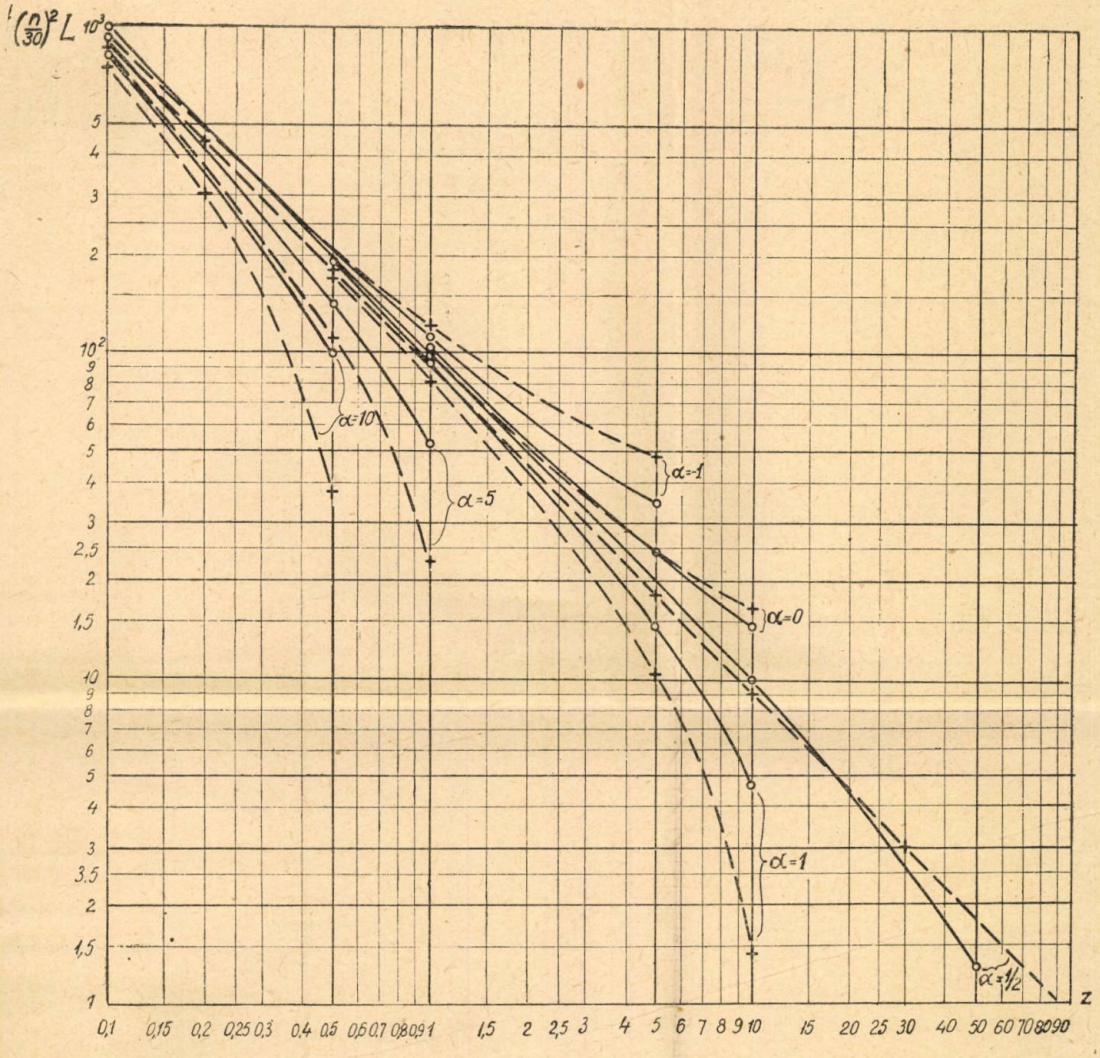

$\frac{1}{(\frac{n}{30})^2 L}$ 10³
5
4
3
2
10²
9
8
7
6
5
4
3
2,5
2
1,5
10
9
8
7
6
5
4
3
3,5
2
1,5
1
α=10
α=5
α=1
α=0
α=1
α=1/2
z
0,1
0,15
0,2
0,25
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,5
2
2,5
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
25
30
40
50
60
70
80
90
100

Fig. 2

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1948

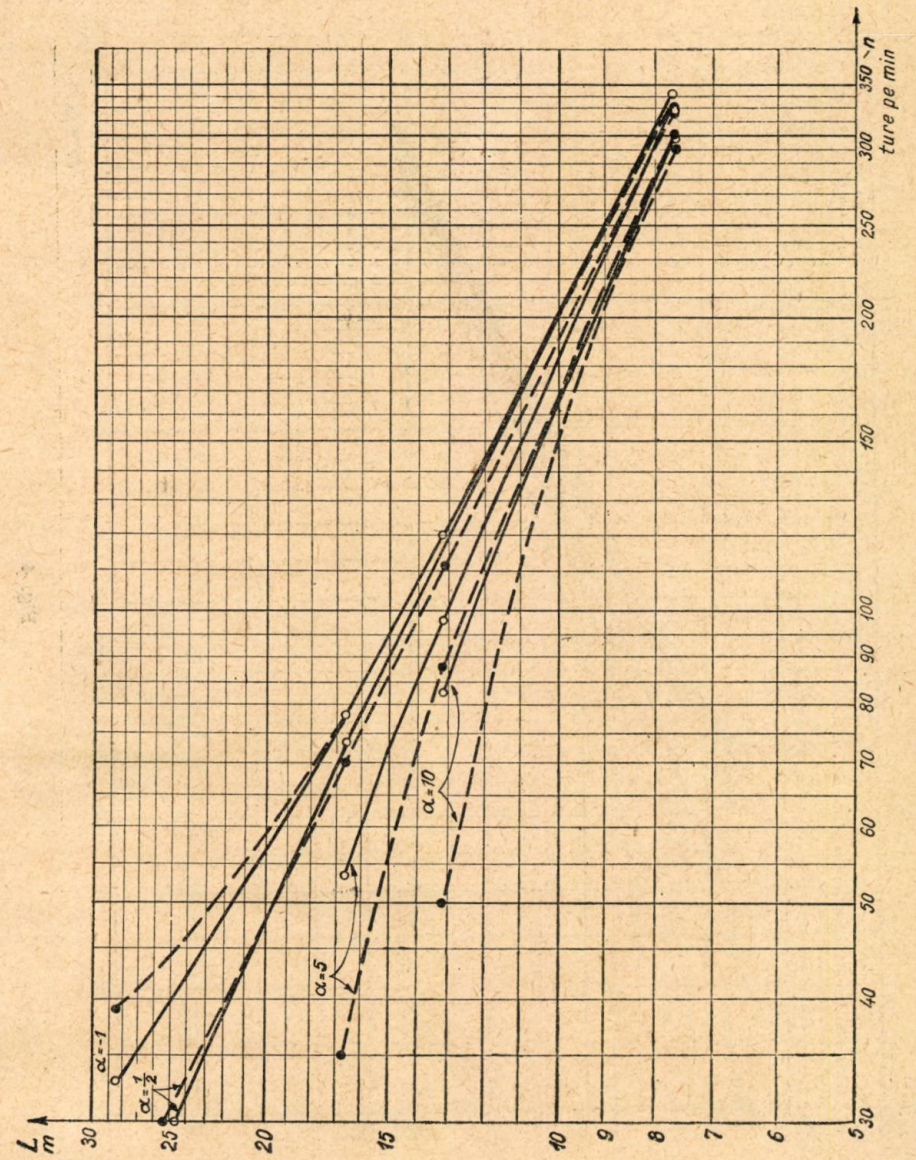

L
m
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
α=-1
α=-½
α=5
α=10
350 ~n
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
40
30
ture pe min

Fig. 3

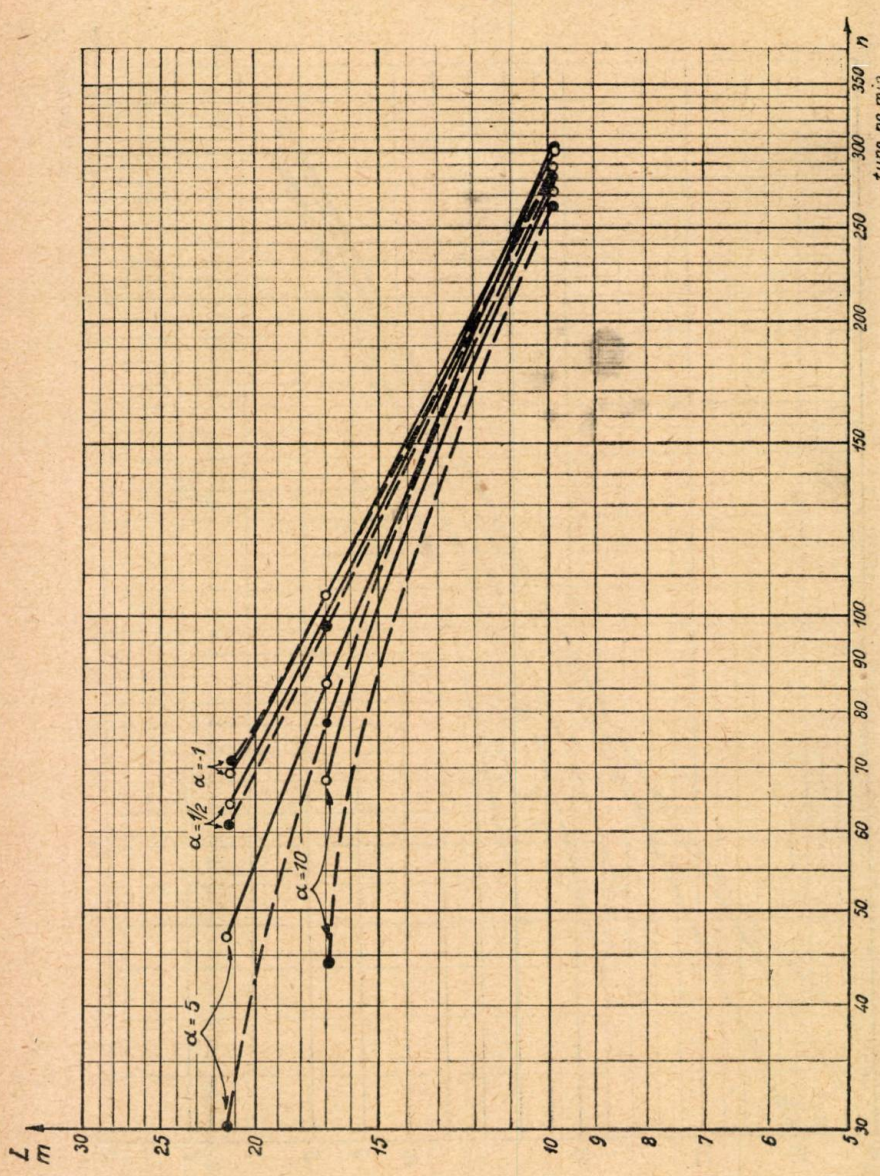

L
m
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
n
ture pa min
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
40
30
α = 5
α = 10
α = 1/2
α = 1

Fig. 1

Caracteristicile prăjinilor grele uzuale de 2″7/8 . . . 8″5/8 sînt date în tabloul nr. 8 din lucrarea citată [6].

Înlocuind în relația (3) valorile A din tabloul menționat, se obțin lungimile l ale buclei pentru diferitele valori ale supleței z la gravitație (tabloul nr. 6). Introducînd în relația (35), valorile l obținute, se obțin turațiile critice pentru diferitele valori ale raportului $\frac{\beta}{z}$. Se obțin astfe turațiile critice pentru prăjinile uzuale, în funcție de l și pentru diferite valori ale raportului $\frac{h}{L}$ (tablourile nr. 7,8,9 și 10).

Tabloul nr. 7

Turațiile critice n pentru prăjini grele de 2″7/8

$\left(\sqrt[3]{A} = 12{,}65 \text{ m}\right)$

α $\left(\frac{h}{L}\right)$	Aproximația \ z / $\frac{L}{m}$	0,1 / 5,87	0,5 / 10,04	1 / 12,65	5 / 21,6	10 / 27,3	50 / 46,6
10	1°	341	57,0				
	3°	354	94,6				
5	1°	357	100,5	40,0			
	3°	376	112,3	61,1			
2	1°	367	118,7	69,3			
	3°	384	126,9	76,8	13,24		
1	1°	370	124,5	76,2	20,9	7,04	
	3°	386	130,4	81,2	24,5	12,33	
$\frac{1}{2}$	1°	371	126,9	80,0	27,4	17,23	
	3°	391		83,7		17,82	4,92
0	1°	373	129,6	83,3	31,9	23,3	
	3°	391	133,9	85,4	31,8	21,9	
1	1°	378	200,0	92,9	44,9		
	3°	389	137,3	89,4	37,8		

În diagramele din figurile 3 și 4, s-au trasat variațiile acestor valori pentru prăjinile grele respective de 4″1/2 și de 6″5/8, cele mai folosite în foraj.

Cu valorile menționate în lucrarea citată [6] s-au calculat apăsările de sapă critice qh în funcție de turație, trecute în tablourile nr. 11 și nr. 12.

În diagramele din figurile 5 și 6 sînt trasate variațiile acestor valori pentru prăjini grele de 4″ 1/2 și de 6″ 5/8. S-au trasat întrerupt curbele de egală lungime a buclei în funcție de parametrii menționați, cu ajutorul diagramelor din figurile 3 și 4.

Tabloul nr. 8

Turațiile critice n pentru prăjini grele de 4″1/2

$\left(\sqrt[3]{A} = 16{,}59 \text{ m}\right)$

α	z / $\frac{L}{m}$ / Aproximația	0,1	0,5	1	5	10	50
$\left(\frac{h}{L}\right)$		7,7	13,17	16,59	28,37	35,72	61,12
10	1°	298	50,6				
	3°	309	82,6				
5	1°	312	87,8	34,9			
	3°	328	98,0	53,4			
2	1°	320	103,9	60,5			
	3°	335	110,9	67,1	11,56		
1	1°	323	109,1	66,3	18,25	6,16	
	3°	337	114,0	70,7	21,42	10,77	
$\frac{1}{2}$	1°	324		69,8	23,90	15,56	
	3°	341	110,9	73,1		13,26	4,29
0	1°	326	119,1	72,8		20,4	
	3°	338	116,9	74,6	27,8	19,1	
−1	1°	330	120,2	78,1	29,2		
	3°	340	120,0	78,0	33,0		

Tabloul nr. 9

Turațiile critice n pentru prăjini grele de 6″5/8

$\left(\sqrt[3]{A} = 21{,}4 \text{ m}\right)$

α	z / $\frac{L}{m}$ / Aproximația	0,1	0,5	1	5	10	50
$\left(\frac{h}{L}\right)$		9,9	16,99	21,4	36,59	46,10	78,84
10	1°	262	44,5				
	3°	272	72,8				
5	1°	275	77,1	30,8			
	3°	288	86,4	47,1			
2	1°	282	91,4	53,3			
	3°	295	97,5	59,2	10,18		
1	1°	284	95,4	58,3	16,06	29,29	
	3°	313	100,5	62,5	18,87	9,49	
$\frac{1}{2}$	1°	285	97,7	60,8	21,0	13,26	
	3°	301		64,4		13,70	3,79
0	1°	287	99,7	64,0	24,5	17,94	
	3°	298	102,9	65,6	24,5	16,82	
−1	1°	290	105,8	71,4	34,54		
	3°	299	105,6	68,7	29,06		

Tabloul nr. 10

Turaţiile critice n pentru prăjini grele de 8″5/8

$\left(\sqrt[3]{A} = 24{,}95 \text{ m}\right)$

α / $\left(\frac{h}{L}\right)$	Aproximaţia: z / $\frac{L}{m}$	0,1 / 11,58	0,5 / 19,80	1 / 24,95	5 / 42,67	10 / 53,75	50 / 91,92
10	1°	243	41,3				
	3°	252	67,4				
5	1°	254	71,4	28,5			
	3°	267	80,0	44,7			
2	1°	261	84,7	49,3			
	3°	273	90,4	54,8	9,54		
1	1°	263	86,4	54,2	14,87	5,01	
	3°	275	92,7	57,4	17,46	8,78	
$\frac{1}{2}$	1°	264		57,1	19,49	12,28	
	3°	280	90,4	59,6		12,69	3,5
0	1°	265	92,3	59,3	23,4	16,64	
	3°	276	95,3	60,8	22,7	15,59	
−1	1°	269	98,0	66,1	32,0		
	3°	277	97,8	63,7	26,9		

Tabloul nr. 11

Turaţiile critice n în funcţie de apăsarea qh (kg) pentru prăjini grele de 4″1/2

$\frac{h}{L}$	L	7,7	13,17	16,59	28,37	35,72	61,12
10	qh	6 584	11 258				
	n	309	83				
5	qh	3 292	5 629	7 092			
	n	328	98	53,4			
2	qh	1 317	2 252	2 837	4 851		
	n	335	111	67,1	11,56		
1	qh	658	1 126	1 418	2 426	3 054	
	n	337	114	70,7	21,4	10,77	
$\frac{1}{2}$	qh	329	563	709	1 213	1 527	2 613
	n	341	111	73,1	23,9	13,26	4,29

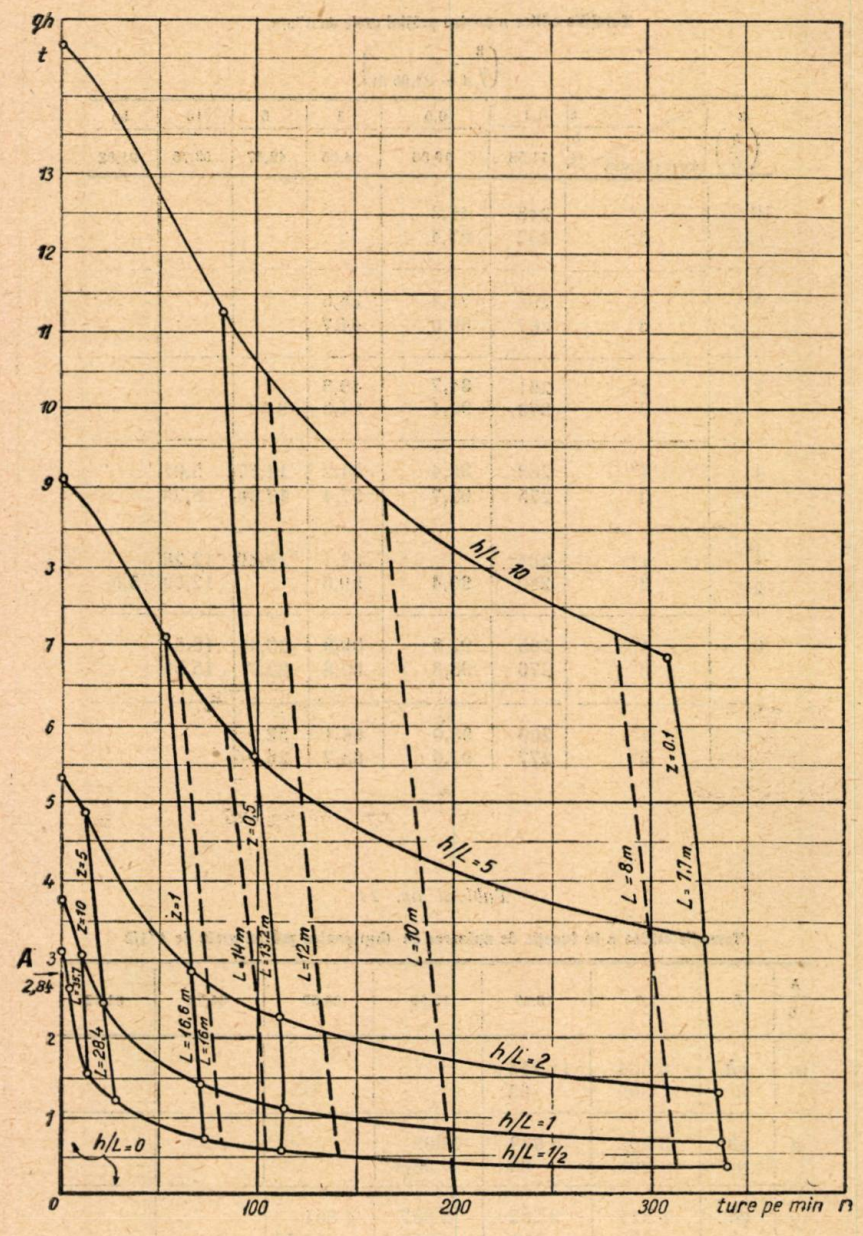

q/h
t
13
12
11
10
9
3
7
6
5
4
A
3
2,84
2
1
0
100
200
300
ture pe min n
h/L 10
h/L=5
h/L=2
h/L=1
h/L=1/2
h/L=0
z=0,1
z=0,5
z=1
z=5
z=10
L=8m
L=7,7m
L=14m
L=13,2m
L=12m
L=10m
L=16,6m
L=16m
L=28,4
L=28,7

Fig. 5

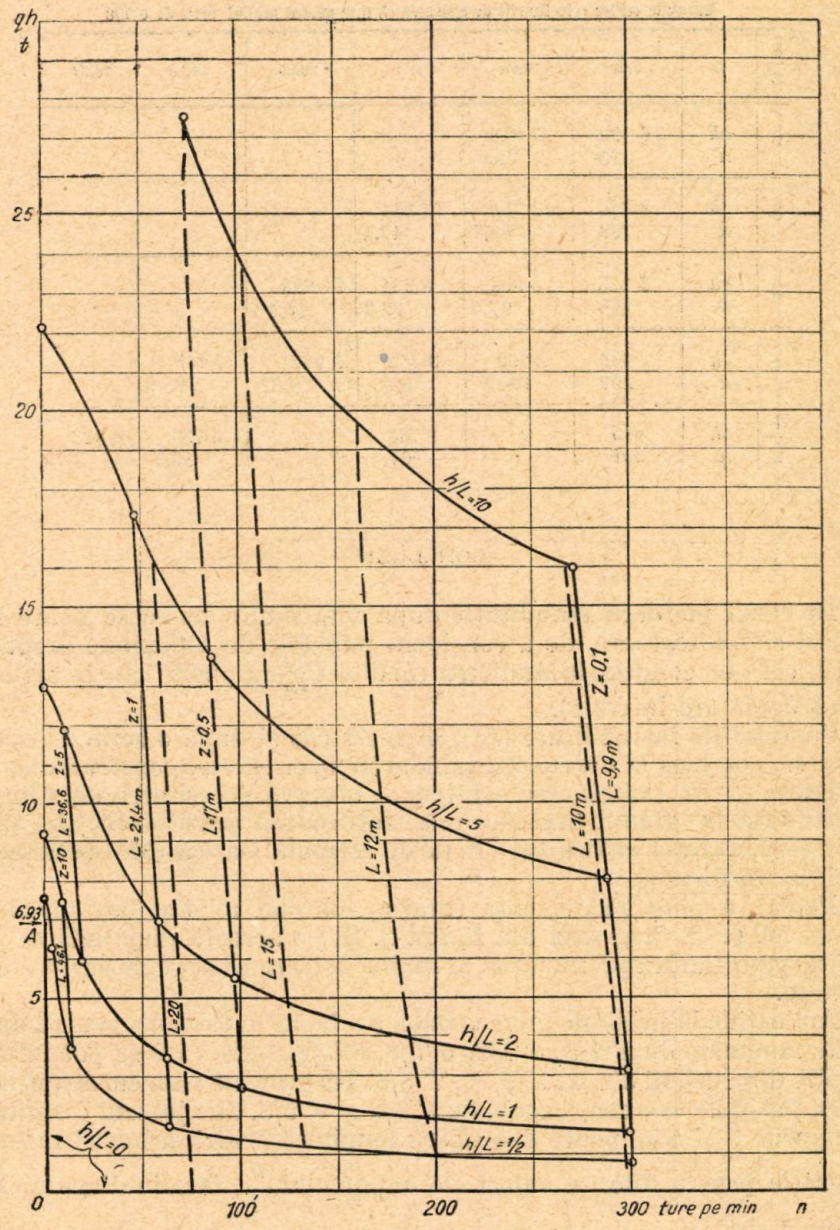

qh
t
25
20
15
10
6,93
A
5
0
100
200
300 ture pe min
n
h/L=10
h/L=5
h/L=2
h/L=1
h/L=½
h/L=0
Z=0,1
L=99m
L=10m
L=12m
L=15
L=20
L=17m
L=21,4m
L=36,6
L=60
Z=1
Z=0,5
Z=5
Z=10

Fig. 6.

Tabloul nr. 12

Turațiile critice n în funcție de apăsarea qh (kg) pentru prăjini grele de 6″5/8

$\frac{h}{L}$	L	9,93	16,99	21,4	36,59	46,10	78,84
10	qh	16 092	27 816				
	n	272	72,8				
5	qh	8 046	13 758	17 334			
	n	288	86,4	47,1			
2	qh	3 218	5 503	6 934	11 858		
	n	295	97,5	59,2	10,18		
1	qh	1 609	2 752	3 462	5 928	7 469	
	n	297	100,5	62,5	18,87	9,49	
$\frac{1}{2}$	qh	805		1 733		3 734	6 383
	n	301		64,4		13,7	3,79

CONCLUZII

În cazul pierderii stabilității după mai multe bucle se poate folosi premisa simplificatoare, de a considera punctele de inflexiune drept articulații, ceea ce conduce la studierea cazului $C_{1,3}^{2,0}$ (ambele capete articulate și fără deplasare laterală).

Condiția de instabilitate (14), în acest caz și după o serie de operații succesive, conduce la datele din tabloul nr. 5, cu care s-a construit diagrama din figura 1. Din examinarea acesteia se observă necesitatea de a împinge aproximația la gradul 3, ceeace este totdeodată și suficient. La limită, cînd $z \to 0$, turația critică este dată de formula clasică (33), ceea ce constituie o verificare.

Pentru a pune în evidență turația, folosind relația (35) s-a obținut tabloul nr. 6. și diagrama din figura 2. Și pe această diagramă se poate urmări importanța aproximației și limita de care se apropie curbele cînd z descrește.

Aplicațiile la prăjinile grele uzuale, s-a făcut în tablouri pentru dimensiunile nominale de 2″7/8, 4″1/2, 6″5/8, 8″5/8, între care se pot interpola celelalte dimensiuni 3″1/2, 5″9/16, 7″5/8. Diagramele s-au construit numai pentru prăjinile cele mai uzuale de 4″1/2 și 6″5/8. Cu ajutorul diagramelor din figurile 3 și 4 se poate determina lungimea critică a buclei în funcție de turație pentru diferite valori ale raportului $\frac{h}{l}$, iar din diagramele din figurile 5 și 6 se poate determina apăsarea pe sapă în funcție de turațiile critice pentru diferite valori ale raportului $\frac{h}{l}$ sau pentru diferite lungimi de buclă.

Diagramele din urmă sînt necesare în special în problema de rezistență a prăjinilor grele. Se observă că forța de apăsare q^h scade cu valorile

$\frac{h}{l}$ după curbele trasate și tind la limită pentru $\frac{h}{L} = 0$ către segmentul OA și dreapta semiinfinită On.

Punctul A reprezintă limita sarcinii critice de flambaj cînd $\frac{h}{L} \to 0$.

Prin considerarea $\frac{h}{L} > 1$ ne-am referit la bucla inferioară în formă de pierdere a stabilității după mai multe bucle.

În acest caz turațiile critice au valori discrete.

Notînd lungimea buclei l_i în care i este ordinul de numerotare al buclei de jos în sus, pentru a o deosebi de lungimea totală a garniturii L, observăm că pentru rezonanță trebuie să avem

$$L = \sum_{i=1}^{m} l_i,$$

în care m este numărul de bucle cînd capătul inferior se află apăsat pe talpă.

S-a propus ca pentru a evita rezonanța să se aleagă pentru turația obligată, valori intermediare ale turațiilor critice. În acest caz ar fi necesar să se studieze ansamblul buclelor pentru diferite lungimi totale, L, ceea ce este posibil cu ajutorul relațiilor date, putîndu-se alcătui diagrame în consecință.

Pentru lungimi apreciabile a garniturii de foraj, turația critică, pentru cele m bucle este prea apropiată de turația critică pentru $m + 1$ bucle, astfel încît să se poată folosi turații obligate intermediare.

Astfel, pentru prăjini de 4″1/2 (fig. 4) la $\frac{h}{l} = 1$ și la o apăsare de 1 tonă, turația critică este de 140 ture pe minut și lungimea buclei de 12 m. Pentru simplificare să neglijăm variația lungimii l_i de-a lungul garniturii de prăjini. Să presupunem că lungimea liberă ar fi de 120 m, ceea ce ar corespunde condiției critice cu 10 bucle. Condiția critică invecinată pentru 11 bucle reclamă o lungime de buclă de $12 \cdot 11/12 = 11$ m. Pentru aceeași apăsare pe sapă, turația critică devine aproximativ 170 ture pe minut. Intervalul de 30 ture pe minut este foarte strîns pentru a asigura o depărtare suficientă de turațiile critice.

În realitate gaura de sondă nu este verticală și nici măcar rectilinie, încît practic nu se poate stabili în timpul forajului lungimea liberă a garniturii de foraj.

Faptul că, în timpul forajului, garnitura de prăjini se lovește de pereții găurii de sondă complică fenomenul și mărește indeterminarea.

Este preferabil să considerăm fenomenul statistic, condițiile critice fiind posibile, și să calculăm efortul unitar ce se naște prin încovoiere, spre a nu depăși valorile admisibile.

Pentru adîncimi mici, însă, intervalul dintre turațiile critice se mărește ca și posibilitatea ca lungimea garniturii să fie liberă (neîngrădită de pereții găurii), încît evitarea turațiilor critice devine posibilă. Este cazul sondelor care pornesc săpatul de la suprafață în masive de sare și cu diametre mari

de sapă. Situaţia se agravează prin dizolvarea sării şi ocnirea găurii de sondă.

Diagramele din figurile 5 şi 6, care reprezintă concluzia studiului de stabilitate aplicat la prăjinile grele cele mai uzuale, constituie datele necesare problemei de rezistenţă a acestor prăjini.

Primită la redacţie la 1 februarie 1956

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЯЖЕЛЫХ БУРИЛЬНЫХ ТРУБ ПРИ ВРАЩЕНИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исходя из диффэренциального уравнения (6) неустойчивости вращения, интеграл которого (7) и (11) рассматривался ранее (3) и задаваясь краевыми условиями, автор получает условие (14) неустойчивости.

В случае потери устойчивости после нескольких витков можно использовать упрощающую предпосылку, считая точки изгиба сочленениями, что приводит к рассмотрению случая: $C_{1,3}^{2,0}$ (оба конца сочленены без бокового смещения).

Условие (14) в этом случае приводит к таблице 5 и диаграмме рис. 1. Для выявления критического числа оборотов составлена таблица 6 и диаграмма рис. 2.

Применения их относятся к обычным бурильным трубам 2″ 7/8—8″ 5/8.

При помощи диаграмм рисунков 3—6 можно определить критическое значение для длины витка или силу нажима на долото в зависимости от числа оборотов для разных значений отношения между сокращенной нажимом длиной бурильной трубы и длиной витка (h, l).

Полученные результаты необходимы в особенности при решении задач сопротивления тяжелых бурильных труб.

В заключение рассматриваются дискретные значения критического числа оборотов для форм потери устойчивости после нескольких витков.

L'INSTABILITÉ DE ROTATION DES TIGES LOURDES

(RÉSUMÉ)

L'intégrale (7)...(11) de l'équation différentielle (6) d'instabilité des tiges en rotation a été étudiée antérieurement [3]. En posant les conditions à la limite, on obtient la condition (14) de l'instabilité.

En cas de perte de stab lité selon plusieurs boucles, on peut utiliser, pour simplifier, la prémisse qui consiste à considérer les points d'inflexion comme des articulations, ce qui conduit à l'étude du cas $C_{1,3}^{2,0}$ (les deux extrémités articulées et à déplacement latéral).

En ce cas, la condition (14) conduit au tableau 5 et au diagramme de la figure 1.

Le tableau 6 et le diagramme de la figure 2 mettent en évidence la vitesse de rotation critique.

On effectue des applications à des tiges usuelles de 2″7/8...8″5/8. A l'aide des diagrammes des figures 3 à 6, on peut déterminer les valeurs critiques pour la longueur de la boucle et pour la force d'appui sur le trépan, en fonction de la vitesse de rotation et pour diverses valeurs de la longueur comprimée de la tige, par rapport à la longueur de la boucle (h/l).

BIBLIOGRAFIE

1 N. Pîrvulescu, *Sur les contributions aux flambages et vibrations rotatives des tiges verticales, lourdes et svelles.* Bull sect, scient. Acad. R.P.R., t. XXX. nr. 9, 1948, p. 527.

2 — *Asupra instabilității tijelor verticale grele, svelte și în rotație. Ecuația diferențială a liniei elastice.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 157.

3 — *Integrarea ecuației liniei elastice în instabilitatea de rotație a tijelor verticale.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, iulie-decembrie 1955, p. 501.

4 — *Despre flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. III, nr. 3—4, iulie—decembrie 1952, p. 205.

5 — *Rezolvarea ecuațiilor algebrice printr-o metodă de recurență și o metodă de iterație.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 1, ianuarie-martie 1956, p. 249 .

6 — *Flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. V, nr. 1—2, ianuarie-iunie 1954, p. 119.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REZIŞTENŢA MATERIALELOR

CALCULUL ELASTIC AL ÎNVELITORILOR SUBŢIRI ÎN FORMĂ DE ELICOID DREPT

DE

V. VISARION

1. Consideraţii geometrice

Vom pleca de la o observaţie făcută în lucrarea [1]. În linii asimptotice, suprafeţele în formă de elicoid drept, se pot reprezenta conform, pe sfera referită la un sistem de linii de curbură izoterme.

După cum se ştie, pe sferă direcţiile principale sînt nedeterminate într-un punct; ne putem alege printre sistemele de linii de curbură ce rezultă, o multiplicitate de sisteme izoterme, pentru care prima formă fundamentală arată astfel

$$ds^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}(dx^2 + dy^2). \tag{a}$$

Lungimile elementelor de arc de-a lungul celor două familii de curbe coordonate sînt deci egale.

În cele ce vor urma, vom face studiul învelitorilor subţiri a căror suprafaţă mediană este un elicoid drept. Vom considera grosimea învelitorii constantă, egală cu $2h$ (măsurată pe normala la suprafaţa mediană).

Elicoidul drept este generat de o dreaptă care avansează rotindu-se în lungul unui ax pe care-l întîlneşte şi pe care este mereu perpendiculară. Atît viteza de rotaţie cît şi cea de înaintare, sînt constante, astfel că la o rotaţie a dreptei cu 2π, ea înaintează cu $2\pi p$, cantitatea denumită pasul elicoidului. Suprafaţa este deci riglată (fig. 1).

În linii asimptotice

$$\bar{x} = r\cos\varphi,\ \bar{y} = r\sin\varphi,\ \bar{z} = p\varphi, \tag{b}$$

φ, r şi $\bar{z}$ fiind un sistem de coordonate cilindrice, avînd ca ax, axul elicoidului, prima formă fundamentală este

$$ds^2 = dr^2 + (p^2 + r^2)\,d\varphi^2. \tag{c}$$

Se observă că liniile asimptotice sînt ortogonale; o familie de curbe asimptotice fiind constituită de familia de rigle, cealaltă de o serie de spirale obținute din (b) pentru r constant.

Curburile rezultă din calcul astfel

$$\frac{1}{Rr} = 0, \quad \frac{1}{R\varphi} = 0, \quad \frac{1}{Rr\varphi} = -\frac{p}{p^2 + r^2}.$$

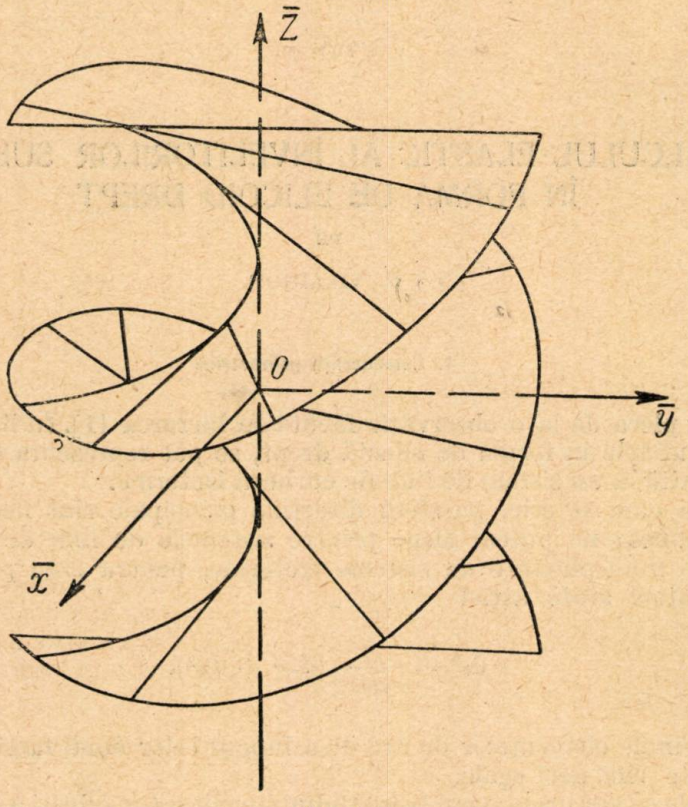


Fig. 1

Făcînd o transformare de coordonate de-a lungul liniilor asimptotice

$$y = \varphi, \qquad x = \operatorname{arg\,sh} \frac{r}{p}, \tag{d}$$

vom deduce

$$ds^2 = p^2 \operatorname{ch}^2 x \,(dx^2 + dy^2), \tag{e}$$

evident proporțională cu expresia lui ds^2 din (a), ceea ce demonstrează observația inițială.

În noile linii izoterme asimptotice, vom avea

$$A = B = p\operatorname{ch} x \quad \text{și} \quad \frac{1}{R_{xy}} = -\frac{1}{p \operatorname{ch}^2 x}.$$

Se observă că A, B, R_{xy}, singurele elemente geometrice ce intervin în sistemul complet de ecuații al învelitorilor subțiri elastice, sînt funcții doar de o variabilă.

2. Sistemul complet de ecuații, deducerea ecuației rezolvante

Pentru calcul vom folosi sistemul general de ecuații de echilibru al învelitorilor subțiri elastice, așa cum este dat în lucrarea [2], în care particularizăm $A = A$, $R_{xy} = -A^2$ (pentru $p = 1$).

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\mathfrak{N}_x) - \frac{\partial}{\partial y}(A\mathfrak{N}_{yx}) - \frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{N}_y - \mathfrak{Q}_y = -A^2X, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\mathfrak{N}_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(A\mathfrak{N}_y) - \frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{N}_{yx} - \mathfrak{Q}_x = -A^2Y, \tag{2}$$

$$-\mathfrak{N}_{yx} + \mathfrak{N}_{xy} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(A\mathfrak{Q}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A\mathfrak{Q}_y)\right] = -A^2Z, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\mathfrak{M}_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(A\mathfrak{M}_y) - \frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{M}_{yx} + A^2\mathfrak{Q}_y = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\mathfrak{M}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(A\mathfrak{M}_{yx}) - \frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{M}_y - A^2\mathfrak{Q}_x = 0, \tag{5}$$

$$\mathfrak{N}_{xy} + \mathfrak{N}_{yx} = 0. \tag{6}$$

Pentru a avea însă un sistem complet de ecuații, îi vom asocia sistemul de ecuații de continuitatea deformației transcris în eforturi cu ajutorul legii lui Hooke. El a fost dedus de A. L. Goldenweizer și este dat în lucrarea [2]; particularizat pentru elicoid drept în coordonate asimptotice izoterme, se scrie astfel

$$\frac{1}{A}\frac{\partial(\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y)}{\partial y} - (1+\mu)\mathfrak{Q}_x + \frac{h^2}{3}\frac{1}{A^2}\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial(\mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y)}{\partial y} + (1+\mu)Y\right\} = 0,$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial(\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y)}{\partial y} - (1+\mu)\mathfrak{Q}_y + \frac{h^2}{3}\frac{1}{A^2}\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial(\mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y)}{\partial x} + (1+\mu)X\right\} = 0, \tag{7}$$

$$\mathfrak{M}_{xy} - \mathfrak{M}_{yx} - \frac{h^2}{3}\left\{\Delta(\mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y) + (1+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x}(AX) + \frac{\partial}{\partial y}(AY)\right]\right\} = 0.$$

De asemenea, vom mai utiliza și ecuația suplimentară sub forma

$$\mathfrak{M}_{xy} + \mathfrak{M}_{yx} = 0. \tag{8}$$

Vom nota

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y.$$

Se observă că exceptînd un factor constant cele două cantităţi se transformă una în alta prin analogia statico-geometrică a lui Goldenweizer. Acest fapt ne sugerează alegerea unei necunoscute noi, efortul complex

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{N} + i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3}{h^2}}\,\mathfrak{M},$$

care este un invariant al analogiei statico-geometrice (mai puţin un coeficient constant).

Primele două ecuaţii de continuitate a deformaţiei, dau cu precizia proprie teoriei matematice a elasticităţii învelitorilor subţiri pentru cazul omogen*).

$$\text{I} \qquad \mathfrak{Q}_x = \frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \frac{h^2}{3}\frac{1}{A^2}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}\right]\frac{1}{A}, \qquad \mathfrak{Q}_y = \frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{h^2}{3}\frac{1}{A^2}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}\right]\frac{1}{A},$$

iar cea de-a treia

$$\text{II} \qquad \mathfrak{M}_{xy} = \frac{h^2}{6}\frac{1}{1+\mu}\Delta\mathfrak{N}.$$

Ecuaţia a treia de echilibru ne permite să scriem

$$\text{III} \qquad \mathfrak{N}_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\mu}\left[\Delta\mathfrak{M} + \frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{A^2}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{A^2}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}\right)\right].$$

Primele două ecuaţii de echilibru dau pe $\mathfrak{N}_x$ şi $\mathfrak{N}_y$ astfel

$$\text{IV} \qquad \mathfrak{N}_x = \frac{1}{A^2}\int_0^x\left\{A\frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{N} + \frac{1}{1+\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}A^2\Delta\mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}\right]\right\}dx,$$

$$\mathfrak{N}_y = \frac{1}{A^2}\int_0^y\left\{\frac{1}{1+\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}A^2\Delta\mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right]\right\}dy.$$

Însă aceste eforturi astfel deduse, trebuie să satisfacă la $\mathfrak{N}_x + \mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}$. Înlocuind pe $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, amplificînd cu A^2 şi derivînd o dată în raport cu x şi apoi cu y, deducem o primă ecuaţie în $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{N}$

$$\frac{\partial}{\partial y}A\frac{\partial A\mathfrak{N}}{\partial x} - \frac{1}{1+\mu}\left[\frac{1}{2}\Delta A^2\Delta\mathfrak{M} + \Delta\mathfrak{M}\right] = 0. \qquad (9)$$

*) $X = Y = Z = 0$.

Analog primele două ecuații de momente, dau pe $\mathfrak{M}_x$ și $\mathfrak{M}_y$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{A^2}\int_0^x \left\{ A\frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{M} + \frac{1}{1+\mu}\left[\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}A^2\Delta\mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}\right)\right]\right\} dx.$$

V

$$\mathfrak{M}_y = \frac{1}{A^2}\int_x^y \left\{ \frac{1}{1+\mu}\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}A^2\Delta\mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}\right)\right\} dy.$$

Ele trebuie să satisfacă relația

$$\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}.$$

În același mod se deduce o altă ecuație în $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$

$$\frac{\partial}{\partial y}A\frac{\partial A\mathfrak{M}}{\partial x} + \frac{h^2}{3(1-\mu)}\left[\frac{1}{2}\Delta A^2\Delta\mathfrak{M} + \Delta\mathfrak{N}\right] = 0. \tag{10}$$

Evident, cele două ecuații (9) și (10) se obțin una din alta prin aplicarea analogiei statico-geometrice. Acest fapt face ca, amplificînd cea de a doua ecuație cu $i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3}{h^2}}$ adunînd-o la prima și folosind efortul complex $\mathfrak{E}$, să le reunim într-o singură ecuație cu coeficienți complecși

$$\frac{\partial}{\partial y}A\frac{\partial A\mathfrak{E}}{\partial x} - i\sqrt{\frac{h^2}{3(1-\mu^2)}}\left[\frac{1}{2}\Delta A^2\Delta\mathfrak{E} + \Delta\mathfrak{E}\right] = 0. \tag{11}$$

Este de remarcat faptul că această ecuație este un invariant absolut al analogiei statico-geometrice.

Acest fapt este explicabil, deoarece utilizînd simetria specială indicată de analogia statico-geometrică trebuie să ajungem la o ecuație de ordinul patru, invariată de analogie, și nu de ordinul opt cum am fi obținut utilizînd alte necunoscute.

3. Construirea soluției

Vom cerceta în primul rînd cazul unei soluții independente de y

$$\mathfrak{E} = \varphi(x) + i\,\psi(x).$$

Această soluție poate servi pentru deducerea eforturilor în cazul unei încărcări și condiții marginale, funcții numai de x — este cazul învelitorilor decupate din elicoid cu doi cilindri al căror ax este însuși axul elicoidului și infinite în sensul acestui ax. Ea mai poate servi pentru deducerea unei soluții particulare a problemei neomogene în cazul unei solicitări funcțiune doar de x. Acesta este cazul presiunii normale, uniforme greutății proprii, zăpezii ș.a.m.d. Acest caz a mai fost tratat pe o altă cale în lucrarea [1].

Introdusă în ecuația (11) ea generează o ecuație diferențială ordinară

$$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{ch}^2 x\,\frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{E} + \frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{E} = 0.$$

În cazul general, utilizăm soluții de forma

$$\mathcal{E} = \sum_1^\infty{}_n \; C_n^{\pm} \; e^{\pm i\lambda_n \nu} \; f_n^{\pm}(x)$$

în care $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$. În planul x, y, domeniul ocupat de învelitoare va apare întotdeauna dreptunghiular fiind cuprins între două drepte $x = \text{const.}$ (treptele de capăt) și două $y = \text{const.}$ (cele două vanguri). Acest fapt permite separarea variabilelor nu numai în ecuație diferențială, ci chiar în exprimarea condițiilor de margine. Pentru $x = \text{const.}$ după cum se observă, rezultă serii Fourier; vom lua deci pentru l lungimea laturii dreptunghiului considerat anterior, dată de relația

$$l = y_b - y_a = \varphi_b - \varphi_a .$$

Rezultă șirul de ecuații diferențiale ordinare

$$f_n^{IV} + 4 \operatorname{th} x \, f_n^{III} + 2(2 - \lambda n^2) f_n^{II} - 2\lambda n (2\lambda n \operatorname{th} x \pm k) f_n^{I} +$$

$$+ 2\lambda n \left[\pm k \operatorname{th} x + \lambda n \left(\frac{1}{2} \lambda n^2 - 2 \right) \right] f_n = 0,$$

$$n = 1,2, \ldots,$$

unde

$$k = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2}} .$$

Întrucît pentru $x > 1{,}8$, este satisfăcută inegalitatea

$$0{,}945 < \operatorname{th} x \leqslant 1,$$

vom putea lua pentru învelitorile situate în acest domeniu,

$$\operatorname{th} x = 1.$$

Va rezulta ecuația

$$f_n^{IV} + 4 f_n^{III} + 2 (2 - \lambda n^2) f_n^{II} - 2 \lambda n (2\lambda n \pm k) f_n^{I} +$$

$$+ 2 \lambda n \left[\pm k + \frac{2}{\lambda n} \left(\frac{1}{2} \lambda n^2 - 2 \right) \right] f_n = 0,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Pentru primele valori ale lui n, vom putea neglija λn în raport cu k, utilizînd ecuația

$$f_n^{IV} + 4 f_n^{III} + 2 (2 - \lambda n^2) f_n^{II} \pm 2 k \lambda n (f_n^{I} - f_n) = 0, \qquad (12)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

S-a redus problema deci la o ecuație diferențială ordinară cu coeficienți constanți. I se asociază ecuația caracteristică

$$r^4 + 4r^3 + 2(2 - \lambda n^2) r^2 \mp 2k\lambda n (r - 1) = 0 \qquad (13)$$

$$n = 1, 2, 3 \cdots$$

Pentru celelalte învelitori studiate, singura problemă este aceea a aflării unui sistem de soluții fundamentale, pentru ecuația cu coeficienți variabili. Această problemă poate fi atacată însă pe o mulțime de căi. Pentru exemplificare ne vom limita la cazul anterior, cînd putem lua

$$\text{th } x = 1, \qquad \text{ch } x = \text{sh} x.$$

Drept soluții putem lua

$$\mathfrak{N} = \sum_0^\infty {}_n C_u^{\pm} \cos \lambda n \, y \, f_n^{\pm}(x),$$

$$\mathfrak{M} = \mp \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\mu^2)}} \sum_0^\infty {}_n C_n^{\pm} \sin \lambda n \, y \, f_n^{\pm}(x),$$

în care $f_n^{\pm}(x)$ este una din soluțiile fundamentale ale ecuației (12), iar $C_n^{\pm}$ o constantă arbitrară corespunzătoare acestei soluții.

Analog luînd în loc de $e^{\pm i \lambda n y}$, $e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2} - \lambda n y\right)}$ obținem o altă serie de soluții

$$\mathfrak{N} = \sum_0^\infty {}_n C_n^{\pm} \sin \lambda n \, y \, f_n^{\pm}(x),$$

$$\mathfrak{M} = \pm \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\mu^2)}} \sum_0^\infty {}_n C_n \cos \lambda n \, y \, f_n^{\pm}(x).$$

Se observă că soluțiile depind de 8 constante arbitrare, suficiente punerii condițiilor de contur.

4. Observații, aplicații

a. *Amortizarea soluțiilor*

Pentru a putea observa cum variază soluțiile, vom calcula rădăcinile ecuației caracteristice, pentru primele patru aproximații succesive, într-un caz concret, cînd grosimea este de 6 cm, $p = 1$m, iar $l = 10$ m.

Rezultatele sînt date în tabloul ce urmează :

n	$\pm 2k/n$	$r_{1,2}$		$r_{3,4}$	
0	0	0	0	−2	−2
1	−18	−3,28 ± i 2,85		1,28 ± i 0,50	
	+18	0,87	−5,00	0,06 ± i 2,93	
2	−36	−3,71 ± i 3,60		2,22	1,20
	+36	0,92	−5,82	0,45 ± i 3,69	
3	−72	−4,00 ± i 4,12		2,90	1,10
	+72	0,93	−6,40	0,74 ± i 4,18	

Se observă că părțile reale cresc în valoare absolută, pe măsură ce n crește ; acest fapt ne indică amortizarea din ce în ce mai rapidă a soluțiilor pentru aproximații superioare. Cu alte cuvinte, influența conturului asupra învelitorii scade la aproximațiile de ordin superior, deci ne putem limita doar la cîteva aproximații succesive ale condiției de margine. Exponențialele cu putere negativă le folosim pentru latura cea mai apropiată de axul elicoidului pe cele cu putere pozitivă pentru cea mai depărtată, astfel ca ele să se micșoreze prin amortizare înspre latura opusă.

Felul cum se amortizează soluțiile corespunzătoare rădăcinilor

$$-3{,}28 \pm 2{,}85\, i\,; \quad 1{,}28 \pm 0{,}50\, i$$

din prima aproximație și cele corespunzătoare rădăcinilor

$$-4{,}00 \pm 4{,}12\, i\,; \quad 2{,}90$$

din cea de-a treia aproximație, apare în figura 2.

Se observă că efectul conturului mai depărtat este mult mai puternic, influențînd aproape toată învelitoarea.

Această analiză ne arată că în general, în cazul elicoidului efectele de contur se propagă în toată învelitoarea. Cu alte cuvinte, nu putem folosi teoria de membrană, deoarece neglijînd două condiții de contur, producem o denaturare a stării de eforturi în toată suprafața și nu numai în vecinătatea conturului.

Pentru a accentua această caracteristică a învelitorilor elicoidale vom trata un caz extrem.

b. *Încărcare uniform distribuită pe normală, p*

Pentru acest caz, ecuația devine

$$\frac{\partial}{\partial y} A \frac{\partial A \mathfrak{F}}{\partial x} - i \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\mu^2)}} \left[\frac{1}{2} \Delta A^2 \Delta \mathfrak{F} + \Delta \mathfrak{F} \right] = \frac{p}{2} \Delta A^4. \tag{14}$$

Vom arăta în primul rînd, că soluția particulară dată de teoria de membrană, nu reprezintă o aproximație.

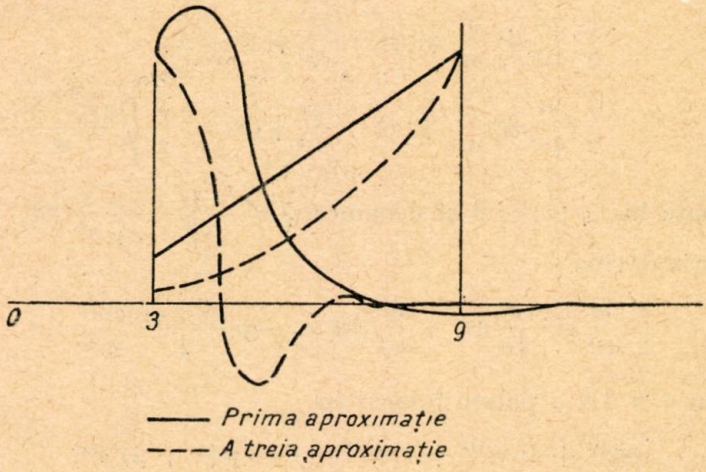


Fig. 2

Din ecuațiile de membrană, se deduc eforturile

$$\mathfrak{N}_x = \frac{p}{6} e^{2x}{}_y, \qquad \mathfrak{N}_y = \frac{p}{2} e^{2x} y, \; \mathfrak{N}_{xy} = -\frac{1}{8} p e^{2x},$$

de unde

$$\mathfrak{F} = \frac{2}{3} p e^{2x} y = \Phi(x) y,$$

unde am notat cu $\Phi(x)$ *pe* $\frac{2}{3} p e^{2x}$.

Introdusă în ecuația (14), rezultă

$$A \frac{\partial}{\partial x} (A \Phi(x)) - i \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\mu^2)}} \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} A^2 \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) \right] y = \frac{p}{2} \frac{d^2}{dx^2} A^4.$$

Luînd $h^2 = 0$ cazul membranei ideale — soluția de membrană o verifică; se remarcă însă că pentru h^2 oricît de mic, soluția este necorespunzătoare, deoarece un termen conține pe y, iar ceilalți doi nu. Trebuie observat că trecerea la limită schimbă cu totul caracterul problemei, care devine independentă de y.

Soluția corectă nu se poate deci deduce decît din teoria cu momente.

O soluție particulară o obținem luînd pentru $\mathfrak{S}$ expresia considerată în cazul unei soluții independente de y.

$$\mathfrak{S} = \varphi(x) + i\,\psi(x),$$

de unde sistemul

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}A^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + \frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}A^2\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2}}\frac{d^2A^4}{dx^2}.$$

Se poate lua $\varphi(x) = 0$ și deoarece $\psi = -\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3}{h^2}}\,\mathfrak{M}$, cea de a doua ecuație devine

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}A^2\frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{M} + \frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{M} = -p\frac{(1+\mu)}{2}\frac{d^2A^4}{dx^2}.$$

Pentru $x > 1{,}8$ o putem înlocui cu

$$\mathfrak{M}^{IV} + 4\,\mathfrak{M}^{III} + 4\,\mathfrak{M}^{II} = -4\,p(1+\mu)\,e^{2x}.$$

Ea admite soluția particulară

$$\mathfrak{M} = -p\frac{(1+\mu)}{16}e^{2x}.$$

În rest vom lua

$$\mathfrak{N}_x = \overline{\mathfrak{N}}_x, \quad \mathfrak{N}_y = \overline{\mathfrak{N}}_y + \frac{p}{2}e^{2x}y, \quad \mathfrak{M}_x = \overline{\mathfrak{M}}_x,$$

$$\mathfrak{M}_y = \overline{\mathfrak{M}}_y, \quad \mathfrak{N}_{xy} = \overline{\mathfrak{N}}_{xy} - \frac{1}{8}pe^{2x}, \quad \mathfrak{M}_{xy} = \overline{\mathfrak{M}}_{xy},$$

unde eforturile barate se exprimă în funcțiune de $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$ prin formulele I, II, III, IV, V ale cazului omogen.

Astfel pentru $\overline{\mathfrak{N}}_x$ din formula (IV)

$$\overline{\mathfrak{N}}_x = \frac{1}{A^2}\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}[\text{funcție de } x]\,dx = 0$$

și deci

$$\mathfrak{N}_x = \overline{\mathfrak{N}}_x = 0.$$

Analog rezultă eforturile $\mathfrak{N}_y$ și $\mathfrak{N}_{xy}$ nule. În rest

$$\mathfrak{M}_x = -\frac{p}{64}(1+\mu)\,e^{2x},\quad \mathfrak{M}_y = -3p\,\frac{1+\mu}{64}\,e^{2x},$$

$$\mathfrak{Q}_x = -\frac{p}{4}e^{x},\quad \mathfrak{Q}_y = 0,\quad \mathfrak{M}_{xy} = 0.$$

Pentru condițiile de contur, vom presupune că învelitoarea este un elicoid delimitat interior de un cilindru de rază $\rho > \text{sh } 1{,}8$ sau ceea ce este același lucru, situat în interiorul aceluiași cilindru.

Pe marginea $x = a$ astfel creată, vom considera învelitoarea liberă.

Soluția omogenă care va completa eforturile pe contur este dată de

$$\mathfrak{N} = 0,$$

$$\mathfrak{M}^{IV} + 4\,\mathfrak{M}^{III} + 4\,\mathfrak{M}^{II} = 0,$$

de unde

$$= (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 x)\,e^{-2x} + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 x.$$

Conform teoriei generale, vom pune condiții de contur eforturilor $\mathfrak{N}_a$, $\mathfrak{Q}_x$, și $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{N}_{xy}$.

Se deduc valorile

$$\mathfrak{Q}_x = \frac{p}{4}\,e^{2a-x},$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{64}\,e^{2a}(l+\mu)\,[1-4(x-a)],$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{p}{64}\,e^{2a}(1+\mu)\,[5-12(a-x)],$$

care adunate soluției particulare, dau starea de solicitare

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{64}\,(1+\mu)\,[e^{2a} - e^{2x} - 4(x-a)\,e^{2a}],$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{p}{64}\,(1+\mu)\,[5e^{2a} - 3e^{2x} + 12(x-a)\,e^{2a}],$$

$$\mathfrak{Q}_x = \frac{p}{4}\,e^{-x}\,[e^{2a} - e^{2x}],$$

celelalte eforturi fiind nule, ceea ce probează direct nevalabilitatea teoriei de membrană în cazul considerat.

Trebuie remarcat faptul că studiul unei învelitori cu $p \neq 1$ se poate reduce la cazul $p = 1$, luînd ca unitate de măsură pentru lungimi, mărimea p.

Primită la redacție la 24 ianuarie 1956.

РАСЧЕТ УПРУГОСТИ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ ПРЯМОГО ГЕЛИКОИДА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор сводит задачу исследования системы уравнений с частными производными и с переменными коэффициентами, применяемыми для геликоидальных покрытий, к исследованию одного лишь уравнения с частными производными четвертой степени и затем уравнения с простыми производными.

Автор последовательно применяет для этого статико-геометрическую аналогию Гольденвейзера, пользуясь указанной в ней специальной симметрией.

Для большой категории покрытий указывается, что уравнение с простыми производными может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами. Исследуя решения, автор делает ряд замечаний о том, как изменяются усилия и, в частности, относительно применимости теории мембраны в качестве приближения при расчете этих покрытий.

CALCUL ÉLASTIQUE DES COUVERTURES MINCES EN FORME D'HÉLICOÏDE DROIT

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur réduit l'étude du système d'équations aux dérivées partielles et aux coefficients variables, qui apparaît dans le calcul des couvertures hélicoïdales, à l'étude d'une seule équation aux dérivées partielles d'ordre quatre et, plus loin, à celle d'une équation aux dérivées ordinaires.

A ces fins, l'auteur utilise conséquemment l'analogie statico-géométrique de Goldenweiser, en faisant usage de la symétrie spéciale qu'elle indique.

Pour une grande catégorie de couvertures, on montre que l'équation aux dérivées ordinaires peut être réduite à une équation aux coefficients constants. En étudiant les solutions, l'auteur fait une série de remarques sur la façon dont varient les efforts et, en particulier, sur la validité de la théorie de membrane comme approximation pour ces couvertures.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Solomon, *Odnomernaia zadacia dlia ghelikoidalnoi obolociki*, P.M.M. 1954 t. XVIII, nr. 1.
2. A. L. Goldenweizer, *Teoria uprughih tonkih obolocek*. Gostehizdat, Moscova, 1953.
3. E. Reissner, *On Finite Twisting and Bending of Circular Ring Sector Plates and Shallow Helicoidal Shells*. Quarterly of Applied Mathematics, 1954, vol. XI, nr. 4.
4. E. Reissner, *Small Rotationally Simetric Deformations of Shallow Helicoidal Shells*. Journal of Applied Mechanics, 1955, vol. 22, nr. 1.
5. V. Visarion, *O metodă generală de rezolvare a învelitorilor elastice subțiri*. Comunicările Acad. R.P.R., t. nr. 5, mai 1956, p. 635.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR

STABILIREA STĂRII DE EFORT ÎN GRINZI PEREŢI, PRIN METODA ANALOGIEI CU O REŢEA

DE

D. MORARU

1. Generalităţi

Metoda determinării stărilor de efort în grinzi pereţi, plăci şi suprafeţe subţiri cu ajutorul ecuaţiilor cu diferenţe finite este larg răspîndită în practică. Marele dezavantaj al metodei este greutatea rezolvării unui sistem de multe ecuaţii cu multe necunoscute, mai ales atunci cînd cerîndu-se o exactitate mai mare a calculelor, este necesară adaptarea unei reţele mai dese.

Se poate afirma că scrierea sistemului însuşi este incomodă atunci cînd proiectantul urmăreşte să obţină în timp scurt, rezultatele pe baza cărora să dimensioneze construcţia.

Se ştie că rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare, prin iteraţie pe o schemă sau într-un tablou, este mult mai comodă decît rezolvarea directă (dacă se asigură convergenţa iteraţiei) sau chiar cu metode de aproximaţii succesive, cum ar fi de exemplu metoda Gauss, care cere totuşi scrierea ecuaţiilor.

2. Determinarea stărilor de efort în grinzi pereţi prin rezolvarea ecuaţiilor cu diferenţe finite prin iteraţie

Se ştie din teoria elasticităţii că ecuaţia de condiţie a grinzilor pereţi este

$$\Delta \Delta F = 0, \tag{1}$$

în care F este funcţia de eforturi a lui Airy.

Valorile eforturilor se deduc cu uşurinţă, atunci cînd se cunoaşte expresia sau valoarea funcţiei lui Airy într-un domeniu mărginit (domeniul corpului pe care-l studiem).

Valorile eforturilor unitare sînt date de următoarele expresii, care se pot transcrie în diferențe finite astfel :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx \frac{F_l - 2F_k - F_i}{\Delta y^2},$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F_{k+1} - 2F_k - F_{k-1}}{\Delta x^2},$$

$$\tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \approx -\frac{(F_{l+1} - F_{l-1}) - (F_{i+1} - F_{i-1})}{4\Delta x \Delta y}.$$

Funcțiile F_i, F_k, F_l etc. se referă la nodurile unei rețele care acoperă cîmpul grinzii perete studiate (fig. 1).

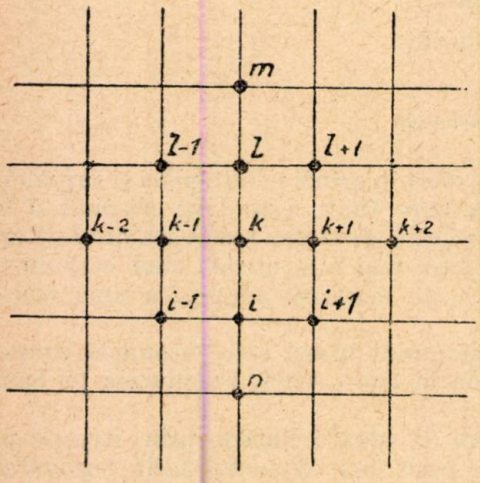


Fig. 1

În cazul unei rețele ortogonale cu $\Delta x = \Delta y = \Delta l$ valorile eforturilor se modifică în consecință.

Condiția (1) se exprimă prin următoarea ecuație cu diferențe finite :

$$20 F_k - 8 (F_{k+1} + F_{k-1} + F_l + F_i) + 2 (F_{l+1} + F_{l-1} + F_{i+1} + F_{i-1}) + F_{k+2} + F_{k-2} + F_m + F_n = 0. \quad (2)$$

Ecuația (2) este o ecuație omogenă în F. Ecuația (2) nu poate fi rezolvată prin iterație deoarece criteriul lui Wittmeyer nu este îndeplinit (coeficientul necunoscutei principale, este mai mic decît suma valorilor absolute a coeficienților celorlalte necunoscute). Aceasta se întîmplă atît în interiorul rețelei, cît și pentru ecuațiile de pe contur, precum și primele două linii vecine conturului. Cu toate că acest criteriu este suficient dar nu necesar, diferența mare $20 < 44$, dovedește că oricît de mici ar fi coeficienții de transmitere ($t_k^{k+1} = 0{,}4$; t_k^{l+1} ; $f_k^{k+2} = 0{,}05$), convergența nu poate fi asigurată.

Alt criteriu de convergență, pe care este necesar să-l examinăm, este criteriul lui von Mises.

Acesta precizează că atunci cînd sistemul este convergent, forma patratică a matricei coeficienților trebuie să fie definită pozitiv. Aplicînd criteriul lui von Mises la sistemul de ecuații cu diferențe finite, rezultă că matricea este *definită negativ*.

În consecință, rezolvarea prin iterație a ecuațiilor cu diferențe finite în cazul grinzilor pereți este practic îngreunată din cauza nerespectării condițiilor de mai sus.

3. Determinarea stărilor de efort în grinzi pereți cu ajutorul analogiei cu o rețea

În lucrarea [1], L. E. Grinter arată posibilitatea de a se face o analogie între stările de efort și deformație a unei grinzi perete încărcate și rezemate oricum și eforturile și deformările unei rețele de bare, încărcate și rezemate asemănător, corespondența constînd în alegerea unor anumite dimensiuni pentru barele rețelei.

În lucrarea citată nu se dă o justificare fizică completă a acestei analogii, ceea ce vom încerca să dăm mai jos; de asemenea, procedeul de operare este greoi, fiind susceptibil a fi înlocuit printr-altul mai simplu.

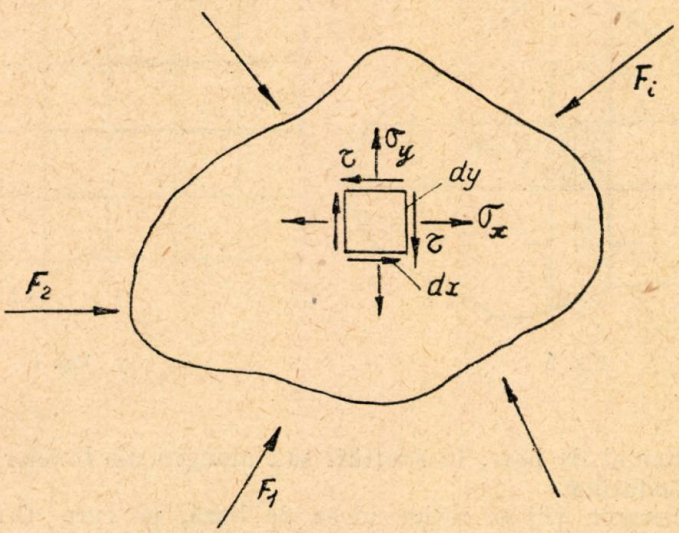


Fig. 2

În esență, ideea determinării stărilor de efort în grinzi pereți după L. E. Grinter sau A. Hrennikoff, nu diferă de ideea de bază a metodei diferențelor finite;

1) Se consideră corpul A, în condițiile teoriei elasticității, solicitat de o serie de forțe exterioare F_i (fig. 2).

Considerînd elementul infinitezimal $dx \times dy$ și eforturile unitare care iau naștere (normal și tangențial) putem imagina suprafața corpului acoperită cu o rețea a căror ochiuri să aibă dimensiunile acestui element (fig. 3).

Se consideră un șir de fișii, de lățime infinitezimală dl, astfel încît luate împreună să rezulte o fișie de lățime finită L; suprafața corpului se acoperă cu o rețea de ochiuri patratice a căror laturi sînt L.

2) Aproximația pe care o introduce sistemul de rezolvare a lui Grinter, constă în faptul că variația eforturilor unitare de la un element infinitezimal la altul (în cadrul aceluiași element finit) se consideră mică.

Pînă la acest punct, nu există nici o diferență față de metoda diferențelor finite.

Eforturile care acționează elementul finit $L \times L$ vor fi eforturi normale sau tangențiale $N_k = \int_0^L \sigma_k \cdot dl$.

3) Dacă fiecăreia din aceste fîșii i se asociază o bară, se obține un sistem static nedeterminat, cu atîtea grade de libertate cîte etaje are schema în rețea.

4) Deformările elementului infinitezimal dl (deplasări și deformații unghiulare) se transformă

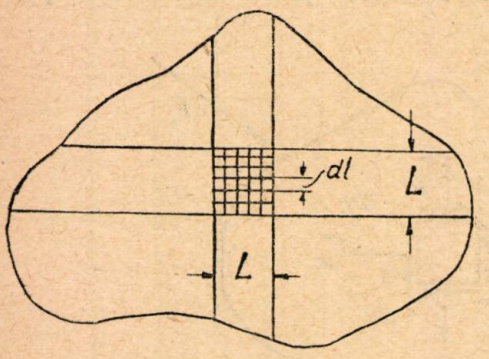


Fig. 3

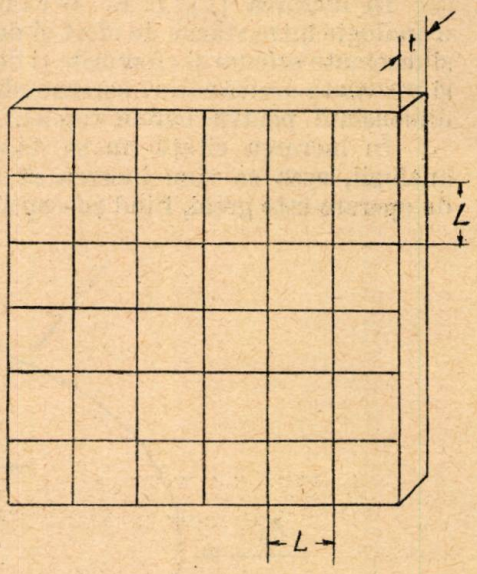


Fig. 4

pentru sistemul de bare, în scurtări sau alungiri ale barelor precum și rotiri ale nodurilor.

Din lucrarea [1] se reține ideea de bază, pe care Grinter o sintetizează într-o serie de precizări, în felul următor:

„Prin rețea trebuie să se reproducă trei fenomene distincte ale deformării peretelui sau a plăcii:

1° Deformația principală apare controlată de E;

2° Deformația secundară (laterală) trebuie să urmeze ca fiind controlată de coeficientul lui Poisson μ;

3° Deformația unghiulară (rotirea) controlată de G, trebuie să fie simulată.

În rețea dorim să producem acțiuni similare, după cum urmează:

1) Stîlpii și riglele se vor scurta sau lungi sub încărcările lor directe;

2) Cînd un stîlp se scurtează, grinzile adiacente se vor lungi de μ ori, scurtarea stîlpului și viceversa;

3) Nodurile vor avea posibilitatea de a se roti și barele de a se deforma;

4) Dacă se găsește că influența lui μ și $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, poate fi reprezentată exact prin (2) și (3), deformarea unghiulară a rețelei se poate neglija".

4. Determinarea elementelor de calcul

Se consideră grinda perete din figura 4 împărțită într-o serie de fîșii verticale și orizontale de lățime L.

Suprafața transversală a unei fîșii va fi

$$A = L \times t.$$

Se presupune că fiecăreia din fîșii i se asociază o bară, respectiv verticală și orizontală, care să aibă aceeași suprafață transversală cu fîșia de placă.

Prin urmare, se poate scrie:

$$A = L \times t = d \times b.$$

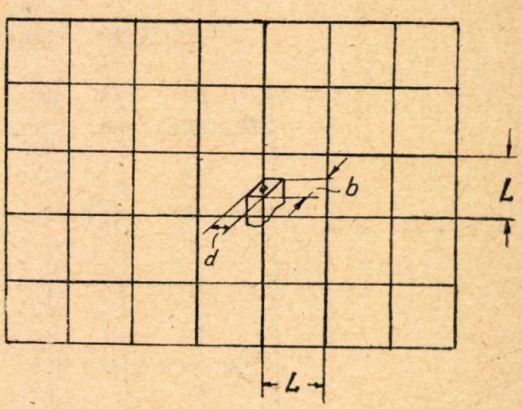


Fig. 5

Se obține astfel rețeaua de bare din figura 5. Pentru ca analogia dintre grinda perete și rețeaua de bare să fie valabilă, se reproduc încărcările și rezemările grinzi perete. În ultimă instanță, interesează să se determine la fel ca și în grinda perete, eforturile σ_x, σ_y și τ. Analogia propriu-zisă a constat în a urmări ca la fiecare nod al rețelei să se obțină final eforturile și rotirea din figura 6. Acestea se transformă în eforturi unitare, pentru punctul respectiv al grinzii perete astfel:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}; \quad \sigma_y = \frac{N_y}{A}; \quad \tau = \frac{Q}{A}.$$

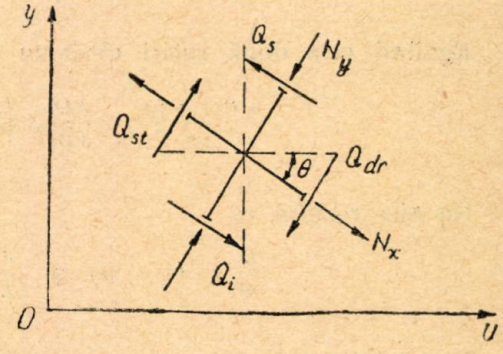


Fig. 6

Caracteristicile barelor pentru ca analogia să fie valabilă se determină după cum urmează:

$$A = L\,t = b\,d.$$

Modulul de elasticitate transversală este prin definiție

$$G = \frac{\tau}{\theta} = \frac{\frac{P}{A}}{\theta}$$

Pe de altă parte,

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{\frac{P}{A}}{\theta}.$$

De aici rezultă că deformația unghiulară pentru o grindă perete este

$$\theta_s = \frac{2P(1+\mu)}{AE}.$$

În aceleași condiții, pentru sistemul asociat din bare, se poate scrie

$$\theta_{\text{bară}} = \frac{PL^2}{6EI}.$$

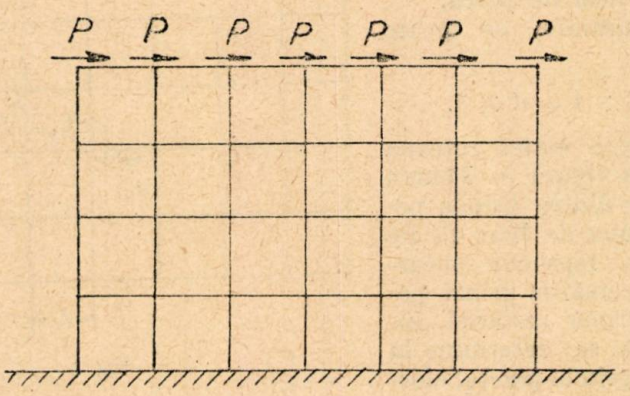


Fig. 7

Egalînd cele două rotiri obținem

$$\frac{2P(1+\mu)}{AE} = \frac{PL^2}{6EI}, \quad \left(\text{cu } I = \frac{bd^3}{12}\right).$$

De aici rezultă că

$$\frac{L^2}{d^2} = (1+\mu) \quad \text{și} \quad \frac{d}{L} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}.$$

Din relațiile de mai sus, se pot determina caracteristicile barelor rețelei, ceea ce constituie baza analogiei

$$d = \frac{L}{\sqrt{1+\mu}} \text{ și } b = \frac{Lt}{d} = t\sqrt{1+\mu}.$$

Pentru $\mu = 0$, rezultă $d = L$ și $b = t$.

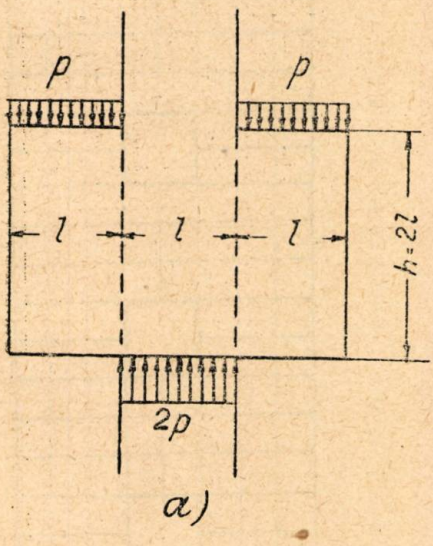
Pentru $\mu = 0{,}25$, rezultă $d = 0{,}89\ L$ și $b = 1{,}12\ t$.

Un sistem analog ca idee fundamentală în ceea ce privește analogia cu o rețea, a fost dat de A. Hrennikoff în lucrarea [2]. El dă analogia grinzii perete, printr-o rețea de bare articulate; aici intervin

în plus, față de ideea lui G r i n t e r, două bare diagonale pentru fiecare ochi al rețelei. Dimensiunile barelor rețelei se determină analog cu cele din metoda lui Grinter.

Avînd în vedere că sistemul admite deplasări atît pe verticală cît și pe orizontală, corespunzătoare deformațiilor grinzi perete reale, calculul va trebui făcut în consecință și anume :

— se va ține seama de lungirea sau scurtarea barelor ;



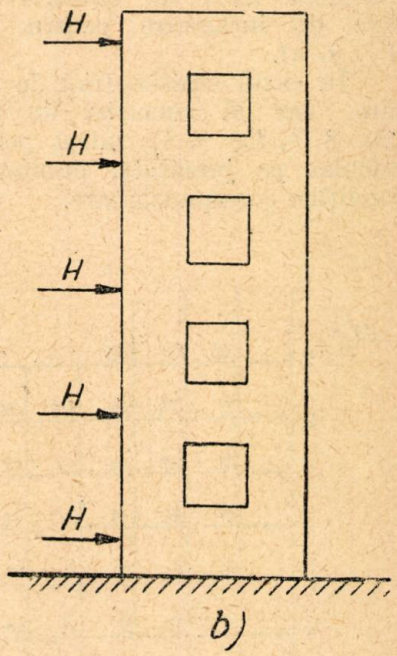


Fig. 8

— se va ține seama și de distribuția de forțe tăietoare și axiale la nodurile sale.

Metoda descrisă mai sus, prezintă interes atît timp cît se aplică la cazuri complicate care nu pot primi soluții prin metodele cunoscute. Astfel, aplicarea sa la grinzi pereți obișnuite, nu ar prezenta avantaj de comoditate, deoarece în acel caz, metoda de calcul este destul de bine pusă la punct.

În schimb, este aplicabilă cu succes în ceea ce privește cantitatea de muncă într-o problemă ca cea tratată în lucrarea [3] sau în problema calculului unui tronson de zidărie portantă cu mai multe nivele perforat de goluri, la sarcini seismice. Determinarea eforturilor în special în dreptul golurilor este importantă și nu cunoaștem un procedeu care ar putea duce la un rezultat cît de cît valabil.

Cele două exemple pe care le dăm mai jos, ajută înțelegerea modului cum se alege rețeaua de bare precum și încărcările acestora (fig. 8, *a* și *b*) :

a) Consola scurtă (vezi lucrarea [3]).

b) Un tronson de perete al unei clădiri cu patru nivele, supus la sarcini seismice.

Aceste două sisteme se transformă, după cum am arătat mai sus, într-o rețea de bare (fig. 9, *a* și *b*).

În cazul simetriei de formă și încărcare, nodurile rețelei de pe axa de simetrie, nu se deplasează normal pe aceasta (rezultă și din exemplele date mai sus), prin urmare se poate considera axul de simetrie ca o linie de încastrare pentru cadru (fig. 8, *a*).

În cazul antisimetriei de încărcare, dar al simetriei de formă (fig. 8, *b*, fig. 9, *b*) cadrul poate fi calculat pe jumătate, punînd însă condițiile corespunzătoare.

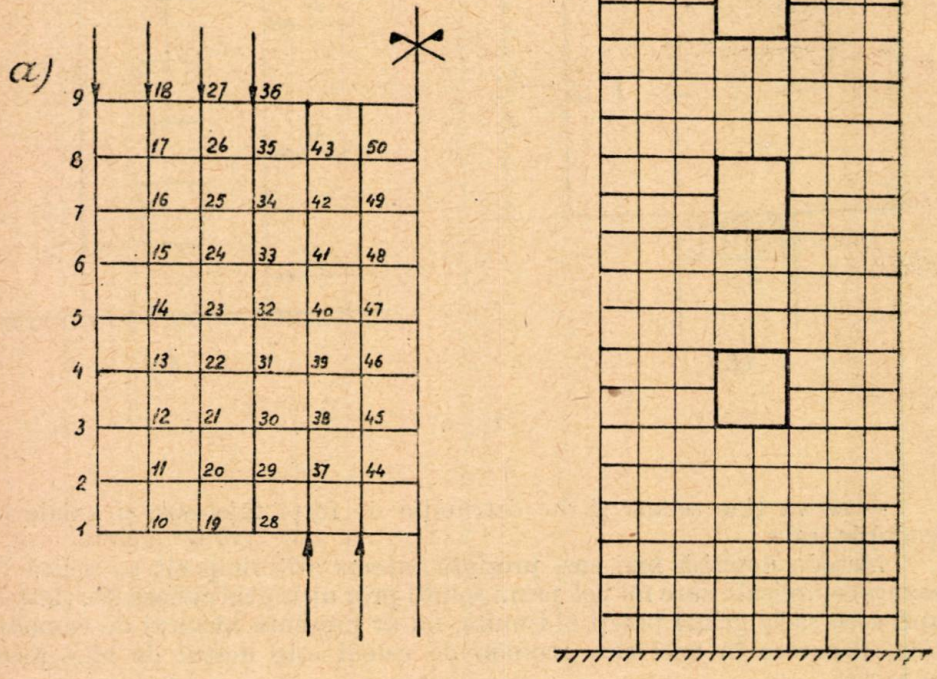


Fig. 9

5. Determinarea caracteristicilor barei, în cazul general de solicitare (rigidități)

În cazul analogiei dintre rețea și grinda perete, nu este suficientă aproximația care se face în mod obișnuit, și anume că:

— nodurile se translatează numai pe orizontală;

— datorită faptului că riglele în procesul de deformare își păstrează lungimile constante, nodurile unui etaj, primesc translații egale.

Va trebui să ne situăm în cazul absolut general, cînd barele se deformează longitudinal.

Pentru a determina rigiditățile în acest caz, se pornește de la o bară care primește deplasări atît după verticală, cît și după orizontală (fig. 10).

Obținem imediat

$$V_i = 6\,\frac{K}{l_{ik}^3}\,(2\Delta_v + l_{ik}\theta_i),$$

$$M_i = 2\,\frac{K}{l_{ik}^2}\,(3\Delta_v + 2\,l_{ik}\theta_i), \tag{3}$$

$$H_i = \frac{EA\,\Delta x}{l_{ik}}$$

cu $K = E\,I$.

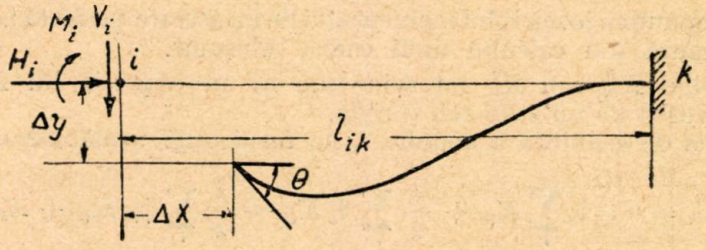


Fig. 10

Dacă în (3) se vor pune pe rînd Δy, Δx și θ egale cu unitatea, vor rezulta rigiditățile la încovoiere, forțe tăietoare și compresiune:

$$K_{ik} = \frac{4K}{l_{ik}}; \quad K_{ik}^T = \frac{12\,K}{l_{ik}^2}; \quad K_{ik}^c = \frac{EA}{l_{ik}},$$

care se transcriu imediat pentru grinda perete astfel:

$$K_{ik} = \frac{L^2}{3\,(1+\mu)}; \quad K_{ik}^T = \frac{1}{1+\mu}; \quad K_{ik}^c = 1.$$

Ecuațiile (3) se transcriu prin urmare pentru grinda perete, după cum urmează:

$$V_i = \frac{1}{2\,(1+\mu)}\,(2\Delta_v^i + \theta_i) = \frac{K_{ik}^T}{2}\,(2\Delta_v^i + \theta_i),$$

$$H_i = \Delta x, \tag{4}$$

$$M_i = \frac{L}{6\,(1+\mu)}\,(3\Delta_v^i + 2\,L\theta_i) = K_{ik}\left(\frac{3}{2}\,\psi_{ik} + \theta_i\right).$$

În cazul cînd sistemul este simetric și încărcat numai pe o direcție, atunci se folosesc numai ecuațiile obișnuite de echilibru (de momente și de etaj). În cazul încărcării pe două direcții intervin în plus un număr de ecuații de natura celor de etaj, egale în număr cu panourile verticale.

Prin urmare, putem scrie

$$M_{ik}^i = -K_{ik}\left(\theta_i + \frac{1}{2}\,\theta_k - \frac{3}{2}\,\psi_{ik}\right) + \overline{Q}_c\,K_{ik}^T\,\frac{L}{2} + \left(\overline{Q}_c\,K_{ik}^c\,\frac{L}{2}\right). \tag{4'}$$

Semnificațiile ultimilor doi termeni sînt următoarele:

$\bar{Q}_c K_{ik}^T \frac{L}{2}$ este momentul provocat de forțele exterioare, repartizat la capătul de stîlp, proporțional cu rigiditatea acestuia la forfecare;

$\bar{Q}_c K_{ik}^c \frac{L}{2}$ este influența scurtării riglei, produsă de forțele exterioare aplicate la nivelul etajului considerat ($\bar{Q}_c$ este suma forțelor exterioare, de pe direcția considerată, pînă la nivelul etajului c).

Ultimii doi termeni se pot pune sub forma:

$$A = \bar{Q}_c \frac{L}{2} (K_{ik}^T + K_{ik}^c)$$

și se poate spune că joacă rolul momentului de încastrare perfectă la capătul barei în cauză din calculul unui cadru obișnuit.

Termenul K_{ik}^T sau K_{ik}^c intervine sau nu în expresia lui M_{ik}^i, după cum este vorba de un stîlp sau o riglă.

Ecuația de echilibru a nodului i, ne furnizează următoarea ecuație:

$$M_{ik}^i = 0 = \theta_i \sum_i K_{ik} + \frac{1}{2} \sum_i \theta_k K_{ik} - \frac{3}{2} \sum_i \psi_{ik} K_{ik} + A_i. \qquad (5)$$

Ecuația de echilibru a etajului c, ne dă

$$\sum_c Q_{ik} + \bar{Q}_c = 0 \qquad (6)$$

sau

$$\psi_c \sum_c K_{ik} - \frac{1}{2} \sum_c \theta_i K_{ik} - \frac{1}{2} \sum_c \theta_k K_{ik} + \frac{1}{3} \sum_c A - \frac{\bar{Q}_c L}{3} = 0. \qquad (7)$$

În ecuațiile (5) și (7) se pun în evidență necunoscutele principale

$$\theta_i = \frac{A_i}{\sum_i K_{ik}} - \frac{1}{2} \sum_i \theta_k \frac{K_{ik}}{\sum_i K_{ik}} + \frac{3}{2} \sum_i \psi_c \frac{K_{ik}}{\sum_i K_{ik}},$$

$$\psi_c = \frac{\sum_c A - \bar{Q}_c L}{3} + \frac{1}{2} \sum_c \theta_i \frac{K_{ik}}{\sum_c K_{ik}} + \frac{1}{2} \sum_c \theta_k \frac{K_{ik}}{\sum_c K_{ik}}. \qquad (8)$$

De aici rezultă imediat valorile inițiale și coeficienții de transmitere

$$\theta_i^0 = \frac{A_i}{\sum_i K_{ik}}; \quad t_{ki} = -\frac{1}{2} \frac{K_{ik}}{\sum_i K_{ik}}; \quad t_{ci} = \frac{3}{2} \frac{K_{ik}}{\sum_c K_{ik}},$$

$$\psi_c^0 = \frac{\bar{Q}_c L - \sum_c A}{3 \sum_c K_{ik}}; \quad t_{ic} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_{ik}}{\sum_c K_{ik}}.$$

După cum se poate observa în comparație cu lucrarea [4] introducerea nodurilor fictive apare limpede necesară; coeficientul de transmitere de la nodul fictiv și la nodul fictiv, fiind respectiv t_{cj} și t_{jc}, iar valoarea inițială în nodul fictiv fiind ψ_c^0.

Pentru stabilirea semnificațiilor fizice, a valorilor inițiale și a coeficienților de transmitere, va trebui să se explice o noțiune care se folosește: *tendința de rotire.*

Această noțiune, dată în lucrarea [5] necesită precizări în plus.

Se numește *tendință de rotire* a unui *nod i blocat*, rotirea care se produce în nodul deblocat atunci cînd celelalte noduri ale sistemului se mențin blocate fie la rotire, fie la deplasare.

Pentru procesul de iterație, această tendință de rotire capătă două aspecte:

a) se numește *valoare inițială a iterației*, cînd se produce sub influența sarcinilor exterioare;

b) se numește *coeficientul de transmitere de la nodul i la nodul k* (și este de natura unui coeficient de influență) cînd se produce sub influența unei deplasări generalizate unitare a nodului *i* deblocat.

Valoarea inițială θ_i^0 este tendința de rotire locală (în nod) sub acțiunea forțelor exterioare, pînă la nivelul considerat.

Valoarea inițială ψ_c^0 este tendința de rotire a fișiei de placă considerată cu posibilitatea de deplasare orizontală împiedecată, sub acțiunea forței tăietoare la nivelul fișiei în cauză.

Coeficientul de transmitere spre nodul fictiv (t_{jc}) este tendința de rotire care apare în fișia de placă considerată (respectiv etajul *c*) cînd în nodul *j* deblocat se produce o rotire locală $\theta_j = 1$.

Coeficientul de transmitere de la nodul fictiv (t_{cj}) este tendința de rotire care apare în nodul *j* blocat, cînd fișia de placă (respectiv stîlpii acesteia) se rotește cu $\psi_c = 1$.

Coeficientul de transmitere de la *k* la *i* (t_{ki}) este tendința de rotire care apare în nodul *i* blocat, cînd nodul *k* deblocat se rotește cu $\theta_k = 1$.

Modul de rezolvare a problemei ținînd seama de scurtările sau alungirile barelor, semnificațiile fizice și forma ecuațiilor, constituie generalizarea *metodei nodurilor fictive* (5). Exemplul de calcul care se dă mai jos, lămurește modul de operare.

6. Exemplu de calcul

Se consideră grinda perete din figura 8, *a* redusă la structura de bare ca în figura 9, *a*, și cu încărcarea corespunzătoare.

Acestei structuri de bare i s-a impus următoarele condiții pe contur:

a) τ pe contur = 0, ceea ce revine la a spune că în fiecare nod exterior există o articulație în care deci rotirea finală va fi nulă;

b) Posibilitatea deplasării verticale de-a lungul coloanei 37 — 45 și 46 — 54 să fie împiedicată — ceea ce revine la a considera nodurile 37, 46, 45 și 54 încastrate perfect.

În această situație, analogia structurii de bare cu grinda perete din punctul de vedere al echilibrului static este completă.

1) *Stabilirea elementelor geometrice*

Se aleg șase panouri pe orizontală și opt panouri pe verticală. Secțiunea barelor se stabilește în funcție de $\mu = 0{,}25$ (ales arbitrar) rezultînd :

$$d = 0{,}89\ L \text{ și } b = 1{,}12\ t.$$

2) *Stabilirea rigidităților, factorilor de încărcare, coeficientului de transmitere, valori inițiale*

a) Rigiditatea la încovoiere :

pentru barele dublu încastrate $k = \frac{L^2}{3(1+\mu)} = 0{,}266\ L^2$;

" " articulate și încastrate

$$k' = \frac{3}{4}\frac{L^2}{3(1+\mu)} = 0{,}20\ L^2$$

b) Rigiditatea la forfecare — în aceleași condiții :

$$K^T = \frac{1}{1+\mu} = 0{,}8\ ;$$

$$K^{T'} = \frac{3}{4}\frac{1}{1+\mu} = 0{,}6.$$

c) Rigiditatea la compresiune în aceleași condiții :

$$K^c = 1\ ;$$

$$K^{c'} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

d) Forțele Q pe etaj :

$$Q_6 = -P\frac{L}{2}\ ;\ Q_5 = -\frac{3}{2}pL\ ;\ Q_4 = -\frac{5}{2}pL\ ;\ Q_3 = Q_2 = Q_1 = -\frac{7}{2}pL$$

e) Factorul A :

$$A_1 = Q_1\frac{L}{2}K^T.$$

Indicele lui A reprezintă etajul la care se referă.

Stîlpi

etajul VI : $A_6^{'2} = -Q_6\frac{L}{2}K^{T'} = -0{,}15\ pL^2$,

etajul V: $A_5^s = -Q_5 \frac{L}{2} K^T = -0{,}60\ pL^2$,

etajul IV: $A_4^s = -Q_4 \frac{L}{2} K^T = -pL^2$,

etajul III, II, I: $A_3^s = -Q_3 \frac{L}{2} K^T = -1{,}40\ pL^2 = A_2^s = A_1^s$.

Rigle

etajul VI: $A_6^{'r} = -Q_6 \frac{L}{2} K'^c = -0{,}19\ pL^2$, pentru 1—2; 8—9

și $A_6^r = -Q_6 \frac{L}{2} K^c = -0{,}25\ pL^2$, pentru restul de rigle;

etajul V: $A_5^{'r} = -Q_5 \frac{L}{2} K'^c = -0{,}56\ pL^2$, pentru 10—11; 17—18

și $A_5^r = Q_5 \frac{L}{2} K^c = -0{,}75\ pL^2$, pentru restul de rigle;

etajul IV: $A_4^{'r} = Q_4 \frac{L}{2} K^{c'} = -0{,}94\ pL^2$, pentru 19—20; 26—27

și $A_4^r = Q_4 \frac{L}{2} K^c = -1{,}25\ pL^2$, pentru restul de rigle;

etajul III: $A_3^{'r} = Q_3 \frac{L}{2} K^{c'} = -1{,}31\ pL^2$, pentru 28—29; 35—36

și $A_3^r = Q_3 \frac{L}{2} K^c = -1{,}75\ pL^2$, pentru restul de rigle.

f) Coeficienții de transmitere:

Coeficienții de transmitere între două articulații sau de la o articulație la o încastrare și invers vor fi nuli.

a° Între nodurile reale:

— coeficientul de transmitere de la conturul 45 — 21 — 25 — 49 către conturul 44 — 11 — 17 — 50 precum și cei între nodurile conturului marginal vor fi

$$t_{jk} = -\frac{1}{2} \frac{K}{3K + K'} = -0{,}134$$

afară de

$$t_{12\to 11} = t_{20\to 11} = t_{16\to 17} = t_{26\to 17} = -\frac{1}{2} \frac{K}{2(K + K')} = -0{,}144;$$

— între celelalte noduri ale rețelei

$$t_{jk} = -\frac{1\,K}{2 \times 4K} = -0{,}125.$$

b° Spre nodurile fictive vor fi egali cu cel dintre nodurile reale :

$$t_{1\to VI} = t_{10\to 1} = 0,$$

$$t_{10\to VI} = (-)\ t_{1\to 10} = 0{,}50.$$

c° De la nodurile fictive

$$t_{c\to j} = \frac{3}{2}\,\frac{K}{\sum\limits_{\text{eti}} K} = \frac{3}{2}\cdot\frac{K}{7\cdot K} = 0{,}214,$$

unde j este unul din nodurile reale.

Valori inițiale

Rotiri (θ_i^0) : $\theta_i^0 = \frac{A_i}{\sum\limits_i K_{ik}}$, unde $A_i = \sum\limits_i A$

$$A_{11} = A_{17} = A_6^{'s} + A_5^s + A_5^{'r} + A_5^r = (-)\ 2{,}06\ pL^2.$$

$$A_{12-16} = A_6^{'s} + A_5^s + 2\,A_5^r = (-)\ 2{,}25\ pL^2$$

$$A_{20} = A_{26} = A_5^s + A_4^{s'} + A_4^{'r} + A_4^r = (-)\ 3{,}79\ pL^2$$

$$A_{21-25} = A_5^s + A_4^s + 2\,A_4^r = (-)\ 4{,}10\ pL^2.$$

$$A_{29} = A_{35} = A_4^s + A_3^s + A_3^{'r} + A_3^r = (-)\ 5{,}46\ pL^2$$

$$A_{30} = A_{34} = A_4^s + A_3^s + 2\,A_3^r = (-)\ 5{,}90\ pL^2$$

$$A_{37} = A_{43} = A_2^s + A_2^s + A_2^{'r} + A_2^r = (-)\ 5{,}86\ pL^2$$

$$A_{38} = A_{42} = A_3^s + A_3^s + 2\,A_2^r = (-)\ 6{,}30\ pL^2.$$

În aceeași ordine rezultă :

$$\theta_{11}^0 = \theta_{17}^0 = \frac{A_{11}}{2K + 2K'} = \frac{2{,}06}{2K + 2K'} = -\,2{,}23\ p$$

$$\theta_{12}^0 = \theta_{16}^0 = \frac{2{,}25}{2K + K'} = -\,2{,}27\ p$$

$$\theta_{20}^0 = \theta_{26}^0 = \frac{-\,3{,}79}{3K + K'} = -\,3{,}82\ p$$

$$\theta_{21}^0 = \theta_{25}^0 = \frac{-\,4{,}10}{4\,K} = -\,3{,}86\ p$$

$$\theta_{29}^0 = \theta_{35}^0 = \frac{-5{,}46}{3K + K'} = -\,5{,}50\ p$$

$$\theta_{30}^0 = \theta_{34}^0 = \frac{-\,5{,}90}{4K} = -\,5{,}56\ p$$

$$\theta_{37}^0 = \theta_{43}^0 = \frac{-\,5{,}86}{3K + K'} = -\,5{,}90\ p$$

$$\theta_{38}^0 = \theta_{42}^0 = \frac{-\,6{,}30}{4\,K} = -\,5{,}95\ \text{p-}$$

Rotiri stîlpi (ψ_i^0); $\psi_i^0 = \dfrac{Q_c L - \sum\limits_c A}{3 \sum\limits_c K_{ik}}$

$$\psi_{VI}^0 = \frac{Q_c L + 7 A_6'^s}{3 \sum\limits_{VI} K_{ik}} = \frac{-p \frac{L}{2} L + 7 \times 0{,}15\, p L^2}{3 \times 7 \times 0{,}20\, L^2} = +0{,}131\, p$$

$$\psi_V^0 = \frac{-\frac{3}{2} p\, L \cdot L + 7 \times 0{,}60\, p L^2}{3 \times 7 \times 0{,}266} = +0{,}484\, p$$

$$\psi_{IV}^0 = \frac{-\frac{5}{2} p L \cdot L + 7 \times 1\, p L^2}{3 \times 7 \times 0{,}266} = +0{,}805\, p$$

$$\psi_{III}^0 = \frac{-\frac{7}{2} pL \cdot L + 7 \times 1{,}40\, p L^2}{3 \times 7 \times 0{,}266} = 1{,}03\ p.$$

Valorile inițiale determinate, așa cum s-a arătat mai sus, se scriu pe o schemă obișnuită de transmiteri și se începe succesiv echilibrarea nodurilor.

După încheierea iterației, rotirile finale se introduc în ecuația

$$M_{jk} = -K_{jk}\left(\theta_k + \frac{1}{2}\theta_j - \frac{3}{2}\psi_{ik}\right) + Q_c K_{ik}^T \frac{L}{2} + Q_c K_{ik}^c \frac{L}{2}$$

și se obțin momentele pe capetele de bară.

Cu momentele astfel determinate, se calculează forțele axiale în stîlpi și rigle.

Eforturile în nodurile rețelei, care înlocuiesc grinzile perete, se calculează astfel:

$$\sigma_x = \frac{N_x^r}{A}\ ;\ \sigma_y = \frac{N_x^{st}}{A}\ ;\ \tau_{xy} = \frac{Q}{A},$$

în care

N_x^r este froța axială în riglă, iar

N_x^{st} — forța axială în stîlp.

Primită la redacție la 8 mai 1956.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ В БАЛКАХ—СТЕНАХ ПУТЕМ ПРОВЕДЕНИЯ АНАЛОГИИ С СЕТЬЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем исследовании указывается, что на основании данной Л. Е. Гринтером в работе [1] идеи, а именно аналогии между балкой, стеной и сетью стержней, соответствующих горизонтальным и вертикальным полосам, покрывающим ее поверхность, можно установить при помощи статического расчета усилия в балке-стене.

В отличие от расчета обыкновенной рамы, учитывается укорочение или удлинение стержней; условия, допускающие аналогию, приводят к следующим размерам стержней сети:

$$-b = t\sqrt{1+\mu};\ d = \frac{L}{\sqrt{1+\mu}},$$

где t является толщиной плиты;

L — ширина полосы,
μ — коэффициент Пуассона.

Упрощение статического расчета состоит в распространении метода фиктивных узлов Ажента и Азнавориана [6] на этот случай. После определения вращений и смещений на обыкновенной схеме передач, рассчитываются моменты на концах стержней, а затем осевые и срезывающие силы.

Переход к усилиям совершается по известным формулам.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}\ \text{(рейка)};\ \sigma_y = \frac{N_x}{A}\ \text{(колонна)};\ \tau_{xy} = \frac{Q_x}{A}$$

DÉTERMINATION DE L'ÉTAT D'EFFORT DANS LES POUTRES-PAROI PAR LA MÉTHODE DE L'ANALOGIE AVEC UN RÉSEAU

(RÉSUMÉ)

On montre, dans la présente étude, qu'en vertu de l'idée exprimée par I. E. Grinter dans son ouvrage [1] sur l'analogie entre une poutre-paroi et un réseau de barres, qui correspondent à des bandes horizontales et verticales, recouvrant la surface de celle-ci, on peut établir, par un calcul statique, les efforts dans la poutre-paroi.

Par rapport au calcul d'un cadre habituel, on tient compte du raccourcissement ou de l'allongement des barres; les conditions permettant l'analogie conduisent aux dimensions suivantes pour les barres du réseau :

$$-b = t\sqrt{1+\mu},\quad d = \frac{L}{\sqrt{1+\mu}},$$

ou t est l'épaisseur de la plaque,
L est la largeur de la bande,
μ est le coefficient de Poisson.

La simplification du calcul statique consiste dans l'éxtension, à ce cas, de la méthode des nœuds fictifs de Agent et Aznavorian [6]. Après détermination des rotations et des déplacements sur un schéma habituel de transmissions, on calcule les moments aux extrémités de la barre et, ensuite, les forces axiales et tranchantes.

Le passage aux efforts se fait par les formules connues :

$$\sigma_x = \frac{N_x^{\text{chapeau}}}{A}\ ;\ \sigma_y = \frac{N_x^{\text{pilier}}}{A}\ ;$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_x}{A}$$

BIBLIOGRAFIE

1. L. E. Grinter, *Numerical Methods of Analysis in Engineering (Successive Corrections)*. New York 1949. Symposion ținut la „Illinois Institute of Technology", ch. 2, Statistical state of stress studied by grid analysis.
2. A. Hrennikoff, *Framework Method and its Technique for Solving of Blane Stress Problems*. Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering, 1949.
3. D. Moraru, *Discuții asupra unghiului optim de așezare și dimensionare a armăturii ridicate în console scurte, conform STAS 1546-50*. Rev. Standardizarea 1955. nr. 8.
4. Erwin Oswald, *Berechnung verschieblicher Rahmentragwerk nach dem Momentenausgleichverfahren der Bautechnik*, 1953, caietul 3.
5. Radu Agent și Mihai Popovici, *Calculul prin aproximații succesive ale grinzilor continue cu metoda momentelor la noduri*. Industria Construcțiilor, 1954, nr.6.
6. G. Aznavorian și R. Agent, *Metode iterative pentru calculul cadrelor cu noduri deplasabile*. Industria Construcțiilor, 1955, nr. 3.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR

ASUPRA STRUCTURILOR ORTOTROPE OPTIME

DE

A. PETRE, C. STĂNESCU şi L. LIBRESCU

În proiectarea unei structuri de rezistenţă intervin în general un număr mare de variabile şi de cele mai multe ori utilizînd relaţiile de dimensionare mai rămîn arbitrari un număr de parametri.

În lucrarea de faţă ne propunem a da o metodă de dimensionare optimă pentru o structură ce asigură o încăpere închisă, solicitată în principal la încovoiere după direcţii ce diferă în timpul exploatării.

Condiţia ca structura să fie optimă este ca greutatea ei să fie minimă.

Primele variabile ce intervin sînt : alegerea genului constructiv şi a materialului de construcţie. Deoarece este necesar ca structura să aibă un înveliş, se pot elimina, de la început, genurile constructive la care învelişul nu ia parte la solicitare. Este evident că învelişul ce nu lucrează constituie o greutate moartă şi structura rezultantă nu va fi optimă.

Deoarece structura este solicitată la încovoiere ce nu se produce totdeauna în aceeaşi direcţie, forma structurii optime va fi cea de secţiune circulară, singurul caz în care caracteristicile de rezistenţă au valori staţionare cînd direcţia de solicitare variază.

Pentru a realiza o astfel de construcţie cilindrică (cu secţiune inelară) care solicitată la încovoiere să fie de greutate minimă este necesar, teoretic, a mări diametrul cît mai mult, rezultînd un perete din ce în ce mai subţire. Această creştere de diametru are o limită prin apariţia flambajului local al peretelui. Pentru a putea depăşi această limită, se poate rigidiza învelişul prin introducere de rigidizori longitudinali. Un calcul al sistemului rezultant arată însă că acesta, datorită lungimii mari de flambaj a rigidizorilor şi dimensionării lor adecvate, este mai greu decît o structură fără rigidizori de grosime de perete constantă, dimensionată în consecinţă.

Pentru a realiza totuşi o structură mai uşoară cu rigidizori longitudinali se poate micşora lungimea de flambaj a acestora prin introducerea de cadre transversale. Se realizează, în felul acesta, o structură ortotropă cu lise longitudinale şi cadre transversale. O variantă în acelaşi scop se poate obţine eliminînd lisele şi dublînd pereţii. Pentru a nu plisa pereţii individual se introduce între ei un material uşor ca piesă de distanţă (plută,

spumă de plastice etc.). Structura obținută este cunoscută sub numele de structură „sandvich".

Pentru scopul propus rezultă că din genurile constructive ce nu produc, pe de altă parte, nici dificultăți de fabricație se pot alege ca optime fie structura ortotropă, fie structura sandvich.

Structura sandvich are dezavantajul de a conține materiale diferite și prin prezența cadrelor nu simplifică mult lucrările.

Ca structură optimă, propunem, deci, structura ortotropă.

În ceea ce privește realizarea ei, propunem un nou gen de construcție.

În mod obișnuit, o astfel de structură se construiește astfel încît la intersecțiile între cadre și lise se întrerup fie unele, fie altele.

Lemnul lamelat de brad nedensificat, utilizat permite o turtire transversală de 50% fără a se micșora calitățile de rezistență ale acestuia.

Datorită acestei proprietăți, prin împletirea fișiilor de lemn ce vor alcătui cadrele, și fișiile ce vor alcătui lisele, se poate realiza structura ortotropă considerată.

Colectivul compus de ing. Petre Augustin, M. Popescu și T. Orădeanu a realizat experimental o astfel de structură. Rezultatele sînt satisfăcătoare atît din punct de vedere constructiv cît și rezistente. Structura realizată a arătat că în punctele de intersecție între lise și cadre se poate considera o încastrare. Încercările au arătat că dacă nu ar exista înveliș, datorită încastrărilor această structură rezistă la forțe în planul ei la fel ca un înveliș de aproximativ 1 mm grosime. Rezistența la rupere, la încovoiere a structurii este în jurul valorii $\sigma_r = 600$ kg/cm^2.

O proiectare se face în mod obișnuit prin aproximații succesive. Soluția obținută va fi evident o soluție corectă, însă nu va fi soluția optimă.

Variabile care intervin sînt următoarele :

1) diametrul structurii ;
2) grosimea învelișului ;
3) forma secțiunii cadrelor ;
4) aria secțiunilor cadrelor ;
5) forma secțiunii liselor ;
6) aria secțiunii liselor ;
7) distanța între cadre ;
8) numărul liselor.

Ca relații de dimensionare există, teoretic, una singură, astfel încît dacă se consideră forma unei secțiuni ca o singură variabilă există șapte parametri ce rămîn arbitrari și care pînă acum se alegeau de către proiectanți.

Relația ce conduce la dimensionarea finală este practic o relație obținută în condiții de stabilitate.

Determinant de asemenea structuri este fie flambajul local, între cadre de exemplu, fie flambajul general al întregului perete comprimat din încovoiere.

Pentru a se ajunge la structura optimă se poate face o primă observație care evident restrînge numărul de variabile independente. Structura va fi optimă cînd va ajunge la limita de stabilitate pentru o anumită sarcină atît ca flambaj local cît și ca flambaj general. Dacă se produce un gen de flambaj pentru sarcini mai mici decît pentru celălalt, înseamnă

că funcție de flambajul ce s-a produs, fie lisele, fie cadrele, sînt supradimensionate.

Pentru a dimensiona o structură optimă trebuie ca să se scrie greutatea structurii determinată în cele două condiții de mai sus, păstrînd șase parametrii liberi, și să se varieze acești parametri astfel încît greutatea să devină minimă.

Relațiile stabilite pentru studiul stabilității structurii ortotrope nu pot fi practic utilizate, deoarece în primul rînd calculul ar deveni extrem de laborios introducîndu-se în plus noi variabile. În al doilea rînd structura nu poate fi perfect ortotropă și se introduc în orice caz erori din acest punct de vedere. În al treilea rînd, se poate constata că la o variație mică a unui parametru constructiv nu corespunde o mare variație a greutății structurii. O precizie matematică pentru determinarea structurii optime nu este deci necesară.

Pentru a se putea soluționa totuși problema se pot utiliza relații simplificate ce țin seama de esența fenomenului.

Se poate considera că porțiunea comprimată din structură este ca și un panou continuu pe reazeme elastice.

Constanta elastică a reazemelor, pentru ca panoul să nu flambeze general, este de forma

$$\alpha = K_1 \frac{P}{L}, \tag{1}$$

unde P este forța axială totală în panou, iar L este distanța între reazeme.

Forța P, provenind din momentul M aplicat structurii ce are diametru D, este de forma

$$P = K_2 \frac{M}{D}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, constanta elastică a unui cadru circular sub acțiunea a două forțe diametral opuse este de forma

$$\alpha = K_3 \frac{(EI)_c}{D^3}, \tag{3}$$

unde $(EI)_c$ este rigiditatea la încovoiere a cadrului. Din relațiile (1), (2) și (3), rezultă că rigiditatea necesară unui cadru pentru a nu se produce flambajul general este de forma

$$(EI)_c = C_c \frac{MD^2}{L}. \tag{4}$$

Refăcînd cu această relație calculele riguroase de structuri și încercările experimentale efectuate și observînd genul flambajului produs se constată că în flambajul general, C_c are valori mici, iar în cel local, valori mari. Există o valoare suficient de bine precizată pentru care se poate produce atît flambaj general cît și local. Această valoare este

$$C_c = 6{,}25 \times 10^{-5} \tag{5}$$

sau

$$C_c = \frac{1}{16\,000}. \tag{5}$$

Se observă că relaţia (4) împreună cu (5) poate constitui o relaţie de dimensionare pentru cadre.

Ştiind în felul acesta că structura la limită flambează şi între cadre, dimensionarea panourilor între cadre este mult uşurată considerîndu-se un singur panou.

Tensiunea efectivă din panou va fi

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{4\,M}{\pi\,D^2\,t_m}, \tag{6}$$

unde t_m este grosimea medie a învelişului împreună cu lisele.

Deoarece sarcina totală ce revine semicilindrului comprimat datorită încărcării este preluată aproape în întregime de zona cea mai îndepărtată de axa neutră, această zonă poate fi înlocuită cu un panou plan de aceeaşi structură ce are o lăţime echivalentă B_e dată de relaţia

$$B_e = \frac{\pi}{4} D. \tag{7}$$

Rezistenţa critică a unui asemenea panou considerat simplu rezemat pe laturi devine

$$\sigma_{cr} = \frac{4}{3\,(1-\mu^2)} E \left(\frac{t}{D}\right)^2 \frac{\left[1 + \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{L}{D}\right)^2\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \gamma \sin \frac{2\pi i}{n}}{\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[1 + 2\sum_{i=1}^{n} \delta \sin \frac{2\pi i}{n}\right]}, \tag{8}$$

unde

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{A_l}{Dt};$$

$$\gamma = \frac{48}{\pi} (1-\mu^2) \frac{I_l}{Dt^3};$$

A_l, aria secţiunii transversale a lisei;

I_l, momentul de inerţie a unei lise împreună cu lăţimea lucrîndă de înveliş;

t, grosimea învelişului;

n, numărul de lise;

E, modulul de elasticitate.

Din relaţia (6) se poate obţine aria totală necesară a panoului inclusiv lisele

$$\pi\,Dt_m = \frac{4\,M}{D\sigma_{cr}}.$$

Volumul învelișului rigidizat cu lise pe unitate de lungime de structură este

$$A_1 = \frac{4M}{D\sigma_{cr}}. \tag{9}$$

În ceea ce privește forma secțiunii cadrelor și liselor vom alege pe aceea care este mai ușor de construit respectiv secțiunea dreptunghiulară.

Baza și înălțimea liselor și cadrelor le vom nota respectiv cu

$$b_l,\ h_l,\ b_c \text{ și } h_c.$$

Din relația (4) se poate determina aria necesară a cadrului

$$A_c = \sqrt{\frac{C_c M D^2}{LE\,\frac{I_c}{A_c}}} = \sqrt{\frac{C_c M D^2}{L E\,\frac{h_c}{12 b_c}}}. \tag{10}$$

Pentru o precizie mai mare se poate introduce în expresia lui I_c și lățimea lucrîndă de înveliș. Volumul cadrelor raportat la unitatea de lungime de structură este

$$A_2 = \frac{\pi D A_c}{L}.$$

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{L}\sqrt{\frac{C_c M}{EL\,\frac{h_c}{12 b_c}}}. \tag{11}$$

Volumul total al structurii pe unitate de lungime de structură este

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A = \frac{4M}{D\sigma_{cr}} + \frac{\pi D^2}{L}\sqrt{\frac{C_c M}{EL\,\frac{h_c}{12\,b_c}}}. \tag{12}$$

Împărțind prin $M^{2/3}$ expresia (12) se poate scrie

$$\frac{A}{M^{2/3}} = \frac{4\left(\frac{M}{D^3}\right)^{1/3}}{\sigma_{cr}} + \frac{\pi C_c^{1/2}}{\left(\frac{h_c}{12\,b_c}\right)^{1/2} E_c^{1/2} \left(\frac{M}{D^3}\right)^{1/6} \left(\frac{L}{D}\right)^{3/2}}, \tag{13}$$

unde σ_{cr} are valoarea dată de (8).

Pentru ca structura să fie optimă este necesar ca expresia (13) să prezinte un minim.

Se observă că în această relaţie intervin următoarele şase variabile independente : $\frac{M}{D^3}$, $\frac{L}{D}$, $\frac{h_c}{b_c}$, $\frac{h_l}{b_l}$, t şi n.

Se observă că o parte din aceste variabile nu conduc la un minim variabil. Raporturile $\frac{h_c}{b_c}$ şi $\frac{h_l}{b_l}$ trebuie să fie cît mai mari. Creşterea acestor rapoarte indefinit este limitată de apariţia flambajului de răsucire ale rigidizorilor. Pentru structura de lemn, limita este de ordin constructiv şi este mult mai mică.

Minimul funcţie de variabila $\frac{M}{D^3}$ este dat de relaţia

$$\frac{4}{3\,\sigma_{cr}}\left(\frac{M}{D^3}\right)^{-2/3} - \frac{\pi\, C_c^{1/2}}{6\left(\frac{h_c}{12\,b_c}\right)^{1/2} E_c^{1/2}\left(\frac{L}{D}\right)^{3/2}}\left(\frac{M}{D^3}\right)^{-7/6} = 0,$$

de unde

$$\left(\frac{M}{D^3}\right)^{1/2} = \frac{\pi\, C_c^{1/2}\,\sigma_{cr}}{8\left(\frac{h_c}{12\,b_c}\right)^{1/2} E_c^{1/2}\left(\frac{L}{D}\right)^{3/2}}. \tag{14}$$

În ceea ce priveşte minimele date de celelalte variabile, calculul analitic este dificil şi este de preferat un calcul numeric sau grafic pentru cazul dat.

Tablourile nr. 1 — 26 indică efectul diferiţilor parametri şi soluţia optimă pentru un moment încovoietor dat.

Calculul soluţiei optime relativă la parametrul $\frac{L}{D}$ conduce la valori mari pentru σ_{cr} astfel încît se depăşeşte limita de proporţionalitate. Pentru flambajul în domeniu plastic, fiind vorba de lemn, se poate utiliza expresia

$$\sigma_{cr} = 300\,[1 - 0{,}384 \times 10^{-8}\,\lambda^4\,], \tag{15}$$

unde λ este coeficientul de subţirime al liselor ce compun panoul cu lăţimea lucrîndă respectivă.

Introducînd această expresie, în locul expresiei (8), în ecuaţia (13), se observă că, în general, expresia (13) variază invers proporţional cu valorile lui λ.

Rezultă că soluţia optimă pentru parametrul $\frac{L}{D}$ este soluţia pentru care valorile numerice ale expresiilor (8) şi (15) coincid.

În general, prin datele problemei se cunoaşte momentul încovoietor M ce lucrează asupra structurii. Diametrul structurii se poate obţine ca un rezultat al cerinţei de optim. De cele mai multe ori însă diametrul D al structurii este o dată ce este impusă de exploatare.

Pentru a exemplifica metoda de calcul şi a vedea sensul şi mărimea variaţiei de greutate a structurii funcţie de diferiţi parametrii, vom da cîteva rezultate numerice de calcul pentru o structură asupra căreia se

aplică un moment încovoietor dat ($M = 212\,000$ kg cm), şi al cărei diametru poate varia în jurul valorii $D = 55$ cm.

Rezultatele, ţinînd seama de diferiţi parametri aleşi pentru raportul $\left(\frac{L}{D}\right)_{optim}$, sînt trecute în tabloul nr. 1.

În tabloul nr. 2 sînt date rezultatele parţiale ce au servit la calculul tabloului nr. 1.

Se observă, de exemplu, că o creştere a diametrului D cu 9% conduce la o scădere a greutăţii totale între 4 şi 9 %.

Creşterea grosimii de înveliş cu 30 % conduce la o creştere a greutăţii totale de aproximativ 3 %.

O creştere a raportului $\frac{h_l}{b_l}$ de 100 % respectiv de la 1 la 2 conduce la o scădere a greutăţii totale a structurii de 2. . . 5 %.

În calcul s-a considerat cadre avînd raportul

$$\frac{h_c}{b_c} = 2. \tag{16}$$

Nu s-au considerat alte cazuri pentru acest raport, întrucît este evident că dacă acesta creşte, greutatea structurii scade (relaţia (13)).

În ceea ce priveşte numărul de lise se observă că greutatea structurii scade cu creşterea numărului de lise pentru ca apoi să rămînă staţionară.

Pentru a se putea vedea şi eroarea ce se face dacă nu se consideră valoarea optimă a raportului $\frac{L}{D}$ în tablourile nr. 3. . . 26 s-a calculat greutatea structurii pentru diferite valori ale acestui raport în jurul valorii optime.

Se observă şi în acest caz că în jurul valorii de optim variaţia greutăţii totale nu este mare.

Tabloul nr. 1

Nr crt.	t cm	n	D cm	Dimensiunile lisei cm × cm	$\left(\frac{L}{D}\right)_{optim}$	$\frac{A}{M^{2/3}} \times 10^3$
1	0,15	2	55	0,6×0,6	0,132	1,828
2	0,15	2	55	0,8×0,8	0,194	1,660
3	0,15	2	55	0,424×0,848	0,177	1,6965
4	0,15	2	55	0,566×1,132	0,26	1,594
5	0,15	2	60	0,6×0,6	0,1265	1,758
6	0,15	2	60	0,8×0,8	0,1785	1,58
7	0,15	2	60	0,424×0,848	0,1625	1,631
8	0,15	2	60	0,566×1,132	0,25	1,5985
9	0,15	3	55	0,6×0,6	0,152	1,70
10	0,15	3	55	0,8×0,8	0,225	1,6165
11	0,15	3	55	0,424×0,484	0,20	1,656
12	0,15	3	55	0,566×1,132	0,31	1,556
13	0,15	3	60	0,6×0,6	0,15	1,648
14	0,15	3	60	0,8×0,8	0,22	1,497
15	0,15	3	60	0,424×0,848	0,20	1,5445
16	0,15	3	60	0,566×1,132	0,274	1,4635
17	0,2	3	55	0,6×0,6	0,158	1,744
18	0,2	3	55	0,8×0,8	0,226	1,621
19	0,2	3	55	0,424×0,848	0,20	1,656
20	0,2	3	55	0,566×1,132	0,296	1,5635
21	0,2	3	60	0,6×0,6	0,14	1,691
22	0,2	3	60	0,8×0,8	0,20	1,539
23	0,2	3	60	0,424×0,848	0,177	1,583
24	0,2	3	60	0,566×1,132	0,24	1,4687
25	0,15	4	55	0,6×0,6	0,17	1,708
26	0,15	4	55	0,8×0,8	0,25	1,597
27	0,15	4	60	0,6×0,6	0,169	1,608
28	0,15	4	60	0,8×0,8	0,2465	1,489
29	0,15	4	60	0,566×1,132	0,32	1,4512
30	0,15	5	60	0,566×1,132	0,34	1,4422
31	0,15	6	60	0,566×1,132	0,36	1,434
32	0,15	7	60	0,566×1,132	0,38	1,428
33	0,15	8	60	0,566×1,132	0,4	1,421

Tabloul nr. 2

t cm	D cm	Dimensiunile lisei cm × cm	Aria lisei cm²	I = momentul de inerție (lisă + porțiune înveliș)	i_g	$\sum_{i=1}^{n} 2\gamma \sin\frac{2\pi i}{n}$	$1+\sum_{i=1}^{\pi} 2\delta \sin\frac{2\pi i}{n}$	Lungimea lucrândă cm
			$n = 3$	$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 1$				
0,2	55	0,6 × 0,6	0,36	0,0631	0,1794	6	1,215	8
		0,424 × 0,848		0,1075	0,234	10,2	1,125	
		0,8 × 0,8	0,64	0,1534	0,262	14,55	1,222	
		0,566 × 1,132		0,269	0,346	25,5	1,222	
	60	0,6 × 0,6	0,36	0,0631	0,1794	5,49	1,115	
		0,424 × 0,848		0,1075	0,234	9,36	1,115	
		0,8 × 0,8	0,64	0,1534	0,262	13,35	1,204	
		0,566 × 1,132		0,269	0,346	23,4	1,204	
			$n = 2$	$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 1$				
0,15	55	0,6 × 0,6		0,05105		7,56	1,112	8
		0,8 × 0,8		0,13035		19,36	1,1976	
	60	0,6 × 0,6		0,05105		6,94	1,1018	
		0,8 × 0,8		0,13035		17,76	1,1810	
			$n = 3$	$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 1$				
0,15	55	0,6 × 0,6		0,05105		11,35	1,167	8
		0,8 × 0,8		0,13035		29	1,2965	
	60	0,6 × 0,6		0,05105		10,4	1,153	
		0,8 × 0,8		0,13035		26,65	1,274	
			$n = 4$	$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 1$				

Tabloul nr. 2 (continuare)

t cm	D cm	Dimensiunile lisei cm × cm	Aria lisei cm²	I = momentul de inerție (lisă + porțiune înveliș)	i_φ	$\sum_{i=1}^{n} 2\gamma \sin \frac{2\pi i}{n}$	$1 + \sum_{i=1}^{n} 2\delta \sin \frac{2\pi i}{n}$	Lungime lucrîndă cm
0,15	55	0,6 × 0,6		0,05105		15,12	1,2224	8
		0,8 × 0,8		0,13035		38,72	1,3952	
	60	0,6 × 0,6		0,05105		13,88	1,2036	
		0,8 × 0,8		0,13035		35,52	1,3620	
			$n = 2$		$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 2$			
	55	0,848 × 0,424		0,09265		13,78	1,1112	8
		1,132 × 0,566		0,23605		35	1,1976	
	60	0,848 × 0,424		0,09265		12,62	1,1018	
		1,132 × 0,566		0,23605		32	1,1810	
			$n = 3$		$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 2$			
0,15	55	0,848 × 0,424		0,09265		20,7	1,167	8
		1,132 × 0,566		0,23605		53,6	1,2965	
	60	0,848 × 0,424		0,09265		18,95	1,153	
		1,132 × 0,566		0,23625		48	1,274	
			$n = 5$		$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 2$			
	60	1,132 × 0,566		0,23605		72,2	1,453	
			$n = 7$		$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 2$			
	60	1,132 × 0,566		0,23157		98,8	1,726	6,7
			$n = 8$		$\left(\frac{h_l}{b_l}\right) = 2$			
	60	1,132 × 0,566		0,2226		121	1,726	5,9

Tabloul nr. 3

$t = 0{,}2$ cm	$n = 2$	$D = 55$ cm	lisa (0,6 × 0,6)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)_{\text{cadru}} = 2$	
L/D	0,1	0,13	0,158	0,17	0,19
σ_{cr}	300	300	300	260	209
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	2,032	1,848	1,744	1,932	2,302

Tabloul nr. 4

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 55$ cm	lisa (0,8 × 0,8)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)_{\text{cadru}} = 2$	
L/D	0,2	0,22	0,226	0,23	0,24
σ_{cr}	300	300	300	292	268
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,656	1,6285	1,621	1,6565	1,776

Tabloul nr. 5

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 55$ cm	lisă (0,424 × 0,848)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)_{\text{cadru}} = 2$	
L/D	0,17	0,19	0,2	0,22	0,23
σ_{cr}	300	300	300	250	227
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,712	1,672	1,656	1,9185	2,0865

Tabloul nr. 6

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 55$ cm	lisa (0,566 × 1,132)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)_{\text{cadru}} = 2$	
L/D	0,28	0,29	0,296	0,30	0,31
λ	14,85	15,40	15,7	15,9	16,43
σ_{cr}	300	300	300	292	274
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,574	1,5675	1,5635	1,602	1,6961

Tabloul nr. 7

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 60$ cm	lisă (0,6 × 0,6)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)$	$= 2$
L/D	0,2	0,13	0,14	0,15	0,16
λ	13,8	14,96	16,1	17,25	18,4
σ_{cr}	300	300	300	262	230
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,784	1,735	1,691	1,83	2,029

Tabloul nr. 8

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 60$ cm	lisa (0,8 × 0,8)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)$	$= 2$
L/D	0,18	1,19	0,2	0,21	0,22
λ	13,71	14,5	15,26	16,12	16,8
σ_{cr}	300	300	300	273	249
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,577	1,557	1,539	1,659	1,7751

Tablolu nr. 9

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 60$ cm	lisa (0,424 × 0,848)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)$	$= 2$
L/D	0,16	0,17	0,177	0,18	0,19
λ	13,7	14,52	15,13	15,4	16,25
σ_{cr}	300	300	300	290	260
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,625	1,599	1,583	1,622	1,762

Tabloul nr. 10

$t = 0{,}2$ cm	$n = 3$	$D = 60$ cm	lisa (0566 × 1,132)	$\left(\frac{h_c}{b_c}\right)$	$= 2$
L/D	0,24	0,25	0,261	0,27	0,28
λ	13,9	14,5	15,1	15,61	16,2
σ_{cr}	300	300	300	280	260
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,488	1,4785	1,4687	1,556	1,659

Tabloul nr. 11

t = 0,15 cm	n = 2	D = 55 cm	lisa (0,6 × 0,6)
L/D	0,1315	0,132	0,15
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,831	1,828	2,113

Tabloul nr. 12

t = 0,15 cm	n = 2	D = 55 cm	lisa (0,8×0,8)
L/D	0,185	0,194	0,2
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,677	1,660	1,706

Tabloul nr. 13

= 0,15 cm	n = 2	D = 60 cm	lisă (0,6 × 0,6)
L/D	0,12	0,1265	0,13
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,794	1,758	1,781

Tabloul nr. 14

t = 0,15 cm	n = 2	D = 60 cm	lisa (0,8 × 0,8)
L/D	0,17	0,1785	0,2
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,6065	1,5828	1,695

Tabloul nr. 15

= 0,15 cm	n = 3	D = 55 cm	lisa (0,8 × 0,8)
L/D	0,22	0,225	0,23
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,624	1,6165	1,6415

Tabloul nr. 16

t = 0,15 cm	n = 3	D = 60 cm	lisa (0,6 × 0,6)
L/D	0,145	0,15	0,16
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,6665	1,648	1,825

Tabloul nr. 17

= 0,15 cm	n = 3	D = 60 cm	lisa (0,8 × 0,8)
L/D	0,2	0,22	0,25
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,531	1,497	1,828

Tabloul nr. 18

t = 0,15 cm	n = 4	D = 55 cm	lisa (0,6 × 0,6)
L/D	0,16	0,17	0,18
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,733	1,708	1,792

Tabloul nr. 19

= 0,15 cm	n = 4	D = 55 cm	lisa (0,8 × 0,8)
L/D	0,245	0,25	0,26
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,5965	1,597	1,678

Tabloul nr. 20

t = 0,15 cm	n = 4	D = 60 cm	lisa (0,6 × 0,6)
L/D	0,16	0,169	0,17
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,632	1,608	1,64

Tabloul nr. 21

$t = 0{,}15$ cm	$n = 4$	$D = 60$ cm	lisa (0,8 × 0,8)
L/D	0,24	0,2465	0,25
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,497	1,489	1,5285

Tabloul nr. 22

$t = 0{,}15$ cm	$n = 2$	$D = 55$ cm	lisa (0,848 × 0,424)
L/D	0,17	0,177	0,18
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,703	1,6965	1,742

Tabloul nr. 23

$t = 0{,}15$ cm	$n = 2$	$D = 60$ cm	lisa (0,848 × 0,424)
L/D	0,16	0,1625	0,165
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,635	1,631	1,892

Tabloul nr. 24

$t = 0{,}15$ cm	$n = 3$	$D = 55$ cm	lisa (0,848 × 0,424)
L/D	0,19	0,2	0,21
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,66	1,656	1,686

Tabloul nr. 25

$t = 0{,}15$ cm	$n = 3$	$D = 60$ cm	lisa (0,848 × 0,424)
L/D	0,19	0,2	0,21
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,562	1,5445	1,685

Tabloul nr. 26

$t = 0{,}15$ cm	$n = 3$	$D = 60$ cm	lisa (1,132 × 0,566)
L/D	0,27	0,274	0,3
$10^2 \frac{A}{M^{2/3}}$	1,4665	1,4636	1,617

Primită la redacție la 4 aprilie 1956

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе представляется в первую очередь новый конструктивный вид ортотропной структуры, которую можно построить из дерева.

Предлагается затем способ наилучшего проектирования этой структуры. Устанавливаются параметры, действующие при проектировании и после использования размерных зависимостей; независимые параметры устанавливаются при помощи условия минимальной тяжести ансамбля.

Далее показывается на примере количественный эффект каждого отдельного параметра.

SUR LES MEILLEURES STRUCTURES ORTHOTROPES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on présente tout d'abord un nouveau genre de construction orthotrope pouvant être confectionné en bois.

A ces fins, on propose ensuite une méthode de projet d'optimum. On établit les paramètres qui interviennent au cours du projet et, après utilisation des relations de dimension, les paramètres indépendants sont précisés par la condition de minimum du poids de l'ensemble.

On montre par la suite, sur un exemple, l'effet quantitatif de chaque paramètre séparément.

BIBLIOGRAFIE

1. S. P. Timoşenko, *Ustoicivost Uprughih sistem.* Moscova 1955.
2. F. R. Shanley, *Principles of Structural Design for Minimum Weigth.* T.A.S., martie 1949.
3. — *Simplified Analysis of General Instability of Stiffened.* T.A.S., octombrie 1949.
4. Micks *Minimum Weigth of Stiffened Cylindrical Shells in Pure Bending.* T.A.S., aprilie 1950.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

O TEORIE GENERALĂ A METODEI DISTRIBUIRII EFORTURILOR

DE

C. C. POPOVICI

PARTEA A II-a

Într-o lucrare anterioară [1] s-a indicat o metodă generală pentru determinarea directă a eforturilor unei structuri elastice oarecare formată din bare, numai cu ajutorul distribuirii de eforturi.

În continuare se dau trei exemple de calcul, din care va reieşi modul de aplicare, avantajele şi dezavantajele acestei metode.

Deşi din aplicarea criteriilor de convergenţă rezultă că exemplele nu sînt tocmai indicate pentru aplicarea acestei metode, prin folosirea iteraţiei treptate (metoda Seidel) în locul iteraţiei simple, se ajunge cu un număr destul de redus de iteraţii la rezultate foarte apropiate de cele obţinute prin metodele clasice.

EXEMPLUL 1*)

Să calculăm eforturile din figura 1, [2].

Sistemul are şapte noduri şi zece bare, deci are şapte rotiri independente ale modurilor şi $l = 2 \times 7 - 10 = 4$ rotiri ale barelor, sau grade de libertate.

1) *Eforturi de încastrare.* Adoptînd aceeaşi convenţie de semne ca în metoda deformaţiilor, avem

$$\mathfrak{M}_{23} = -\mathfrak{M}_{32} = \mathfrak{M}_{46} = -\mathfrak{M}_{64} = \mathfrak{M}_{79} = -\mathfrak{M}_{97} = -\frac{1}{12} 1000 \times \overline{9{,}0}^2 = -6\,750 \text{ kgm},$$

$$\mathfrak{M}_{34} = -\mathfrak{M}_{43} = \mathfrak{M}_{67} = -\mathfrak{M}_{76} = \mathfrak{M}_{910} = -\mathfrak{M}_{109} = -\frac{1}{12} 1000 \times 3^2 = -750 \text{ kgm}.$$

*) Acest exemplu a fost expus de autor la o conferinţă ţinută în anul 1951 la Institutul de proiectări al Ministerului Industriei Uşoare.

2) *Rigidități.* Stîlpii a, d, g și j fiind articulați jos, vom avea

$$k_a = k_d = k_g = k_j = \frac{3EIs}{l} = \frac{3 \times 1000 \times 0{,}006}{6} = 3,$$

$$l_a = l_d = l_g = l_j = 0,$$

$$m_a = m_d = m_g = m_j = \frac{3EI}{l} = 3.$$

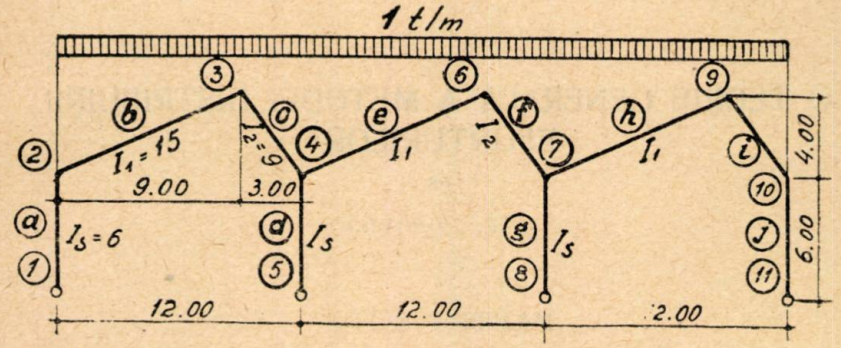


Fig. 1

Pentru restul barelor vom avea

$$k_b = k_e = k_h = \frac{4EI_1}{l} = \frac{4 \times 1000 \times 0{,}015}{9{,}849} = 6{,}092,$$

$$l_b = l_e = l_h = \frac{k_b}{2} = 3{,}046,$$

$$m_b = m_e = m_h = \frac{6EI_1}{l} = \frac{6 \times 1000 \times 0{,}015}{9{,}849} = 9{,}138,$$

$$k_c = k_f = k_i = \frac{4EI_2}{l} = \frac{4 \times 1000 \times 0{,}009}{5} = 7{,}2,$$

$$l_c = l_f = l_i = \frac{k_c}{2} = 3{,}6,$$

$$m_c = m_f = m_i = \frac{6EI_2}{l} = 10{,}8.$$

3) *Factori de repartiție.* Pentru rotirile nodurilor, factorii de repartiție se calculează ca la metoda obișnuită.

Pentru nodul *2* vom avea

$$\rho_a = -\frac{3}{3 + 6{,}092} = -0{,}330, \qquad \rho_b = -0{,}670.$$

Pentru capetele opuse ale barelor avem coeficienți de transmitere 0,5. Pentru nodul *3* vom avea

$$\rho_b = -\frac{6{,}092}{6{,}092 + 7{,}2} = -0{,}458, \qquad \rho_c = -0{,}542 \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Pentru rotirile barelor procedăm aşa cum s-a arătat în lucrarea [1]. Sistemul avînd patru grade de libertate, vom alege patru deplasări

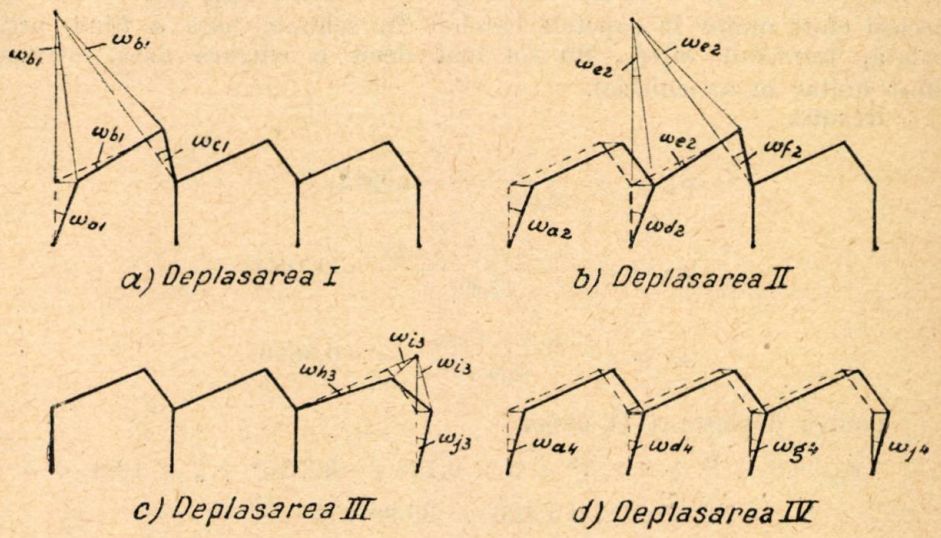


Fig. 2

independente cît mai simple, care să antreneze un număr cît mai mic de bare. Alegerea unor deplasări mai complicate ar putea să reducă numărul iteraţiilor necesare, însă complică calculele de repartizare, ceea ce reclamă o atenţie mai mare şi mai multă obişnuinţă în aplicarea metodei.

S-au ales rotirile indicate în figura 2.

Ţinînd seama de condiţiile geometrice şi cinematice vom avea pentru deplasarea I

$$\omega_{a1} = 1, \quad \omega_{b1} = -\frac{6}{16} = -0{,}375, \quad \omega_{c1} = -\frac{15}{5}\omega_{b1} = 1{,}125;$$

pentru deplasarea II

$$\omega_{a2} = \omega_{d2} = 1, \quad \omega_{e2} = -0{,}375, \quad \omega_{f2} = 1{,}125;$$

pentru deplasarea III

$$\omega_{i3} = 1, \quad \omega_{h3} = 0{,}375, \quad \omega_{i3} = -1{,}125;$$

pentru deplasarea IV

$$\omega_{a4} = \omega_{d4} = \omega_{g4} = \omega_{i4} = 1.$$

Pentru calculul factorilor de repartizare trebuie calculat mai întîi lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare, pentru fiecare deplasare.

În baza relației (30) din [1] vom avea

$$r_{11} = \sum_a m_a \omega_{a1}^2 = 3 \times 1^2 + 2 \times 9{,}138 \times (-0{,}375)^2 +$$

$$+ 2 \times 10{,}8 \times \overline{1{,}125}^2 = 32{,}907$$

(Pentru barele *b* și *c* s-au luat de două ori termenii $m\omega_1^2$, deoarece avem același efort unitar în capetele barelor. În schimb, bara *a* fiind articulată, termenul $m_a\omega_{a1}^2$, nu s-a luat decît o singură dată, neavînd efort unitar în articulație).

Rezultă

$$\rho_{a1} = -\frac{3 \times 1}{32{,}907} = -0{,}0912,$$

$$\rho_{b1} = -\frac{9{,}138 \times (-0{,}375)}{32{,}907} = 0{,}1041,$$

$$\rho_{c1} = -\frac{10{,}8 \times 1{,}125}{32{,}907} = -0{,}3692.$$

Pentru deplasarea II avem

$$r_{22} = 3 \times 1^2 + 3 \times 1^2 + 2 \times 9{,}138\,(-0{,}375)^2 + 2 \times 10{,}8 \times$$

$$\times \overline{1{,}125}^2 = 35{,}907.$$

Rezultă

$$\rho_{a2} = -\frac{3 \times 1}{35{,}907} = -0{,}0835, \qquad \rho_{d2} = 0{,}0835,$$

$$\rho_{e2} = -\frac{9{,}138 \times (-0{,}375)}{35{,}907} = 0{,}0954,$$

$$\rho_{f2} = -\frac{10{,}8 \times 1{,}125}{35{,}907} = -0{,}3384.$$

La fel vom găsi

$$\rho_{f3} = -0{,}0912,$$

$$\rho_{h3} = -0{,}1041,$$

$$\rho_{i3} = 0{,}3692$$

și, în sfîrșit,

$$r_{44} = 4 \times 3 \times 1^2 = 12,$$

deci

$$\rho_{a4} = \rho_{d4} = \rho_{g4} = \rho_{j4} = -\frac{3}{12} = -0{,}25.$$

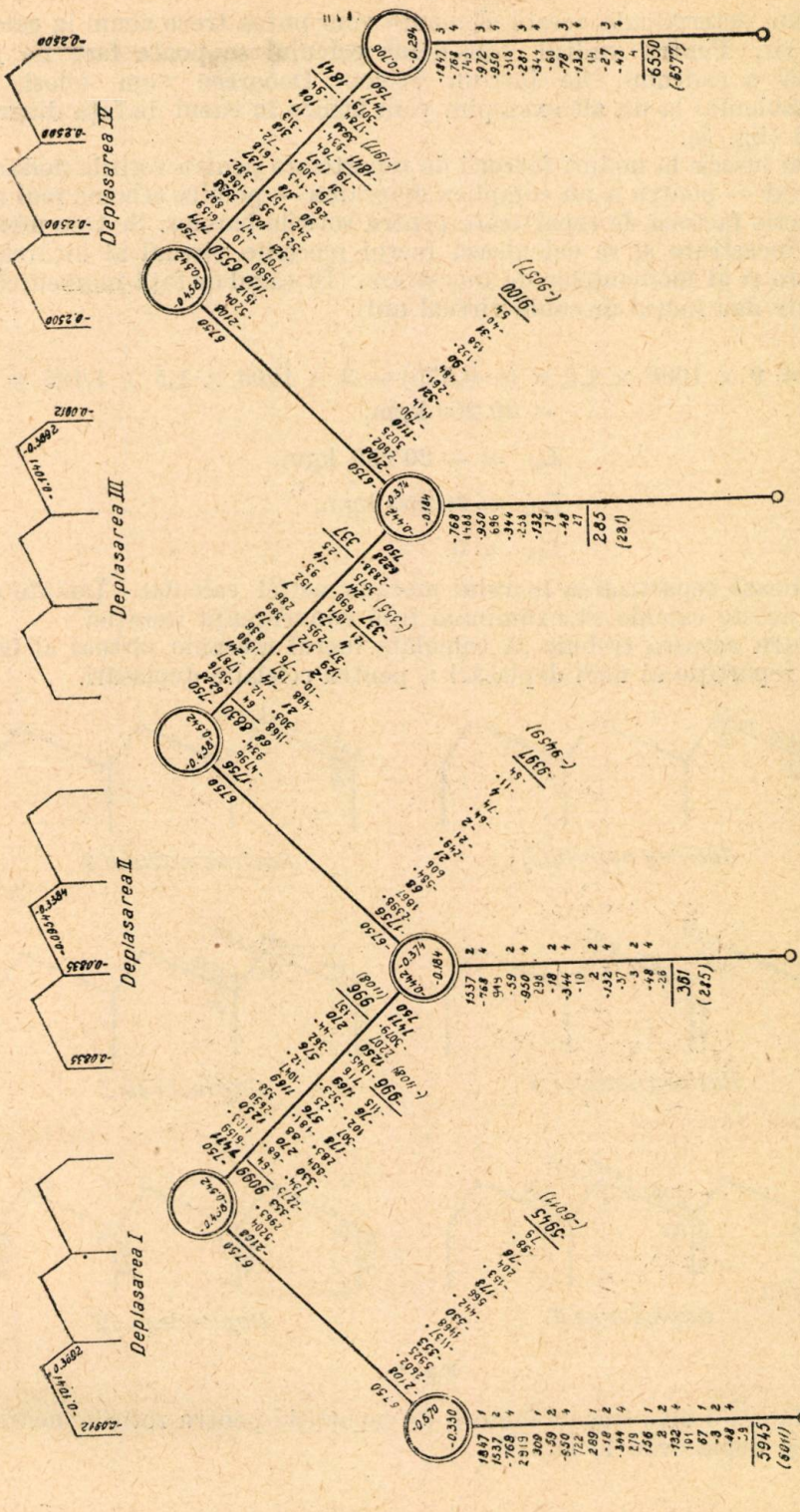


Fig. 3

Avînd determinate aceste elemente vom putea trece acum la calculul propriu-zis. Pentru cadrul considerat calculul se poate face fie pe o diagramă a cadrului, fie într-un tablou. Deoarece vom folosi procedeul tabloului la un alt exemplu, vom utiliza în cazul de față diagrama cadrului (fig. 3).

Vom înscrie la noduri factorii de repartizare pentru rotirile nodurilor, iar separat — pentru a nu complica diagrama — pe alte scheme mai mici, vom înscrie factorii de repartizare pentru rotirile barelor. Se trec momentele de încastrare și se calculează lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare și al momentelor de încastrare. (În cazul de față momentele de încastrare dau lucrul mecanic virtual nul).

Avem

$$L_{\text{I}} = 9 \times 1000 \times 4{,}5 \times (-0{,}375) - 3 \times 1000 \times 1{,}5 \times 1{,}125 = -20\,250 \text{ kgm},$$

$$L_{\text{II}} = -20\,250 \text{ kgm},$$

$$L_{\text{III}} = 20\,250 \text{ kgm},$$

$$L_{\text{IV}} = 0.$$

Urmează repartizarea lucrului mecanic astfel calculat. Înainte de a efectua aceste calcule să examinăm însă convergența iterației.

Pentru aceasta trebuie să calculăm lucrul mecanic virtual al factorilor de repartiție ai unei deplasări i, pentru celelalte deplasări.

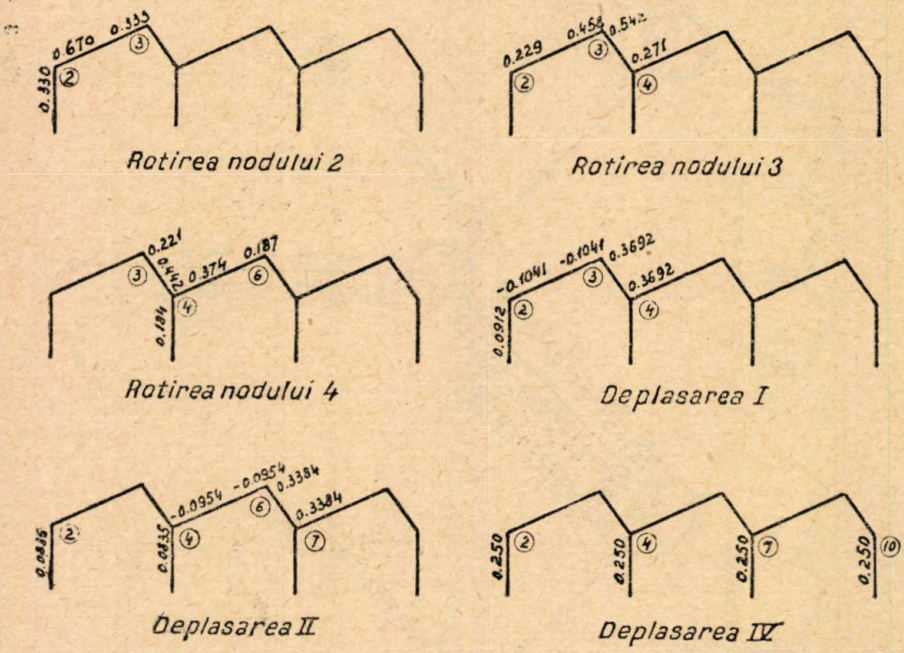


Fig. 4

În figura 4 sînt trecuți factorii de repartiție pentru rotirile nodurilor 2, 3, 4 și deplasările I, II, IV.

Pentru rotirea nodului *2*, factorii de repartiție dau lucru mecanic virtual la rotirea nodului *3* și deplasările I, II și IV. Avem

valoarea absolută a l. m. virtual al rotirii *3*	0,335
" " " " " " deplasării I . . .0,330−0,375 (0,670 + 0,335) =	0,047
" " " " " " " II	0,330
" " " " " " " IV	0,330
Total	1,042>1

Pentru rotirea nodului *3*, factorii de repartiție dau lucru mecanic virtual la rotirile nodurilor *2* și *4* și la deplasarea *1*. Avem

valoarea absolută a l. m. virtual al rotirii *2*	0,229
" " " " " " " *4*	0,271
" " " " " " deplasării I . . . − 0,375 × (0,229 + 0,458) + + 1,125 (0,542 + 0,271) =	0,657
Total	1,157 >1

Pentru rotirea nodului *4* avem

rotirea *3*	0,221
" *6*	0,187
deplasarea II . . . . . .0,184 − 0,375 (0,374 + 0,187) =	0,026
" IV	0,184
Total	0,618<1

La fel vom găsi pentru

rotirea nodului *6*	0,710<1
" " *7*	0,592<1
" " *9*	0,728<1
" " *10*	1,011>1

Pentru deplasarea I vom avea

rotirea *2* . . . . . 0,0912 − 0,1041 =	0,0129
" *3* . . . . . 0,3692 − 0,1041 =	0,2651
" *4*	0,3692
deplasarea II . . . . . 1 × 0,0912 =	0,0912
" IV	0,0912
	0,8296<1

La fel găsim pentru

deplasarea II	0,9273<1
" III	0,738ɔ<1
" IV	2,000>1

Din cele 11 condiții de convergență numai 7 sînt îndeplinite. Aceasta înseamnă că sistemul este încet convergent, deci nu ar fi indicat să aplicăm metoda distribuirii momentelor. O vom aplica totuși, folosind metoda de iterație Seidel, pentru a mări convergența.

Lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare îl repartizăm barelor respective, prin înmulțirea cu factorii de repartiție calculați.

Astfel obținem respectiv pentru barele a, b, c

$$M^a_{21} = -20\,250 \times (-0{,}0912) = 1847 \text{ kgm},$$

$$M^b_{21} = M^b_{31} = -20\,250 \times 0{,}1041 = -2108 \text{ kgm},$$

$$M^c_{31} = M^c_{41} = -20\,250 \times (-0{,}3692) = 7471 \text{ kgm}.$$

Aceste momente s-au înscris pe diagramă la barele respective.

La repartizarea lucrului mecanic dat de deplasarea II vom ține seama și de momentul introdus în bara a prin repartizarea lucrului mecanic virtual al deplasării I. Vom repartiza deci lucrul mecanic virtual

$$L'_2 = -20\,250 + 1847 = -18\,403 \text{ kgm},$$

care ne va da în barele a, d, e și f momentele

$$M^a_{22} = M^d_{42} = -18\,403 \times (-0{,}0835) = 1537 \text{ kgm},$$

$$M^e_{62} = -18\,403 \times 0{,}0954 = -1756 \text{ kgm},$$

$$M^f_{62} = M^f_{72} = -18\,403 \times (-0{,}3384) = 6228 \text{ kgm}.$$

Repartizarea lucrului mecanic virtual dat de deplasarea III ne dă momentele

$$M^h_{73} = M^h_{93} = 20\,250 \times (-0{,}1041) = -2108 \text{ kgm},$$

$$M^i_{93} = M^i_{103} = 20\,250 \times 0{,}3692 = 7471 \text{ kgm},$$

$$M^j_{103} = 20\,250 \times (-0{,}0912) = -1847 \text{ kgm}.$$

Încărcările exterioare nu au dat lucru mecanic în deplasarea IV; deoarece însă prin repartizările precedente s-au introdus momente în stîlpi, lucrul mecanic va deveni acum

$$L'_{IV} = (1847 + 1537) + 1537 - 1847 = 3074 \text{ kgm},$$

care repartizat la stîlpi ne dă momentele

$$M^a_{24} = M^d_{44} = M^g_{74} = M^j_{104} = -0{,}250 \times 3\,074 = -768 \text{ kgm}.$$

(În schema de calcul, momentele obținute în stîlpi prin repartizarea lucrului mecanic virtual al celor patru deplasări s-au notat în dreapta cu cifrele 1, 2, 3, 4, pentru a nu fi luate din greșeală în calcul și la repartizările ulterioare. Tot pentru a nu se produce confuzii, s-au scris aceste momente cu cifre cursive, momentele obținute din repartizarea în jurul nodurilor s-au trecut cu cifre drepte, iar momentele transmise din nodurile vecine, cu cifre drepte urmate de un punct. În calculele obișnuite se pot folosi culori diferite pentru înscrierea momentelor spre a se putea deosebi mai ușor).

După repartizarea lucrului mecanic dat de fiecare deplasare, se repartizează și se transmit momentele din jurul fiecărui nod, ca la cadrele cu noduri fixe, însumînd atît momentele de încastrare cît și cele obținute prin lucrul mecanic virtual al deplasărilor.

În exemplul de față s-a plecat de la nodul 3 și s-a repartizat momentul

$$\sum M_3 = 6750 - 2108 - 750 + 7471 = 11\ 363 \text{ kgm},$$

care a dat în cele două bare

$$M_3^b = 11\ 363 \times (-0{,}458) = -5204 \text{ kgm},$$

$$M_3^c = 11\ 363 \times (-0{,}542) = -6159 \text{ kgm},$$

momente ce au fost apoi transmise la capetele opuse.

În același mod s-au repartizat și momentele în jurul celorlalte noduri, obținîndu-se cifrele înscrise în diagramă. Astfel repartizarea la nodul 2 ne dă

$$\sum M_2 = 1847 + 1537 - 768 - 6750 - 2108 - 2602 = -8844 \text{ kgm};$$

încît obținem

$$M_2^a = -8844 \times (-0{,}330) = 2919 \text{ kgm},$$

$$M_3^a = -8844 \times (-0{,}670) = 5925 \text{ kgm}.$$

După terminarea completă a acestei operații va trebui din nou să calculăm și să repartizăm lucrul mecanic virtual al eforturilor introduse prin repartizările precedente.

Pentru deplasarea I vom lua în considerare numai momentele introduse după prima repartizare, încît vom avea

$$L_{\text{I}}'' = (1537 - 768 + 2919) \times 1 + (-2602 + 5925) \times (-0{,}375) + (-5\,204 + 2963) \times (-0{,}375) + (-6159 + 1103) \times 1125 + (-3079 + 2207) \times 1125 = -3387 \text{ kgm},$$

care ne dă

$$M_{21}^{a''} = -3\,387 \times (-0{,}0912) = 309 \text{ kgm},$$

$$M_{21}^{b''} = M_{31}^{b''} = -3\,387 \times 0{,}1041 = -353 \text{ kgm},$$

$$M_{31}^{c} = M_{41}^{c''} = -3\,387 \times (0{,}3692) = 1\,250 \text{ kgm}.$$

La fel vom avea

$$L_{\text{II}}'' = (-768 + 2\,919 + 309) \times 1 + (-768 + 919) \times 1 + (-2\,398 + 1\,867 - 4\,796 + 934) \times (-0{,}375) + (-5\,676 + 1\,787 - 2\,838 + 3\,575) \times 1{,}125 = 712 \text{ kgm},$$

care ne dă

$$M_{22}^{a''} = M_{42}^{d''} = 712 \times (-0{,}0835) = -59 \text{ kgm},$$

$$M_{62}^{e''} = M_{42}^{e''} = 712 \times 0{,}0954 = 68 \text{ kgm},$$

$$M_{62}^{f''} = M_{72}^{f''} = 712 \times (-0{,}3384) = -241 \text{ kgm}.$$

La fel vom repartiza și

$$L''_{III} = 10\,665 \text{ kg} \quad \text{și} \quad L''_{IV} = 3\,802 \text{kgm},$$

după care vom face din nou repartizarea momentelor din jurul nodurilor ca la orice cadru cu noduri fixe.

În iterațiile următoare s-a obținut

$$L_I^{III} = -3164\,, \quad L_{II}^{III} = 217\,, \quad L_{III}^{III} = 3080\,, \quad L_{IV}^{III} = 1376,$$
$$L_I^{IV} = -1\,712\,, \quad L_{II}^{IV} = -18\,, \quad L_{III}^{IV} = 860\,, \quad L_{IV}^{IV} = 529,$$
$$L_I^{V} = -731\,, \quad L_{II}^{V} = 40\,, \quad L_{III}^{V} = 293\,, \quad L_{IV}^{V} = 193.$$

Calculul ulterior poate fi ușor urmărit pe schemă și este condus în același mod. Sumînd apoi momentele, se obțin valorile finale.

Pentru comparație s-au trecut în paranteză și momentele obținute prin metoda eforturilor [2] și se observă că ele nu diferă prea mult de cele obținute prin noua metodă.

EXEMPLUL 2

Se calculează eforturile cadrului cu bare curbe arătat în figura 5. Arcele sînt parabolice cu $I = I_c/\cos\alpha$, iar stîlpii sînt cu secțiune constantă [2].

Sistemul are $n = 4$ noduri și $b = 7$ bare, din care $c = 3$ bare curbe; el are deci $b = 2n - b + c = 2 \times 4 - 7 + 3 = 4$ deplasări independente și 4 rotiri ale nodurilor.

1) *Eforturi de încastrare.* Arcele fiind parabolice cu $I = I_c/\cos\alpha$ și încărcarea uniformă, toate momentele de încastrare ale barelor sînt nule.

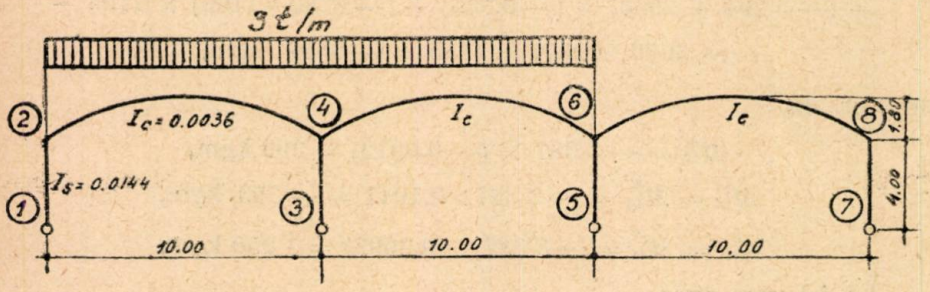


Fig. 5

Împingerile la cheie ale arcelor dublu încastrate, încărcate cu sarcină uniformă sînt

$$\mathcal{H}_{24} = \mathcal{H}_{46} = \frac{pl^2}{8f} = \frac{3 \times 10^2}{8 \times 1{,}8} = 20\,833 \text{ kg},$$

$$\mathcal{H}_{68} = 0.$$

Considerăm împingerile ce dau compresiune în arc cu semnul plus, iar cele ce dau tensiuni cu semnul minus.

2) *Rigidități.* Luînd pentru toate barele valoarea convențională $E = 1\,000$, rigiditățile la rotirea capetelor și deplasarea nodurilor pentru stîlpii articulați, vor fi

$$k = m = \frac{3EI_s}{l} = \frac{3\,000 \times 0{,}0144}{4} = 10{,}8,$$

$$l = 0.$$

Pentru arcele parabolice vom avea următoarele rigidități [1]

$$k_c = \frac{5EI_c}{l} + \frac{3EI_c}{l} + \frac{EI_c}{l} = \frac{9EI_c}{l} = \frac{9\,000 \times 0{,}0036}{10} = 3{,}24,$$

$$l_a = -\frac{5EI_c}{l} + \frac{3EI_c}{l} - \frac{EI_c}{l} = -\frac{3EI_c}{l} = -\frac{3000 \times 0{,}0036}{10} = 1{,}08,$$

$$n_a = -\frac{15}{2} \cdot \frac{EI_c}{lf} = -\frac{15\,000 \times 0{,}0036}{2 \times 1{,}8 \times 10} = -1{,}5,$$

$$p_c = 1{,}5,$$

$$q_c = 1{,}5,$$

$$r_c = \frac{-45}{4} \cdot \frac{E\,I_c}{lf^2} = -\frac{45000 \times 0{,}0036}{4 \times 1{,}8^2 \times 10} = -1{,}25.$$

3) *Deplasările nodurilor.* Se pot alege orice deplasări pentru noduri, cu condiția ca ele să fie independente. Pentru ușurința calculelor vom alege

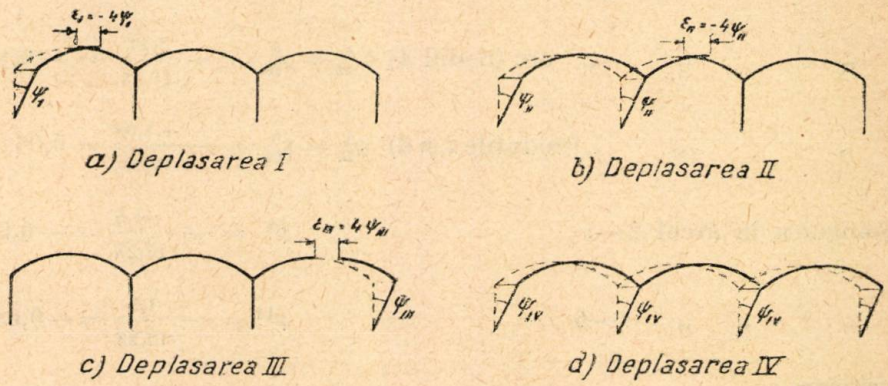


Fig. 6

deplasările indicate în figura 6, deși alegerea altor deplasări ar reduce numărul iterațiilor necesare.

Pe figură sînt indicate relațiile dintre deplasările principale Ψ_I, Ψ_{II}, Ψ_{III}, Ψ_{IV} și alungirile arcelor datorite acestor deplasări.

4) *Factorii de repartiție.* Se calculează conform celor arătate în lucrarea [1].

a. *Rotirea nodului 2.* Lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare din rotirea nodului 2, dat de rotirea virtuală $\bar{\varphi}_2 = 1$ este

$$L_2 = 10{,}8 \times 1 + 3{,}24 \times 1 = 14{,}04.$$

Tinînd seama de definiția factorilor de repartiție, avem pentru:

momente încovoietoare în stîlp $\rho^2_{21} = -\frac{10{,}8}{14{,}04} = -0{,}7692$

„ „ „ arc (nodul 2) $\rho^2_{24} = -\frac{3{,}24}{14{,}04} = -0{,}2308$

„ „ „ (nodul 4) $\rho^2_{42} = -\frac{-1{,}08}{14{,}04} = 0{,}0769$

împingerea în arcul 2—4 $\rho^2 = -\frac{1{,}5}{14{,}04} = -0{,}1068.$

Verificare:

$$\rho^2_{21} + \rho^2_{24} = -1.$$

b. *Rotirea nodului 4*

$$L_4 = 10{,}8 \times 1 + 2 \times 3{,}24 = 17{,}28$$

și avem pentru

momente încovoietoare în stîlp $\rho^2_{43} = -\frac{10{,}8}{17{,}28} = -0{,}6250$

„ „ „ arc (nodul 4) $\rho^2_{42} = \rho^2_{46} = -\frac{3{,}24}{17{,}28} = -0{,}1875$

„ „ „ (nodurile 2 și 6) $\rho^2_{24} = \rho^2_{64} = -\frac{-1{,}08}{17{,}28} = 0{,}0625$

împingerea în arcul 2—4 $\rho^4 = -\frac{-1{,}5}{17{,}28} = -0{,}0868$

„ „ „ 4—6 $\rho^{14} = -\frac{1{,}5}{17{,}28} = -0{,}0868.$

Verificare:

$$\rho^2_{43} + \rho^2_{42} + \rho^2_{46} = -1.$$

c. *Rotirile nodurilor 6 și 8.* Avem aceleași valori ca pentru nodurile 4 și 2.

d. *Deplasarea I.* Lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare din deplasarea virtuală $\Psi_I = 1$ este

$$L_I = -1{,}25 \times (-4)^2 + (-10{,}8) \times 1^2 = -20 - 10{,}8 = -30{,}8.$$

Factorii de repartiție în această deplasare vor fi deci pentru

momente încovoietoare în stîlp $\rho^{I}_{21} = -\frac{-10,8}{-30,8} = -0,3507$

„ „ „ arc $\rho^{I}_{24} = -\frac{6}{-30,8} = 0,1948$

$\rho^{I}_{42} = -\frac{-6}{-30,8} = -0,1948$

împingerea la cheie $\rho^{I} = -\frac{5}{-30,8} = 0,1623.$

Verificare :

$$-4\rho^{I} + \rho^{I}_{21} = -1.$$

e. *Deplasarea II*

$$L_{II} = -1,25 \times (-4)^2 + 2(-10,8) \times 1^2 = -41,6$$

și avem pentru

momente încovoietoare în stîlp $\rho^{II}_{21} = \rho^{II}_{43} = -\frac{-10,8}{-41,6} = -0,2596$

„ „ „ arcul 4—6 $\rho^{II}_{46} = -\frac{6}{-41,6} = 0,1442$

$\rho^{II}_{64} = -\frac{-6}{-41,6} = -0,1442$

împingerea la cheie $\rho^{II} = -\frac{5}{-41,6} = 0,1202$

Verificare :

$$-4\rho^{II} + \rho^{II}_{21} + \rho^{II}_{43} = -1$$

f. *Deplasarea III*

$$L_{III} = -1,25 \times 4^2 + (-10,8) \times 1^2 = -30,8$$

și avem pentru

momente încovoietoare în stîlp $\rho^{III}_{87} = -\frac{-10,8}{-30,8} = -0,3507$

„ „ „ arc $\rho^{III}_{68} = \frac{-6}{-30,8} = -0,1948$

$\rho^{III}_{86} = -\frac{6}{-30,8} = 0,1948$

împingerea la cheie $\rho^{III} = -\frac{-5}{-30,8} = -0,1623$

g. *Deplasarea IV.* Lucrul mecanic virtual al eforturilor unitare este

$$L_{IV} = 4(-10{,}8)\times 1^2 = -4\times 10{,}8.$$

Factorii de repartizare pentru momente încovoietoare în stîlpi vor fi

$$\rho_{21}^{IV} = \rho_{43}^{IV} = \rho_{65}^{IV} = \rho_{87}^{IV} = -\frac{-10{,}8}{-4\times 10{,}8} = -0{,}250.$$

În tabloul nr. 1 s-au înscris în rîndurile 1...8 factorii de repartizare calculaţi mai sus, începînd cu cei ai deplasărilor nodurilor.

În rîndul 9 s-au trecut eforturile de încastrare.

În rîndurile ce urmează se trec rezultatele repartizărilor făcute.

5) *Condiţiile de convergenţă.* În figura 7 sînt trecuţi factorii de repartiţie pentru rotirile nodurilor *2* şi *4* şi pentru deplasările I şi IV.

Pentru rotirea nodului *2* avem

valoarea absolută a l. m. al rotirii 4	0,0769
" " " " " "deplasării I $-0{,}7692-4\times(-0{,}1068)=$	0,3420
" " " " " " II	0,7692
" " " " " " IV	0,7692
	1,9573

Pentru rotirea nodului *4* avem din

rotirea *2*	0,0625
" *6*	0,0625
deplasarea I $4\times(-0{,}08668)=$	0,3472
" II $-0{,}6250-4\times(-0{,}0868)=$	0,3778
" IV	0,6250
	1,4750

Pentru deplasarea I avem din

rotirea *2* $-0{,}3507+0{,}1948=$	0,1559
" *4*	0,1948
deplasarea II	0,3507
" IV	0,3507
	1,0521

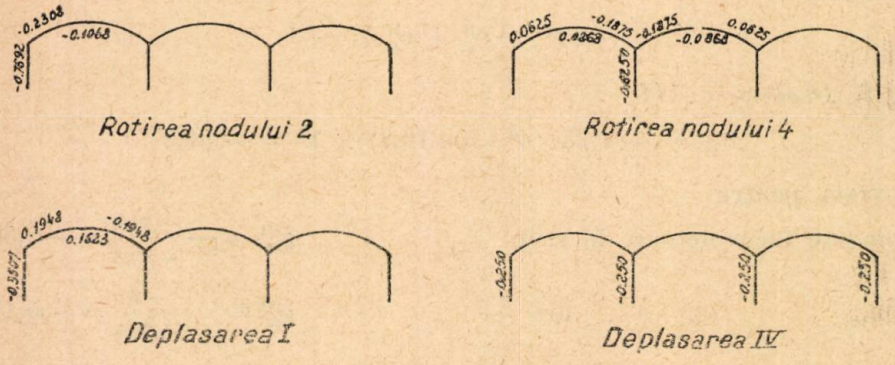


Fig. 7

La fel găsim pentru

deplasarea II	1,2980
" III	0,7403

Tabloul nr. 1

			M_{21}	M_{24}	H_{24}	M_{42}	M_{43}	M_{46}	H_{46}	M_{64}	M_{65}	M_{68}	H_{86}	M_{86}	M_{87}
1	FACTORI DE REPART.	Deplasarea I	−0,3507	0,1948	0,1623	−0,1948									
2		„ II	−0,2596				−0,2596	0,1442	0,1202	−0,1442					
3		„ III										−0,1948	−0,1623	0,1948	−0,3507
4		„ IV	−0,2500				−0,2500				−0,2500				−0,2500
5		Rotirea nodului 2	−0,7692	−0,2308	−0,1068	0,0769									
6		„ „ 4		0,0625	0,0868	−0,1875	−0,6250	−0,1875	−0,0868	0,0625					
7		„ „ 6						0,0625	0,0868	−0,1875	−0,6250	−0,1875	−0,0868	0,0625	
8		„ „ 8										0,0769	0,0868	−0,2308	−0,7692
9		Eforturi de incastr.			20 833				20 833						
10	ITERAȚIA 1	L_I = − 83 332	29 216	−16 233	−13 525	16 233									
11		L_{II} = − 54 116	14 049				14049	7 804	− 6 505	7 804					
12		L_{III} = 0										—	—	—	—
13		L_{IV} = 57 314	−14 328				−14 328				14 328				−14 328
14		L_2 = 12 704	− 9 772	− 2 932	− 1 103	977									
15		L_4 = 9 127		570	792	— 1 711	− 5 705	− 17 11	792	570					
16		L_6 = − 5 954						− 372	— 518	1 117	3 721	1 117	518	− 372	
17		L_8 = − 14 700										−1 131	−1 276	3 393	11 307
18	ITERAȚIA 2	L_I = − 8 807	− 3 089	−1 716	−1 429	1 716									
19		L_{II} = − 42 140	10 940				10 940	−6 187	−5 065	5 187					
20		L_{III} = − 6 053										1 179	982	−1 179	2 122
21		L_{IV} = 22 398	− 5 570				−5 570				−5 570				−5 570
22		L_2 = 7 313	− 5 625	−1 688	− 781	536									
23		L_4 = 1 090		68	95	−205	−681	−205	−95	68					
24		L_6 = 733						46	64	−137	−459	−137	−64	46	
25		L_8 = − 4 581										−352	−398	1 057	3 524
26	ITERAȚIA 3	L_I = 2 489	−873	485	404	−485									
27		L_{II} = − 18 195	4 723				4 723	−2 624	−2 187	2 624					
28		L_{III} = − 3 894										758	632	−758	1 366
29		L_{IV} = 6 698	−1 675				−1 675				−1 675				−1 675
30		L_2 = 2 728	−2 098	−630	−291	210									
31		L_4 = 195		12	17	−37	−122	−37	−17	12					
32		L_6 = 1 367						85	128	−256	−854	−256	−119	85	
33		L_8 = − 982										−75	85	227	755
34	ITERAȚIA 4	L_I = 2 046	−717	398	332	−398									
35		L_{II} = − 6 731	1 747				1 747	−971	−809	971					
36		L_{III} = − 1 056										206	171	−206	370
37		L_{IV} = 828	−207				−207				−207				−207
38		L_2 = 1 233	−948	−285	−132	95									
39		L_4 = 351		22	30	−66	−220	−66	−30	22					
40		L_6 = 917						57	80	−172	−573	−172	−80	57	
41		L_8 = 14										1	1	−3	−11
42	ITERAȚIA 5	L_I = 1 000	−351	195	162	−195									
43		L_{II} = − 2 133	554				554	−307	−256	307					
44		L_{III} = − 534										104	87	−104	187
45		L_{IV} = − 808	202				202				202				202
46		L_2 = 622	−478	−144	−66	48									
47		L_4 = 359		22	31	−67	−224	−67	−31	22					
48		L_6 = 636						40	55	−119	−398	−119	−55	40	
49		L_8 = 325										25	28	−75	− 250
50		Total momente	21 878	−21 856	3 369	16 678	3 483	−20 183	6 439	19 020	−20 141	1 148	512	2 208	−2 208
51		Mom. obțin. prin met. ef. 3	20 530	−20 530	5 135	17 470	1 440	−18 360	5 496	16 960	−20 110	800	467	1 870	−1 870

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

Pentru deplasarea IV avem din

rotirile 2, 4, 6, 8	$4 \times 0{,}250 = 1{,}000$
deplasarea I	$0{,}250$
" II	$-0{,}250 - 0{,}250 = 0{,}500$
" III	$0{,}250$
	$2{,}000$

Pentru rotirile *6* şi *8* vom avea aceleaşi condiţii ca pentru rotirile *4* şi *2*.

Sistemul este încet convergent; va trebui să aplicăm metoda Seidel, în locul iteraţiei simple.

Lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare în deplasarea I este

$$L'_{\mathrm{I}} = \mathcal{H}_{24} \cdot \bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} = 20\,833 \times (-4) = -83\,332 \text{ kgm.}$$

El se repartizează înmulţindu-l cu factorii de repartizare din rîndul 1 din tabloul nr. 1. Eforturile repartizate sînt înscrise în rîndul 10.

Avem apoi

$$L'_{\mathrm{II}} = \mathcal{H}_{46} \cdot \bar{\varepsilon}_{\mathrm{II}} + M'^{\mathrm{I}}_{21} \cdot \bar{\Psi}_{\mathrm{I}} = 20\,833 \times (-4) + 29\,216 \times 1 = -54\,116 \text{ kgm.}$$

El se repartizează, înmulţindu-l cu factorii din rîndul 2. Rezultatele sînt înscrise în rîndul 11.

La fel se calculează şi lucrurile mecanice virtuale pentru celelalte deplasări:

$$L'_{\mathrm{III}} = 0,$$

$$L'_{\mathrm{IV}} = 29\,216 + 14\,049 + 14\,049 = 57\,314 \text{ kgm.}$$

Ultima valoare se repartizează înmulţind-o cu factorii din rîndul 4. Rezultatele sînt înscrise în rîndul 13.

În rîndurile 14. . . 17 se repartizează momentele din jurul nodurilor, ţinînd seama de factorii de repartizare din rîndurile 5 . . . 8.

Avem

$$L'_2 = M'^{\mathrm{I}}_{21} + M'^{\mathrm{II}}_{21} + M'^{\mathrm{IV}}_{21} + M'^{\mathrm{I}}_{24} = 29\,216 + 14\,049 - 14\,328 - 16\,233 = 12\,704,$$

$$L'_4 = M'^{\mathrm{I}}_{42} + M'^{2}_{42} + M'^{\mathrm{II}}_{43} + M'^{\mathrm{IV}}_{42} + M'^{\mathrm{II}}_{46} = 16\,233 + 977 + 14\,049 - 14\,328 - 7\,804 = 9\,127,$$

$$L'_6 = M'^{\mathrm{II}}_{64} + M'^{2}_{64} + M'^{\mathrm{IV}}_{45} = 7\,804 + 570 - 14\,328 = -5\,954,$$

$$L'_8 = M'^{6}_{86} + M'^{\mathrm{IV}}_{87} = -372 - 14\,328 = -14\,700.$$

În liniile 18. . . 25 se trec rezultatele repartizărilor făcute în iteraţia a doua.

La calculul lucrului mecanic al unei deplasări oarecare se iau în consideraţie momentele din secţiunile respective, obţinute prin repartizările deplasărilor precedente, fără a ţine seama de momentele deja repartizate în aceeaşi deplasare a iteraţiei precedente.

Avem

$$L''_{\mathrm{I}} = (M'^{\mathrm{II}}_{21} + M'^{\mathrm{IV}}_{21} + M'^{2}_{21})\bar{\Psi}_{\mathrm{I}} + (H'^{2}_{24} + H'^{4}_{24})\,\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} = (14\,049 - 14\,328 - 9\,772) \times 1 + (-1\,103 + 792) \times (-4) = -8\,807,$$

$$L''_{II} = (M''^{IV}_{21} + M'^{2}_{21} + M''^{I}_{21}) \times \bar{\Psi}_{II} + (M'^{IV}_{43} + M'^{4}_{43}) \bar{\Psi}_{II} + (H'^{4}_{46} + H'^{6}_{46}) \bar{\varepsilon}_{II} =$$

$$= (-14\,328 - 9\,772 + 3\,089) \times 1 + (-14\,328 - 5\,705) \times 1 +$$

$$+ (792 - 518) \times (-4) = -42\,140,$$

$$L''_{III} = (H'^{6}_{86} + H'^{8}_{86}) \bar{\varepsilon}_{III} + (M'^{IV}_{87} + M'^{8}_{87}) \times \bar{\Psi}_{III} =$$

$$= (518 - 1\,276) \times 4 + (-14\,328 + 11\,307) \times 1 = -6\,053$$

$$L''_{2} = (M''^{I}_{21} + M''^{II}_{21} + M''^{IV}_{21}) \times 1 + (M'^{4}_{24} + M''^{I}_{24}) \times 1 =$$

$$= (3\,089 + 10\,940 - 5\,570) + (570 - 1\,716) = 7\,313$$

$$L''_{4} = (M''^{I}_{42} + M''^{4}_{42}) \times 1 + (M''^{II}_{43} + M''^{IV}_{43}) \times 1 + (M'^{6}_{46} + M''^{II}_{46}) \times 1 =$$

$$= (1\,716 + 563) + (10\,940 - 5\,570) + (-372 - 6\,187) = 1\,090,$$

$$L''_{6} = (M''^{II}_{64} + M''^{4}_{64}) \times 1 + (M''^{IV}_{65} \times 1 + (M'^{8}_{68} + M''^{III}_{68}) \times 1 =$$

$$= (6\,187 + 68) - 5\,570 + (-1\,131 + 1\,179) = 733,$$

$$L''_{8} = (M''^{III}_{86} + M'^{6}_{86}) \times 1 + (M''^{III}_{87} + M''^{IV}_{87}) \times 1 =$$

$$= (-1\,179 + 46) + (2\,122 - 5\,570) = -4\,581.$$

La iterația a treia vom avea

$$L''_{I} = (M''^{II}_{21} + M''^{IV}_{21} + M''^{2}_{21}) + (H''^{2}_{24} + H''^{4}_{24}) \times (-4) = 2\,489 \text{ etc.}$$

În exemplul de față s-au efectuat cinci iterații.

Rezultatele se obțin adunînd algebric pe coloane eforturile obținute. Ele sînt înscrise în rîndul 50.

În rîndul 51 sînt indicate eforturile obținute prin metoda eforturilor [2]. După cum se vede ele nu diferă prea mult de cele găsite prin noua metodă. Desigur că prin continuarea iterațiilor s-ar obține rezultate mai apropiate.

EXEMPLUL 3

Cadrul spațial din figura 8 *a* este calculat prin metoda distribuirii momentelor și a forțelor de fixare [3] și [4].

Îl vom calcula acum prin metoda expusă mai sus.

1) *Elemente geometrice.* Raportăm întregul sistem la sistemul de coordonate *Oxyz* ales ca în figura 8 *b*, iar barele la sistemele proprii (*1 2 3*) în care axele (*3*) sînt dirijate după axele barelor, iar axele (*1*) și (*2*) după cele două direcții principale ale fiecărei bare.

Cosinusurile directoare ale axelor, în sistemul $Oxyz$ sînt date de matricele

$$(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

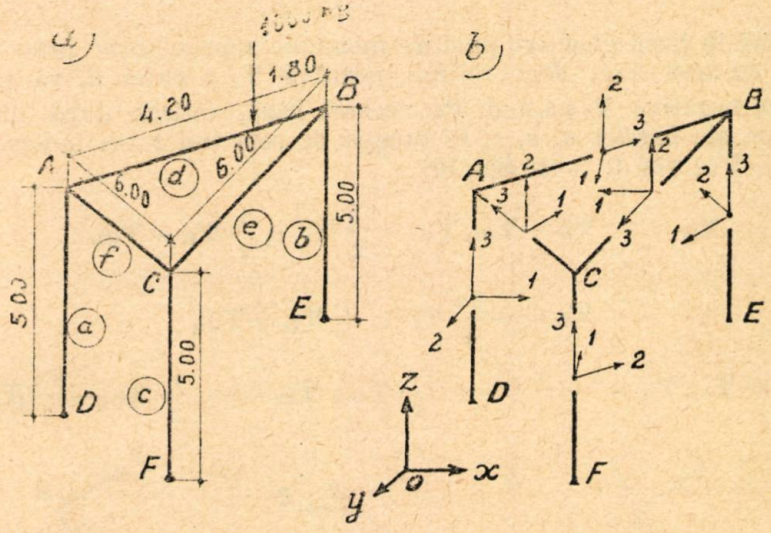


Fig. 8

Cadrul va avea trei rotiri ale celor trei noduri A, B, C, determinate prin componentele lor după axele sistemului principal $O\,x\,y\,z$, iar numărul deplasărilor nodurilor este dat de relația

$$l = 3\,n - b = 3 \times 3 - 6 = 3,$$

deoarece cadrul nu are nici bare curbe, nici bare suplimentare și nici articulații.

Ca deplasări independente vom alege

a) o deplasare a nodurilor A, B, C în direcția $O\,y$, definită prin unghiul de rotire Ψ_{I} al barei AD (fig. 9, *a*).

b) o deplasare în direcția $O\,x$, definită prin unghiul Ψ_{II} al aceleiași bare (fig. 9, *b*).

c) o rotire a triunghiului nedeformabil ABC în jurul centrului său de greutate, definită prin rotirea barelor AD, BE şi CF cu unghiul Ψ_{III} (fig. 9, *c*).

Trebuie să ţinem seama că o rotire pozitivă a barei (în sensul acelor unui ceasornic) produce momente negative. De asemenea, vom ţine seama

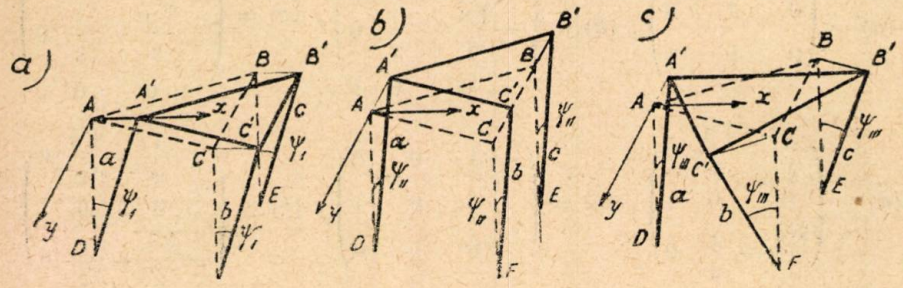


Fig. 9

că o rotire în jurul unei axe produce momente reprezentate prin vectori paraleli cu acea axă, deci rotirea pozitivă Ψ_I a barei *a*, va produce momente negative M_2^a ş.a.m.d. Pe această bază, rotirile după direcţiile principale ale barelor *a*, *b*, *c*, în funcţie de cele trei rotiri independente Ψ_I, Ψ_{II}, Ψ_{III} vor fi (vezi fig. 10)

$$\Psi_{1a} = -\Psi_{II} - \Psi_{III}, \Psi_{1b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_I + \frac{1}{2}\Psi_{II} - \Psi_{III},$$

$$\Psi_{1c} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_I + \frac{1}{2}\Psi_{II} - \Psi_{III},$$

$$\Psi_{2a} = \Psi_I, \Psi_{2b} = -\frac{1}{2}\Psi_I + \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_{II}, \Psi_{2c} = -\frac{1}{2}\Psi_I - \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_{II}.$$

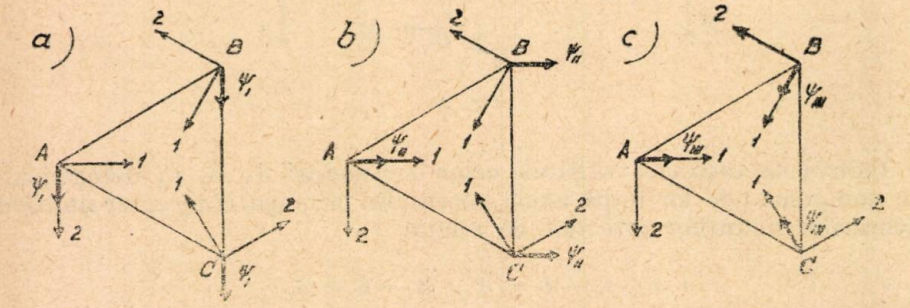


Fig. 10

2) *Rigidităţi la rotirile nodurilor.* Pentru barele *a*, *b*, *c*, avem [3] şi [4].

$$I_1 = I_2 = 341{,}3,$$

$$I_3 = 54{,}7.$$

Pentru barele *d*, *e* şi *f* avem

$$I_1 = 219{,}9,$$

$$I_2 = 83{,}3,$$

$$I_3 = 19{,}1.$$

vom avea deci

$$\lambda^a_{A1} = \lambda^b_{B1} = \lambda^c_{C1} = 4 \times \frac{341{,}3}{5} = 273, \qquad \mu^a_{A1} = \mu^b_{B1} = \mu^c_{C1} = \frac{273}{2} = 136{,}5,$$

$$\lambda^a_{A2} = \lambda^b_{B2} = \lambda^c_{C2} = 4 \times \frac{341{,}3}{5} = 273, \qquad \mu^a_{A2} = \mu^b_{B2} = \mu^c_{C2} = \frac{273}{2} = 136{,}5,$$

$$\lambda^a_{A3} = \lambda^b_{B3} = \lambda^c_{C3} = 4 \times \frac{54{,}7}{5} = 43{,}7, \qquad \mu^a_{A3} = \mu^b_{B3} = \mu^c_{C3} = -43{,}7,$$

$$\lambda^d_{A1} = \lambda^f_{A1} = \lambda^d_{B1} = \lambda^e_{B1} = \lambda^e_{C1} = \lambda^f_{C1} = 4 \times \frac{219{,}9}{6} = 146{,}5$$

$$\lambda^d_{A2} = \lambda^f_{A2} = \ldots \lambda^f_{C2} = 4 \times \frac{83{,}3}{6} = 55{,}6, \; \mu_2 = \frac{\lambda_2}{2} = 27{,}8,$$

$$\lambda^d_{A3} = \lambda^f_{A3} = \lambda^a_{B3} \ldots \lambda^f_{C3} = 4 \times \frac{19{,}1}{6} = 12{,}7, \quad \mu_3 = -\lambda_3 = -12{,}7.$$

3) *Rigidităţi la deplasările nodurilor.* Din cauza indeformabilităţii triunghiului ABC, singurele bare ce se pot roti sînt barele *a*, *b*, *c*. Rigidităţile la rotire ale acestor bare sînt :

$$\nu_1 = 1{,}5\ \lambda_1 \quad \text{şi} \quad \nu_2 = 1{,}5\ \lambda_2 .$$

Factori de repartizare. Ţinînd seama de cosinusurile directoare ale barelor vom avea

$$L_{Ax} = \lambda^a_{A1} \cdot 1^2 + \lambda^d_{A1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^d_{A3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \lambda^f_{A1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^f_{A3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= 273 + \frac{146{,}5}{4} + 12{,}7 \times \frac{3}{4} + \frac{146{,}5}{4} + 12{,}7 \times \frac{3}{4} = 365{,}3.$$

$$L_{Ay} = \lambda^a_{A2} \cdot 1^2 + \lambda^d_{A1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \lambda^d_{A3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^f_{A1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \lambda^f_{A3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 273 + 146{,}5 \times \frac{3}{4} + 12{,}7 \times \frac{1}{4} + 146{,}5 \times \frac{3}{4} + 12{,}7 \times \frac{1}{4} = 499{,}1$$

$$L_{Az} = \lambda^d_{A3} \cdot 1^2 + \lambda^d_{A2} \cdot 1^2 + \lambda^f_{A2} \cdot 1^2 = 43{,}7 + 55{,}6 + 55{,}6 = 154{,}9.$$

La fel obținem

$$L_{Bx} = 465{,}65, \qquad L_{Cx} = 465{,}65,$$
$$L_{By} = 398{,}75, \qquad L_{Cy} = 398{,}75,$$
$$L_{Bz} = 154{,}9, \qquad L_{Cz} = 154{,}9.$$

Rezultă factorii de transmitere

$$\rho_{A1}^{ax} = -\frac{\lambda_{A1}^{a}\,\alpha_{1a}}{L_{Ax}} = \frac{-273 \times 1}{365{,}3} = -0{,}748, \qquad \rho_{D1}^{ax} = -\frac{0{,}748}{2} = -0{,}374,$$

$$\rho_{A1}^{dx} = -\frac{\lambda_{A1}^{d}\,\alpha_{1d}}{L_{Ax}} = \frac{-146{,}5 \times \frac{1}{2}}{365.3} = -0{,}200, \qquad \rho_{B_1}^{dx} = -0{,}100$$

$$\rho_{A1}^{fx} = -\frac{\lambda_{A1}^{f} \cdot \alpha_{1f}}{L_{Ax}} = -0\ 200,$$

$$\rho_{A2}^{dx} = -\frac{\lambda_{A2}^{d} \cdot \alpha_{2d}}{L_{Ax}} = 0,$$

$$\rho_{A2}^{dx} = -\frac{\lambda_{A2}^{d} \cdot \alpha_{2d}}{L_{Ax}} = 0,$$

$$\rho_{A2}^{fz} = 0,$$

$$\rho_{A3}^{ax} = -\frac{\lambda_{A3}^{a} \cdot \alpha_{3a}}{L_{Ax}} = 0,$$

$$\rho_{A1}^{ay} = -\frac{\lambda_{A1}^{a} \cdot \beta_{1a}}{L_{Ay}} = 0,$$

$$\rho_{A2}^{ay} = -\frac{\lambda_{A2}^{a} \cdot \beta_{2a}}{L_{Ay}} = -\frac{273 \times 1}{499{,}1} = -0{,}547,$$

$$\rho_{A1}^{dy} = -\frac{\lambda_{A1}^{d}\,\beta_{d1}}{L_{Ay}} = -\frac{146{,}5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{499{,}1} = -0{,}254,$$

$$\rho_{A2}^{dy} = -\frac{\lambda_{A2}^{d} \cdot \beta_{d2}}{L_{Ay}} = 0,$$

$$\rho_{A3}^{dy} = -\frac{\lambda_{A3}^{d}\,\beta_{d3}}{L_{Aj}} = -\frac{12{,}7\ (-\frac{1}{2})}{499{,}1} = 0{,}013.$$

Ceilalți factori, calculați în mod analog, sînt trecuți în tabloul nr. 2.

Să calculăm acum factorii de repartiție ai lucrului mecanic virtual dat de deplasările $\overline{\Psi}_{\mathrm{I}} = 1$, $\overline{\Psi}_{\mathrm{II}} = 1$, $\overline{\Psi}_{\mathrm{III}} = 1$.

Avînd în vedere că barele a, b, c au aceeași rigiditate după cele două direcții principale și notînd această rigiditate cu ν, vom avea în baza relației (40) din [1].

$$L_{\mathrm{I}} = -2\nu\left[1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = -6\nu,$$

$$L_{\mathrm{II}} = -2\nu\left[(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = -6\nu,$$

$$L_{\mathrm{III}} = -2\nu\,[(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2] = -6\nu.$$

Factorii de repartiție vor fi

$$\rho^{a\mathrm{I}}_{A1} = \rho^{a\mathrm{I}}_{D1} = -\frac{\nu\cdot\omega^{a}_{1\mathrm{II}}}{L_{\mathrm{I}}} = 0,$$

$$\rho^{a\mathrm{I}}_{A2} = \rho^{a\mathrm{I}}_{D2} = -\frac{\nu\cdot\omega^{a}_{2\mathrm{I}}}{L_{\mathrm{I}}} = -\frac{-\nu\cdot 1}{-6\cdot\nu} = -0{,}167,$$

$$\rho^{b\mathrm{I}}_{B1} = \rho^{b\mathrm{I}}_{E1} = -\frac{\nu\cdot\omega^{b}_{1\mathrm{II}}}{L_{\mathrm{I}}} = -\frac{-\nu\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\nu} = -0{,}144,$$

$$\rho^{b\mathrm{I}}_{B2} = \rho^{b\mathrm{I}}_{E2} = -\frac{\nu\cdot\omega^{b}_{2\mathrm{I}}}{L_{\mathrm{I}}} = -\frac{-\nu\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{-6\nu} = 0{,}083 \text{ etc.}$$

Restul factorilor de transmitere, calculați în același fel sînt trecuți în tabloul nr. 2, rîndurile 1 . . . 12.

4) *Eforturi de încastrare.* Numai bara d este încărcată cu o sarcină verticală. Avem

$$M^{d}_{A1} = -378 \text{ kgm}, \qquad M^{d}_{B1} = 882 \text{ kgm}.$$

Aceste momente sînt înscrise în linia 13.

5) *Distribuirea momentelor.* Repartizarea momentelor este făcută în tabloul nr. 2.

Începem prin a repartiza momentele din jurul nodului B.

Vom aplica și aici metoda Seidel, adică vom ține seama la fiecare repartizare de eforturile obținute prin repartizările precedente. Avem

$$L'_{BX} = \alpha_{1d}\, M^{d}_{B1} = \frac{1}{2}\, 882 = 441.$$

Înmulțim această valoare cu factorii de transmitere respectivi, iar rezultatele le înscriem în rîndul 14.

Avem apoi

$$L'_{B\nu} = \beta_{1b}\, M'^{b}_{B1} + \beta_{2b}\, M'^{b}_{B2} + \beta_{3b}\, M'^{b}_{B3} + \beta_{1d}\left(M^{d}_{B1} + M'^{d}_{B1}\right) + \beta_{2d}\, M'^{d}_{B2} +$$

$$+ \beta_{3d}\, M'^{d}_{B3} + \beta_{1e}\, M'^{e}_{B1} + \beta_{2e}\, M'^{e}_{B2} + \beta_{3e}\, M'^{e}_{B3},$$

$$L'_{B\nu} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, 129 - \frac{1}{2}\, 224 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,(882 - 69) - \frac{1}{2}\,(-11) = 709.$$

Momentele repartizate sînt înscrise în rîndul 15.

$$L'_{Bz} = 0.$$

Trecînd la nodul A, avem

$$L'_{Ax} = \frac{1}{2}(-378 - 33 - 113) + \frac{\sqrt{3}}{2}(11 - 11) = -262,$$

$$L'_{Ay} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-378 - 33 - 113 + 52) - \frac{1}{2}(11 - 11 + 8) -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} 52 - \frac{1}{2}(-8) = -454,$$

$$L'_{Az} = 0.$$

Repartizările sînt trecute în rîndurile 17, 18 și 19.
La nodul C

$$L'_{Cx} = -1 \times 69 + \frac{1}{2}(26 - 58) = -85,$$

$$L'_{Cy} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(-25) - \frac{1}{2} 43 + 1 \times 23 - \frac{\sqrt{3}}{2}(26 - 58 + 13) -$$

$$- \frac{1}{2}(8 + 6 - 2) = 34,$$

$$L'_{Cz} = 0.$$

Repartizările sînt trecute în rîndurile 20, 21 și 22.
Pentru deplasările nodurilor, avem

$$L'_{I} = 124 + 248 + \frac{\sqrt{3}}{2}(64 - 210 + 129 - 421) - \frac{1}{2}(112 +$$

$$+ 121 + 224 + 242) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-12 + 10 - 25 + 20) -$$

$$- \frac{1}{2}(22 + 6 + 43 + 12) = -393,$$

$$L'_{II} = -(98 + 196) + \frac{1}{2}(64 - 210 + 57 + 129 - 421 + 57) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}(112 + 121 - 33 + 224 + 242 - 33) + \frac{1}{2}(-12 +$$

$$+ 10 - 57 - 25 + 20 - 57) - \frac{\sqrt{3}}{2}(22 + 6 - 33 + 43 +$$

$$+ 12 - 33) = 23,$$

$$L'_{III} = -(98 + 4 + 196 + 4) - (64 - 210 + 57 - 2 + 129 -$$

$$- 421 + 57 - 2) - (-12 + 10 - 57 - 2 - 25 + 20 -$$

$$- 57 - 2) = 151.$$

Tablou nr. 2

		M_D^a			M_A^a			M_A^d			M_A^f			M_E^b			M_B^b			M_B^d			M_B^e			M_F^e			M_C^e			M_C^e			M_C^f		
		1	3	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	FACTORI DE REPARTITIE φ_{Bx}							−0,074		0,024				0,146	0,254		0,293	0,508		−0,157		−0,024	0,315									0,157					
2	φ_{By}							−0,159		−0,016				−0,296	0,171		−0,593	0,342		−0,318		0,016			−0,032								0,032				
3	φ_{Bz}								−0,180							0,282			−0,282		−0,359			−0,359										−0,180			
4	φ_{Ax}	−0,374			−0,748			−0,200		−0,030	−0,200		0,030							−0,100		0,030													−0,100		−0,030
5	φ_{Ay}		−0,274			−0,547		−0,254		0,013	0,254		0,013							−0,127		−0,013													0,127		−0,013
6	φ_{Az}			0,282			−0,282		−0,359			−0,359									−0,179														−0,179	
7	φ_{cx}										−0,074			−0,024									−0,157			0,147	−0,254		0,293	−0,508		0,315			−0,157		0,024
8	φ_{cy}										0,159			−0,016											0,032	0,296	0,171		0,593	0,342				−0,032	0,318		0,016
9	φ_{cz}											−0,180												−0,180				0,282			0,282		−0,359			−0,359	
10	ψ_I		−0,167			−0,167								−0,144	0,083		−0,144	0,083								0,144	0,083		0,144	0,083							
11	ψ_{II}	0,167			0,167									−0,083	−0,144		−0,083	−0,144								−0,083	0,144		−0,083	0,144							
12	ψ_{III}	0,167			0,167									0,167			0,167									0,167			0,167							
13	EF. de incastr.							−378												882																	
14	$L'_{Bz} = 441$							−33		11				64	112		129	224		− 69		−11	139									69					
15	$L'_{By} = 709$							− 113		−11				−210	121		−421	242		−226		11			−23								23				
16	$L'_{Bz} = 0$								0							0			0		0			0									0				
17	$L'_{Ax} = -262$	98			198			52		8	52		−8							26		−8													26		8
18	$L'_{Ay} = -454$		124			248		115		−6	−115		−6							58		6													−58		6
19	$L'_{Az} = 0$			0			0		0			0									0														0	
20	$L'_{cx} = -85$										6		2										−13			−12	22		−25	43		−27			13		−2
21	$L'_{cy} = 34$										5		0												1	10	6		20	12				−1	11		0
22	$L'_{cz} = 0$											0												0				0			0				0	
23	$L'_I = -393$		66			66								−57	−33		−57	−33								−57	−33		−57	−33							
24	$L'_{II} = 23$	4			4									− 2	− 3		− 2	3								− 2	3		− 2	3							
25	$L'_{III} = 151$	25			25									25			25									25			25							
26	$L''_{Bz} = -65$							5		−2				− 9	−17		− 19	−33		10		2	−20									−10					
27	$L''_{By} = 170$							−27		−3				−50	29		−101	58		−54		3			−5								5				
28	$L''_{Bz} = 0$								0							0			0		0			0									0				
29	$L''_{Ax} = 17$	−6			−13			− 3		−1	− 3		1							−2		1													−2		−1
30	$L''_{Ay} = 39$		−11			−21		−10		1	10		1							−5		−1													5		−1
31	$L''_{Az} = 0$			0			0		0			0									0														0	
32	$L''_{cx} = 10$										−1		0										2			1	−3		3	− 5		3			−2		0
33	$L''_{cy} = 45$										7		−1												1	13	8		27	15				−1	14		1
34	$L''_{cz} = 0$											0												0				0			0				0	
35	$L''_I = -251$		42			42								36	−21		36	−21								−36	−21		−36	−21							
36	$L''_{II} = -29$	−5			− 5									2	4		2	4								2	−4		2	−4							
37	$L''_{III} = 146$	24			24									24			24									24			24							
38	Ef. totale	140	221	0	231	335	0	−392	0	−3	−39	0	−11	−63	192	0	−270	488	0	620	0	3	108	0	−26	−32	−22	0	−19	10	0	35				0	11
39	Prin met. Pălat					337											−303																			

MUZEUM WOJSKA W BIAŁYMSTOKU

Repartizările sînt trecute în rîndurile 23, 24 şi 25.

În rîndurile 26 . . . 37 sînt trecute repartizările obţinute prin a doua iteraţie.

Oprindu-ne cu calculele aici, şi adunînd momentele, pe coloane, obţinem în rîndul 38 momentele finale. Diferenţele faţă de rezultatele obţinute prin metoda dr. Palotás, indicate în rîndul 39, sînt — după cum se vede — destul de mici. Ele ar fi putut fi mai reduse, dacă am fi efectuat mai multe iteraţii. Astfel după a treia iteraţie s-a obţinut

$$M^a_{A2} = 336 \text{ kgm} \quad \text{faţă de} \quad 333 \text{ kgm},$$
$$M^d_{A1} = 411 \text{ kgm} \quad \text{„ „} \quad 423 \text{ kgm},$$
$$M^b_{B1} = -288 \text{ kgm} \quad \text{„ „} \quad -303 \text{ kgm},$$

adică diferenţe de cel mult 5% faţă de metoda dr. Palotás.

Din exemplul de faţă reies avantajele pe care le avem de a rezolva problema printr-o singură schemă de calcul.

În metoda dr. Palotás au trebuit să se efectueze patru calcule pentru cadrul cu noduri fixe, iar după aceea a trebuit să se calculeze forţele de fixare pentru fiecare caz, să se alcătuiască şi să se rezolve sistemul şi în cele din urmă să se calculeze eforturile definitive.

Toate aceste calcule au fost evitate prin metoda arătată, la care numărul operaţiilor a fost mult redus.

În acelaşi timp efectuarea calculelor cu ajutorul tabloului înlătură posibilitatea comiterii de greşeli la repartizarea eforturilor, fiecare iteraţie prezentînd o schemă asemănătoare celei a factorilor de repartizare.

Primită la redacţie la 1 decembrie 1955.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕТОДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем продолжении работы, опубликованной в № 3/1956 вычисляются при помощи изложенного общего метода усилия в раме пильчатой формы, в раме с изогнутыми брусьями и в пространственной раме.

Из расчетов виден способ примененяя, преимущества и недостатки этого способа.

Хотя с точки зрения конвергенции, взятые примеры не являются наиболее подходящими, можно констатировать, что при применении итерационного метода Зейделя вместо простой итерации получаются при довольно ограниченном числе итераций результаты, близкие к таковым же, полученным при помощи классических методов.

UNE THÉORIE GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE DE DISTRIBUTION DES EFFORTS

(RÉSUMÉ)

Faisant suite au travail paru dans le n° 3/1956, on calcule les efforts dans un cadre de shed, un cadre à barres courbes et un cadre spatial, par la méthode générale exposée.

Il en résulte le mode d'application ainsi que les avantages et les désavantages de la méthode.

Quoique, au point de vue de la convergence, les exemples présentés ne soient pas des plus indiqués, on peut constater que par l'application de la méthode Seidel d'itération, au lieu de l'itération simple, on obtient par un nombre assez réduit d'itérations, des résultats rapprochés de ceux obtenus par les méthodes classiques.

BIBLIOGRAFIE

1. Const. C. Popovici, *O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 3, iulie-august-septembrie 1956 (sub tipar).
2. K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau*. J. Springer, Berlin, 1933.
3. László Palotás, *Keretek elmélele és számítása*. Közlekedés és melyépétés tudományi köniv és folyóivatkiadó vállalat, Budapesta, 1951.
4. — *Die Berechnung räumlicher Rahmenkonstruktionen mit dem Momentenausgleichsverfahren* Acta Technica Acad. Scient. Hungaricae, Budapesta, 1952, t. II, fasc. 2—4

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REZISTENŢA MATERIALELOR

NOTĂ ASUPRA UNEI FORMULĂRI A PROBLEMEI SPAŢIALE ÎN CAZUL DINAMIC AL TEORIEI CORPURILOR ELASTICE

DE

M. MIŞICU

Asupra rezolvării prin potenţiali şi funcţii de tensiune generalizate în plan, citǎm lucrarea [1] în care se dă o analiză completă a cazurilor studiate.

În alte lucrări se foloseşte procedeul suprapunerii soluţiilor caracterizînd propagarea fenomenelor dinamice prin unde longitudinale şi transversale, procedeu reluat şi în această lucrare. Recent s-a încercat a se reduce formularea problemei la o singură funcţie de tensiune, care însă este de fapt descompusă în mod real la cele două grupe de soluţii amintite anterior. Funcţia apare introdusă în mod artificial, neputînd fi caracterizată prin condiţii simple pe contur şi exprimîndu-se prin integrale. În realitate, dualitatea fenomenelor dinamice pretinde o reprezentare mai adecvată şi simplă pe care încercăm, să o exprimăm în scopul unei mai clare şi practice formulări.

Fie expresiile lui Stokes ale deplasărilor

$$u = \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x},$$

$$v = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y},$$

$$w = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = 0$$

Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 fiind funcţii ce rămîn a fi determinate. E clar că funcţiile dilatării şi rotaţiilor

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \text{ etc.}$$

satisfac relațiile

$$\omega_x = \Delta\Phi_1; \qquad \omega_y = \Delta\Phi_2; \qquad \omega_z = \Delta\Phi_3; \qquad \theta = \Delta\Phi_0.$$

În cazul forțelor de inerție avem condițiile

$$\left(\Delta - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\theta = \left(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\omega = 0.$$

Se deduc ecuațiile

$$\left(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Delta\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3 = 0; \quad \left(\Delta - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Delta\Phi_0 = 0.$$

Funcțiile Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *rezolvă problema echilibrului dinamic și sînt legate prin relațiile*

$$\Delta\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right\} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right); \text{ etc.}$$

care se mai scriu

$$\left(\Delta - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \left(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right) = 0; \text{ etc.}$$

tensiunile avînd forma

$$T_{xx} = (\lambda + 2\mu)\Delta\Phi_0 - 2\mu\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)\right\},$$

$$T_{xy} = \mu\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)\right\};$$

Aplicație în cazul problemei plane

a. *Cazul mișcării irotaționale*

În cazul mișcării irotaționale problema plană a echilibrului dinamic revine la determinarea funcției Φ_0 *satisfăcînd ecuația* (în ipoteza particulară a descompunerii în unde de propagare de forfecare și compresibilitate pură):

$$\left(\Delta - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_0 = 0$$

expresiile deplasărilor și tensiunilor fiind

$$u = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}; \qquad T_{xx} = \rho\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} - 2\mu\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2},$$

$$T_{xy} = 2\mu\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y}; \qquad T_{yy} = \rho\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} - 2\mu\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}$$

pe contur subzistînd următoarele condiții în direcția normalei și tangentei (N'_x, N'_y fiind componentele eforturilor)

$$N'_x \equiv N'_y \frac{dx}{ds} - N'_x \frac{dy}{ds} = -\rho \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Phi_0}{\partial s}; \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$N'_t \equiv N'_y \frac{dy}{ds} + N'_x \frac{dx}{ds} = 2 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial y}.$$

respectiv

$$u'_n \equiv v \frac{\partial x}{\partial s} - u \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial t},$$

$$u'_t \equiv v \frac{\partial y}{\partial s} + u \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial s}.$$

Ultimile rezultate decurg imediat din cele anterioare. Se elimină soluția armonică, caracterizînd o stare de dilatare nulă cu o rotație nulă și fără forțe de inerție, după cum se poate ușor verifica (se reține doar soluția dinamică). Descompunerea precedentă se știe că e posibilă în condiții uzual verificate de funcțiile rezolvante.

Condițiile de contur rezultă din relațiile evidente

$$ds \frac{N_x}{\mu} = \rho \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} dy - 2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi_0}{\partial s} ds; \quad ds \frac{N_y}{\mu} = -\rho \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} dx + 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0}{\partial s} ds.$$

b. *Cazul mișcării incompresibile*

În cazul mișcării incompresibile eliminînd soluția armonică, deplasările și tensiunile sînt date de funcția ψ *satisfăcînd ecuația*

$$\left(\Delta - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0.$$

Prin intermediul relațiilor

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad T_{xx} = -2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \quad T_{xy} = 0; \quad T_{yy} = 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

pe contur subzistă condițiile (pentru forțe pe contur N''_x, N''_y)

$$N''_x = -2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right]$$

$$N''_t = -2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

sau

$$N''_y \frac{\partial x}{\partial s} + N''_x \frac{\partial y}{\partial s} = -2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$N''_y \frac{\partial y}{\partial s} - N''_x \frac{\partial x}{\partial s} = 0;$$

iar pentru deplasări pe contur, subzistă condițiile

$$u''_x = \frac{\partial \psi}{\partial s}; \qquad u''_l = \frac{\partial \psi}{\partial l}.$$

Demonstrația este imediată. Precizăm că forma tensiunilor în cazul irotațional este cunoscută [2]. Cumulînd soluțiile se pot trata cazuri uzuale practice. Pe contur se consideră încărcările totale $N''_x + N'_x$, $N''_y + N'_y$. Atragem atenția asupra posibilității rezolvării problemei de vibrație prin rezolvarea a două probleme de tip Cauchy prin metoda lui Fourier sau Hadamard [3], asupra căreia vom reveni ulterior. Rezolvarea prin procedee elementare (dezvoltări în serii) este imediată.

Primită la redacție la 29 mai 1956

О ФОРМУЛИРОВКЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ В ДИНАМИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ТЕОРИИ УПРУГИХ ТЕЛ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Дается представление о напряжениях и перемещениях в упругом теле в соответствии с 4 функциями напряжения при существовании сил инерции.

Исходя из выражения Стокса, для перемещений в соответствии с функциями напряжения $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ выводят условные уравнения, которым удовлетворяют эти функции.

С целью дать простое представление для плоского случая, состояние усилий разлагается для случая безвихревого и несжимаемого состояния с устранением статических (гармонических и бигармонических) решений.

Условия контура имеют простую форму.

Можно решать различные задачи наложением одной на другую групп решений каждого типа.

NOTE SUR UNE ÉNONCIATION DU PROBLÈME SPATIAL DANS LE CAS DYNAMIQUE DE LA THÉORIE DES CORPS ÉLASTIQUES

(RÉSUMÉ)

On donne une représentation des tensions et des déplacements dans un corps élastique par rapport à quatre fonctions de tension, pour le cas de l'existence des forces d'inertie.

Partant de la formule de Stokes pour les déplacements par rapport aux fonctions de tension Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3, on déduit les équations de condition satisfaites par ces fonctions.

Dans le but de donner une représentation simple pour le cas plan, on décompose l'état d'efforts pour le cas d'un état irrotationnel et incompressible, en éliminant les solutions statiques (harmoniques et biharmoniques). Les conditions de contour ont une forme simple.

La résolution des différents problèmes peut être réalisée en superposant des groupes de solutions de chaque type.

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Teoria preliminară a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți constanți.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, t. IV, nr. 2, aprilie — mai — iunie 1952, p. 319.
2. N. A. Kilcevski, *Calculul tensorial și aplicații în mecanică.* Ed. tehnică, București, 1956.
3. N. Couranti, D. Hilbert, *Metodî fiziceskoi matematiki.* Oghiz, Moscova, 1953.
4. J. Hadamard, *Problème de Cauchy.* Paris, 1932.
5. — *Propagation des ondes.* Paris, 1903.
6. M. Mișicu, *Determinarea funcțiilor cinetice de tip Maxwell,* pentru *problemea spațială de mișcarea mediilor continue.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 9, septembrie 1956.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

ADERENŢA FIERULUI LA BETON ÎN BETONUL ARMAT. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A ADERENŢEI ŞI A CONTRACŢIEI BETONULUI

DE

ACADEMICIAN N. VASILESCU KARPEN

1. În cîteva note la Academia Romînă*) şi la Academia de Ştiinţe din Paris **), precum şi într-o comunicare la congresul de mecanică aplicată ***), am arătat principala cauză a aderenţei fierului la beton şi consecinţele ce se pot trage din această explicaţie a aderenţei.

2. Am socotit folositor pentru inginerii constructori, pentru cercetătorii în acest domeniu, şi pentru profesorii de mecanică aplicată la rezistenţa materialelor, să strîng laolaltă aceste comunicări, şi să le public în limba romînă, *completîndu-le*.

Aceasta cu atît mai mult, că explicaţia aderenţei este încă discutată şi că un colectiv din Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. studiază actualmente aderenţa fierului la beton. De altfel, folosirea relativ recentă, a betonului precomprimat, justifică continuarea cercetărilor asupra aderenţei şi asupra coeficientului c de contracţie al betonului, considerat la § 7 al acestei lucrări.

3. Multă vreme s-a crezut, şi se crede uneori şi astăzi, că aderenţa se datoreşte unei lipiri a fierului de beton, în felul în care tencuiala aderă de pereţii de cărămidă. Experienţa nu confirmă această ipoteză; dacă se toarnă beton de ciment pe o placă de fier, aderenţa este departe de a avea valoarea pe care o are în betonul armat, ea depinde esenţial de starea suprafeţei fierului; dacă aceasta este netedă şi uleiată, aderenţa este nulă. Experienţa făcută cu bare înconjurate de beton arată că aderenţa subsistă chiar dacă barele sînt vopsite sau uleiate; negreşit că în acest caz nu mai poate fi vorba de lipirea fierului de beton.

4. În realitate aderenţa în chestiune — solidaritatea dintre fier şi beton — este datorită, în principal, contracţiunii betonului din jurul barelor de fier.

---

*) Buletin ştiinţific al Acad. Rom., 1916, anul IV, nr. 9.
**) C.R., 1919, t. 169, p. 21, şi şedinţa din 14 noiembrie 1938, p. 987.
***) *Congrés international de mécanique appliquée*. Paris, septembrie 1946.

În timpul prizei, betonul se contractă, şi bara de fier este strînsă de beton ca de un inel de cauciuc; se produce la suprafaţa de contact o presiune a betonului asupra fierului, şi dacă se încearcă retragerea barei din beton, ea este reţinută de fricţiunea între cele două materiale.

Desigur că fierul poate fi şi lipit de beton, dar această lipire de valoare slabă şi nesigură, nu poate subsista în afara contracţiei betonului. Dacă betonul nu s-ar contracta în timpul prizei, sau dacă s-ar dilata cîtuşi de puţin, lipirea ar dispare.

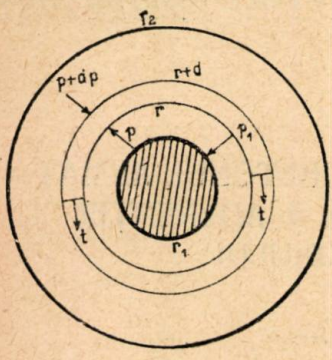


Fig. 1

În construcţiile de beton dărîmate, se constată că betonul nu mai aderă de fier, îndată ce acesta nu este înconjurat pe toate părţile de beton, barele de fier sînt perfect curate, nici o particulă de beton nu aderă de suprafaţa lor. Această constatare a fost chiar punctul de plecare al cercetărilor noastre relative la aderenţă.

5. Se poate calcula aderenţa-fricţiune, datorită contracţiunii betonului şi verifica apoi că valoarea găsită prin calcul, corespunde cu valoarea dată de experienţă. În acest scop să considerăm (fig. 1), o bară de fier de lungime unitate şi de rază r_1, înglobată într-un bloc cilindric de beton, coaxial şi de rază exterioară r_2.

Prin contracţia betonului, şi dacă bara nu ar exista, raza r_1 ar fi scăzut cu

$$\Delta r_1 = c r_1, \tag{1}$$

c fiind coeficientul de contracţie al betonului*).

Bara de fier împiedică, prin rigiditatea ei, să se producă contracţia, determinînd la suprafaţa de separaţie fier-beton, o presiune normală p_1, pe care o determinăm după cum urmează:

Să împărţim blocul de beton, în pături cilindrice coaxiale infinit subţiri, şi să cosiderăm una din aceste pături, de lungime unitate, cuprinsă între cilindrii de raze r şi $r + \mathrm{d}r$. Această pătură este supusă unei presiuni interioare p şi unei presiuni exterioare $p + \mathrm{d}p$.

Tensiunea t, la care este supusă o secţie diametrală a păturii considerate, este dată de relaţia de echilibru

$$2rp - 2(r + \mathrm{d}r)(p + \mathrm{d}p) = 2t\,\mathrm{d}r,$$

de unde

$$t + p = -r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}. \tag{2}$$

Fie E coeficientul de elasticitate al betonului, presupus acelaşi pentru tensiune ca şi pentru compresiune, σ raportul lui Poisson pentru beton.

*) Se presupune că betonul se contractă după solidificare, ca sub influenţa unei scăderi de temperatură.

Sub influența tensiunii t și a presiunii p, pătura de grosime infinit mică și de rază r, se lungește și raza r crește cu

$$\Delta r = \frac{t + \sigma p}{E} r. \tag{3}$$

De asemenea, sub tensiunea $t+\mathrm{d}t$ și presiunea $p+\mathrm{d}p$, raza $r + \mathrm{d}r$ crește cu

$$\Delta (r + \mathrm{d}r) = \frac{t + \mathrm{d}t + \sigma (p + \mathrm{d}p)}{E} (r + \mathrm{d}r).$$

Rezultă pentru micșorarea lui $\mathrm{d}r$

$$\Delta r - \Delta (r + \mathrm{d}r) = -(\mathrm{d}t + \sigma\, \mathrm{d}p) \frac{r}{E} - (t + \sigma p) \frac{\mathrm{d}r}{E}.$$

Dar această micșorare este datorită presiunii p și contracției transversale provocată de tensiunea t, valoarea ei este deci

$$\left(\frac{p}{E} + \sigma \frac{t}{E} \right) \mathrm{d}r;$$

egalînd această valoare cu precedenta, obținem

$$(\mathrm{d}t + \sigma\, \mathrm{d}p)\, r + (1 + \sigma)(t + p)\, \mathrm{d}r = 0. \tag{4}$$

Înlocuind în (4) pe $(t+p)$, cu valoarea sa din (2), obținem

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}p. \tag{5}$$

Integrînd ecuațiile (2) și (5) cu condițiile la limită pentru $r = r_1$, $p = p_1$, și pentru $r = r_2$, $p = 0$, obținem pentru tensiunea în beton, pentru $r = r_1$

$$t_1 = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1} p_1. \tag{6}$$

Procedînd în același mod, obținem pentru tensiunea t'_1 în fier, cu condițiile la limită : pentru $r = r_1$, $p = p_1$, și pentru $r = 0$, $p = 0$

$$t'_1 = -p_1. \tag{7}$$

Cînd pătura cilindrică, din beton, de grosime infinit mică și de rază r, se contractă (bara de fier fiind introdusă), raza r scade cu

$$\delta r = cr - \frac{t + \sigma p}{E} r.$$

De asemenea, pătura de rază r' din fier se contractă și raza r' scade cu

$$\delta r' = -\frac{t' + \sigma' p}{E'} r',$$

E' fiind coeficientul de elasticitate, şi σ' raportul Poisson pentru fier.

Pentru $r = r' = r_1$, $p = p_1$, trebuie ca $\delta r_1 = \delta r_1'$,

$$c - \frac{t_1 + \sigma p_1}{E} = -\frac{t_1' + \sigma' p_1}{E'}.$$

Înlocuind în această relaţie pe t_1 şi t_1' cu valorile lor (6) şi (7), obţinem pentru presiunea betonului asupra fierului

$$p_1 = \frac{C E}{D} \tag{8}$$

cu

$$D = \sigma + \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1} + \frac{1 - \sigma'}{E'} E,$$

iar pentru aderenţa A obţinem

$$A = p_1 f = \frac{C E f}{D}, \tag{9}$$

fiind coeficientul de fricţiune între fier şi beton.

6. Această formulă raţională încadrează destul de bine rezultatele experimentale.

Coeficienţii, c, E, σ nu sînt bine cunoscuţi, ei variază cu calitatea şi compunerea betonului, valorile următoare par acceptabile:

$c = 0{,}0002$ (vezi tabloul nr. 2, § 8),

$\sigma = 0{,}4$,

$E = 350\,000$ kg/cm^2.

Valoarea coeficientului de frecare, fier - beton, depinde de starea suprafeţei fierului, pentru suprafaţa netedă, se poate lua $f = 0{,}7$.

Cu aceste date, şi cu $E' = 2\,000\,000$ kg/cm^2 şi $\sigma' = 0{,}3$, se obţine

$$c E = 70 \text{ kg/cm}^2; \qquad \sigma + \frac{1 - \sigma'}{E'} E = 0{,}52$$

şi tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

$\frac{r_2}{r_1}$	1,2	1,5	2	4	8	∞
D	6,07	3,12	2,2	1,6	1,52	1,52
p_1	11,5	22,6	32	44	47	47 kg/cm^2
t_1	64	59	54	47	47	47 kg/cm^2
A	8,05	15,8	22,4	30,8	32,9	33 kg/cm^2

Valorile aderenței A, din tabloul nr. 1, au fost calculate cu formula (9), presupunînd cunoscuți coeficienții E, σ, f, precum și coeficientul de contracție c al betonului, cunoscînd și raportul $\frac{r_2}{r_1}$.

Este posibil, după cum se va vedea în cele ce urmează, să se determine prin calcul și apoi experimental, valoarea aderenței, fără a cunoaște coeficienții E, σ, f, fără a cunoaște raza exterioară r_2 a blocului de beton sau chiar forma exterioară a acestui bloc, determinînd în același timp coeficientul de contracție c al betonului.

Procedeu pentru măsurarea experimentală a aderenței și a coeficientului de contracție al betonului

7. Pe baza celor expuse în § 5, să arătăm cum este posibil ca din rezultatele obținute prin măsurarea obișnuită a aderenței să se deducă 1) valoarea adevărată a acestei mărimi; 2) valoarea coeficientului c de contracție al betonului.

Pentru măsurarea aderenței, se toarnă beton în jurul unei bare de fier, astfel ca să se formeze un bloc, în general cilindric coaxial.

La cîtva timp după priză, bara este supusă unei tracțiuni crescînde și se măsoară valoarea acestei tracțiuni în momentul cînd bara începe să alunece prin beton. Împărțind această valoare prin suprafața de contact, beton-fier, se obține aderența.

Operînd cu o compresiune a barei, în locul tracțiunii, se obține o altă valoare a aderenței, mult superioară celei obținute prin tracțiune. Faptul se explică ușor.

Dacă T_1 și P_1 sînt respectiv tracțiunea și compresiunea pe centimetrul pătrat exercitate asupra barei pentru a o face să alunece, aderența va fi

în cazul tracțiunii. . . $A_t = \frac{T_1 r_2}{2l}$,

în cazul compresiunii . . . $A_c = \frac{P_1 r_1}{2l}$,

r_1 fiind raza secțiunii barei și l lungimea sa.

Diferența între cele două valori constă în faptul că bara supusă la tracțiune se contractă, pe cînd atunci cînd este supusă la compresiune, bara își mărește diametrul.

De altfel, în ambele cazuri, se obține numai o medie a aderenței, căci aceasta variază mult de-a lungul barei.

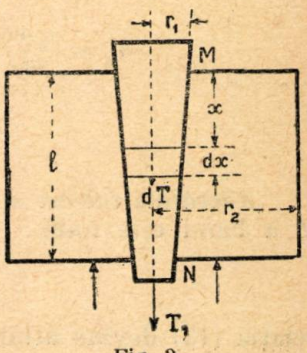


Fig. 2

Să considerăm, în adevăr, figura 2, o bară de fier de lungime l și de rază r_1, înglobată într-un bloc de beton coaxial de rază r_2.

Forța T_1 pe centimetrul pătrat, a secțiunii barei, ce trebuie să-i fie aplicată pentru a o face să alunece, provoacă o tensiune a barei, care variază de la T_1, la extremitatea N, punct de aplicare a forței, la zero, la cealaltă extremitate M a barei.

Fie T şi $T + \mathrm{d}T$, tensiunile la distanţele x şi $x + \mathrm{d}x$ de la punctul M, p presiunea fierului pe beton, şi $A_x = fp$, aderenţa în punctul x.

Elementul de bară de lungime $\mathrm{d}x$, în momentul cînd bara începe să alunece pe toată lungimea, se găseşte supus la forţa $\pi r_1 \mathrm{d}T$, compensată prin forţa datorită aderenţei, $2\pi r_1 f \mathrm{d}x$, egalînd aceste două forţe se obţine aderenţa în punctul x (în cazul tracţiunii)

$$A_x^t = fp = \frac{r_1 \mathrm{d}T}{2\mathrm{d}x}. \tag{10}$$

Elementul $\mathrm{d}x$ sub acţiunea tensiunii T, se contractă cu $\frac{\sigma' T}{E}$ şi lucrurile se petrec ca şi cum coeficientul de contracţie al betonului s-ar reduce cu această cantitate.

Valoarea presiunii p, potrivit formulei (8), devine astfel

$$p = \frac{c - \frac{\sigma' T}{E'}}{D} E. \tag{11}$$

Înlocuind în (10) pe p cu valoarea sa (11), şi integrînd, cu condiţia $x = 0$, $T = 0$, obţinem

$$T = \frac{cE'}{\sigma'} \left(1 - e^{-nx} \right), \tag{12}$$

în care

$$n = \frac{2\sigma' E f}{r_1 D E'}$$

deci

$$A_x^t = \frac{r_1 \mathrm{d}T}{2\mathrm{d}x} = f \frac{c - \frac{\sigma' T}{E'}}{D} E = f \frac{c - c\,(1 - e^{-nx})}{D} E$$

$$A_x^t = \frac{r_1 \mathrm{d}T}{2dx} = \frac{fcE}{D} e^{-nx}. \tag{13}$$

Adevărata valoare A a aderenţei are loc pentru $x = 0$, unde tensiunea T a barei este nulă

$$A = \frac{fcE}{D};$$

relaţia (13) devine atunci

$$A_x^t = \frac{r_1}{2} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = A\, e^{-nx}, \tag{14}$$

considerînd pe n constant şi integrînd între, $T = 0$, $T = T_1$ şi $x = 0$, $x = 1$, obţinem

$$A = \frac{r_1 T_1}{2} \frac{n}{1 - e^{-nl}}. \tag{15}$$

În cazul barei comprimate cu P_1, în locul expresiei (12) am avea,

$$P = \frac{cE'}{\sigma'}\left(e^{nx} - 1\right), \tag{16}$$

în locul expresiei (14) am avea

$$A_x^c = \frac{r_1}{2}\frac{dP}{dx} = A\, e^{nx}, \tag{17}$$

iar expresia aderenței ar fi

$$A = \frac{r_1 P_1}{2}\frac{n}{e^{nl} - 1}; \tag{18}$$

egalînd aceste două expresii (15) și (18), ale lui A, obținem

$$n = \frac{1}{l}\ln\frac{P_1}{T_1}. \tag{19}$$

Introducînd această valoare a lui n, în una sau alta din cele două expresii (15) și (18) ale aderenței, *obținem adevărata valoare experimentală a aderenței*

$$A = \frac{r_1 \ln \dfrac{P_1}{T_1}}{2l\left[\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{P_1}\right]} \tag{20}$$

valoare care trebuie să fie — în oarecare măsură — vecină cu media mediilor A_z și A_c,

$$A_m = \frac{A_t + A_c}{2}.$$

Introducînd în (14) valoarea lui n, pentru aderența în punctul x, în cazul tracțiunii, obținem expresia

$$A_x^t = A\left[\frac{T_1}{P_1}\right]^{\frac{x}{l}}, \tag{21}$$

introducînd în (18) valoarea lui n, pentru aderența în punctul x, în cazul compresiunii, obținem

$$A_x^c = A\left[\frac{P_1}{T_1}\right]^{\frac{x}{l}}. \tag{22}$$

În sfîrșit, pentru $x = 1$, expresiile (12) și (16) devin

$$T_1 = \frac{cE'}{\sigma'}\left(1 - e^{-nl}\right),$$

$$P_1 = \frac{cE'}{\sigma'}\left(e^{nl} - 1\right),$$

și înlocuind pe n prin valoarea sa în T_1 sau în P_1, *pentru coeficientul de contracție al betonului, obținem valoarea*

$$c = \frac{\sigma'}{E'\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{P_1}\right]}. \qquad (23)$$

Formulele (20), (21), (22) și (23) conțin numai datele experimentale, P_1, T_1, r_1, l, x, *coeficienții* E, σ', *relativi la fier, fiind perfect cunoscuți, iar coeficienții incerți* E *și* σ, *relativi la beton fiind eliminați, fiind eliminat și coeficientul de frictiune necunoscut* f.

8. Astfel, prin procedeul mai sus arătat, se poate obține numai pe baza datelor experimentale, P_1 , T_1 :

1) *Adevărata valoare* A *a aderenței.*

2) *Variația aderenței de-a lungul barei de fier întinsă sau comprimată.*

3) *Coeficientul de contracție* c *al betonului, astfel după cum acest coeficient intervine realmente în construcțiile de beton armat.*

Aplicarea formulelor (20) și (23)

9. Încercări au fost făcute, în alt scop, de M. Hangan, în 1937 (teză de doctorat), între altele, asupra a 12 probe. Betonul conținea 445 kg ciment la metrul cub ; probele au fost menținute o zi în cofraje, 6 zile la aer umed și 21 zile la aer uscat. Secțiunea transversală a tuturor blocurilor de beton era de 20 × 20 cm². Armăturile erau calibrate la 25 mm diametru și lustruite.

Jumătate din probe au fost supuse la tracțiune, cealaltă jumătate la compresiune.

Rezultatele brute ale încercărilor (T_1 și P_1), și ale aplicării formulelor, sînt date în tabloul nr. 2, cu $E' = 2\,000\,000$ kg/cm² și $\sigma' = 0{,}3$.

Tabloul nr. 2

Nr. încercărilor	l cm	T_1	P_1	A	A_t	A_c	A_m	$\log \frac{P_1}{T_1}$	c
		kg/cm²							
1	20	645	—	—	20,0	—	—	—	—
				27,5			29,5	0,652	0,0002
2	20	—	1240	—	—	39,0	—	—	—
3	10	470	—	—	29,4	—	—	—	—
				35,5			37,2	0,425	0,0002
4	10	—	720	—	—	45,0	—	—	—

Fiecare cifră a coloanelor T_1, P_1 este media rezultatelor încercărilor cu trei probe.

Încercările nr. 1 și 2 nu au fost simultane cu încercările nr. 3 și 4 ; astfel s-ar putea explica diferența între valorile respective ale aderenței A.

Cîteva observații

10. Prezenta teorie evidențiază importanța astăzi recunoscută a contracției betonului în betonul armat.

Este curios de constatat că multă vreme, unele tratate de beton armat nici nu menționau contracția betonului, iar în caetele de sarcini se prescria invariabilitatea volumului cimentului în timpul prizei; satisfacerea acestei prescripții ar fi făcut cimentul impropriu pentru betonul armat.

Prima noastră notă apărută în 1916, atribuia aderența, contracției betonului. Mult mai tîrziu, în 1936, prof. F. C a m p u s de la Universitatea din Liège, atribuie aderența aceleiași cauze*).

În *Comptes rendus des séances de l'Institut technique de Paris***), bine cunoscutul ing. F r e y s s i n e t, atribuie aderența aceleiași cauze.

Totuși, prof. M e s n a g e r, de la Școala de poduri și șosele din Paris, în cursul său de beton armat, crede că teoria noastră se găsește în contradicție cu faptul că betonul în apă se dilată, și conchide:

„Aderența pare deci că există independent de contracție, dar crește prin contracție și *scade în cazul contrar*".

Oricare ar fi observațiile asupra variațiilor de volum ale betonului menținut în aer sau în apă, ceea ce pare sigur este că, atunci cînd este vorba de beton armat — adică atunci cînd aderența există cu valorile cunoscute — betonul care se găsește în jurul barelor de fier, *trebuie* să se contracte.

Rolul rezistenței betonului la tracțiune și critica teoriei

11. Se știe că, în general, în calculul construcțiilor de beton armat nu se ține seama de rezistența la tracțiune a betonului, considerată nesigură, dacă nu chiar inexistentă.

Teoria expusă aici, arată însă că, tocmai datorită rezistenței betonului la tracțiune, se naște tensiunea t, care strînge betonul — mai precis mortarul de ciment — în jurul barelor de fier, producînd presiunea p, deci aderența betonului de fier și solidaritatea absolut necesară între aceste două materiale.

Tensiunile t_1 ale mortarului de ciment, din pătura infinit subțire în contact cu fierul, tensiuni trecute în tabloul nr. 1, întrec desigur limita de elasticitate a mortarului, mai ales pentru valorile mici ale raportului $\frac{r_2}{r_1}$ (fig. 1). Dar aceasta nu implică ruperea păturii în chestiune. Sub o tensiune superioară limitei de elasticitate, această pătură își mărește neelastic raza, transmițînd păturilor vecine de rază crescîndă, o parte din tensiunea la care este supusă. În consecință, t_1, și p_1 scad, în oarecare măsură, împreună cu aderența.

---

*) Revue Universelle des Mines, 1936, t. XII, seria a 8-a, nr. 1 și 2.

**) 1934, t. I, p. 65, 91, 97.

Prin integrarea ecuațiilor (2) și (5) se obțin relațiile

$$p = p_1 \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1},$$

$$t = p_1 \frac{\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1},$$

$$\text{unde } p_1 = \frac{cE}{D}$$

care ne dau presiunea p și tensiunea t a păturii infinit subțire de rază r.

Critica teoriei

12. În prezenta teorie s-a presupus implicit că, în timpul prizei, betonul, după turnarea lui în jurul barei de fier, s-ar întări devenind un solid elastic, fără a se contracta și că numai după solidificare betonul s-ar contracta, ca sub influența unei scăderi de temperatură, coeficientul de contracție c, fiind același în toată masa betonului. Numai în această presupunere teoria ar fi perfect exactă și aderența ar avea valoarea calculată, astfel după cum s-a arătat în § 5.

Este însă posibil ca, contracția betonului să se producă, parțial, cînd betonul este încă sub formă de pastă, înainte de completa sa solidificare. În acest caz valoarea coeficientului c, care se găsește în formula aderenței (9), ar trebui să fie mai mică decît valoarea sa adevărată.

Această chestiune s-ar putea lămuri, măsurînd, între altele, viteza cu care se face sol dificarea, în raport cu viteza cu care se face contracția betonului de diferite compoziții și tratamente.

În orice caz formulele (20) și (23), care conțin datele experimentale T_1 și P_1, dau aderența reală a fierului la betonul folosit în experiențe și respectiv, coeficientul de contracție care a intervenit în experiențe.

Primită la redacție la 7 aprilie 1956.

СЦЕПЛЕНИЕ ЖЕЛЕЗА С БЕТОНОМ В ЖЕЛЕЗОБЕТОНЕ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЦЕПЛЕНИЯ И УСАДКИ БЕТОНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Сцепление железа с бетоном объясняется усадкой бетона вокруг железных стержней (рис. 1). Расчет упругости приводит для этого сцепления к формуле:

$$A = \frac{cEf}{\sigma + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1 - \sigma'}{E'} E},$$

где c — коэффициент усадки бетона; f — коэффициент трения между железом и бетоном; E и σ — коэффициент упругости и отношение Пуассона для бетона; E' и σ' — те же величины для железа; r_1, r_2 — радиус железного стержня и, соответственно, радиус бетонного цилиндра (рис. 1).

Для опытного определения действительного значения сцепления и коэффициента усадки бетона с учетом изменения диаметров железных стержней во время испытаний, установлены (рис. 2) нижеследующие формулы:

$$A = \frac{r_1 \ln \frac{P_1}{T_1}}{2l\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{P_1}\right]}; \quad c = \frac{\delta}{E'\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{P_1}\right]},$$

где T_1 является силой растяжения на 1 см^2, приложенной к стержню, если опыт заключается в растяжении стержня, а P_1 выражает собой сжатие стержня, если опыт заключается в сжатии.

L'ADHÉRENCE DU FER AU BÉTON DANS LE BÉTON ARMÉ DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE L'ADHÉRENCE ET DE LA CONTRACTION DU BÉTON

(RÉSUMÉ)

L'adhérence du fer au béton s'explique par la contraction du béton autour des barres de fer (fig. 1). Un calcul d'élasticité conduit, pour cette adhérence, à la formule :

$$A = \frac{cEf}{\sigma + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1 - \sigma'}{E'} E}$$

ou c représente le coefficient de contraction du béton;
f, le coefficient de frottement du fer sur le béton;
E, σ, le coefficient d'élasticité et le rapport de *Poisson* pour le béton;
E',σ', les mêmes grandeurs pour le fer;
r_1, r_2, le rayon de la barre et, respectivement, le rayon du cylindre de béton (fig. 1).

En vue d'une détermination expérimentale de la véritable valeur de l'adhésion et du coefficient de contraction du béton, compte tenu des variations du diamètre des barres, pendant les expériences, les formules suivantes ont été établies :

$$A = \frac{r_1 \ln \frac{P_1}{T_1}}{2l\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{P_1}\right]}; \qquad c = \frac{\sigma'}{E'\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{P_1}\right]}.$$

où T_1 est la traction par cm^2 sur la barre de fer, si l'expérience se fait par traction;

P_1 est la compression de la barre, si l'expérience se fait par compression.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

INFLUENŢA COMPOZIŢIEI MINERALOGICE A CIMENTULUI ASUPRA COMPORTĂRII GRINZILOR DE BETON ARMAT LA ÎNCOVOIERE

DE

I. DUMITRESCU şi V. VISARION

În diferite construcţii de beton şi beton armat, în funcţie de caracterul lor, se cere ca materialul să aibă anumite proprietăţi, capabile să le asigure cea mai bună comportare. Această necesitate de a da fiecărui fel de construcţii materialul adecvat, a îndreptat atenţia cercetătorilor asupra acelor factori care influenţează în cea mai mare măsură proprietăţile betonului.

Unul din aceşti factori, a cărui importanţă deosebită a fost apreciată just de-abia în ultimul timp, este compoziţia mineralogică a cimenturilor. Cercetătorii sovietici au arătat legătura între proprietăţile fizico-mecanice ale pietrei de ciment şi structura ei, determinată de compoziţia mineralogică a cimentului. În acest fel s-a dat explicaţia ştiinţifică verificată experimental a schimbării în timp a proprietăţilor fizico-mecanice ale pietrei de ciment, a fenomenelor de contracţie şi curgere.

Prin hidratarea cimentului se formează compuşi cu structură cristalină (rezultaţi din hidratarea C_3S, C_3A şi C_4AF) şi compuşi cu structură gelică (rezultaţi din hidratarea C_3S, C_2S, C_4AF) cu proprietăţi fizico-mecanice deosebite. Astfel, structura cristalină prezintă o mare rezistenţă la alunecarea plastică şi o elasticitate desăvîrşită, iar gelul o limită de elasticitate redusă, care creşte cu timpul şi mari deformaţii plastice la rupere. Raportul între componenţii mineralogici ai cimentului determină şi raportul între partea cristalină şi cea gelică din structura pietrei de ciment şi prin urmare proprietăţile fizico-mecanice ale acesteia. În acest mod compoziţia mineralogică a cimentului apare ca un factor de mare importanţă în problema proprietăţilor fizico-mecanice ale betoanelor şi mai departe în problema comportării elementelor de beton armat la diferite solicitări. În cadrul studiului întreprins de un colectiv format din cercetători de la I.M.A., şi I.C.I.M.C., sub conducerea prof. V. Nicolau, cu scopul de a pune în evidenţă influenţa naturii cimentului asupra proprietăţilor fizico-mecanice ale betonului şi betonului armat şi a trage concluzii asupra posibilităţii de folosire în diferite construcţii a cimenturilor noastre, s-au făcut o serie de încercări cu grinzi de beton armat supuse la încovoiere.

Pînă acum s-a acordat o mare atenţie comportării elementelor de beton armat supuse la încovoiere şi în literatură există un număr însemnat de lucrări experimentale şi teoretice privind diferite aspecte ale acestei probleme.

Măsura în care însă compoziţia mineralogică a cimentului influenţează comportarea elementului de beton armat, supus la încovoiere, reprezintă un aspect nou al problemei care

îşi are importanţa sa. O dată cu lărgirea sortimentului de materiale este necesară pe de o parte verificarea valorii unor anumiţi coeficienţi din teorii, a căror generalitate este suficientă pentru a putea cuprinde fenomenul (de exemplu, teoria fisurării şi a rigidităţii a lui Murașov); pe de altă parte, introducerea în practica construcţiilor a armăturilor de rezistenţă înaltă şi cu profil periodic ridică la o nouă treaptă de actualitate problema proprietăţilor deformative şi de adeziune ale betoanelor a căror cunoaştere este necesară de exemplu şi pentru lărgirea teoriei existente a ruperii elementelor de beton armat supuse la încovoiere.

Scopul încercărilor făcute cu grinzi într-o primă etapă, a fost stabilirea influenţei compoziţiei mineralogice a cimentului asupra :

a. momentului de apariţie a fisurilor.

Natura cimentului îşi spune aici cuvîntul prin deformaţiile limită la întindere, rezistenţa la întindere, valoarea contracţiei ;

b. distanţei dintre fisuri şi a procesului de deschidere a fisurilor.

Influenţa compoziţiei mineralogice a cimentului intervine prin rezistenţa la întindere şi valoarea adeziunii ;

c. rigidităţii grinzilor în diferite stadii de încercare.

S-a urmărit verificarea teoriei lui Murașov şi a posibilităţii utilizării pentru tipurile de betoane studiate a coeficienţilor daţi de el ;

d. comportării la rupere a grinzilor de beton armat de vîrste diferite.

Aceste aspecte au importanţă pentru problema decofrării timpurii a construcţiilor.

PROGRAMUL ÎNCERCĂRILOR

Conform scopului propus de a se pune în evidenţă influenţa compoziţiei mineralogice asupra comportării grinzilor de beton armat supuse la încovoiere, s-au confecţionat 12 tipuri a cîte 2 grinzi din fiecare tip, în total 24 bucăţi.

Tabloul nr. 1

Nr. cr.	Notaţie	Tipul cimentului	A/C	Vîrsta de încercare
1	A_1	a	0,50	28
2	A_2	a	0,65	28
3	B_1	b	0,50	28
4	B_2	b	0,65	28
5	P_1	p	0,50	28
6	P_2	p	0,65	28
7	A_1'	a	0,50	4
8	A_2'	a	0,65	4
9	B_1'	b	0,50	4
10	B_2'	b	0,65	4
11	P_2'	p	0,50	4
12	P_2'	p	0,65	4

Pentru toată seria s-au păstrat constante dimensiunile şi coeficientul de armare. Secţiunea grinzii s-a luat 15/28 iar deschiderea 3 m. Coeficientul de armare a fost 1,75 %.

S-a variat tipul de ciment, raportul apă ciment şi vîrsta de încercare. Cele 12 tipuri de grinzi din seria I-a sînt date în abloul nr. 1.t

Grinzile au fost astfel armate, așa încît să se excludă posibilitatea ruperii din forțe tăietoare. Dimensiunile și armarea grinzilor sînt date în figura 1. Cimenturile au fost de trei tipuri *A*, *B* și *P*, a căror compoziție mineralogică este arătată în tabloul nr. 2.

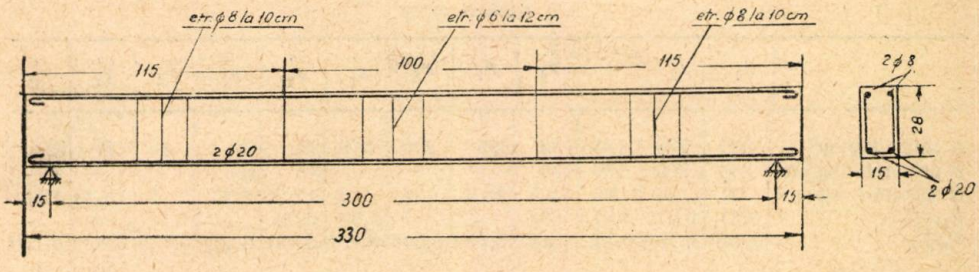


Fig. 1

Tabloul nr. 2

Tipul	C_3S %	C_2S %	C_3A %	C_4AF %	Marca cimentului kg/cm²
Clinker *A*	47,7	29,8	2,1	18,0	544
„ *B*	26,0	53,0	1,2	17,0	369
„ *P*	44,0	32,0	11,0	11,0	523

Betonul a avut următoarea compoziție :

Raport *A/C* 0,50

Ciment	300 kg
Apă	150 ”
Agregate :0/1	294 ”
1/3	351 ”
3/7	331 ”
7/15	974 ”

Raport *A/C* 0,65

Ciment	300 ”
Apă	195 ”
Agregate : 0/1	284 ”
1/3	341 ”
3/7	322 ”
7/15	946 „

Fiecare tip de grindă și tipul corespunzător, însă diferit numai prin vîrstă de încercare, s-au turnat din același beton. Betonarea s-a făcut cu aplicarea vibratorilor. O dată cu grinzile pentru fiecare tip, s-au turnat cîte 8 cuburi 20/20/20, 6 prisme 20.20.80 și 8 grinzișoare 10.10.55, pe care s-au determinat caracteristicile betonului. De asemenea, din armătura fiecărei grinzi s-au lăsat probe pe care s-a determinat limita de curgere a armăturii.

Rezultatele încercării pe probele martor sînt date în tabloul nr. 3.

Grinzile şi celelalte probe care urmau a fi încercate la 28 zile au fost ţinute, la început, 7 zile în nisip umed, iar restul de timp în condiţiile atmosferice din hala de turnări de la A.P.U. (I.C.I.M.C.).

Tabloul nr. 3

	A_1	A_2		B_2	P_1	P_2	A_1'	A_2'	B_1'	B_2'	P_1'	P_2'
R cubic kg/cm²	300	220	185	120	320	270	110	93	60	40	120	85
R prismatic kg/cm²	244	200	150	100	—	—	—	87	55	—	—	—
R tensiune kg/cm²	31	24	26	22,5	28,5	26	14	12,75	8,25	7	15,20	12,8
R_{pr}/R_c	0,81	0,91	0,81	0,84	—	—	0,94	0,92	—	—	—	—
R_t/R_c	0,109	0,109	0,14	0,187	0,089	0,096	0,127	0,137	0,137	0,175	0,127	0,150

Grinzile şi probele încercate la 4 zile, nu au fost ţinute în nisip umed.

METODICA ÎNCERCĂRILOR

Grinzile au fost încercate astfel încît să se obţină o zonă de moment constant în treimea mijlocie (fig. 2). O parte din grinzi au fost încercate prin încărcare cu greutăţi, folosindu-se instalaţia din figura 3. Transmiterea sarcinii s-a făcut prin intermediul unor cuţite metalice aşezate la capetele grinzii. Pentru a verifica repartizarea sarcinii, la primele încercări s-au pus în punctele A mesdoze pentru compresiune, care au arătat că reacţiunile în aceste puncte sînt neglijabile (maximum 0,01 %). Restul de grinzi au fost încercate la presă. Transmiterea sarcinii de la presă la grinzi s-a făcut prin intermediul unei grinzi metalice şi a două cuţite.

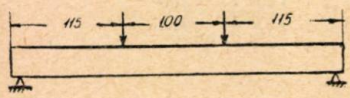


Fig. 2

Greutatea proprie a grinzilor, ca şi greutatea platformei şi a cuţitelor s-au luat în consideraţie în calculul momentelor.

Pe fiecare grindă s-a pus cîte 5 tensometre mecanice de tip Huggenberger şi 5 microcomparatoare.

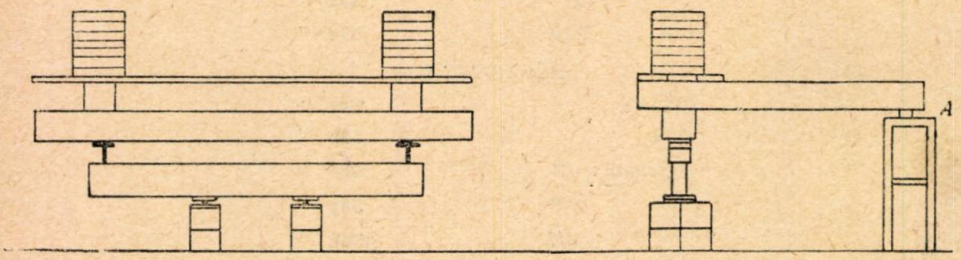


Fig. 3

Încercarea s-a făcut în 2 etape : întîi s-a încercat grinda pînă la apariţia fisurilor şi s-a descărcat ; apoi s-a încărcat din nou pînă la rupere.

În prima etapă, treptele de încercare au fost de 200 kg ceea ce reprezintă aproximativ 0,11...0,13 din sarcina de fisurare. În etapa următoare treptele de încărcare au fost de 400 kg ceea ce reprezintă 0,05...0,07 din sarcina de rupere.

În prima etapă toate tensometrele s-au pus în zona tensionată pentru a putea prinde momentul de apariție al fisurilor. Baza tensometrelor s-a luat 10 cm. În etapa a doua în zona tensionată s-au pus 2 tensometre cu baza 20 cm iar în zona comprimată 3 tensometre cu baza 10 cm.

Săgețile grinzii s-au măsurat sub sarcini, în mijlocul deschiderii și de asemenea și pe reazem, pentru a putea exclude prin calcul influența tasării reazemelor.

S-a urmărit apariția și deschiderea fisurilor cu ajutorul unei lupe micrometrice, cu putere de mărire de 10 ori.

Toate aparatele s-au scos la o sarcină mai mică decît cea de rupere cu scopul de a evita distrugerea lor. Acest fapt a dus la imposibilitatea cunoașterii deformațiilor în preajma momentului de rupere.

PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE

Pentru fiecare grindă încercată s-au trasat diagramele deformațiilor liniare arătate de fiecare tensometru și diagramele săgeților din mijlocul grinzii și de sub sarcini.

Pe baza lor s-au calculat deformațiile medii lineare și curburile, pentru care de asemenea s-au trasat diagramele.

Apariția fisurilor

Experiențele făcute au arătat că fisurile apar înainte de momentul rezultat din calcul. Acest fenomen a fost înregistrat și în experiențele altor cercetători (Murașov, Nemirovski).

Pentru calculul momentului de fisurare am folosit formula lui Murașov:

$$M_f = b\,h^2\,R_t\,(0{,}292 + 0{,}75\,\mu\,n'_t),$$

unde

$$n'_t = \frac{E_a}{E'_{bt}} = \frac{E_a\,\varepsilon_t}{R_t}$$

în care:

E'_{bt} reprezintă modulul elastico-plastic al betonului supus la întindere;

ε_t, deformația limită la întindere a betonului;

R_t, efortul unitar de rupere la întindere al betonului. Caracteristic pentru această formulă este faptul că deformația limită a betonului la întindere este considerată ca depinzînd numai de marcă. Sînt o serie de alte formule în care această deformație se ia în funcție și de procentul de armare și de diametrul armăturii, pornindu-se de la punctul de vedere că armătura contribuie la mărirea valorii lui ε_t. S-a dovedit însă că prezența armăturii nu are influență asupra deformației limite la întindere a betonului ci numai asupra procesului de deschidere a fisurilor.

În realitate ε_t trebuie să depindă nu numai de marca, ci și de alte caracteristici ale betoanelor, ca: natura cimentului, natura agregatelor, factorul apă/ciment.

Momentul de fisurare din experiențe a fost comparat cu momentul calculat cu formula lui Murașov. R_t și n'_t luîndu-se din tabelul corespunzător mărcii betonului găsită experimental. Rezultatele sînt date în tabloul nr. 4.

După cum se vede nu sînt diferențe mari între tipurile pe bază de ciment alitic, belitic și portland în ceea ce privește abaterea de la momentul de calcul. Diferențe sensibile sînt numai între tipurile cu A/C 0,5 și 0,65.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Acest fapt ne-ar putea duce la concluzia că deformaţia limită a betonului la întindere nu este influenţată de compoziţia mineralogică a cimentului ci numai de factorul A/C şi anume în sensul măririi lui ε_t o dată cu A/C. Trebuie însă să se ţină seama că în formula de calcul

Tabloul nr. 4

	A_1	A_2	B_1	B_2	P_1	P_2
M_{exp} kgm	850	900	650	800	850	950
$\frac{M_{exp}}{M_{calc}}$	0,75	0,93	0,71	0,94	0,74	0,91

s-a introdus R_t în funcţie de marcă şi nu valoarea lui obţinută din experienţe şi în acelaşi timp nu s-a ţinut seama de eforturile interioare datorite contracţiei.

Dacă se face comparaţia cu momentul de calcul, în care se introduce valoarea lui R_t găsită din proba de încovoiere a grinzişoarelor de beton, înmulţită cu coeficientul 0,9 pentru a ţine seama în felul acesta de neomogeneitatea betonului, abaterile sînt cu mult mai mari după cum rezultă din tabloul nr. 5.

Tabloul nr. 5

	A_1	A_2	B_1	B_2	P_1	P_2
$\frac{M_{exp}}{M_{calc}}$	0,63	0,74	0,50	0,75	0,64	0,70

Şi în acest caz se păstrează diferenţa între tipurile 1 şi 2, mai accentuată ceva pentru betonul B. Abaterea cea mai mare o prezintă tipul B_1, datorită valorii mari a lui R_t găsită experimental. Totuşi, nici acum nu putem trage concluzii în ceea ce priveşte influenţa compoziţiei mineralogice asupra deformaţiei limită a betonului întins pentru că nu s-a ţinut seama de eforturile interioare din contracţie.

De importanţa acestor eforturi interioare ne dăm seama cercetînd care este contribuţia armăturii în preluarea momentului de fisurare. Într-adevăr, făcînd raportul $\frac{M_{f\,exp}}{b\,h\,R_{t\,exp}}$ (tabloul nr. 6), se obţin pentru grinzile cu factorul $A/C = 0{,}65$, valori mai mici decît 0,292, ceea ce înseamnă că în armătură există eforturi de compresiune şi nu de întindere.

Tabloul nr. 6

	A_1	A_2	B_1	B_2	P_1	P_2
$\frac{M_f}{bh^2 R_t}$	0,276	0,370	0,236	0,340	0,268	0,324

Prin urmare, diferenţele deosebit de mari care s-au găsit între momentele de fisurare de calcul (introducînd $R_t = 0{,}9\ R_{t\,exp}$) şi cele experimentale se pot explica, pe de o parte,

prin faptul că valorile lui ε_t luate în considerație n-au corespuns celor reale, iar pe de altă parte prin existența unor eforturi interioare datorite contracției.

Cercetările experimentale făcute pentru determinarea contracției betonului și betonului armat nu dau date suficiente asupra stării de efort provocate de contracție în elementele de beton armat. Este clar, însă că mărimea eforturilor depinde de mărimea deformației din contracție și de măsura în care legăturile existente împiedică această deformație.

Într-o grindă de beton armat, armătura împiedică deformația liberă a betonului și ca urmare apar în beton eforturi de întindere, iar în armătură eforturi de compresiune. Aceste eforturi interioare fac ca momentul de apariție al fisurilor să fie mai mic decît cel calculat. În practică acest lucru nu prezintă prea mare importanță pentru că piesele la care scăderea momentului de fisurare este sensibilă, sînt piese cu coeficient de armare destul de mare, care în stadiul de exploatare lucrează cu fisuri.

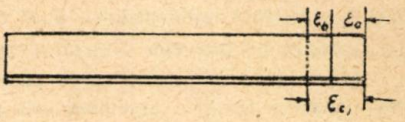


Fig. 4

Datele obținute în experiențele noastre — momentul de fisurare și deformația de întindere măsurată în momentul de apariție al fisurilor — ne pot folosi la calcularea deformației limită la întindere și a deformației de contracție a betonului. În acest mod va fi posibil să punem în evidență influența compoziției mineralogice a cimentului asupra acestor factori și prin urmare să înțelegem în ce fel influențează natura cimentului momentul de apariție al fisurilor în grinzi de beton armat, supuse la încovoiere.

Să considerăm starea de efort din secțiune în stadiul limită de fisurare. Efortul de întindere în beton este cel limită, iar poziția axei neutre se poate determina neglijînd efortul din armătură (ipoteza admisă și la stabilirea formulei prof. M u r a ș o v), cu atît mai mult că acesta este mai mic decît în cazul că nu se ia în considerație contracția. Efortul unitar din armătură este $E_a(\varepsilon_t + \varepsilon_c)$. Momentul de fisurare se poate scrie

$$M_f = 0{,}292\ bh^2R_t + 0{,}75\ h\,F_aE_a\ (\varepsilon_t - \varepsilon_c).$$

Din această formulă apare în mod clar că dacă $\varepsilon_c > \varepsilon_t$ momentul de fisurare al secțiunii armate este mai mic decît al secțiunii de beton simplu.

De asemenea, se vede că pot apare fisuri provocate numai de contracție, în cazul cînd între deformația limită la întindere și contracție există relația

$$\varepsilon_c > \frac{0{,}292\ R_t}{0{,}75\ E_a} + \varepsilon_t.$$

Pe baza momentului de fisurare și a deformației măsurate pot fi determinate deformațiile $(\varepsilon_t - \varepsilon_c)$ și ε_{ac}

Pe de o parte, cunoaștem relația

$$\varepsilon_t - \varepsilon_c = \varepsilon_{mas} - \varepsilon_{ac}.$$

Pe de altă parte, pentru a căpăta o a doua relație, considerăm starea de efort provocată de contracție. Luînd momentul eforturilor din armătură și beton față de centrul de greutate al diagramei eforturilor unitare din zona comprimată, se obține

$$\varepsilon_{ac}E_aF_a\left(1 - \frac{\xi}{3} - \delta\right)h = (1 - \xi)\,\frac{3 + \xi}{6}\ bh^2\,(\varepsilon_c - \varepsilon_{ac})\,E_{bt},$$

$$\xi = \frac{x}{h_0}, \quad \delta = \frac{a}{h}.$$

Pentru determinarea poziţiei axei neutre folosim ecuaţia

$$\frac{\xi^2}{2} - (1{,}5 - 2\,\delta)\,\xi - \delta + 0{,}5 = 0.$$

În obţinerea acestei ecuaţii a fost neglijat termenul $\frac{\xi^3}{16}$, dat fiind că influenţează puţin rezultatul.

Relaţia căutată este

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{ac}\,(1 + 2{,}25\,\mu\,n_1'),$$

unde n_1' reprezintă raportul între E_a şi E_{bt}' pentru starea de efort considerat. Trebuie subliniat faptul că aici intervine şi factorul timp şi de aceea este dificil de apreciat valoarea lui n_1'.

M u r a ş o v consideră că se poate lua cu o aproximaţie suficientă că deformaţia în timp (curgerea lentă) a betonului este proporţională cu deformaţia elastică.

În acest scop se obţine

$$\varepsilon_{total} = \beta\,\varepsilon_{elastic}$$

şi

$$\frac{1}{E_{bt}'} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_t}{R_t}.$$

Cele trei relaţii necesare se pot scrie

$$\varepsilon_t - \varepsilon_c = \varepsilon_{mas} - \varepsilon_{ac}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{ac}\left(1 + 2{,}25\,\mu\,E_a\frac{\varepsilon_t}{R_t}\right), \tag{2}$$

$$M_f = 0{,}292\;bh^2R_t + 0{,}75\;h\,F_a\,E_a\,(\varepsilon_t - \varepsilon_c). \tag{3}$$

Pe baza datelor experimentale pentru ε_c şi ε_t s-au obţinut valorile din tabloul nr. 7.

Tabloul nr. 7

	A_1	A_2	B_1	B_2	P_1	P_2
ε_c	0,210	0,142	0,262	0,181	0,162	0,131
ε_t	0,180	0,192	0,207	0,222	0,151	0,161

Efortul unitar corespunzător în armătură, a cărui valoare este egală cu $E_a\,(\varepsilon_t - \varepsilon_c)$, este dat în tabloul nr. 8.

Tabloul nr. 8

	A_1	A_2	B_1	B_2	P_1	P_2
σ kg/cm^2	64	105	115	86	21	64

Trebuie menţionat faptul că ε_c calculat în acest fel, reprezintă numai acea parte a contracţiei, care împiedicată fiind să se producă, duce la apariţia eforturilor de întindere în beton şi compresiune în armătură. În perioada cînd betonul este foarte tînăr el are o mare plasticitate şi

este capabil să ia deformații mari, fără ca deformația să antreneze o creștere sensibilă a eforturilor.

Ținînd seama de aceasta se poate trage concluzia că diferența între contracția betonului B și contracția celorlalte este, de fapt, mai mare decît a reieșit din calculul de mai sus, deoarece betonul B este foarte plastic un timp mai îndelungat decît celelalte.

Rezultatul obținut în ce privește faptul că betonul B prezintă contracția cea mai mare este în deplină concordanță cu teoria lui Șeikin asupra fenomenului de contracție și a influențării lui de către compoziția mineralogică a cimentului. Conform teoriei lui Șeikin, după pierderea apei libere contracția betonului se datorește contracției gelurilor. Corespunzător cu aceasta, cele mai mari deformații le dă silicatul bicalcic și respectiv cimenturile cu cea mai mare proporție de silicat bicalcic.

Contracția calculată pentru betonul pe bază de ciment A, a reieșit mai mare decît pentru betonul pe bază de ciment P.

Pentru toate cele trei tipuri de ciment, ε_c calculat a fost mai mare la betoanele cu factorul A/C mai mic.

Fără îndoială că și aici a intervenit diferența de plasticitate din prima perioadă de întărire, de care nu s-a putut ține seama în calcul și că în realitate diferențele sînt mult mai mici.

Prin urmare, valorile calculate pentru ε_c pot fi considerate numai ca orientative. Totuși, ținînd seama de plasticitatea diferitelor betoane, s-au putut trage concluzii în ce privește sensul în care ele trebuie corectate.

În ceea ce privește deformația limită la întindere, cea mai mare valoare a arătat-o betonul pe bază de ciment belitic, confirmîndu-se astfel cunoștințele asupra proprietăților lui plastice.

O mai bună concordanță între datele experimentale și de calcul se obține ținînd seama de influența dimensiunii pieselor, asupra valorii lui R_t, fenomen asupra căruia a atras atenția C. D. Țiskreli. Într-adevăr, reducînd pe R_t dat de probele prismatice de beton 10.10.55, pentru a obține pe R_t din grinzile încercate 15.28.330, valorile calculate se apropie de cele experimentale.

Prin analiza influenței compoziției mineralogice a cimentului asupra acelor factori care determină comportarea la fisurare a grinzilor de beton armat supuse la încovoiere, se poate înțelege de ce grinzile pe bază de ciment alitic, belitic și portland au dat aproximativ aceleași abateri față de momentele de calcul. Plasticitatea deosebită a betonului B a compensat contracția mai mare prin reducerea, pe de o parte, a eforturilor interioare produse de contracție și prin valoarea ridicată a deformației limită la întindere pe de alta.

Distanța între fisuri

Toate formulele existente pentru calculul distanței între fisuri pornesc de la ipoteza că după formarea primelor fisuri în secțiunile cele mai slabe și dispuse întîmplător, următoarele apar față de primele și una față de alta la o distanță determinată de condiția de echilibru între forțele de aderență și efortul necesar pentru ruperea betonului. Ceea ce diferă la diferiți autori, este modul în care este exprimată această condiție.

Condiția pentru determinarea distanței între fisuri, se scrie

$$\sigma_{af} F_a - n'_t R_t F_a = \omega' \tau l_f,$$

unde s-a notat cu:

σ_{af}, efortul unitar în armătură în secțiunea cu fisura;

$$n'_t = \frac{E_a}{E_{bt}};$$

ω' coeficientul de suprafață al epurei eforturilor de aderență;

s, perimetrul armăturii

$$\sigma_{af} = \frac{M_f}{W_{II}} = \frac{W_I R_t}{W},$$

în care W_{II} este momentul de rezistenţă al secţiunii în stadiul II după apariţia fisurilor iar W_I este momentul de rezistenţă al secţiunii în stadiul I în momentul apariţiei fisurilor.

De remarcat că M u r a ş o v consideră că toate fisurile apar pentru un acelaşi moment exterior — egal cu momentul de fisurare al secţiunii.

De fapt niciodată nu apar toate fisurile dintr-o dată.

Experienţele lui Nemirovski au arătat că la grinzi slab armate fisurile apar mai repede, iar la grinzi cu un coeficient de armare mare, ritmul de apariţie al fisurilor este mai lent. (Este vorba de porţiunea grinzii cu moment constant). Comportarea diferită a grinzilor slab şi puternic armate se poate explica în felul următor :

Prima fisură apare într-un loc întîmplător mai slab. Pentru apariţia unei noi fisuri este necesar ca momentul exterior să crească cu o cantitate ΔM, pentru ca într-o nouă secţiune să se atingă rezistenţa limită de rupere la tracţiune.

Pentru o aceeaşi creştere $\Delta\sigma_b$ a efortului unitar în betonul întins, necesară pentru a se atinge rezistenţa de rupere R_t, trebuie ca momentul exterior să crească cu atît mai mult cu cît este mai mare coeficientul de armare.

O nouă aproximaţie introdusă de M u r a ş o v este aceea că efortul în armătură imediat după apariţia fisurii se calculează după schema stadiului II, considerîndu-se că în secţiunea fisurată betonul întins nu mai lucrează. Este probabil că în stadiul formării primelor fisuri să mai existe în beton, lîngă axa neutră, o zonă de beton întins.

Înălţimea y a zonei întinse poate fi determinată din următoarele relaţii

$$\frac{\sigma_b\, xb}{2} - ybR_t - \sigma_a F_a = 0$$

$$\frac{\sigma_b\, xb}{2}\left(h_0 - \frac{x}{3}\right) - yR_t b\left(h_0 - x - \frac{y}{2}\right) = \alpha M_f$$

$$\frac{h_0 - x}{n} = \frac{1}{n}\frac{\sigma_a}{\sigma_b}, \quad y = \frac{h_0 E_a}{\sigma_a + n\sigma_b}$$

unde $\alpha = \dfrac{M}{M_f}$ este raportul dintre momentul considerat şi momentul de fisurare al secţiunii.

Pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = 1{,}2$, luîndu-se diferite valori pentru n, s-au obţinut rezultatele din tabloul nr. 9.

Tabloul nr. 9

	$\alpha = 1$			$\alpha = 1{,}2$		
n	7	10	12	7	10	12
$\frac{y}{h_0}$	0,18	0,27	0,20	0,21	0,188	0,165
$\frac{x}{h_0}$	0,514	0,515	0,56	0,448	0,49	0,546

Valorile obţinute pentru y variază între $0{,}28\, h_0$ şi $0{,}165\, h_0$, reprezentînd respectiv 0,545 . . . 0,3 din înălţimea zonei comprimate.

Prima aproximaţie din formula lui Murașov ducînd la o subapreciere a eforturilor unitare din armătură, pe cînd cea de-a doua, la o suprapreciere, se poate considera că expresia efortului ce se transmite prin forţele de adeziune pe distanţa dintre secţiunea cu fisura şi secţiunea în care urmează să apară fisura vecină dă valori apropiate de realitate.

În formula pentru determinarea distanței dintre fisuri intră termenul $\frac{R_t}{\omega'\tau}$, a cărui valoare nu este cunoscută.

Din experiențele făcute la ȚNIPS, cu plăci și grinzi, a reieșit că valoarea lui $\frac{R_t}{\omega'\tau}$ variază pentru armătura obișnuită între 1,2 și 0,7.

Pentru grinzile calculate de noi, pe baza lungimii măsurate între fisuri, de asemenea s-a calculat valoarea termenului $\frac{R_t}{\omega'\tau}$ cu scopul de a pune în evidență variația lui în funcție de compoziția mineralogică a cimentului. Pentru aceasta s-a utilizat relația

$$\frac{Rt}{\omega'\tau} = \frac{l_{f\,mas}}{\varphi_t\, n_t' \frac{d}{4}},$$

unde

$l_{f\,mas}$ este distanța măsurată între fisuri

$$\varphi_t = \frac{W_I}{W_{II}\, n_t'} - 1$$

d, diametrul armăturii iar

φ_t și n_t', au fost luate după Murașov, în funcție de marca betonului găsită experimental. S-au obținut valorile din tabloul nr. 10.

Tabloul nr. 10

	$n't$	W_I	W_{II}	φ_t	$\varphi_t\, n_t' \frac{d}{4}$	l_{fm}	$\frac{R_t}{\omega'\tau}$
A_1	12,2	4970	130	2,18	13,5	16	1,18
A_2	14,5	5660	128	2,06	15	16	1,06
B_1	15	5750	129	1,98	14,9	12	0,80
B_2	17	6050	127	1,80	15,3	12	0,78
P_1	12	5300	131	2,38	14,1	15,5	1,10
P_2	13,2	5450	130	2,18	14,5	15,5	1,07
A_1'	19,5	6450	125	1,64	15,9	14	0,88
A_2'	22,8	6960	123	1,49	17	14	0,82
B_1'	25	7100	121	1,35	16,9	11,5	0,68
B_2'	36	9100	117	1,16	20,8	13	0,63
P_1'	20	6500	125	1,60	16	13	0,81
P_2'	23	6980	123	1,50	17,2	13	0,76

După apariția primelor fisuri în cîteva secțiuni, celelalte se produc la distanța l_f de ele. Cum de multe ori distanța dintre primele fisuri nu este un multiplu de l_f, distanța între unele fisuri formate mai tîrziu poate fi simțitor mai mică decît l_f sau mai mare, fără însă ca cea maximă să depășească $2l_f$.

În experiențele făcute, fisurile au apărut în general la distanțe destul de regulate. În stabilirea valorii lui $l_{f\,mediu}$ nu s-au luat în considerație distanțele prea mici sau prea mari între fisuri.

În ceea ce privește distanța între fisuri, cel mai bine s-a comportat betonul cu ciment *B*, pentru care s-au obținut cele mai reduse valori ale lui $\frac{R_t}{\omega'\tau}$.

Termenul $\frac{R_t}{\omega'\tau}$ a variat între 1,18 şi 0,78 pentru grinzile încercate la 28 zile şi 0,88 şi 0,63 pentru grinzile încercate la 4 zile.

Scăderea lui $\frac{R_t}{\omega'\tau}$ la grinzile din beton tînăr, este mai accentuată pentru betoanele pe bază de ciment A şi P, pentru care raportul $\frac{R_t/\omega'\tau \text{ (4 zile)}}{R_t/\omega'\tau \text{ (28 zile)}} = 0{,}75 \ldots 0{,}80$, şi mai mică a betonul pe bază de ciment B la care acest raport este $0{,}80 \ldots 0{,}85$.

Valoarea mai redusă a termenului $\frac{R_t}{\omega'\tau}$, care caracterizează betonul cu cimentul B n-a avut ca urmare şi o deschidere mai mică a fisurilor la grinzile B_2. Aceasta pentru că deschiderea fisurilor depinde nu numai de distanţa dintre ele, determinată de raportul $\frac{R_t}{\omega'\tau}$, ci şi de deformaţiile medii ale zonei tensionate, care sînt influenţate de valoarea absolută a adeziunii. Cu cît betonul din zona tensionată iese mai repede din lucru, cu atît mai mari sînt aceste deformaţii şi deci şi deschiderea fisurilor. În acest fel se poate trage în mod indirect concluzia că betonul pe bază de ciment B şi cu raportul apă ciment 0,65, are adeziunea cu armătura mai slabă decît betoanele corespunzătoare cu ciment A sau P.

DEFORMAŢII

În comportarea unui element de construcţie, pe lîngă factorul de rezistenţă un rol deosebit îl joacă factorul deformaţie.

Unul din scopurile lucrării a fost stabilirea influenţei compoziţiei mineralogice a cimentului asupra caracterului deformaţiilor şi a rigidităţii grinzilor de beton armat supuse la încovoiere. Totodată am considerat util a folosi experienţele făcute pentru verificarea teoriei lui Murașov în aplicarea ei la problema rigidităţii grinzilor de beton armat şi pentru a constata în ce măsură coeficienţii folosiţi din această teorie pentru exprimarea plasticităţii betonului şi a lucrului betonului întins între fisuri, pot fi utilizaţi în cazul betoanelor pe bază de ciment A, B şi P.

Deformaţii medii liniare

Deformaţiile medii liniare s-au obţinut făcîndu-se media deformaţiilor arătate de două tensometre pentru cele din zona întinsă şi trei tensometre în zona comprimată.

Pentru ca un tensometru să dea deformaţia medie în zona tensionată în care există fisuri şi deci o mare variaţie a valorii deformaţiilor în lungul grinzii, este necesar ca baza lui să fie un multiplu al distanţei între fisuri.

În experienţele făcute s-a luat baza tensometrului 20 cm, ceea ce face ca la grinzi cu distanţa între fisuri 16—13 cm, deformaţiile obţinute să fie ceva mai mici decît cele medii. Cum însă distanţa între fisuri nu este totuşi peste tot egală cu cea medie, se poate considera că deformaţiile înregistrate pe o lungime de 40 cm sînt foarte apropiate de deformaţiile medii.

Pentru toate tipurile de grinzi deformaţiile din zona tensionată depăşesc pe cele din cea comprimată. Acest fapt este caracteristic pentru grinzi cu un coeficient de armare mic sau mijlociu.

La grinda B_2 se observă cum o dată cu creşterea sarcinii, deformaţiile zonei comprimate tind să egaleze şi la un moment dat, aproape de momentul de rupere chiar, le întrec pe cele ale zonei tensionate. Aceasta se datoreşte dezvoltării mai mari a deformaţiilor plastice ale betonului respectiv.

Pentru compararea deformaţiilor medii liniare între cele trei tipuri de grinzi diferite prin natura cimentului, s-au trasat diagramele din figurile 5 . . . 8. În ordonată s-a luat $\frac{P}{P_{\text{rupere}}}$

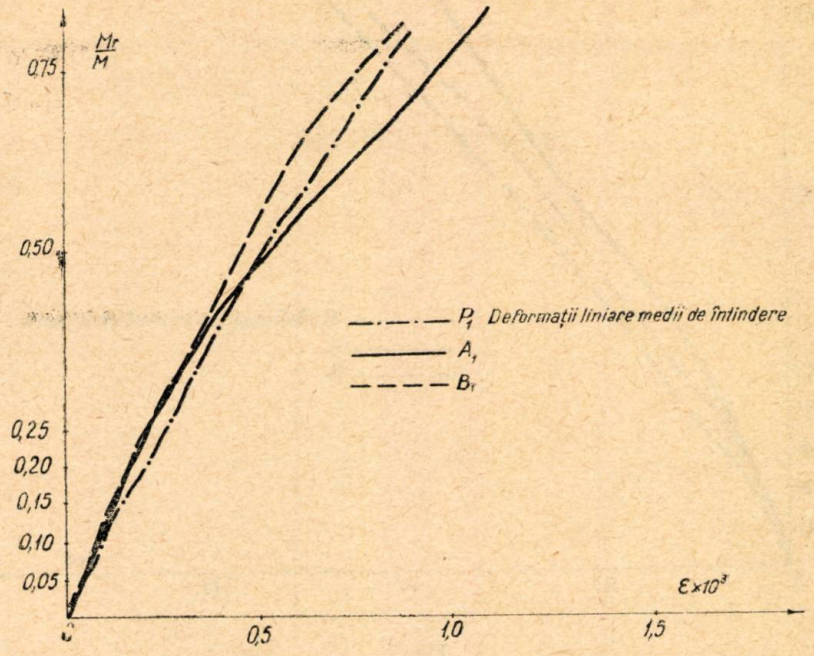

Mr/M
0,75
0,50
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
P1 Deformații liniare medii de întindere
A1
B1
ε×10³
0
0,5
1,0
1,5

Fig. 5

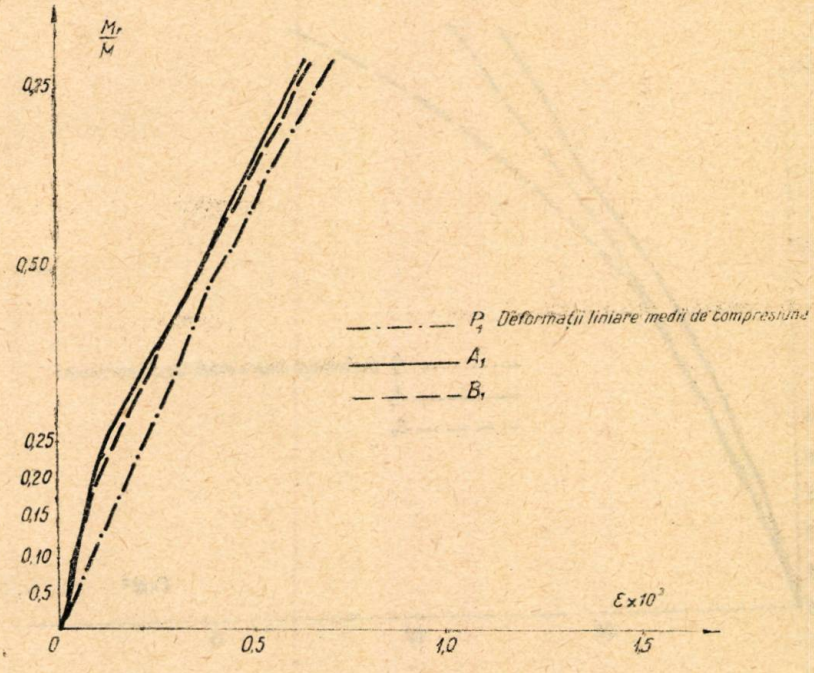

Mr/M
0,75
0,50
0,25
0,20
0,15
0,10
0,5
P1 Deformații liniare medii de compresiune
A1
B1
ε×10³
0
0,5
1,0
1,5

Fig. 6

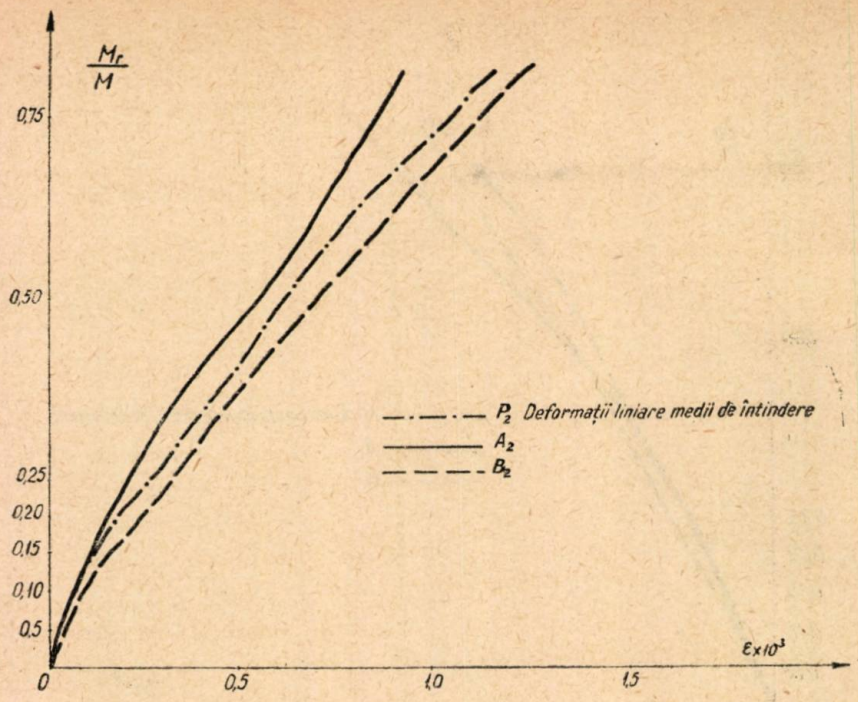

Mr/M
0,75
0,50
0,25
0,20
0,15
0,10
0,5
0
0,5
1,0
1,5
ε×10³
P₂ Deformații liniare medii de întindere
A₂
B₂

Fig. 7

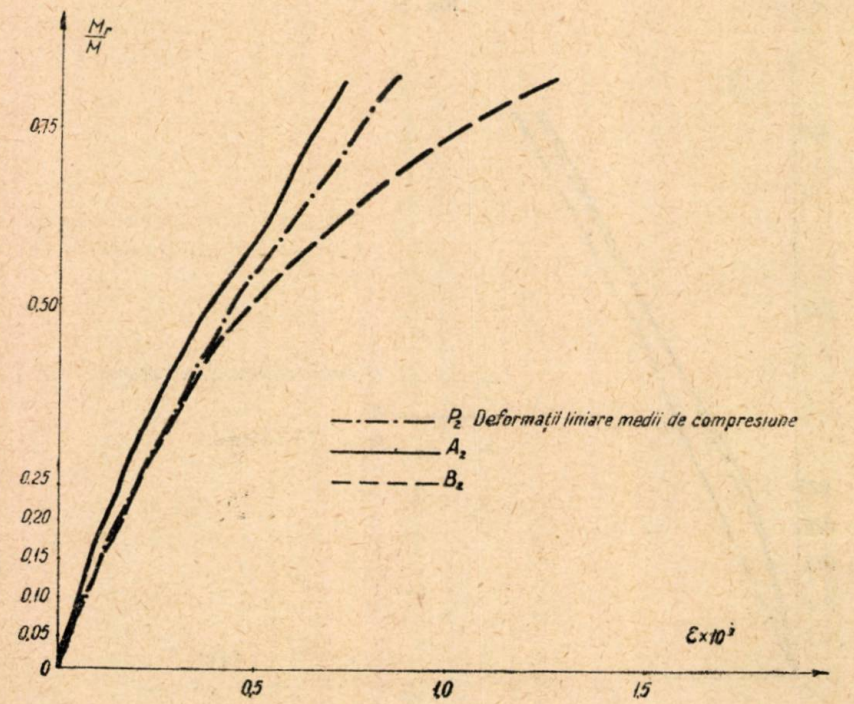

Mr/M
0,75
0,50
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
0,5
1,0
1,5
ε×10³
P₂ Deformații liniare medii de compresiune
A₂
B₂

Fig. 8

pentru a elimina în acest fel influența mărcii betonului. După cum se vede, între grinzile A_1, B_1, P_1, nu s-a obținut diferențe mari. În schimb, deformațiile grinzilor B_2 s-au detașat de deformațiile grinzilor A_2 și P_2, confirmîndu-se prin aceasta sensibilitatea la apă a cimentului B.

Diagrama comparativă a săgeților arată același lucru.

Pe baza deformațiilor medii liniare obținute din încercări, s-a calculat X_m, înălțimea medie a zonei comprimate a betonului.

Rezultatele arată că X_m variază neînsemnat o dată cu sarcina, ceea ce adevereşte ipoteza admisă de M u r a ş o v, că factorul $\psi(1-\lambda)$ poate fi considerat constant.

Pentru intervalul de încărcare 0,05 P_r — 0,65, P_r — X_m a variat între limitele arătate în tabloul nr. 11.

Tabloul nr. 11

	A_1	A_2	B	B_2	P_1	P_2
$\frac{X_m}{h_0}$	0,42...0,435	0,44...0,47	0,45...0,48	0,43...0,51	0,43...0,46	0,445...0,446

Valoarea lui X_m arată care este raportul dintre deformațiile medii la întindere și compresiune. La grinda B_2, X_m a crescut mult la încărcarea apropiată de rupere din cauza dezvoltării mari a deformațiilor plastice din zona comprimată.

RIGIDITĂȚI

Pentru grinzile încercate au fost determinate experimental curburile, pe baza datelor obținute cu două grupe de aparate de măsurat : tensometre (deformații liniare) și microcomparatoare (săgeți).

Expresia curburii medii în funcție de deformațiile liniare medii, este

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{tm} + \varepsilon_{cm}}{h_0}.$$

Microcomparatoarele au măsurat săgeata sub sarcini și la mijlocul grinzii. Săgeata corespunzătoare porțiunii de moment constant s-a determinat ca diferență dintre săgeata din mijloc și semisuma săgeților de sub sarcini. S-a obținut o altă relație

$$f = \iint \frac{1}{\rho_m} dx^2 = \frac{1}{\rho_m} \frac{a^2}{8},$$

de unde

$$\frac{1}{\rho} = \frac{8f}{a^2},$$

unde a este lungimea porțiunii cu moment constant.

Curburile obținute pe cele două căi au fost foarte apropiate pentru toate tipurile de grinzi în afară de o grindă B_2. La aceasta, curburile calculate din deformații liniare au fost apropiate de cele ale grinzii gemene, în schimb săgețile au dat rezultate eronate. Această concordanță a rezultatelor arată că instrumentele de măsurat au funcționat bine.

Pe diagramele din figurile 9 și 10 sînt prezentate comparativ curburile grinzilor. Totuși, din aceste diagrame nu se pot trage concluzii în ceea ce privește influența compoziției mineralogice a cimentului asupra rigidității grinzilor, pentru că în primul rînd aici își spune cuvîntul marca betonului.

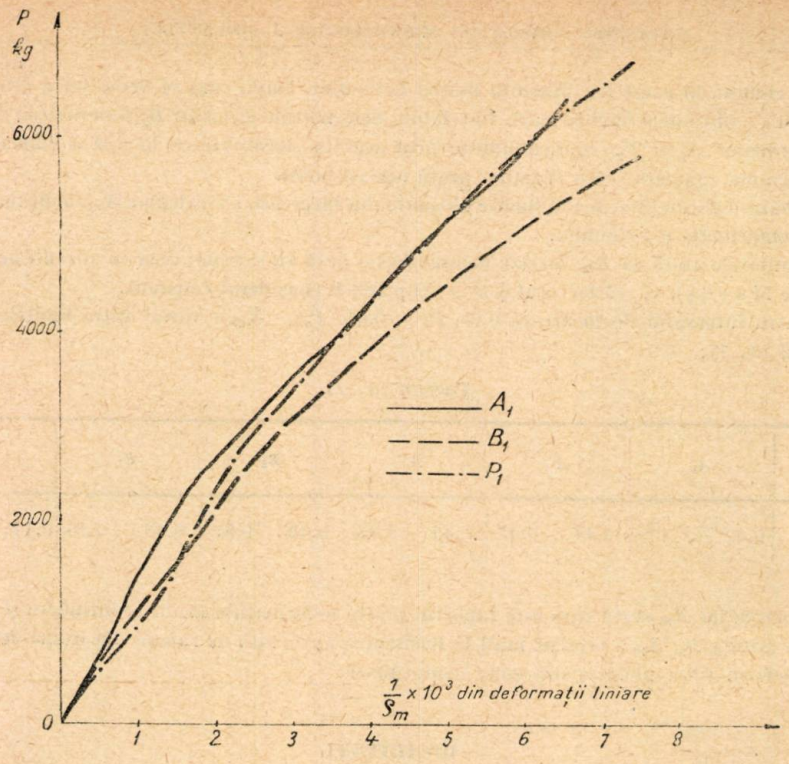

P
kg
6000
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
A1
B1
P1
1/Sm x 10³ din deformații liniare

Fig. 9

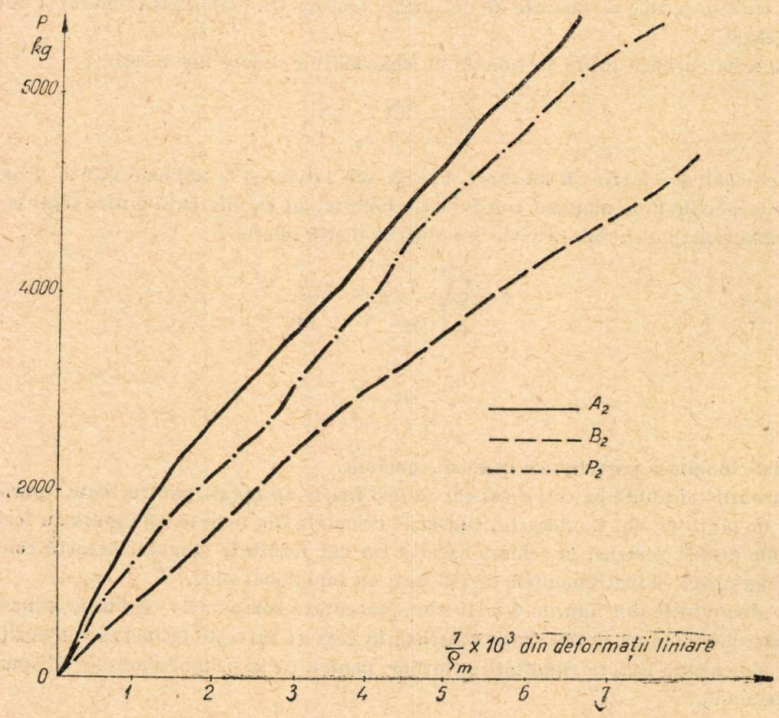

P
kg
5000
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
A2
B2
P2
1/Sm x 10³ din deformații liniare

Fig 10

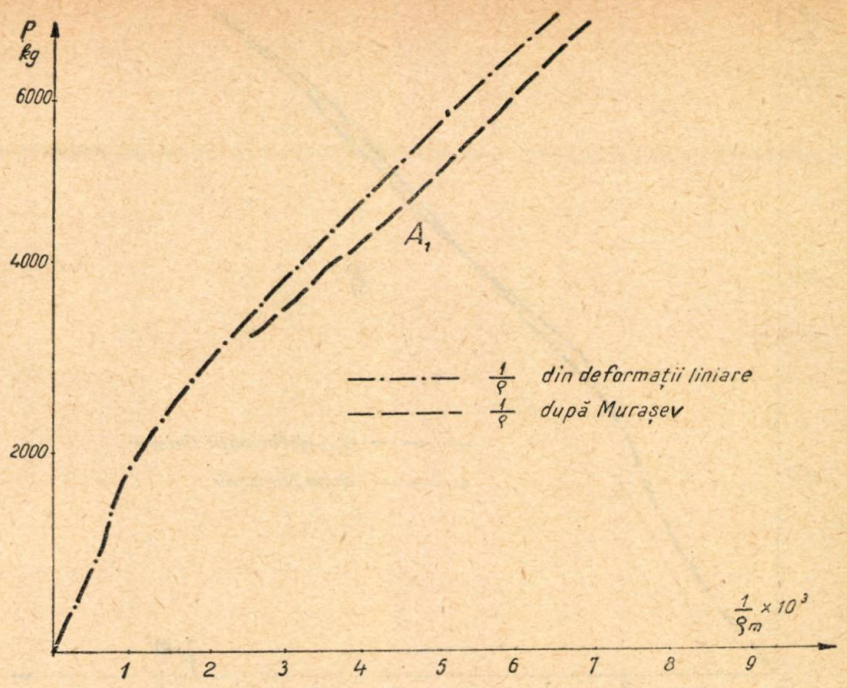

P
kg
6000
4000
2000
A1
1/ρ din deformații liniare
1/ρ după Murașev
1/ρm x 10³
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 11

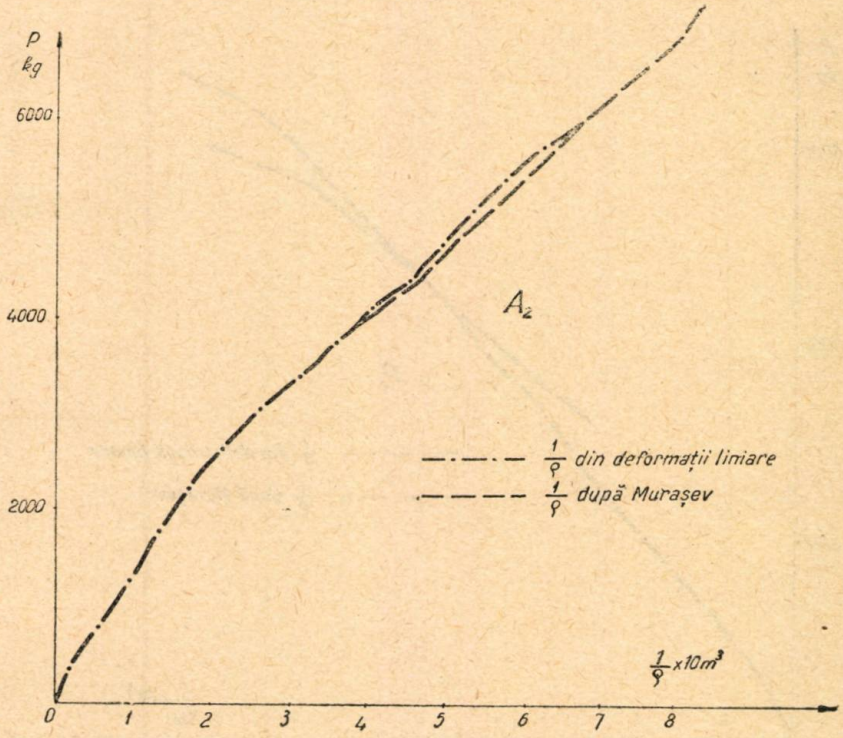

P
kg
6000
4000
2000
A2
1/ρ din deformații liniare
1/ρ după Murașev
1/ρ x10m³
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 12

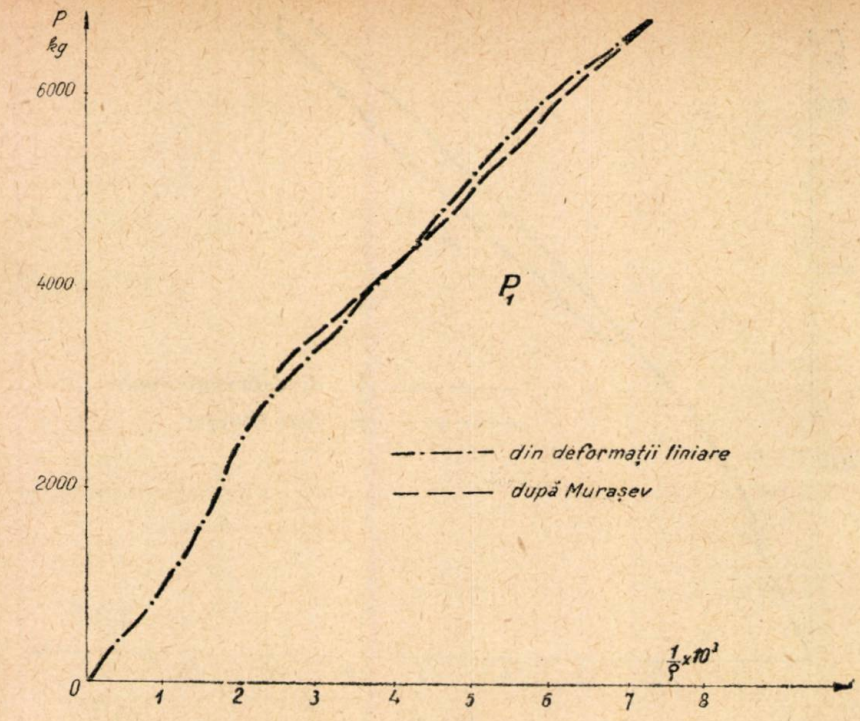

P
kg
6000
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
P_1
din deformații liniare
după Murașev
$\frac{1}{\rho} \times 10^3$

Fig. 13

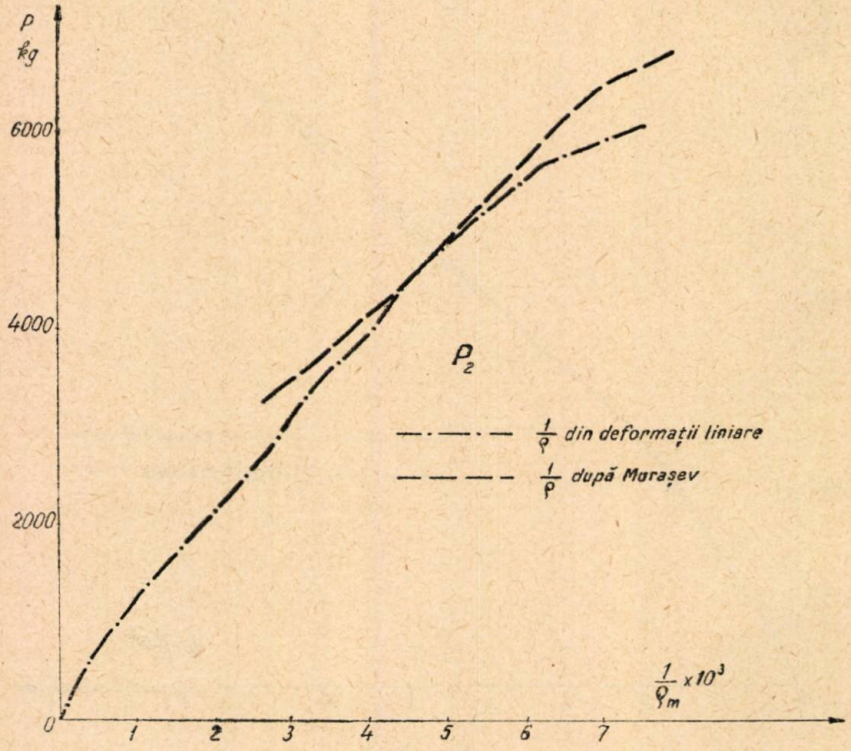

P
kg
6000
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
P_2
$\frac{1}{\rho}$ din deformații liniare
$\frac{1}{\rho}$ după Murașev
$\frac{1}{\rho_m} \times 10^3$

Fig. 14

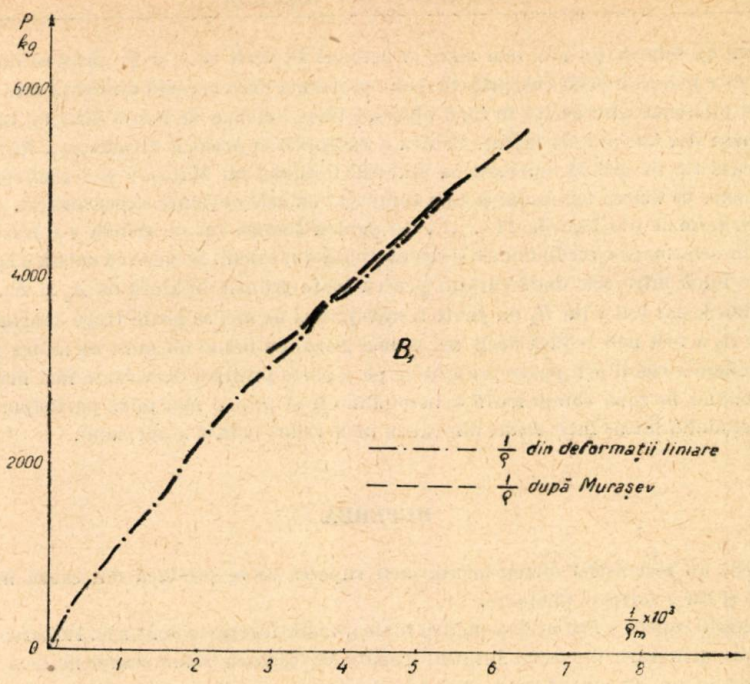

P
kg
6000
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
B_1
din deformații liniare
după Murașev
$\frac{1}{\rho_m} \times 10^3$

Fig. 15

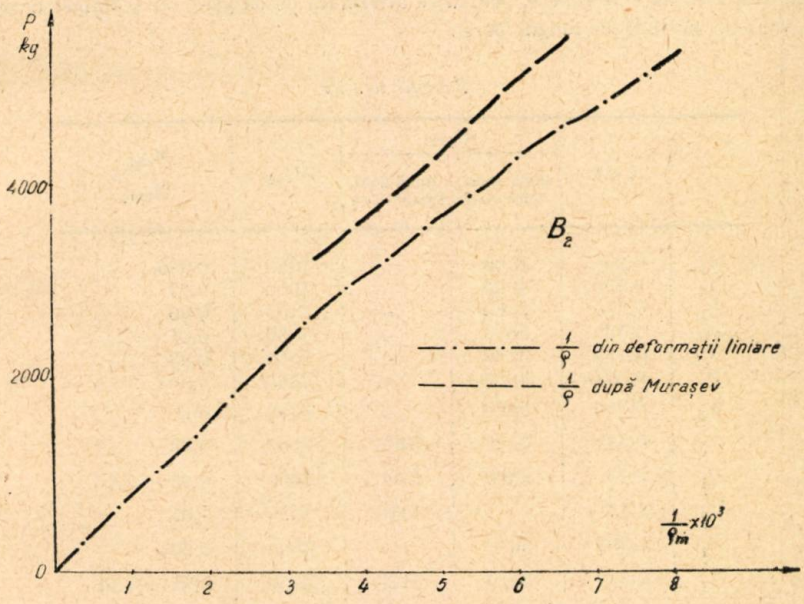

P
kg
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
B_2
din deformații liniare
după Murașev
$\frac{1}{\rho_m} \times 10^3$

Fig. 16

Faptul că deformaţia este mai mare la betonul B, decît la A şi P, provine din faptul că betonul B este mai slab decît celelalte. Se pune problema dacă această diferenţă este mai accentuată decît diferenţa care există în mod obişnuit între betoane de mărci diferite, obţinute din acelaşi ciment dar variind alt factor. Pentru a răspunde la această întrebare, a fost calculată, pentru fiecare tip de grindă, curbura cu ajutorul formulei lui Murașov şi a coeficienţilor daţi de el în funcţie de marca betonului şi s-au comparat cu cele obţinute experimental.

Pe diagramele din figurile 11 . . . 16 pentru fiecare tip de grindă s-a trasat curbura obţinută din deformaţiile medii liniare şi cea obţinută din calcul. Se vede că există o concordanţă deosebit de bună între cele două curburi pentru toate grinzile în afară de A_1 şi B_2. Abaterea la A_1 este mică, dar cea a lui B_2 nu poate fi neglijată şi de aici se poate trage concluzia că rigiditatea lui B_2 a fost mai redusă decît cea a unei grinzi cu beton obişnuit de marca respectivă. Această scădere a rigidităţii poate proveni de pe o parte printr-o dezvoltare mai mare a deformaţiilor plastice în zona comprimată a betonului cît şi prin o mai mică participare la lucrul grinzii a betonului întins între fisuri din cauza unei valori reduse a aderiunii.

RUPEREA

Grinzile au fost astfel dimensionate încît ruperea să se producă din cauza momentului încovoietor şi nu a forţelor tăietoare.

Caracterul ruperii a fost acelaşi pentru toate grinzile încercate la 28 zile. Ruperea s-a produs prin curgerea armăturii din zona întinsă, urmată de cedarea zonei comprimate a betonului.

În tabloul nr. 12 sînt date momentele de rupere din încercări şi momentele de rupere din calcul, obţinute prin introducere în formulă cunoscută a rezistenţei la încovoiere şi a efortului unitar al armăturii din normative. În marea majoritate a cazurilor momentul real de rupere a fost mai mic decît cel de calcul. Aceasta se datoreşte faptului că efortul de curgere real din armătură a fost mai mic decît cel introdus în normative. Deşi pentru fiecare grindă s-au luat probe din ambele bare de armătură, totuşi, n-a existat posibilitatea să se cunoască efortul de curgere din secţiunea de rupere, pentru că atît limita de curgere, cît şi diametrul armăturii, au avut variaţii sensibile în lungul barei.

Tabloul nr. 12

	ξ calc	M_{calc} după zona tensionată	M_{calc} după zona comprimată	M_{exp}	$\frac{M_{exp}}{M_{calc}}$
A_1	0,20	4100	—	3950	0,965
A_2	0,236	4020	—	3900	0,97
B_1	0,310	3860	—	3450	0,90
B_2	0,390	3670	—	3350	0,91
P_1	0,180	4150	—	3850	0,93
P_2	0,201	4060	—	4050	1,00
A_1'	0,385	3690	—	3250	0,88
A_2'	0,501	3420	3400	3050	0,89
B_1'	0,78	2800	2200	2600	0,93...1,18
B_2'	1,17	—	1470	1550	1,05
P_1'	0,397	3670	—	3500	0,955
P_2'	0,550	3310	3110	3150	0,95...1,01

Pentru barele încercate efortul de curgere a variat de la 6 900 kg la 9 100 kg.

La grinzile încercate la 4 zile, caracterul ruperii a fost diferit pentru tipurile B_1' și B_2' —la care ruperea s-a produs prin cedarea zonei comprimate a betonului (Grinda B_2' a fost încercată la 6 zile, deoarece o grindă B_2 încercată la 4 zile s-a rupt la încărcare de 2 000 kg, prin tăiere pe reazem).

Fisurile înclinate s-au dezvoltat puțin la grinzile încercate la 28 zile, pe cînd cele încercate la 4 zile, au prezentat fisuri înclinate de deschidere apreciabilă.

În tabloul nr. 13 se dă raportul între momentul de rupere la 28 zile și momentul de rupere la 4 zile pentru cele 6 tipuri de grinzi încercate.

Tabloul nr. 13

	A_1	A_2	B_1	B_2	P_1	P_2
$\frac{M}{M_{28}}$	0,82	0,78	0,75	0,46	0,91	0,78

Se vede că cea mai sensibilă scădere o prezintă grinzile cu beton B. Raportul $\frac{M}{M_{28}}$ este numai de 0,46 la grinda B_2 (încercată la 6 zile).

CONCLUZII

În general, diferențele între proprietățile betoanelor A, B, P, s-au manifestat mult atenuate în cazul elementelor de beton armat. La aceasta a contribuit atît prezența armăturii, cît și faptul că în comportarea grinzilor de beton armat intervine influența a mai multor factori deodată, care fiind diferiți pentru cele trei betoane, pot totuși duce în ansamblu la rezultate apropiate. Astfel, în procesul de fisurare nu s-a văzut vreo comportare deosebită a unui tip de grindă. Abaterile de la momentele de calcul de fisurare au fost aproximativ aceleași, deși deformațiile din contracții și deformațiile limită la întindere, au fost diferite. La betonul B contracția mai puternică a fost compensată de o deformație limită de întindere mai mare. O variație sensibilă în rezistența grinzilor la apariția fisurilor, s-a observat a fi provocată de variația factorului apă ciment.

În procesul de deschidere al fisurilor intervine pe de o parte, distanța dintre fisuri determinată de raportul $\frac{R_t}{\omega'\tau}$ și deformația zonei tensionate a grinzii. Deși valoarea lui $\frac{R_t}{\omega'\tau}$ s-a dovedit a fi mai favorabilă la grinzile din beton B, ceea ce a dus la o mai mică distanță medie între fisuri, totuși deschiderea fisurilor la tipul B_2 nu a fost mai redusă, fiindcă a intervenit deformația zonei întinse influențată de valoarea absolută a aderiunii.

Sub aspectul rigidității comportarea grinzilor cu ciment B cu factorul apă ciment 0,5 n-a fost diferită de comportarea grinzilor cu ciment A și P. Acest lucru l-a arătat concordanța dintre valorile curburii obținute din datele experimentale și cele obținute pe baza formulei lui Murașov, cu coeficienții diferențiați după marca betonului. Valorile deosebit de apropiate ale curburilor calculate și ale celor reieșite din încercări pentru grinzile A_1, A_2, P_1, P_2 și B_1 confirmă o dată în plus, justețea teoriei lui Murașov și eficacitatea metodei lui de calcul a rigidității.

O comportare deosebită au avut-o grinzile B_2 care au prezentat o rigiditate mai mică decît cea calculată, demonstrînd în acest fel sensibilitatea deosebită a betoanelor B la raportul apă ciment. Scăderea modulului de elasticitate a betoanelor B precum și a aderiunii, o dată cu

creşterea raportului apă ciment, e atît de sensibilă încît se resimte în comportarea grinzilor de beton armat.

Întărirea mai înceată a betoanelor B a influenţat în mod apreciabil capacitatea portantă a grinzilor B_1 şi B_2, încercate în vîrstă tînără, schimbînd chiar şi caracterul ruperii (rupere după zona comprimată). Şi aici şi-a spus cuvîntul sensibilitatea cimentului B la raportul A/C (grinzile cu ciment B avînd la 6 zile raportul $\frac{M_{r6}}{M_{r28}}$ egal cu 0,46 faţă de B_1, încercat la 4 zile cu $\frac{M_{r4}}{M_{28}}$ egal cu 0,75.

Primită la redacţie la 24 Ianuarie 1956

ВЛИЯНИЕ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА ЦЕМЕНТА НА ПОВЕДЕНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Настоящее исследование, выполненное с тем чтобы выявить влияние минералогического состава цемента на поведение железобетонных элементов при изгибе, подтвердило, что в основном разности между свойствами бетонов А, В, Р получились более заниженными. Только в случае цемента В изменение свойств бетона с увеличением отношения В/Ц настолько резкое, что это отразилось на поведении железобетонных балок.

INFLUENCE DE LA COMPOSITION MINÉRALOGIQUE DU CIMENT SUR LE COMPORTEMENT DES POUTRES EN BÉTON ARMÉ SOUMISES À LA FLEXION

(RÉSUMÉ)

Les recherches entreprises afin de mettre en évidence l'influence de la composition minéralogique du ciment sur le comportement des éléments de béton armé, soumis à la flexion, ont montré qu'en général, les différences entre les propriétés des bétons A, B, P ont été très atténuées. Pour le ciment B seulement, le changement des propriétés du béton en raison de l'augmentation du rapport eau / ciment s'est prouvé si sensible qu'il s'est fait ressentir dans le comportement des poutres en béton armé.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Mureşov, *Trescinoustoicivost, jostcost i procinost jelezobetona*, Maşstroiizdat, Moscova, 1950.
2. I. M. Nemirovski, *Jostcost izghibaemîh jelezobetonnîh elementov i rascritie trescin v nih*. ȚNIPS Sbornik statei, Stroiizdat, Moscova 1949.
3. E. A. Seikin, *K voprosu procinosti, uprugosti i plasticinosti betona*. Izd. MIIT, Trudî MIIT, 1946, nr. 69.
4. V. V. Makaricev, *Raspalublivanie jelezobetonnîh construkții v ranem vozraste*. Materiali konferenții ȚNIPS, Gosstroiizdat, Moscova, 1952.
5. G. D. Tiscreli, *Soprotivlenie rastiajeniu nearmirovannîh i armirovannîh betonov*. Gosstroiizdat, Moscova 1954.
6. V. Nicolau, *Introducere în teoria betonului*. ESAC, București, 1955, vol. I.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

MECANICA PĂMÎNTURILOR

CONTRIBUŢII LA PROBLEMA ELECTROSILICATĂRII PĂMÎNTURILOR

DE

R. BALLY şi I. ANTONESCU

Îmbunătăţirea pămînturilor prin electrosilicatare constă în cimentarea particulelor de pămînt de către gelul de bioxid de siliciu, separat dintr-o soluţie de silicat de sodiu introdusă în pămînt cu ajutorul unui curent electric continuu.

Separarea gelului de silice are loc în urma unei reacţii cu un electrolit, care poate fi o sare de sodiu, calciu, magneziu, bariu, aluminiu, siliciu, sau bioxidu de carbon, acidul fosforic ori o sare a sa, toate introduse din exterior, sau însfîrşit, chiar unele săruri conţinute anterior în pămînt. Dintre toate acestea, se preferă de obicei clorura de calciu, care este mai ieftină şi mai uşor de găsit.

Ca procedeu, electrosilicatarea se deosebeşte de metodele electrochimice de îmbunătăţire, prin faptul că întărirea se realizează cu ajutorul unui liant de aport, şi nu prin transformarea componenţilor înşişi ai pămîntului. Curentul electric contribuie efectiv la acceierarea şi intensificarea efectului silicatării.

Îmbunătăţirea prin silicatare simplă se poate realiza la pămînturile de tipul nisipurilor fine sau prăfoase, cu coeficientul de permeabilitate de cel puţin 10^{-4} cm/s, introducerea soluţiilor făcîndu-se prin presiune. Prof. B. A. Rjaniţîn [1] arată că soluţia de silicat, intrînd în pămînt, împinge apa din pori şi-i ia locul. Soluţia de clorură de calciu, introdusă ulterior, evacuează silicatul în exces din pori şi-l limitează la un sistem de pelicule care învelesc particulele. Cimentarea are loc în urma degajării gelului de silice, printr-o reacţie de forma:

$$Na_2O.nSiO_2 + CaCl_2 + m\ H_2O = nSiO_2 + Ca\ (OH)_2 + NaCl + (m-1)\ H_2O.$$

Procesul este completat prin reacţii secundare de tipul:

$$Ca(OH)_2 + (m\text{-}1)H_2O = Ca\ O + m\ H_2O,$$

oxidul de calciu rezultat contribuind la desăvîrşirea cimentării.

Electrosilicatarea permite extinderea metodei de întărire a pămîntului prin silicatare, la pămînturile puţin permeabile, la care introducerea soluţiilor prin presiune nu mai este posibilă. Spre deosebire de presiunea hidrostatică sau mecanică, acţiunea curentului electric se extinde şi asupra apei legate, făcînd astfel posibilă circulaţia soluţiilor introduse în pămînt.

Ideea utilizării curentului electric pentru silicatare a fost preconizată cu mulţi ani în urmă. Tolstopiatov a studiat, înainte de primul război mondial, la Moscova, o gamă largă de substanţe [2]. În

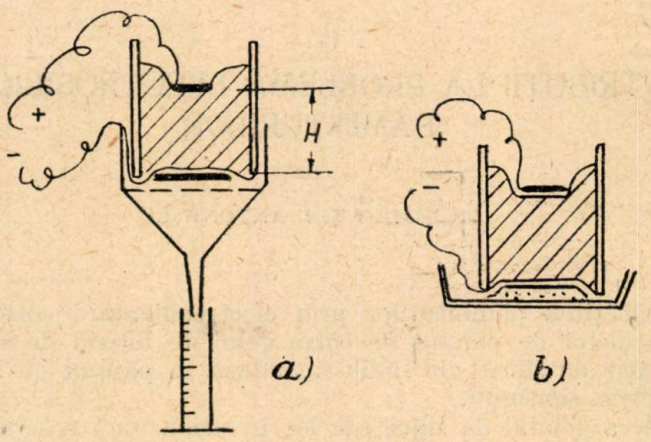


Fig. 1

Elveţia, Schaad şi Haefeli au recomandat de asemenea utilizarea silicatului de sodiu şi clorurii de calciu [3]. Aplicarea metodei s-a extins mult în ultimii ani, mai ales datorită lucrărilor lui Ceber-towicz, care a folosit-o, în R. P. Polonă, între 1948 şi 1954, la 25 de lucrări, consolidîndu-se un volum de circa 20 000 m³ de pămînt [4].

După 1950, electrosilicatarea a fost aplicată în R. P. Ungară [5], R. Cehoslovacă [6], R. D. Germană şi, probabil, în R. P. Chineză.

În ţara noastră, problema a fost introdusă în planul de cercetări al Colectivului de geotehnică I. M. A. în anul 1952 ; studiile de laborator au luat extindere în anul 1953, iar primele rezultate au fost publicate la începutul anului 1954 [7].

Din acest an s-a alăturat la studiul acestei probleme şi un colectiv al Institutului de cercetări miniere, care a colaborat mai ales la încercările pe modele semiindustriale.

În cele ce urmează vor fi redate aspectele principale ale problemei, cercetate pînă în prezent, precum şi concluziile la care s-a ajuns.

În laborator s-a studiat ritmul de pătrundere a soluţiilor în pămînt, precum şi variaţia rezistivităţii pămîntului în timpul tratării.

În majoritatea cazurilor, probele de laborator au fost aşezate în cilindri verticali de cristal, avînd secţiunea de circa 50 cm³ şi înălţimea de 10 cm. Electrozii au fost executaţi din discuri perforate de tablă de fier, anodul fiind de obicei aşezat sus, iar catodul jos. Pentru măsurarea

precisă a cantității de apă eliminată pe la catod, o parte din probe au fost așezate în pîlnii Büchner; celelalte au fost puse în recipiente de sticlă (fig. 1).

Din analizarea rezultatelor obținute pe probele de laborator se pot desprinde următoarele:

— Ritmul de pătrundere al soluției de silicat — considerat ca raportul dintre debitul pătruns în probă și consumul de electricitate, exprimat

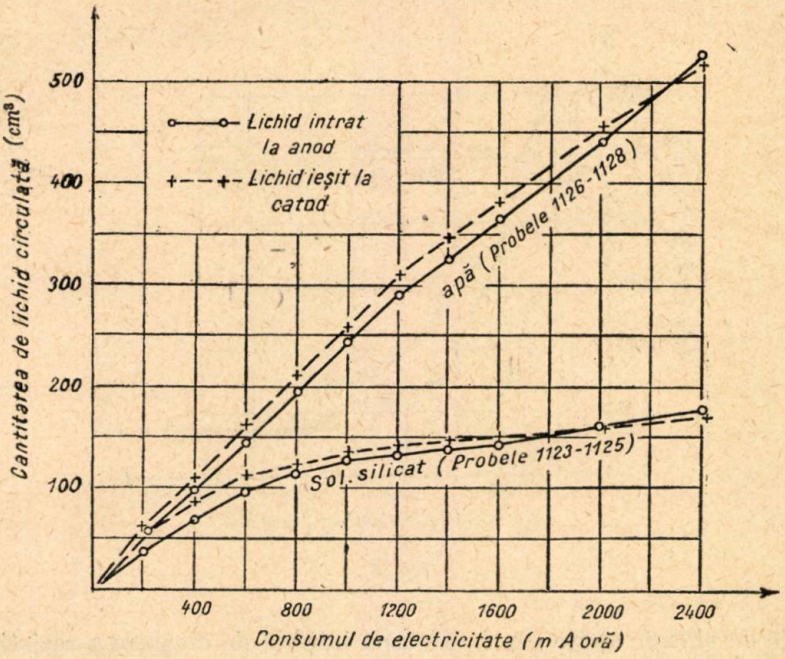


Fig. 2

în miliamperi - oră — scade, la începutul încercării, ajungînd apoi la o valoare aproximativ constantă, care se menține un timp mai îndelungat (fig. 2).

— În cazul apei, ritmul de pătrundere a rămas constant încă de la începutul experienței.

— Ritmul de pătrundere a soluției de clorură de calciu, introdusă după silicat, este mult mai lent decît în cazul silicatului, deși soluția de clorură este mai puțin vîscoasă.

— Variația rezistivității în timpul procesului de electrosilicatare este caracterizată prin curbele din figura 3. După cum reiese din aceste curbe, se constată inițial o scurtă perioadă de creștere accentuată a rezistivității pămîntului; creșterea este mai accentuată în zona catodică (în majoritatea experiențelor efectuate această primă perioadă durează circa 6 — 10 ore). După atingerea unui maxim, urmează o descreștere bruscă, rapidă a rezistivității, care, în decurs de cîteva ore, scade pînă la o valoare de circa 5 ori mai mică decît cea inițială. Ritmul de micșorare scade apoi, pînă se ajunge la o valoare aproape constantă. Menționăm că tratarea

s-a făcut, în general cu o densitate de curent de circa 2 mA/cm², deci cu o intensitate de 100 mA pentru probele cu secţiune de 50 cm².

— În timpul introducerii silicatului, electrodul anod se acoperă cu un strat de material întărit, cu slabă conductibilitate electrică, fapt care produce o cădere importantă de potenţial la contactul dintre anod şi pământ. După curăţarea anodului, această cădere dispare.

— În comparaţie cu variaţia rezistivităţii probelor supuse electrodrenării, la care la anod se introduce apă, se constată că şi la acestea, ca

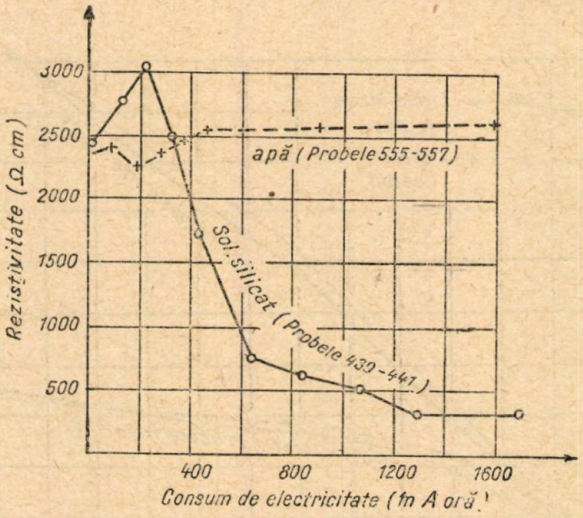


Fig. 3

şi la cele cu silicat, apare o primă etapă iniţială de creştere a rezistivităţii pământului. În timp ce, însă, la apă, după perioada iniţială, rezistivitatea se menţine constantă sau continuă să crească foarte încet, la tratarea cu silicat are loc, după cum am arătat, o scădere rapidă. Din aceste observaţii se poate conchide că, atît la probele cu apă, cît şi la cele cu silicat, este necesară o perioadă iniţială de formare a curentului electroosmotic de lichid, în care rezistivitatea creşte, pînă la punerea în mişcare a întregii cantităţi de lichid conţinută în masa probei. La probele cu apă, sfîrşitul acestei perioade este marcat prin atingerea unei situaţii de echilibru; la cele cu silicat, pe măsură ce soluţia de silicat avansează în pământ, se manifestă o tendinţă de scădere a rezistivităţii, datorită conductibilităţii ridicate a silicatului care îmbibă materialul. Valoarea rezistivităţii este condiţionată în acest caz de două tendinţe contrarii: de creştere, în perioada de antrenare a lichidului în curentul electroosmotic, şi de scădere, prin îmbibarea cu soluţie. La început, predomină prima tendinţă, apoi cea de-a doua începe să se facă din ce în ce mai simţită, în timp ce efectul primei tinde să dispară.

— La probele executate, s-a constatat o corespondenţă între faza în care ritmul de pătrundere a soluţiei de silicat în pământ se stabilizează, şi faza de stabilizare a rezistivităţii pământului (fig. 4), fapt care vine în sprijinul ipotezelor formulate mai sus.

— Apariția silicatului la catod a fost semnalată în general după o tratare de circa 12 ore cu densitatea de curent de 2 mA/cm². Prezența silicatului a fost pusă în evidență prin reacția cu o soluție concentrată de clorură de calciu. Deoarece această reacție es e relativ puțin sensibilă, e de presupus că primele cantități de silicat ajunseseră la catod încă de mai înainte. Prezența silicatului a fost constatată atît la probele cu curent de sus în jos (cu catodul la partea inferioară) cît și la cele cu curent de jos în sus (cu catodul la partea de sus), fapt care exclude posibilitatea infil-

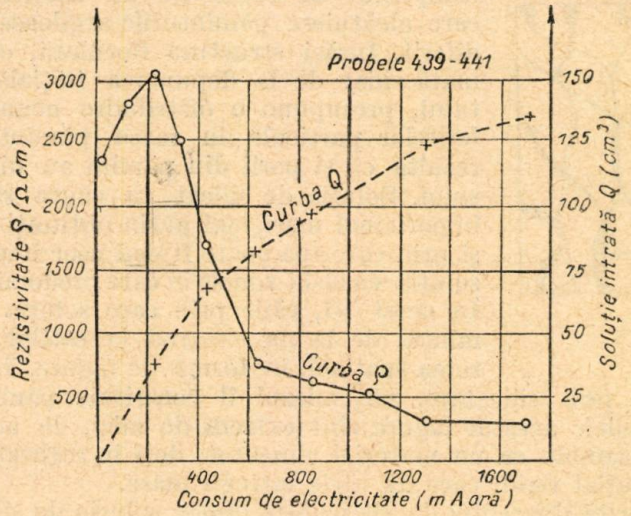


Fig. 4

trării soluției prin probă, pe cale gravitațională, prin fisuri sau pe lîngă probă, între aceasta și pereții recipientului. S-a dovedit astfel că tratarea cu curent continuu asigură, cel puțin în parte, deplasarea ca atare a silicatului prin pămînt, fără a avea loc o descompunere electrolitică integrală a soluției.

— Apariția silicatului la catod corespunde pătrunderii în pămînt a unei cantități de soluție de circa 50 % din volumul porilor pămîntului. Deci, în momentul în care cel puțin o parte din cantitatea de soluție introdusă la anod părăsește proba pe la celălalt electrod, pămîntul nu este integral îmbibat cu silicat.

— S-a consta at că silicatul poate pătrunde în pămînt, în anumite cazuri, și prin greutate proprie sau prin absorbție; ritmul de pătrundere pe aceste căi este în ă mult mai lent decît prin electroosmoză. Posibilitatea introducerii silicatului în pămînt prin alte mijloace decît prin electroosmoză prezintă însă interes din punctul de vedere al cercetărilor, pentru că a permis punerea în evidență a acțiunii specifice a curentului electric în procesul de electrosilicatare.

Observațiile expuse pînă aici permit să se tragă unele concluzii asupra desfășurării procesului de electrosilicatare:

1. Pătrunderea soluției de silicat nu se produce uniform în întreaga masă de pămînt, ci pe anumite căi preferențiale, pînă ce soluția ajunge

la catod. Din acest moment, fenomenul se stabilizează, rezistivitatea ajungînd la o valoare aproximativ constantă. Se poate presupune că, în continuare, procesul se dezvoltă ca un transport de soluţie de la un electrod spre celălalt. Din punctul de vedere al îmbunătăţirii pămîntului, continuarea introducerii de silicat nu mai prezintă deci interes.

Pătrunderea neuniformă a silicatului se explică prin microneomogenitatea pămîntului. Particulele de pămînt au diferite forme şi dimensiuni şi sînt de compoziţii mineralogice diferite. În funcţie de aceste diferenţe, complexul de adsorbţie al diferitelor particule care alcătuiesc pămînturile argiloase, se dezvoltă diferit. Însăşi structura floculară, complexă, formată chiar de la depunerea iniţială a sedimentului, presupune o distribuire neuniformă a diferitelor particule în masa pămîntului. De aici rezultă că şi porii din pămînt au diferite dimensiuni. Soluţia de silicat va căuta să se angajeze în porii mai mari, mai puţin obturaţi de apă legată şi prin care apa poate fi mai uşor împinsă înainte; soluţia va ocoli zonele în care predomină porii mici. În acest fel, căile prin care soluţia străbate pămîntul de la un electrod la celălalt, alcătuiesc o reţea spaţială, în formă de fagure, în care pereţii sînt întăriţi prin silicatare, iar miezul îl constituie pămînt neîntărit (fig. 5). Celulele acestui fagure sînt extrem de mici, de aceea pămîntul apare în ansamblu ca un material cimentat, deşi în realitate e vorba de un sistem spaţial rigid, care dă tărie întregii mase.

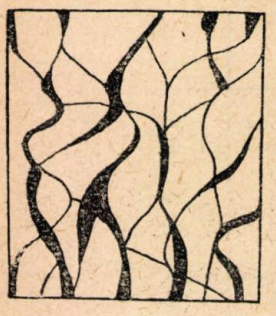


Fig. 5

2. Datorită diferenţei de viscozitate dintre soluţia de silicat de sodiu şi apă, coeficienţii de permeabilitate ai unui anumit pămînt sînt diferiţi, la trecerea silicatului şi a apei. Cercetările întreprinse în laborator au scos în evidenţă această diferenţă. În tabloul nr. 1, se redau valorile coeficienţilor k_a (relativ la apă) şi k_s (relativ la soluţia de silicat cu densitatea de 1,15) pentru mai multe amestecuri de pămînturi argiloase (argilă grasă din zona oraşului Bucureşti, cartierul Pantelimon, şi caolin spălat) cu diferite proporţii de nisip cuarţos de 0,1 . . . 0,4 mm. Din examinarea valorilor raportului k_a/k_s se vede că permeabilitatea pentru silicat este de cîteva ori mai mică decît pentru apă.

Tabloul nr. 1

Felul amestecului	Coeficient de permeabilitate (cm/s)		k_a/k_s
	k_a	k_s	
10 % argilă (Pantelimon) + 90 % nisip	$1{,}1 \times 10^{-4}$	$1{,}5 \times 10^{-5}$	6,7
30 % „ „ + 70 % „	$1{,}3 \times 10^{-5}$	$5{,}4 \times 10^{-7}$	24,0
50 % „ „ + 50 % „	$7{,}9 \times 10^{-7}$	$8{,}4 \times 10^{-8}$	9,4
100 % argilă (Pantelimon)	$2{,}9 \times 10^{-7}$	$5{,}7 \times 10^{-8}$	5,1
20 % caolin + 80 % nisip	$5{,}1 \times 10^{-4}$	$5{,}7 \times 10^{-5}$	8,9
40 % „ + 60 % „	$7{,}5 \times 10^{-5}$	$7{,}7 \times 10^{-6}$	10,0
60 % „ + 40 % „	$4{,}1 \times 10^{-6}$	$7{,}3 \times 10^{-7}$	5,6
10 % „ + 90 % „	$1{,}3 \times 10^{-3}$	$1{,}3 \times 10^{-4}$	10,0
30 % „ + 70 % „	$1{,}3 \times 10^{-4}$	$1{,}4 \times 10^{-5}$	9,3
50 % „ + 50 % „	$1{,}3 \times 10^{-5}$	$1{,}4 \times 10^{-6}$	9,3
100 % „	3×10^{-8}	0	infinit

Micșorarea permeabilității pămîntului prin îmbibarea cu silicat poate constitui o explicație a scăderii ritmului de pătrundere a soluției, pe măsură ce aceasta înaintează spre catod. După ce silicatul a străbătut întreaga probă, regimul de circulație se stabilizează și ritmul de pătrundere rămîne aproape constant. În timpul introducerii soluției de clorură de calciu, viteza de intrare reîncepe să scadă, ca urmare a procesului de formare a gelului de silice care micșorează și mai mult permeabilitatea pămîntului.

Cele expuse mai sus ridică problema stabilirii cantității optime de silicat de sodiu care urmează a fi introdusă, spre a se obține o rază maximă de acțiune a tratamentului, fără însă a se stînjeni pătrunderea ulterioară a clorurei de calciu și fără a se mări în mod exagerat consumul de energie electrică.

3. Introducerea soluțiilor în pămînt provoacă micșorarea rezistivității sale electrice și constituie un factor favorabil, care duce la scăderea consumului de energie. Trebuie avut în vedere însă faptul că, tensiunea electrică rămînînd aceeași, prin scăderea rezistivității probei, intensitatea curentului crește mult, necesitînd măsuri speciale de control și protecție a instalației de tratare. Creșterea intensității provoacă și încălzirea excesivă a probei, formarea unei cruste pe anozi etc., fenomene care nu ajută sau chiar dăunează efectului de întărire a pămîntului.

Rezultatele finale obținute prin aplicarea silicatării pot fi apreciate prin efectul de impermeabilizare și de sporire a rezistenței la compresiune. Impermeabilizarea a fost constatată la toate tipurile de pămînturi tratate cu această metodă. În ceea ce privește efectul de întărire, el s-a dovedit a fi cu atît mai slab, cu cît pămîntul conținea particule mai fine. Potrivit datelor din literatură, rezistența la zdrobire a nisipurilor silicatate atinge 15 ... 30 kg/cm^2, la loessuri 8 kg/cm^2, iar la nisipurile fine, silicatate cu o soluție mixtă, 3 ... 5 kg/cm^2.

Scăderea rezistenței se explică prin necesitatea utilizării unor soluții din ce în ce mai puțin vîscoase și deci mai diluate. Silicatarea are însă alte efecte, pozitive, foarte importante, ca: mărirea stabilității la înmuiere a loessurilor, micșorarea sensibilității la afuiere a nisipurilor fine etc.

Electrosilicatarea se poate aplica la pămînturi cu particule și mai fine. Totuși, și în acest caz, soluțiile folosite sînt destul de diluate, ceea ce face ca rezistențele finale la zdrobire să nu fie prea mari, mai ales că, după cum am arătat, soluțiile nu pătrund prin toți porii pămîntului, ci numai printr-un sistem spațial celular. În literatură se indică în general o gamă largă de valori ale rezistențelor obținute, și anume 0,6 ... 30 kg/cm^2, iar pentru probele uscate în aer înainte de zdrobire, valori de 8 ... 39 kg/cm^2. Datele obținute în urma încercărilor executate în laboratorul de geotehnică I.M.A., referitoare la 102 probe, menținute în apă după tratare, sînt expuse în tabloul nr. 2. Se constată că rezistențele obținute în mod curent sînt de ordinul a 1 ... 4 kg/cm^2, valoare care s-a dovedit suficientă pentru scopul urmărit în majoritatea cazurilor în care s-a aplicat electrosilicatarea.

Pe un mare număr de eșantioane mici, extrase din probe similare cu cele menționate în tabloul nr. 2, s-au obținut valori mai mari, de 3,6 ... 11,6 kg/cm^2, din cauza modului diferit de prelevare a elementelor încercate.

Tabloul nr. 2

Rezistența la zdrobire (kg/cm²)	0,5...1,0	1,0...1,5	1,5...2,0	2,0...2,5	2,5...3,0	3,0...3,5	3,5...4,0	4,0...4,5	4,5...5,0	Total
Nr. probelor	8	16	26	13	17	1	5	4	2	102
%	7,9	15,7	35,2	12,8	16,6	1,0	4,9	3,9	2,0	100

În ceea ce privește impermeabilizarea, încercările din laboratorul I.M.A. au arătat că prin electrosilicatare se obține o micșorare a coeficientului de permeabilitate de cel puțin 100 de ori. Astfel, la o serie de probe de nisip fin (borchiș) de la minele Șotînga și Filipeștii de Pădure, coeficientul de permeabilitate a scăzut prin tratare de la valoarea de $0{,}4 \ldots 25 \times 10^{-4}$ cm/s, la valori cuprinse între $1{,}5 \ldots 6{,}4 \times 10^{-6}$ cm/s, iar la unele probe chiar la $1{,}6 \ldots 6{,}0 \times 10^{-8}$ cm/s. Unele dintre probe, la care pentru introducerea soluțiilor s-a folosit, în afară de curentul electric, presiunea unei coloane de lichid, au devenit după tratare complet impermeabile.

Fig. 6

Un efect important al electrosilicatării este împiedecarea desfacerii în apă a pămîntului. Numeroase probe de nisipuri fine electrosilicatate în laboratorul I.M.A. și păstrate apoi în apă timp de mai multe luni (fig. 6) au arătat că nisipul a căpătat o coeziune suficient de puternică pentru a nu se mai desface în apă.

Efectele arătate mai sus, ca: mărirea rezistenței la zdrobire, impermeabilizarea, rezistența la desfacere în apă, sînt suficiente pentru a transforma prin electrosilicatare un nisip curgător într-un material stabil la acțiunea hidrodinamică.

★

Silicatarea se poate realiza atît prin presiune, cît și cu ajutorul curentului electric. Se pune de aceea problema în ce măsură mijlocul de realizare a silicatării influențează asupra efectului ei, cu alte cuvinte în ce constă aportul curentului electric în procesul de electrosilicatare.

Principala acțiune a curentului electric constă în antrenarea soluțiilor în pămînt. Pentru a se putea face o apreciere cantitativă a acestui efect, s-a calculat valoarea gradientului hidraulic echivalent i_{eq}, care ar fi capabil să provoace o circulație a soluției de silicat prin pămînt, cu o viteză egală cu cea produsă de trecerea curentului electric (care, în experiențele efectuate, a avut densitatea de 2 mA/cm²). Rezultatele obținute pentru o serie de amestecuri de argilă și caolin cu nisip cuarțos (aceleași cu cele expuse în tabloul nr. 1), sînt prezentate în tabloul nr. 3.

Din examinarea lor se vede că acțiunea curentului electric este echivalentă cu a unor gradiente hidraulice care ajung pînă la valori de ordinul sutelor, în funcție de natura pămîntului.

Tabloul nr. 3

Felul amestecului	Grad. hidr. echivalent
10 % argilă (Pantelimon) +90 % nisip	8,0
30 % „ „ +70 % „	130
50 % „ „ +50 % „	810
100 % argilă (Pantilimon)	700
20 % caolin +80 % nisip	1,6
40 % „ +60 % „	4,3
60 % „ +40 % „	40
10 % „ +90 % „	0,28
30 % „ +70 % „	1,7
50 % „ +50 % „	17
100 % „	>1 000

În afară de introducerea soluțiilor, acțiunea curentului electric se manifestă, datorită efectului de electrodrenare, și ca un factor care intensifică procesul de electrosilicatare. Acțiunea de drenare se resimte atît în faza inițială, de introducere a soluțiilor, cît și ulterior, în faza întăririi gelului de silice. Curentul electric reduce, prin drenare, gradul de diluare a soluției în contact cu apa din pori și pune în mișcare straturile de apă adsorbită, favorizînd formarea peliculelor de silicat în jurul particulelor de pămînt. Electrodrenarea mărește deci efectul electrosilicatării.

Pentru a se pune în evidență aportul specific al curentului s-au executat o serie de probe paralele, în care, la unele, silicatul a fost lăsat să pătrundă prin greutate proprie, iar la celelalte a fost introdus cu curent electric. Introducerea ulterioară a clorurii de calciu s-a făcut, pentru toate probele, cu curent electric. Probele au fost similare, de formă cilindrică, avînd înălțimea de 10 cm. și secțiunea de 50 cm^2. Materialul utilizat a fost nisip fin (borchiș) de la Filipeștii de Pădure. S-a constatat că, la probele la care silicatul a pătruns pe cale gravitațională, grosimea finală a zonei întărite prin electrosilicatare a fost de 4 cm, iar la cele la care silicatul a fost introdus cu curent, de 5,5 . . . 6 cm, deci cu aproape 50 % mai mult.

Accelerarea și intensificarea efectului de întărire prin drenarea gelului de bioxid de siliciu de către efectul electroosmotic a fost pusă în evidență prin executarea unor probe la care silicatul a fost introdus în mod identic, cu curent, însă la introducerea clorurii, timpul a fost diferit și anume : la o parte din probe, tratarea cu curent s-a făcut numai în timpul strict necesar pătrunderii soluției, iar la restul probelor, trecerea curentului a fost prelungită cîtva timp după introducerea clorurii. La primul grup de probe, întărirea s-a făcut pe o grosime medie de 4 cm, iar la celelalte, pe 6 cm, ceea ce dovedește că prelungirea tratării cu curent are efecte net favorabile.

În ceea ce privește metodica de realizare a electrosilicatării, pe baza încercărilor efectuate pe cîteva sute de probe în laboratorul I.M.A., vom arăta pe scurt concluziile la care s-a ajuns în ceea ce privește tratarea nisi-

purilor fine sau prăfoase, cu un coeficient de permeabilitate cuprins între 10^{-5} şi 10^{-3} cm/s.

Concentraţia cea mai indicată a soluţiilor chimice este cea corespunzătoare densităţii de 1,15 . . . 1,20 pentru silicatul de sodiu, şi 1,075 . . . 1,10 pentru clorura de calciu. Pentru realizarea întăririi, a fost găsită ca necesară o cantitate de soluţie de silicat de sodiu egală în volum cu 0,3 . . . 0,4 din volumul porilor pămîntului, precum şi o cantitate de soluţie de clorură de calciu cel puţin egală cu cea de silicat.

Este recomandabil ca soluţiile să fie introduse în pămînt în patru etape :

Etapa I. Introducerea unui volum de soluţie de s licat aproximativ egal cu jumătate din cantitatea totală.

Etapa a II-a. Introducerea unui volum de soluţie de clorură egal cu cel de silicat introdus anterior.

După această etapă se va proceda la inversarea sensului curentului electric, în aşa fel ca electrozii care au servit la început drept anozi, să devină catozi şi invers.

Etapa a III-a. Introducerea — prin noii anozi — a restului soluţiei de silicat de sodiu.

Etapa a IV-a. Introducerea restului clorurii de calciu.

Se recomandă tratarea în continuare cu curent electric, după pătrunderea întregii soluţii, pînă ce rezistivitatea curentului creşte mult sau ajunge la o valoare constantă, care se menţine timp mai îndelungat.

Aplicarea electrosilicatării este uneori îngreuiată de consumul ridicat de energie electrică şi durata prea mare necesară tratării. Pentru a se evita aceste dificultăţi, se poate recurge la efectuarea electrosilicatării prin introducerea soluţiilor cu o oarecare presiune, în aşa fel ca presiunea să se asocieze la procesul electroosmotic. Efectul tratării combinate se resimte pe două căi :

— prin accelerarea electrosilicatării ;

— prin îmbunătăţirea rezultatelor finale.

Pentru re evarea efectului pozitiv al aplicării presiunii, s-au executat două serii de probe de laborator. Grosimea totală a fiecărei probe, pe direcţia trecerii curentului, a fost de 6 cm ; materialul utilizat a fost, pentru toate probele, nis p fin, prăfos, cu coeficientul iniţial de permeabilitate, de $1 \ldots 2 \times 10^{-4}$ cm/s. În cadrul fiecărei serii, soluţiile au fost introduse cu gradienţi hidraulici de 10, 30, 50, precum şi fără presiune. Rezultatele finale ale tratării au fost exprimate prin valoarea coeficientului de permeabilitate, grosimea zonei de material întărit şi rezistenţa la zdrobire (tabloul nr. 4). Se observă uşor că efectul tratării a fost cu atît mai favorabil, cu cît gradientul de presiune aplicat a fost mai mare.

Tabloul nr. 4

Grad. hidr.	Coeficient de permeabilitate final (cm/s)		Grosimea zonei întărite (cm)		Rezistenţa la zdrobire (kg/cm²)	
	Seria I-a	Seria II-a	Seria I-a	Seria II-a	Seria I-a	Seria II-a
1	—	—	2,5	4,5	1,2	2,0
10	$2{,}2 \times 10^{-6}$	0	4,0	6,0	1,9	2,6
30	$1{,}2 \times 10^{-6}$	0	6,0	6,0	2,3	3,2
50	$1{,}05 \times 10^{-6}$	0	6,0	6,0	2,8	4,3

NOTĂ. Rezultatele mai bune de la seria a II-a se explică prin introducerea unor cantităţi mai mari de soluţie decît la seria I. Astfel, cantitatea de silicat de sodiu a fost de 90 cm³ (respectiv 0,3 din volumul total al probei) la seria a II-a şi în medie, de 74 cm³ (ceva mai puţin decît 0.25 din volumul total) la seria I.

Din datele publicate în literatură, precum și din cercetările întreprinse la Institutul de mecanică aplicată, rezultă că o mare gamă de pămînturi, începînd de la nisipuri și pînă la argile, poate fi întărită prin silicatare.

Din 15 tipuri de pămînturi argiloase diferite, încercate la silicatare simplă, cu două soluții, în laboratorul de geotehnică I.M.A., 12 s-au întărit în mod sensibil.

Prof. K e i l [8] recomandă utilizarea în lucrările de consolidare a masivelor de pămînt, a unui material întărit format din pămînt amestecat cu silicat de sodiu și cu electrolit.

În ceea ce privește electrosilicatarea, este evident că rezultatele finale sînt influențate de natura și starea pămîntului. S-a constatat că prezența particulelor de argilă în cantitate mare, fapt care conferă pămîntului o permeabilitate extrem de scăzută, precum și umiditatea ridicată, care contribuie la diluarea soluțiilor, sînt factori care constituie un impediment pentru reușita aplicării metodei.

O indicație mai precisă în privința domeniului de aplicare a fost dată de cercetătorul maghiar V i g h [5], care a indicat drept apte pentru electrosilicatare pămînturile cu coeficientul de permeabilitate cuprins între 10^{-6} și 10^{-3} cm/s și cu un conținut de particule de argilă de peste 20 %.

În ceea ce privește consumul de energie electrică necesar electrosilicatării, prof. C e b e r t o w i c z îl apreciază la 30 . . . 40 kW oră pentru un m^3 de pămînt tratat.

★

Încercările de electrosilicatare în laborator au fost urmate de încercări pe teren, la scară semiindustrială, executate în colaborare cu un colectiv al Institutului de cercetări miniere. Prin aceste încercări s-a urmărit studiul anumitor aspecte ale electrosilicatării, care nu pot fi urmărite pe modele reduse, de laborator, printre care: distanța între electrozi, grosimea zonei electrosilicatate, schemele de distribuție a electrozilor, cantitățile de soluție necesare, durata și consumul de energie electrică etc. În același timp s-a urmărit verificarea indicațiilor calitative obținute în laborator.

S-a căutat ca modelele executate să se apropie cît mai mult de situația reală în care urmează să se aplice electrosilicatarea în practică. Ca material a fost folosit nisipul fin, puțin argilos, cunoscut în exploatările de lignit din țara noastră sub numele de „borchiș", unde provoacă mari dificultăți la lucrările de înaintare. Forma și dimesiunile electrozilor, precum și distanțele dintre electrozi, au fost similare cu cele preconizate la aplicarea în practică a metodei.

Încercările s-au făcut la minele de lignit din zonele Doicești și Filipeștii de Pădure.

Materialul, scos din mină, a fost introdus în bazine cu adîncimea de 1,50 m.

Cu excepția încercărilor de la Șotînga, unde borchișul a fost așezat direct într-o groapă săpată în pămînt, la celelalte, fundul bazinelor a fost acoperit cu un strat de beton, iar pereții au fost căptușiți cu scînduri.

În acest fel s-au evitat scurgerile de soluţie în afara masei ce urma să fie tratată; în schimb s-au modificat condiţiile de repartizare a cîmpului electric. În timp ce, în aplicaţiile în producţie, electrozii pot fi consideraţi înfipţi într-un masiv practic semi-infinit, în încercările în bazine, masivul tratat a avut dimensiuni limitate.

Soluţiile au fost introduse cu curent electric şi prin greutate proprie, nefiind posibilă aplicarea unei presiuni de injectare, din cauza adîncimii reduse a bazinelor şi a pericolului de refulare a soluţiilor pe lîngă electrozi. Cînd stratul de material ce trebuie silicatat se găseşte la o adîncime ceva mai mare, de ex. 5 metri, presiunea datorită numai coloanei de lichid de înălţimea respectivă ajunge la valoarea de 0,5 ... 0,6 kg/cm^2, suficientă pentru a îmbunătăţi efectul tratării. Existenţa unui strat care nu trebuie electrosilicatat, deasupra celui tratat, permite introducerea lichidelor cu oarecare presiune, fără pericol de refulare.

Fig. 7.

Faptul că în bazinele experimentale nu au putut fi reproduse întocmai condiţiile în care se face aplicarea în practică a metodei, a făcut ca datele obţinute să aibă numai un caracter indicativ. S-a remarcat mai ales un consum de energie şi o durată de tratare mai mari decît cele aşteptate. Accelerarea procesului de electrosilicatare datorită presiunii, precum şi reducerea rezistenţei electrice a masivului de pămînt în cazul cînd nu există pereţi despărţitori, fac să se presupună că în aplicaţiile pe teren ale metodei, atît durata de execuţie, cît şi consumul de energie vor fi mai reduse.

La Şotînga s-au executat două încercări. La prima s-a prevăzut un anod central şi patru anozi în colţurile unui patrat cu latura de 1,20 m. Datorită dificultăţilor locale de tratare, s-a putut obţine numai o zonă întărită în jurul anodului, cu un diametru de 30 . . . 50 cm. La a doua probă, electrozii au fost dispuşi în linie, la distanţa de 0,50 m unul de altul, anozii alternînd cu catozii. Ca rezultat final s-a obţinut un masiv întărit de forma unui zid continuu, cu grosimi variind între 30 şi 60 cm (fig. 7).

Cele 8 probe executate la mina Filipeştii de Pădure au fost grupate în felul următor:

1) Probele F_1, F_2, F_3, F_7 şi F_8 au avut ca scop determinarea influenţei distanţei dintre electrozi. Aşezarea acestora a fost liniară, anozii alternînd cu catozii. Distanţa dintre electrozi a fost de 30 cm (la F_7 şi F_8), 50 cm (la F_2 şi F_7) şi 80 cm (la F_3). Rezultatele obţinute la probele F_7 şi F_8 sînt arătate în figura 8. La proba F_3, distanţa dintre electrozi fiind prea mare, nu s-a mai format un masiv continuu, ci zone izolate în jurul electrozilor.

2) La proba F_6 s-a urmărit eficacitatea metodei în întărirea unei incinte. Electrozii, în număr de 12, au fost aşezaţi într-un contur închis,

la distanța de circa 50 cm unul de altul. Prin electrosilicatare s-a format un zid întărit, avînd în mijloc o zonă neîntărită (fig. 9).

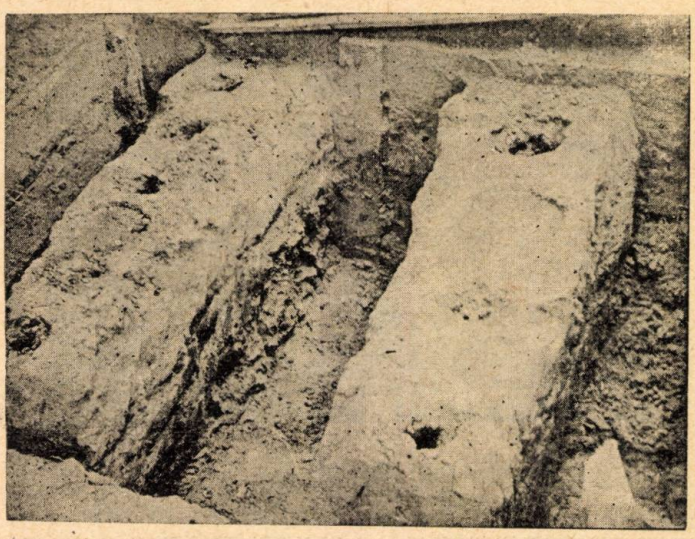


Fig. 8

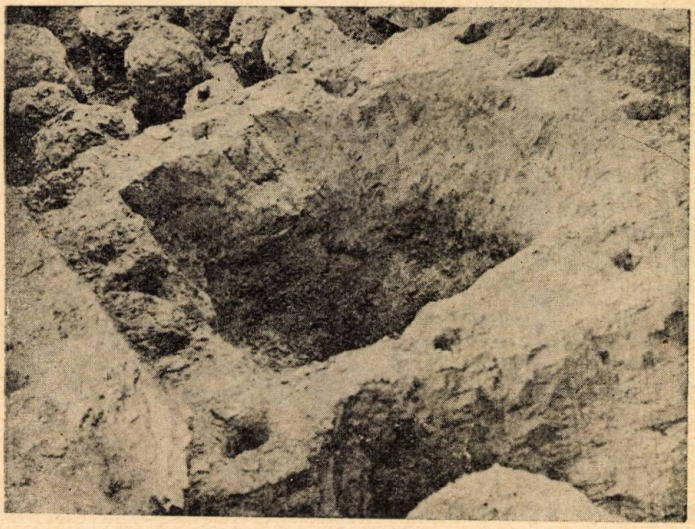


Fig. 9

3) La probele F_4 și F_5, electrozii au fost distribuiți în rînduri oblice (F_4) sau paralele (F_5), anozii alternînd și aici cu catozii. La F_4 s-a obținut un masiv întărit unic (fig. 10), iar la F_5, zone întărite în jurul fiecărui electrod (fig. 11).

La interpretarea datelor culese de la experienţele de mai sus s-au urmărit aceleaşi aspecte ca şi în determinările de laborator : ritmul de pătrundere a soluţiilor, cantităţile de soluţie consumate, consumul de energie

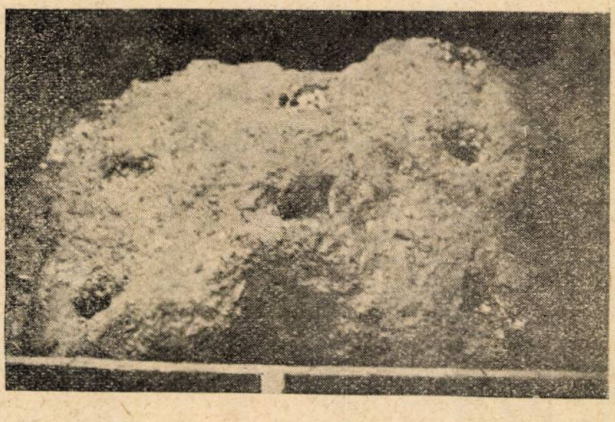


Fig. 10

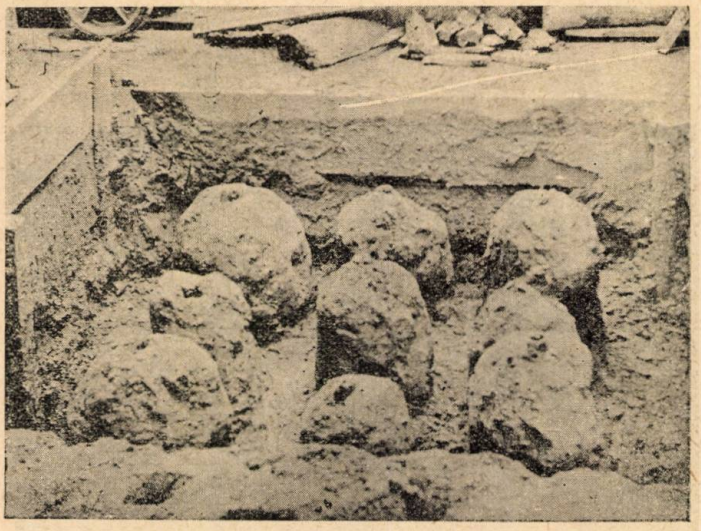


Fig. 11

electrică necesar şi volumul de material electrosilicatat. Rezultatele obţinute prin prelucrarea acestor date sînt cuprinse în tabloul nr. 5.

Din datele expuse rezultă o neuniformitate în modul de tratare a probelor. Coeficientul de umplere a porilor cu silicat are valori variate ($V_{sil}/V_{port} = 0{,}35$ . . . $0{,}83$); de asemenea şi raportul între cantităţile de silicat şi clorură introdusă ($V_{sil}/V_{cl} = 0{,}49$ . . . $2{,}48$). Repartizarea cantităţilor de soluţie între diferitele etape de tratare (înainte şi după inversarea curentului electric) nu este deloc uniformă. Această răspîndire

Tabloul nr. 5

Denumirea probei	Volumul întărit V_i m.³	Volumul de soluție consumat		V_{sil}/V_{cl}	V_{sil}/V_{pori} | V_{cl}/V_{pori}		Consum total de energie kWh	Consum specific de energie kWh/m³	Timp total de tratare (ore)
		Silicat V_{sil} l	Clorură V_{cl} l		S-a considerat $n=45\%$				
Șotînga — S_2	1,40	340	137	2,48	0,54	0,22	557,7	396	526
Filipești F_1	0,62	104	213	0,49	0,38	0,69	127,5	205	638
„ F_2	1,00	234	301	0,78	0,52	0,67	220,6	221	635
„ F_3	0,75	281	216	1,30	0,83	0,64	254,4	339	645
„ F_5	1,00	263	183	1,44	0,58	0,41	299,6	300	480
„ F_6	3,20	502	493	1,02	0,35	0,34	258,6	81	479
„ F_7	1,15	190	113	1,68	0,37	0,22	117,8	102	473
„ F_8	0,95	211	110	1,92	0,49	0,26	153,3	162	443

a datelor se explică în felul următor : în timpul executării experiențelor nu se cunoștea dinainte lățimea probabilă a zonei care va fi afectată de procesul de întărire ; de altfel determinarea acestei lățimi a constituit unul din obiectivele încercărilor în bazine. Din această cauză, nu s-a putut face o anteevaluare satisfăcătoare a volumului porilor masivului întărit și, implicit, a cantităților de soluție necesare. În general cantitățile de soluție prescrise inițial s-au dovedit a fi prea mari și de aceea introducerea silicatului a necesitat foarte mult timp, iar soluția de clorură s-a introdus mult mai greu și uneori în cantități insuficiente.

Din încercările efectuate a rezultat că grosimea zonei întărite, în cazul așezării electrozilor în linie, la 0,30 m unul de altul, a fost de 0,35 m ; în cazul distanței de 0,50 m între electrozi, grosimea întărită a fost de 0,40 m ; dacă electrozii au fost așezați la 0,80 m, nu s-a mai obținut un perete continuu — trebuie însă să, menționăm că în acest din urmă caz, încercarea nu a mai fost dusă la capăt, adică pînă la pătrunderea unei cantități suficiente de clorură, din cauza timpului de tratare extrem de îndelungată ; din același motiv, la această probă (F_3) nu s-a mai făcut nici inversarea curentului.

O comparație justă între rezultatele obținute cu diferite distanțe între electrozi presupune luarea în considerație, în afara grosimei zonei întărite, și a consumului de energie electrică, precum și a duratei tratării. Pentru a face p sibilă această comparație, am pornit de la anumite ipoteze menite să evite neuniformitatea modului de tratare a diferitelor probe și să permită precizarea unor coeficienți comparabili, deduși din datele obținute la diferite probe. Astfel, în tabloul nr. 6 sînt prezentați o serie de coeficienți deduși în ipoteza că grosimea zonei întărite prin elect o silicatare este de : 0,35 m pentru o distanță între electrozi de 0,30 m ; 0,40 m pentru distanța de 0,50, și respectiv 0,55 m, pentru distanța de 0,80 m. S-a mai presupus că atît soluția de silicat, cît și cea de clorură, trebuiau introduse în cantități de cîte 40% din volumul porilor masivului întărit, repartizate în două tranșe egale între electrozii de semn contrar. Pentru aprecierea consumului de energie și a timpului de tratare necesar, s-au extras din fișele de observații ale probelor experimentale analoge executate, valorile corespunzătoare pătrunderii în pămînt a cantităților de soluție prescrise.

Tabloul nr. 6

Nr. crt.	Distanţa între electrozi m	Grosimea teoretică întărită m	Volumul porilor (S-a considerat $n = 45\%$) m^3	Volumul de soluţii necesare $V_{sil} = V_{cl} = 0{,}2\ V_{pori}$ l	Consum total de energie kWh	Consum specific de energie kWh/m^3	Timp total de tratare ore
1	0,30	0,35	0,295	59	11	141	193
2	0,50	0,40	0,562	112	136	109	204
3	0,80	0,55	1,237	247	236	86	386

Din compararea datelor expuse în tabloul nr. 6, se poate remarca scăderea consumului de energie electrică raportat la volumul de material tratat, pe măsura creşterii distanţei între electrozi. În acelaşi timp însă, creşte timpul necesar de execuţie. Astfel, consumul de energie scade cu 20 . . . 25%, cînd distanţa între electrozi creşte de la 0,30 la 0,50 m, în timp ce durata execuţiei creşte cu circa 6%. Trecînd la distanţa de 0,80 m (datele privesc introducerea soluţiilor numai într-un singur sens), se constată o scădere a energiei consumate cu încă 20%, însă timpul necesar creşte cu 90 %. La alegerea distanţei optime dintre electrozi mai trebuie avute în vedere şi alte elemente :

— distanţele prea mici duc la mărirea numărului electrozilor necesari, şi implicit a volumului de lucru necesar confecţionării şi înfigerii lor ;

— plasarea electrozilor la distanţe prea mari măreşte pericolul unei întăriri neuniforme în zonele intermediare şi chiar al unor discontinuităţi în masivul întărit, care pot apare la mijlocul distanţelor dintre electrozi.

În literatura de specialitate se indică, pentru distanţa dintre electrozi, valori de 0,50 ... 0,80 m. Pe baza experienţelor executate, socotim că distanţa cea mai indicată e de 0,50 ... 0,60 m, la care se poate considera o lăţime medie a zonei întărite, de 0,40 ... 0,50 m.

Aşezarea electrozilor în linie asigură obţinerea unui perete de material întărit sau a unei incinte, înconjurate de un zid întărit, de grosime însă relativ redusă. Pentru obţinerea unui zid mai gros sau pentru întărirea unui masiv de pămînt avînd în plan ambele dimensiuni de acelaşi ordin de mărime, se recomandă aşezarea electrozilor în mai multe rînduri paralele, alcătuite din electrozi de acelaşi semn, rînduri care alternează cu electrozi de semn opus, situaţi la mijlocul distanţelor dintre cei din rîndul alăturat. În felul acesta s-a putut obţine, cu trei rînduri paralele de electrozi (două rînduri marginale cu cîte trei anozi şi un rînd central de doi catozi), un masiv întărit de 1,60 m lăţime. Distanţa între rîndurile marginale a fost de 1,00 m. E de remarcat că în această experienţă, zona întărită a depăşit cu 0,30 m în toate părţile linia de contur formată de electrozi. Schema de aşezare a electrozilor în rînduri paralele, cu anozii alternînd cu catozii pe fiecare rînd, nu a dus la rezultate satisfăcătoare : s-au obţinut porţiuni întărite numai în jurul electrozilor.

Experienţele la scară semiindustrială au confirmat indicaţiile furnizate în literatură cu privire la cantităţile de soluţie necesară (cîte 0,35... 0,40 din volumul porilor masivului, pentru fiecare din cele două soluţii). Introducerea unei cantităţi mai mari nu a dus la extinderea zonei întărite, în schimb a avut ca urmare prelungirea duratei de execuţie şi creşterea consumului total de energie electrică.

Densitatea cea mai potrivită pentru soluția de silicat de sodiu a fost de 1,15. Acolo unde s-a încercat soluție de 1,20, ritmul de pătrundere a fost prea lent. Pentru soluția de clorură de calciu s-a adoptat densitatea de 1,10.

Consumul de energie raportat la volumul de material întărit variază în limite foarte largi (tabloul nr. 5). În parte, valorile mari constatate se datoresc deficiențelor experimentale amintite mai înainte ; e de remarcat însă că și valorile cuprinse în tabloul nr. 6, referitoare la un mod mai corect de executare a experiențelor, sînt încă prea mari față de cele indicate în lucrările străine. De asemenea durata experimentărilor a rezultat foarte mare (443 ... 645 ore, tabloul nr. 5).

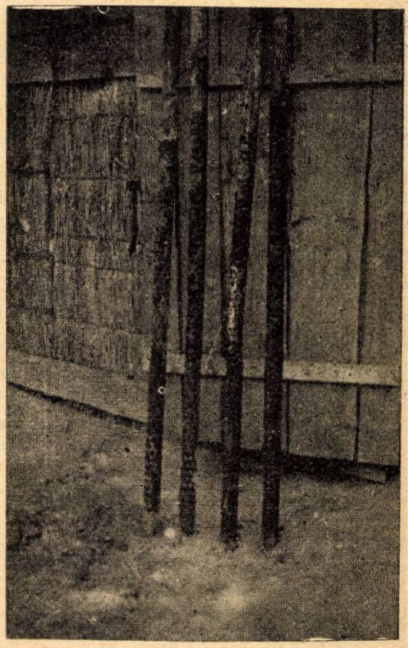


Fig. 12

Diferențele importante constatate între rezultatele obținute în bazinele experimentale și cele indicate în bibliografie, trebuie puse pe seama condițiilor specifice de lucru din bazine și, în special, a existenței pereților despărțitori și a imposibilității introducerii soluțiilor în pămînt cu o oarecare presiune.

În ceea ce privește metodica de execuție, raportul cel mai potrivit între cantitățile introduse înainte și după inversarea curentului a fost găsit de 1 : 1.

În încercările efectuate s-a utilizat, în medie, o densitate de curent de 3 A/m^2 de electrod (care a corespuns unor tensiuni de 40 ... 70 V). Trebuie menționat că și cu această densitate relativ mică s-a constatat o încălzire intensă a pămîntului, Se pare că încălzirea provoacă procese secundare—în primul rînd acoperirea rapidă a anozilor cu cruste impermeabile și slab conductibile sau corodarea lor (fig. 12) — care au urmări nefavorabile asupra desfășurării lucrărilor. De aceea intensitățile mai mari nu sînt indicate. În timpul experienței, producerea crustei provoacă o cădere importantă de potențial la contactul anod/pămînt și deci un consum inutil de energie. De aceea se recomandă, dacă este posibil, curățirea anozilor de aceste depuneri dăunătoare, care, între altele, astupă orificiile electrozilor, îngreuind pătrunderea soluțiilor în pămînt.

În concluzie, se poate afirma că încercările pe modele mari, în bazine experimentale, au confirmat posibilitatea utilizării electrosilicatării ca metodă de întărire a pămînturilor și efectele pozitive ale aplicării ei constatate în condiții de laborator. În același timp, aceste încercări au scos în evidență necesitatea găsirii unui mijloc de accelerare a introducerii soluțiilor în pămînt. Cel mai eficace dintre acestea pare a fi, în momentul de față, asocierea acțiunii de injectare a soluțiilor prin electroosmoză, cu injectarea prin presiune. Pe această linie credem că trebuie continuate studiile începute asupra electrosilicatării.

Primită la redacție la 23 aprilie 1956.

К ВОПРОСУ ЭЛЕКТРОСИЛИКАТИЗАЦИИ ГРУНТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Статья содержит результаты испытаний, предпринятых геотехническим коллективом Института прикладной механики по вопросу укрепления грунтов путем электросиликатизации. Рассматривается способ проникновения в землю химических растворов, а также характерные явления, вызываемые прохождением электрического тока. Достигнутые при применении этого способа результаты выразились в уменьшении проницаемости, повышении сопротивления материала на раздробление и устойчивости к распаду в воде.

Даются указания относительно способа обработки как в лабораторных условиях, так и в производстве. Излагаются испытания, проведенные в полупромышленном масштабе с некоторыми мелкозернистыми песками в одном из рудничных районов, а также и некоторые данные, полученные этим путем, относящиеся к расходу химических растворов и расходу электроэнергии, связанных с применением этого способа.

Эти указания будут уточнены после выполнения несколких испытаний на практике, в природных условиях.

CONTRIBUTIONS AU PROBLÈME DE L'ÉLECTROSILICATISATION DES SOLS

(RÉSUMÉ)

L'article contient les résultats des essais entrepris par le Collectif de Géotechnique de l'Institut de Mécanique appliquée dans le problème de la consolidation des sols par électrosilicatisation. On examine la façon dont les solutions chimiques pénètrent dans le sol, ainsi que les effets caractéristiques provoqués par le passage du courant électrique. Les résultats obtenus par l'application de cette méthode ont été appréciés par la diminution de la perméabilité, l'accroissement de la résistance du matériel à l'écrasement, ainsi que par la stabilité à la délitescence dans l'eau.

On donne des indications sur la façon d'exécuter le traitement, tant dans des conditions de laboratoire que dans l'exploitation. On expose les essais exécutés à l'échelle semi-industrielle sur des sables fins, dans une région minière, ainsi que quelques indications, obtenues par cette voie, concernant la consommation de solutions chimiques et d'énergie électrique, nécessaires pour l'application de la méthode. Ces indications doivent encore être précisées après exécution de quelques essais pratiques dans des conditions naturelles.

BIBLIOGRAFIE

2. B. A. Rjaniţîn, *Silikatizatia pescianîh gruntov.* Moscova 1949.
1. B V. Tolstopiatov, *Himiceskie dobavki v grunt pri elektrohimiceskom zakiieplenii.* Issledovanie rabotî grunta v jeleznodorojnîh soorujenrah NIIPS, 1940.
3. L. Casagrande, *The Application of Electroosmosis to Practical Problems in Foundations and Earthworks.* Depart. of Scient. and Ind. Research Station Technical Paper, Londra 1947, nr. 30.
4. R., Gebertowicz, J. Chrusciel, *Elektrokinetische Baugrundverfestigungs- und Abdichtungsverfahren.* Gdansk, 1954,.
5. F. Vigh, *Eletroosmoza şi aplicarea ei în lucrările miniere* (în limba ungară) — lucrare primită din R. P. Ungară. Tradusă la Institutul de mecanică aplicată, 1953.
6. A. Myslivec, *Elektroosmosa a jeji užiti v inženyrské praxi.* Inženyrské Stavby, 1955, nr. 1.
7. R. J. Bally, I. Antonescu, M. Marcovici, *Încercări de laborator asupra electrosilicatării pămînturilor.* Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţii, 1954, nr. 2.
8. K. F. G. Keil, *The „Hydraton"-Method, a New Process of Stabilizing Soils by Inorganic Agents.* Proceedings of the third Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng, Switzerland, vol. I, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

TEHNOLOGIA MATERIALELOR

PROPRIETĂŢILE FIZICE, MECANICE ŞI TEHNOLOGICE ALE LEMNULUI SPECIILOR EXOTICE

DE

GH. I. PANĂ, M. DÚPU şi S. OCSKAY

Cultura speciilor exotice a constituit o preocupare deosebită încă cu decenii în urmă, pentru silvicultura romînească după cum arată culturile existente în diverse locuri din ţară.

În ultimul timp, interesul pentru speciile exotice a crescut şi cultura lor pe baze ştiinţifice a ajuns la noi într-un stadiu avansat, permiţînd în viitor extinderea cu succes a speciilor al căror lemn prezintă importanţă economică.

Pînă acum, în ţara noastră s-au întreprins unele studii [1], [2], pentru cunoaşterea speciilor exotice, însă numai sub aspectul silvicultural. Proprietăţile fizice, mecanice, chimice şi tehnologice ale lemnului nu au fost cercetate, datele de acest gen citate sporadic sînt preluate din literatura străină. Aceste date referindu-se însă aproape exclusiv la lemnul speciilor crescute chiar în arealul lor natural, nu pot constitui decît indicaţii cu caracter informativ, deoarece condiţiile ecologice din R. P. R. se deosebesc de acelea din ţara de origine. Din această cauză, este de presupus c ĭ se produc şi anumite deosebiri în particularităţile de structură ale lemnului. care determină proprietăţi diferenţiate.

De aici decurge necesitatea cunoaşterii cît mai amănunţite a proprietăţilor fizice, mecanice, chimice şi tehnologice ale lemnului speciilor exotice cultivate în condiţiile din ţară.

În alte ţări, lemnul speciilor exotice a fost cercetat sub aspectul calitativ, datele cu privire la proprietăţile sale fiind înscrise în standarde [3], sau prezentate în diverse lucrări de specialitate [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Culturile de exotice din R.P.R., deşi pe suprafeţe mici şi cu o vîrstă relativ redusă,pot produce lemn care, fără a constitui în cele mai multe cazuri, rezerve de materie primă pentru industrie sau construcţii, se pretează la cercetări preliminarii, furnizînd date care indică cu suficientă precizie sp e care dintre speciile exotice adaptate la noi, să se îndrepte atenţ a în mod deosebit în viitor.

Un interes deosebit îl prezintă speciile al căror lemn are calităţi speciale pentru dife ite produse industriale sau în construcţii, şi care în general se importă.

Este evident că extinderea culturii speciilor exotice care produc un lemn similar calitativ cu acela al speciilor autohtone, nu este indicată din punct de vedere economic.

Studiile întreprinse au condus la o calificare calitativă a lemnului, pe baza proprietăților acestuia, și au indicat domeniile de utilizare. Folosind metode noi de încercare [10], [11] au fost determinate unele caracteristici ale lemnului necitate încă în literatura străină: penetrabilitatea pentru apă, rezistența la tăiere dinamică prin așchiere, diferența de proprietăți ale lemnului din zona de alburn față de zona de duramen etc; au fost stabilite de asemenea regimul de lucru și caracteristicile unghiulare optime ale uneltelor tăietoare pentru prelucrare, a lemnului fiecărei specii, precum și noi sectoare de utilizare a lemnului speciilor cercetate.

CAPITOLUL I

METODA DE LUCRU

1. *Date asupra materialului încercat.* Proveniența, dimensiunile și vîrsta arborilor recoltați sînt arătate în tablourile nr. 1, 2, și 3.

Alegerea arborilor (1—4 pentru fiecare specie) s-a făcut astfel încît aceștia să reprezinte media dimensională și calitativă a arboretului respectiv.

2. *Metodele de încercare.* Secționarea arborilor și debitarea buștenilor în epruvete s-a executat după metoda standardizată [1]).

Încercările pentru determinarea caracteristicilor inelelor anuale, greutății specifice, contragerii, elasticității, rezistențelor mecanice și durabilității lemnului[2]) au fost făcute după metodele standardizate. Încercările pentru determinarea absorbției de apă în atmosferă saturată de vapori și prin imersie, a penetrabilității pentru apă[3]), a rezistenței la uzură și a rezistenței la așchiere dinamică[4]), s-au făcut după metodele elaborate cu ocazia altor cercetări [10], [11], [12].

Rezistența la întindere perpendicular pe fibre[5]) și duritatea Brinell, au fost determinate după metodele clasice.

Încercările au fost făcute separat pentru lemnul din zona de alburn și separat pentru lemnul din zona de duramen.

---

[1]) STAS 2682—51. Alegerea și debitarea în epruvete a arborilor de probă pentru încercările fizico-mecanice.

[2]) Încercarea durabilității naturale s-a făcut pe cale micologică folosind ca agenți de atac, ciupercile: *Coniophora cerebella* Schott., *Polyporus sulphureus* Fr. și *Merulius lacrymans* Schum, pentru speciile de rășinoase și *Coniophora cerebella* Schott,. *Polystictus versicolor* L.. și *Merulius lacrymans* Schum., pentru foioase; lemnul de stejar și fag s-a luat ca etalon pentru foioase și lemnul de brad și larice pentru rășinoase (STAS 649—49 Lemn. Încercarea durabilității pe cale micologică).

[3]) Presiune 5 at, durată de 30 min și temperatură 20°C.

[4]) Caracteristicile cuțitului:

α (unghiul de atac) = 43°,
β (unghiul piezișului) = 34°,
Grosimea așchiei = 0,15 mm.

[5]) Metoda de încercare după AFNOR B5—30 (1942).

Pentru a se constata comportarea lemnului la prelucrare[1]) s-au făcut experimentări de tăiere cu pînze de ferăstrău circular, de rindeluire, frezare, strunjire și derulare[2]), s-au făcut încleieri cu cleiuri colagenice și pe bază de rășini sintetice; s-au făcut operații de finisare: șlefuire, colorare (băițuire), lăcuire cu șelac și nitrolac și vopsire. Produsele fabricate experimental în ateliere[3]) (casete, cutii, cozi de unelte, obiecte de tîmplărie și pentru sport) sau industrial[4]) (furnir, creioane și schiuri) au fost cercetate sau încercate pentru a se determina comportarea lor la folosirile obișnuite respective.

Caracteristicile materialului încercat au fost analizate în comparație cu datele din literatura de specialitate pentru lemnul speciilor crescute în țările de origine, precum și cu lemnul unor specii indigene asemănătoare ca proprietăți (brad, pin, larice, frasin etc.)

CAPITOLUL II

REZULTATUL CERCETĂRILOR

BRADUL DUGLAS

(*Pseudotsuga taxifolia* Britt. = *P. Douglasii* Carr.)

Arealul natural. Bradul Duglas este originar din partea vestică a Americii de Nord.

Arealul său natural se întinde de la coasta Pacificului pînă în interiorul Munților Stîncoși.

Arborele. Înălțimea obișnuită: 50—60 m, excepțională 100 m; diametrul 1—2 m, la 1,3 m de la sol.

Lemnul[5]). 1. *Caracteristici fizice.* Culoarea lemnului uscat este gălbuie-roșiatică sau roșiatică-brună pentru duramen și roză-galbenă palid pentru alburn.

Lățimea inelelor anuale deși mare (4,2 mm), proporția de lemn tîrziu este ridicată (51%), cu limită tranșantă între lemnul timpuriu și cel tîrziu. În comparație cu lemnul din țara de origine, lemnul de la noi are creșteri mai mari și este mai puțin omogen[6]); greutatea specifică este mai mare (~ 14%). Poate fi comparat sub raportul greutății specifice, cu lemnul de pin, însă este mai puțin omogen și cu o proporție mai mare de lemn tîrziu.

---

[1]) Caracteristicile unghiulare optime, ale dinților pînzelor de fierăstrău circular și a cuțelor de rindeluit, pentru prelucrarea lemnului fiecărei specii, s-au determinat la pînze prin variația unghiului de atac al dinților, iar la cuțite prin variația unghiului piezișului și al contrapiezișului. Experimentările s-au făcut pe piese cu dimensiunile: 1500/150/50 mm, dimensiuni care pot deveni standard pentru astfel de încercări.

[2]) Aprecierea calității suprafeței prelucrate cu uneltele tăietoare, s-a făcut prin examinarea la microscop și cu ochiul liber.

[3]) Atelierele ICEIL.

[4]) Întreprinderile „Placajul" - București și „Republica" - Sibiu.

[5]) Caracteristicile materialelor cercetate, se pot urmări în tablourile nr. 4—10 și diagramele din figurile 1 și 2.

[6]) La vîrste mai mari, creșterile vor fi mai mici (acest fenomen se produce în general la rășinoase).

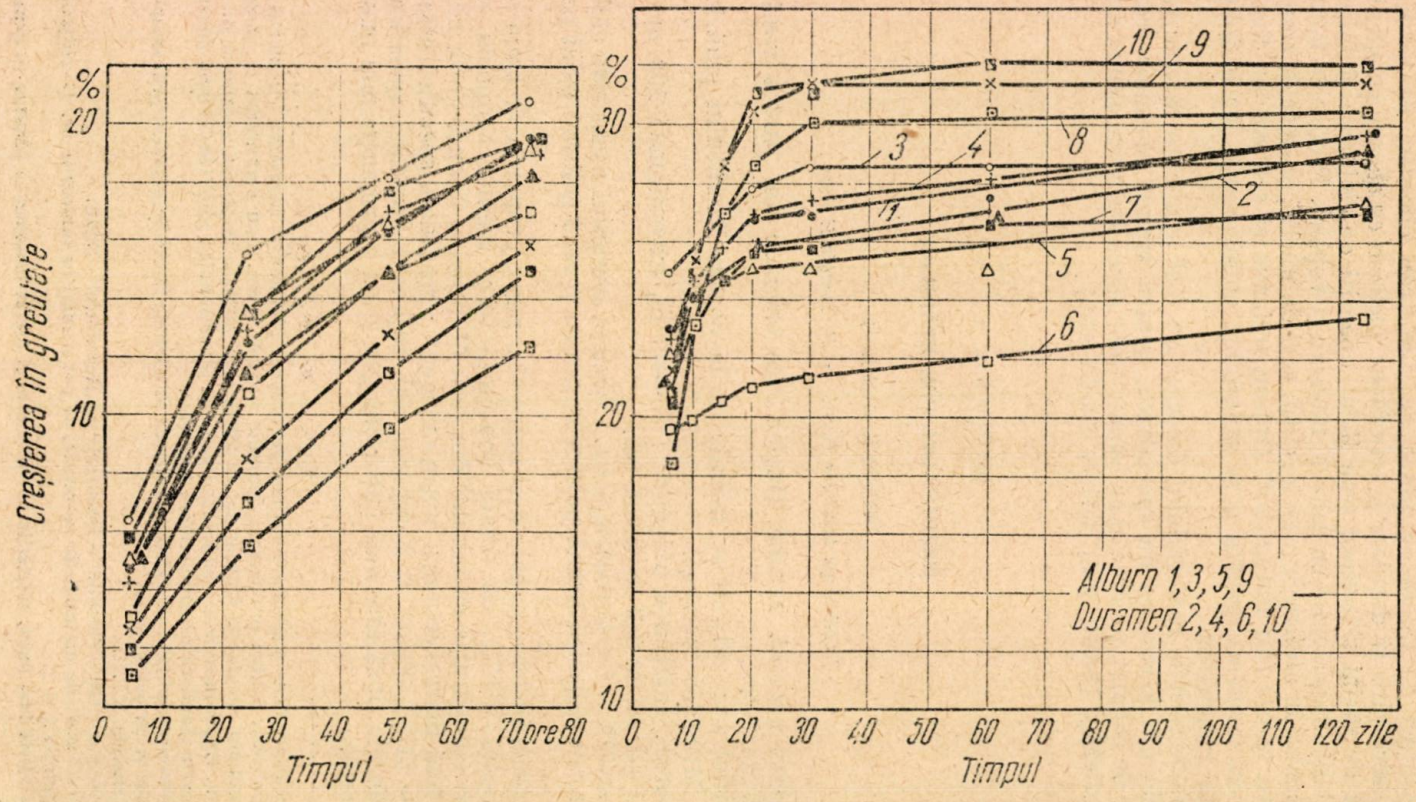


Fig. 1. — Creşterea procentuală în timp a greutăţii epruvetelor din lemn prin absorbţia apei din atmosferă saturată de vapori ($\varphi = 100\,\%$).

1,2 — Pseudotsuga taxifolia; 3,4 — Taxodium distichum; 5,6 — Juniperus virginiana; 7 — Abies Alba; 8 — Carya ovata; 9,10 — Carya pecan.

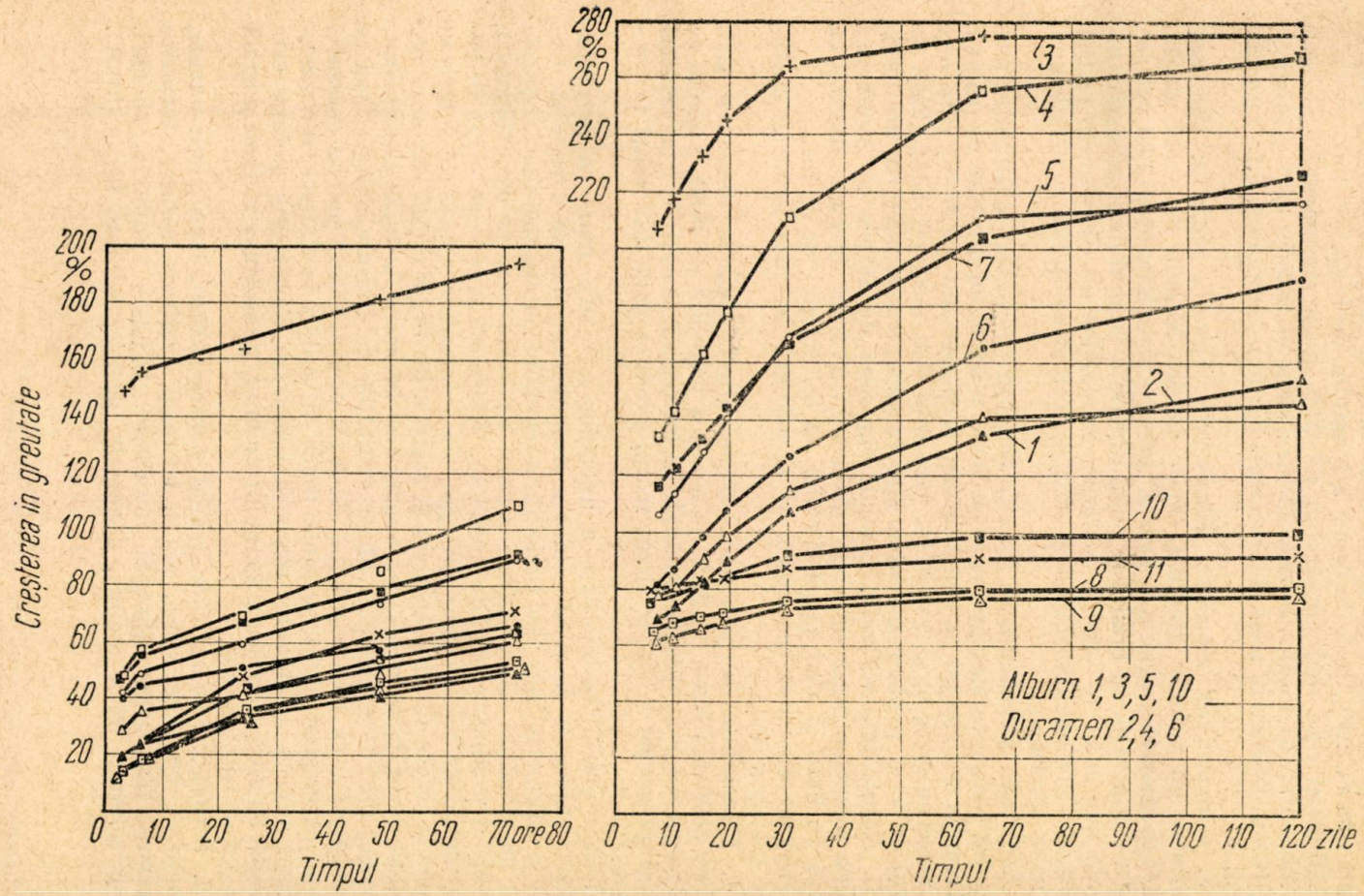


Fig. 2. — Creșterea procentuală în timp a greutății epruvetelor din lemn, în urma absorbției de apă prin imersie.

1,2 — Pseudotsuga taxifolia; 3,4 — Taxodium distichum; 5,6 Juniperus virginiana; 7 — Abies alba; 8 — Carya ovata; 9 — Carya glabra; 10 — Carya pecan; — 11 — Carya lacinosa.

Absorbția de apă (fig. 2) este mai mică cu 32%, iar penetrabilitatea pentru apă cu 90% față de aceea a lemnului de brad.

Alburnul este mai penetrabil, cu 63% decît duramenul.

Dimensiunile medii ale traheidelor : zona de alburn 4,5 m lungime, și 0,19 mm diametru, zona de duramen 3,5 mm lungime și 0,15 mm diametru.

2. *Caracteristici mecanice. Elasticitate.* Valorile obținute sînt asemănătoare cu valorile maxime, citate pentru lemnul de brad duglas crescut în așa-zisa „regiune de coastă" care produce lemnul cel mai valoros.

În comparație cu bradul și pinul din țară, lemnul de brad duglas are module mai mici (5—36%). Valorile modulelor de elasticitate pentru alburn, sînt în general mai mici (3—31%), decît cele obținute pentru lemnul din zona duramen.

Rezistențe. Rezistența la diferite solicitări mecanice a lemnului provenit din țară, este asemănătoare cu aceea a lemnului din țara de origine, cu excepția rezistenței la compresiune perpendicular pe fibre, care este mai mare cu 46% și a rezilienței care este mai mică cu 33%. Față de lemnul de brad și pin rezistențele sînt în general mai mari cu 10—20%.

3. *Durabilitate naturală.* Lemnul din zona de alburn se încadrează în clasa lemnelor puțin durabile (clasa a IV-a) fiind deci mai durabil ca lemnul de brad și mai puțin durabil ca duramenul de larice.

Lemnul din zona de alburn se încadrează în clasa lemnelor nedurabile (clasa a V-a).

4. *Comportare la prelucrare.* Rezistența la tăierea dinamică prin așchiere este mai mare cu 20% ca aceea a lemnului de brad. Lemnul se prelucrează ușor cu unelte manuale și la mașini unelte; cel cu creșteri mari și proporție de lemn tîrziu mare, produce însă dificultăți la prelucrare.

Uzura muchiilor tăietoare a uneltelor este mai mare ca la prelucrarea lemnului de brad sau chiar a lemnului de pin. Se derulează, frezează și strunjește bine. La rîndeluirea lemnului cu creșteri mari, cuțitele uzate au tendința să comprime lemnul timpuriu care se expansionează ulterior, și produce suprafețe ondulate. Suprafețe netede se obțin în general numai cu unelte bine ascuțite. Se recomandă pînze de ferăstrău circular și cuțite de rindeluit tip A (tablourile nr. 9 și 10). Lemnul are tendință de crăpare la baterea cuielor; se încleiază în mod satisfăcător. Colorarea (băițuirea) se face bine; operațiile de finisare a suprafeței se execută ușor și cu rezultate bune, dacă nu prezintă fibre parțial detașate. Lemnul cu creșteri mari, prezintă unele dificultăți la finisare, din cauza durității diferite a lemnului tîrziu și timpuriu. Uzura prin șlefuire este mai mică cu 20% ca aceea a lemnului de brad, pe secțiune radială și egală pe secțiune transversală.

5. *Utilizări.* Lemnul este indicat pentru poduri, construcții navale, aeronautice, vagoane, stîlpi, piloți, traverse, susțineri miniere, șarpante exterioare, tîmplărie, căptușeli interioare, butoaie, conducte, silozuri, placaje (creșteri mici) mobilă, dușumele, pavaje, celuloză, hîrtie (kraft).

CHIPAROSUL DE BALTĂ

(*Taxodium distichum* Rich.)

Arealul natural. Chiparosul de baltă este originar din partea estică a Americii de Nord. Ocupă teritoriile din imediata apropiere a litoralului, din Maryland și Delaware pînă în Texas și în lungul fluviului Mississipi sub forma unei benzi înguste pînă în sudul statelor Illinois și Indiana.

Arborele. Dimensiunile frecvente 1—1,5 m diametru și 35 m înălțime; excepțional 4 m diametru, la 2m de la sol și 50 m înălțime.

Lemnul. 1. *Caracteristici fizice.* Culoarea lemnului uscat este albă-gălbuie pentru alburn și roșiatică-brună pentru duramen. Lemnul cercetat prezintă creșteri relativ mari (4,1 mm) și cu o proporție de lemn tîrziu foarte redusă (7%).

Ca o consecință, greutatea specifică este redusă, respectiv cu 18% față de lemnul arborelui crescut în țara de origine și cu 16% față de lemnul de brad. Lemnul acestei specii poate fi considerat ca unul din cele mai ușoare produse de arbori de la noi. Contragerea radială este aproape nulă; contragerea radială și tangențială sînt mult mai mici (67—51%) decît la lemnul de brad.

Spre deosebire de indicațiile găsite în literatură, absorbția de apă este deosebit de mare, depășind-o chiar pe aceea a lemnului de brad.

2. *Caracteristici mecanice. Elasticitate.* La încovoiere statică, lemnul chiparosului de baltă, crescut în țară prezintă un modul mai mic cu 59% față de lemnul aceleiași specii, crescut în țara de origine. Modulele de elasticitate la compresiune paralel cu fibrele și întindere paralel cu fibrele sînt mai mici, respetiv cu 76,5—76%, iar la răsucire cu 8% mai mare față de lemnul de brad. Lemnul provenit din zona de alburn în general este mult mai elastic decît cel din zona de duramen.

Rezistențe. Rezistențele lemnului crescut în țară sînt mai reduse decît acelea ale lemnului din țara de origine (cu 49% la compresiune paralel cu fibrele, 38% la încovoiere statică, cu 12—24% duritate Janka). În raport cu lemnul de brad, rezistența la compresiune axială și încovoiere este mai mică cu 44—43%, iar rezistența la forfecare și despicare mai mare cu 18—42%.

Lemnul din zona de duramen are o rezistență mult mai mică decît acela din zona de alburn (6—54%) deși greutatea specifică este aproape aceeași.

3. *Durabilitate naturală.* Lemnul din zona de duramen se încadrează în clasa lemenlor nedurabile (clasa aV-a). Durabilitatea constatată este similară cu aceea a lemnului de brad.

4. *Comportare la prelucrare.* Rezistența la tăiere dinamică prin așchiere este mai mare cu 4,5% ca aceea a lemnului de brad. Lemnul se prelucrează ușor, în toate direcțiile, cu unelte manuale și la mașini-unelte. Uzura muchiilor tăietoare a uneltelor este foarte mică. Sînt necesare numai uneltele excepțional de bine ascuțite, pentru a se obține suprafețe netede sau muchii intacte la piese. Se recomandă pînze de ferăstrău circular subțiri și cuțite de rindeluit tip A (tablourile nr. 9 și 10). Lemnul se încleiază foarte bine. Colorarea (băițuirea) se face bine, însă lemnul

este absorbant; operaţiile de finisare a suprafeţei sînt uşoare şi cu rezultate bune. Uzura prin şlefuire (rd + tg) mai mare cu 51% ca aceea a lemnului de brad.

5. *Utilizări.* Lemnul este indicat pentru construcţii navale, tîmplărie, mobilă, furnire, panele (miezuri), ambalaje, duşumele (oarbe), creioane etc.

IENUPĂRUL VIRGINIAN

(*Juniperus virginiana* L.)

Arealul natural. Este originar din partea estică a Americii de Nord. Ocupă arii din sudul Canadei pînă la coastele golfului Mexic şi de la litoralul Oceanului Atlantic pînă la marginea stepelor care se întind în partea stîngă a fluviului Mississipi.

Arborele. Dimensiuni frecvente, 20—25 m înălţime şi 40—50 cm diametru la 1,3 m de la sol; excepţional 35 m înălţime şi 1,2 m diametru.

Lemnul. 1. *Caracteristici fizice.* Culoarea lemnului este gălbuie deschis, murdară pentru alburn şi roşie-roză, roşie-brună-a'băstruie pentru duramen. Creşterile (2—2,4 mm) şi proporţia de lemn tîrziu (8—17%) reduse. Greutatea specifică mai mare cu 16% ca aceea a lemnului speciei crescute în ţara de origine. În raport cu lemnul de brad, greutatea specifică este mai mare cu 22,0%; absorbţia de apă şi penetrabilitatea mai reduse, respectiv cu 6—63%.

2. *Caracteristici mecanice. Elasticitatea.* Valorile modulului de elasticitate la încovoiere statică sînt asemănătoare cu acelea ale lemnului speciei crescute în ţara de origine. În raport cu lemnul de brad, modulele de elasticitate la compresiune paralel cu fibrele, încovoiere statică, întindere paralel cu fibrele, sînt mai reduse cu 53—47% cu excepţia celui la răsucire, care este mai mare cu 40%. Între alburn şi duramen diferenţierea de elasticitate este redusă.

Rezistenţe. Lemnul crescut la noi are rezistenţe mai mari ca acelea din ţara de origine (32% la încovoiere statică, 27% la duritate Janka). În raport cu lemnul de brad rezistenţele sînt mai mari la unele solicitări (5% compresiune, 11% încovoiere, 54% despicare) şi mai mici la altele (27% duritate tranversală).

Lemnul din zona duramenului prezintă valori asemănătoare cu acelea din zona alburnului.

3. *Durabilitate naturală.* Lemnul din zona de duramen se încadrează în clasa lemnelor excepţional de durabile (clasa I) fiind din acest punct de vedere superior duramenului de larice.

4. *Comportarea la prelucrare.* Rezistenţa la tăiere dinamică prin aşchiere este mai mică cu 13% ca aceea a lemnului de brad. Lemnul se prelucrează uşor cu unelte manuale şi la maşini-unelte. Uzura muchiilor tăietoare a uneltelor este foarte mică (mai mică decît la prelucrarea lemnului de brad). Se rindeluieşte, frezează şi strunjeşte bine cu o suprafaţă excepţional de netedă, cu condiţia ca uneltele să aibă muchiile tăietoare bine ascuţite. Se recomandă pînze de ferăstrău circular şi cuţite de rindeluit tip B (tablourile nr. 9 şi 10). Lemnul se încleiază normal. Operaţiile

curente de finisare dau rezultate bune. Uzura prin șlefuire mai mare cu 22 și 45% (tr. și tg) ca aceea a lemnului de brad.

5. *Utilizări.* Lemnul este indicat pentru creioane, mobilă (dulapuri pentru haine), căptușeli decorative (în construcții), ambalaje, casete (pentru țigări), bibelouri etc. Lemnul de calitate inferioară se utilizează pentru traverse, stîlpi, araci etc.

HICORY

(*Carya* sp.)

Arealul natural. Speciile de hicory sînt originare din America de Nord. Ocupă arii întinse din sudul Canadei, pînă în golful Mexicului, de la litoralul Atlanticului pînă la marginea preeriilor. Regiune optimă: statele Indiana, Ohio, West-Virginia, Kentuky și Tennessee pentru *C. ovata*, și statul Carolina de Nord pentru *C. glabra.*

Arborele. Dimensiuni frecvente, 25—30 m înălțime și 40—50 cm diametru la 1,3 m de la sol; excepțional, 40 m înălțime și 100 cm diametru.

Lemnul. 1. *Caracteristici fizice.* Culoarea lemnului este albicioasă, gălbuie-albicioasă pentru alburn și șocolatie (brună închis) pentru duramen. Creșteri reduse (2,2—3 mm) și proporția de lemn tîrziu mare (65—72%). Greutatea specifică mai mare (la *Carya ovata* cu 21,0%) ca aceea a lemnului speciei crescute în țara de origine. În raport cu lemnul de frasin, greutatea specifică pentru aceeași specie este mai mare cu 23%. Absorbția de apă (80—100%) și penetrabilitatea (0,48 mm) sînt foarte reduse.

2. *Caracteristici mecanice. Elasticitate.* Modulul de elasticitate la încovoiere statică are valori apropiate față de acelea ale lemnului speciilor din țara de origine. În raport cu lemnul de frasin, valorile obținute pentru module sînt asemănătoare, afară de modulele la încovoiere, care sînt mai mari (15—32%) cu excepția celui al *C. pecan* care este mai mic (7,5%).

Dintre cele patru varietăți studiate, *C. laciniosa*, prezintă lemnul cel mai rigid, iar *C. pecan*, cel mai elastic.

Lemnul din zona de duramen (*C. pecan*), singura specie care a prezentat alburn și duramen are o elasticitate mai mare ca acela din zona de alburn (11—31%).

Rezistențe. Lemnul crescut la noi (speciile *C. ovata* și *C. glabra*) prezintă rezistențe asemănătoare cu acelea din țara de origine; în raport cu lemnul de frasin, rezistențele sînt mai mari (pentru *C. ovata*: 8% la compresiune paralel cu fibrele, 28% la încovoiere, 21,5% la forfecare, 47% la despicare, 55% la șoc etc.).

3. *Durabilitate naturală.* Lemnul speciilor de Hicory se încadrează în clasa lemnelor nedurabile, clasa avînd aproximativ aceeași durabilitate de lemnul de fag și mult mai mică ca aceea a lemnului de stejar.

4. *Comportarea la prelucrare.* Rezistența la tăiere dinamică prin așchiere este mai mare cu 17% (*C. ovata*) ca aceea a lemnului de frasin.

Se prelucrează greu. La tăierea cu ferăstrăul lemnul verde are tendința de a freca suprafețele pînzei. Se poate prelucra cu uneltele tăietoare obișnuite, obținîndu-se suprafețe netede. Uzura muchiilor tăietoare este însă relativ mare (mai mare ca la prelucrarea lemnului de frasin). Se

recomandă pînze de ferăstrău circular tip C și cuțitele de rindeluit tip B (vezi tablourile nr. 9 și 10). Lemnul se încleiază greu. Colorarea (băițuirea) și operațiile de finisare a suprafeței se execută manual similar ca la lemnul de frasin. Lemnul devine lucios prin lustruire. Uzura prin șlefuire este egală cu aceea a lemnului de fag.

5. *Utilizări.* Lemnul este indicat pentru construcții aeronautice, ambarcațiuni, obiecte pentru sport, schiuri, rachete, brancarde, caroserii (vagoane, căruțe etc.), mașini agricole, aparete de gimnastică, mobilă (curbată), cozi, mînere, în industria textilă, juguri, roți dințate, unelte agricole, tîmplărie diversă etc.

Lemn de calitate inferioară este bun pentru doage (ambalaje pentru produse uscate), foc etc.

CONCLUZII

Proprietățile fizice, mecanice, chimice și tehnologice ale lemnului speciilor cercetate sînt asemănătoare cu acelea ale lemnului speciilor crescute în țara de origine; lemnul chiparosului de baltă are unele caracteristici diferite.

Acest fapt arată același cîmp curent de utilizare al lemnului de brad duglas, jenupăr virginian și carya, verificat și confirmat prin încercările tehnolohice executate, iar pentru lemnul de chiparos de baltă, s-a stabilit, tot pe bază de încercări un domeniu nou de utilizare.

Dintre speciile de hicory lemnul cel mai valoros pentru industrie și construcție îl dă *C. pecan* și *C. glabra.*

Unele diferențe de calitate ale lemnului crescut la noi în raport cu acela crescut în țara de origine se datoresc în mare măsură condițiilor de cultură și vîrstei relativ reduse a arborilor. În acest fel se explică nodozitatea mare la bradul duglas și ienupărul virginian, precum și creșterile prea mari la bradul duglas.

Greutatea specifică mică și elasticitatea mult mai mare a lemnului de chiparos de baltă, reprezintă însă calități în raport cu unele utilizări prin atenuarea vibrațiilor și reducerea sunetelor de impact (de exemplu pentru ambarcațiuni, în construcții, ca dușumele oarbe etc.).

Valoarea indicilor, pentru unele proprietăți ale lemnului unor specii crescute în țară, a prezentat diferențe pînă la 50% față de lemnul speciilor din țara de origine, explicabile prin modificările de structură ale lemnului, datorită condițiilor ecologice deosebite de la noi față de țara de origine.

Cercetările au scos în evidență și diferențe importante pentru unele proprietăți, ale lemnului din zona de alburn față de acelea din zona de duramen.

Proprietățile lemnului speciilor exotice cercetate în raport cu proprietățile lemnului speciilor din țara de origine și cu acela al unor specii autohtone asemănătoare (brad, pin, larice, frasin) arată că extinderea culturii acestora în R.P.R. este indicată, lemnul lor pentru anumite industrii neputînd fi înlocuit cu lemnul speciilor autohtone.

De asemenea, pe baza caracteristicilor determinate în raport cu proveniența materialului, se pot trage și o serie de concluzii, utile pentru stabilirea condițiilor de îmbunătățire a culturilor.

Tabloul nr. 1

Proveniența materialului

Specia	Regiunea	O colul silvic	Pădurea sau parcul
PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA Britt	Oradea	Dobrești	Topliță
TAXODIUM DISTICHUM Rich.	Hunedoara	Deva	Parcul Simeria
JUNIPERUS VIRGINIANA L. I	Timișoara	Timișoara	Parcl Bazoș (Plantația *Juniperus*)
JUNIPERUS VIRGINIANA L II	Hunedoara	Deva	Parcul Simeria
JUNIPERUS VIRGINIANA L.III	București	București	Parcul Mogoșoaia
CARYA OVATA K. Koch	Timișoara	Timișoara	Parcul Simeria (Plantația *Carya*)
CARYA GLABRA Sweet.	„	„	„
CARYA LACINIOSA Lood.	„	„	„
CARYA PECAN Engl.	„	„	„

Tabloul nr. 2

Caracteristicile stațiunii și arboretului din care s-a recoltat materialul

Nr. crt.	Specia	Stațiunea	Arboretul
1	*PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA*	Regiunea deluroasă din nordul Crișanei la altitudine de 400 m. Arboretul este situat pe un versant nord-vestic cu pantă 20 %. Regiunea se încadrează în provincia climatică Cfb x*). Solul, brun de pădure, lutonisipos, are structură glomerulară degradată și permeabilitate normală, este profund reavăn și are un conținut moderat de humus. Vegetația naturală este formată din păduri de stejar și gorun; pe versanți nordici, fag.	Arboret pur, cu suprafața de circa 1 ha; vîrsta 48 de ani. Diametrul mediu 40 cm, înălțimea medie 29 m. Consistența 1. Starea de vegetație foarte activă. Coronamentele viguroase ocupă în medie o treime din lungimea arborilor. Trunchiuri drepte, cilindrice richtidom 1,5 cm grosime. Subarboretul și pătura vie lipsesc. Litiera abundentă are descompunerea întîrziată; se acumulează humus brut.
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	Arboretul este situat pe malul stîng al Mureșului, în apropierea confluenței cu rîul Strei. Altitudine 200 m. Solul, brun forestier de luncă, tînăr, situat pe un sol vechi îngropat sub aluviuni recente. Orizontul A cu conținut moderat de humus, structură glomerulară degradată textură generală nisipo-lutoasă cu strate lutoase în profunzime, profund afînat. pH = 5,5. Adîncimea apei freatice 3,5 m. Vegetația naturală este formată din păduri de zăvoi, de tipuri foarte variate, de la sălcete și plopișuri, pînă la șleau de luncă.	Arboret pur, diametrul mediu 45 cm, înălțimea 17—24 m. Starea de vegetație activă. Consistență 0,8—0,9. Elagaj pe 12—16 m lungime. Arboretul formează litieră abundentă de 3—7 cm grosime, cu descompunere întîrziată. Pătura vie lipsește.

*) După Köppen.

Tabloul nr. 2 (urmare)

Nr. crt.	Specia	Staţiunea	Arboretul
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA I*	Arboretul situat în cîmpia Timişului, între rîurile Bega şi Timiş. Terenul a fost format prin aluvionările recente produse de cele două rîuri şi are un vădit caracter de luncă. Regiunea se încadrează în provincia climatică C f a x. Solul este aluvial, brun de luncă, lăcoviştit argilos, compact la suprafaţă cu structură glomerulară degradată; sub 60 cm. este luto-nisipos spre lutos. Apa freatică la 2 m adîncime. Vegetaţia naturală este formată din păduri de stejar în amestec cu alte specii de tipul şleau de luncă.	Arboret pur; suprafaţa circa 4 ha. Diametrul mediu 16 cm, înălţimea 12—13 m. Starea de vegetaţie activă consistenţa 0,9. Trunchiurile drepte, conice, verticale, sînt elagate pe primii 2 m de la sol, iar în rest sînt acoperite cu ramuri subţiri, uscate, (coronamentul insuficient dezvoltat ocupă numai $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ din lungimea totală a arborilor).
4	*JUNIPERUS VIRGINIANA II*	Idem nr. crt. 2	Arboret pur, diametrul mediu 16 cm; înălţimea medie 15 m. Starea de vegetaţie activă. Consistenţa 0,7-0,8. Arborii sînt elagaţi pe 8—9 m. înălţime. În general coronamente insuficient dezvoltate, înguste şi cu frunziş rar. Arbori drepţi. Unele tulpini curbate din cauza zăpezii sau lianelor. Arboretul prezintă un bogat subarboret, format din arbuşti foioşi indigeni. Pătura vie este bine reprezentată.
5	*JUNIPERUS VIRGINIANA III*	Arbori situaţi la circa 100 m de malul lacului Mogoşoaia. Altitudine circa 90 m.	Arbori izolaţi.
6	*CARYA OVATA* *CARYA GLABRA* *CARYA LACINIOSA* *CARYA PECAN*	Situaţia geografică, condiţiile climatice şi vegetaţia naturală ca la *Juniperus virginiana* (nr. crt. 4). Solul este aluvial, brun de luncă tînăr, luto-nisipos parţial structurat, bine drenat şi aerisit; conţinut moderat de humus, pH = 6,8 şi fertilitate ridicată. Adîncimea apei freatice 2,5—3 m.	Suprafaţa arboretului 1,5 ha; vîrsta 45 ani. Diametrul mediu 18 cm; înălţimea medie 20 m. Consistenţa 0,7. Starea de vegetaţie activă. Coronamente uniforme, echilibrate; trunchiuri elagate pe 10—12 m înălţime.

Tabloul nr. 3

Dimensiunile și vîrsta arborilor recoltați

Nr. crt.	Specia *)	Dimensiuni		Vîrsta ani (circa)
		diametru cm	înălțimea m	
1	*PSEUTOTSUGA TAXIFOLIA*	44	29	48
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	44	23	55
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA* I	16	13	35
4	,, ,, II	16	16	40
5	,, ,, III	35	14	75
6	*CARYA OVATA*	19	21	45
7	*CARYA GLABRA*	23	18	45
8	*CARYA LACINIOSA*	21	19	45
9	*CARYA PECAN*	22	18	45

*) Materialul a fost recoltat în luna mai 1954.

Tabloul nr. 4

Proprietățile fizice ale lemnului unor specii exotice crescute în țară

Nr. crt.	Specia	Caracteristicele inelelor anuale		Greutatea specifică aparentă (U = 15%) g/cm³	Contragerea pentru 1% U				Absorbția maximă de apă prin imersie mm	Penetrabilitatea pentru apă %	Punctul de saturație al fibrei
		lățimea mm	proporția de lemn tîrziu %		longitudinală %	radială %	tangențială %	volumică %			
1	*PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA*	2,2	51,0	0,53	0,01	0,17	0,24	0,42	152	0,6	30
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	4,1	6,8	0,36	0,01	0,04	0,13	0,18	272	5,3	28,7
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA**)	2,3	14,3	0,54	—	0,12	0,21	0,33	—	2,3	
4	*JUNIPERUS VIRGINIANA***)	2,4	17,2	0,55	—	0,09	0,15	0,25	210	—	28
5	*JUNIPERUS VIRGINIANA****)	2,0	8,2	0,48	—	0,08	0,16	0,24	—	—	
6	*CARYA OVATA*	2,4	72,0	0,90	0,01	0,22	0,26	0,48	80	—	30,4
7	*CARYA GLABRA*	3,0	71,0	0,88	0,01	0,22	0,24	0,46	79	—	—
8	*CARYA LACINIOSA*	2,5	65,0	0,81	0,01	0,16	0,20	0,36	91	—	—
9	*CARYA PECAN*	2,8	65,0	0,78	0,01	0,15	0,16	0,32	100	0,48	32

*) De la Bazoș. **) De la Simeria. ***) De la Mogoșoaia.

Tabloul nr. 5

Module de elasticitate ale lemnului unor specii exotice crescute în țară (U = 15%)

Nr. crt.	Specia	Modul de elasticitate la:			
		Compresiunea paralel cu fibrele	încovoiere statică	întindere paralel cu fibrele	răsucire
		kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²
1	*PSEUDOTSUDA TAXIFOLIA*	174 000	138 000	182 00	6 130
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	28 000	39 000	28 000	6 300
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA*	55 000	59 000	63 000	9 600
4	*CARYA OVATA*	148 000	168 000	147 000	9 500
5	*CARYA GLABRA*	139 000	176 000	168 000	—
6	*CARYA LACINIOSA*	221 000	141 000	182 000	—
7	*CARYA PECAN*	159 000	111 000	136 000	9 200

16. Mecanică aplicată, 4

Tabloul nr. 6

Proprietățile mecanice și tehnologice ale lemnului unor specii exotice crescute în țară (U = 15%)

Nr. crt.	Specia	Rezistență la compresiune			Rezistența la încovoiere statică	Rezistența la forfecare				Rezistența la întindere			Rezistența la despicare		Rezistența la răsucire	Duritate Janka pe secțiune			Duritatea Brinell pe secțiune			Indicele de reziliență	Uzura pe secțiune		rezistența la tăiere dinamică	Durabilitatea				Clasa
		paralel cu fibrele	perpendicular pe fibre			transversală (tg)	longitudinală perpendiculară	longitudinală paralelă		paralel cu fibrele	perpendicular pe fibre		radială	tangențială		transversală	radială	tangențială	transversală	radială	tangențială		radială	transversală		r_1	r_2 r_3 r_4	R	
			la limita de rupere	la limita de proporționalitate				radială	tangențială		radială	tangențială																	
		kg/cm²																	kg/mm²			ngm/cm²	mm	mm	kg/cm²		%		
1	*PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA*	435	146	106	840	276	41	70	65	1021	16,5	16,1	5,2	5,5	149	367	244	—	3,73	2,73	1,27	0,20	0,54	0,24	0,0257	46,2	53,8—39,3 (duramen)	64,8	IV
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	196	95	62	405	169	43	52	64	365	12,3	11,4	5,1	5,9	167	238	169	149	2,55	1,09	1,00	0,17	1,25	0,59	0,0220	18,7	28,2—86,8 (alburn)	58,8	V
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA**)	367	131	91	834	260	—	82	88	560	13,0	17,6	6,1	7,6	—	—	—	—	3,82	1,91	1,82	0,39	—	—	0,0188	15,0	15,0— — (duramen)	59,0	V
4	*JUNIPERUS VIRGINIANA***)	333	121	47	818	311	54,5	80	110	548	13,0	15,1	4,3	6,1	155	531	368	400	3,46	2,00	1,55	0,47	0,83	0,44	0,0170				
5	*JUNIPERUS VIRGINIANA****)	368	147	73	788	278	—	78	106	501	11,7	14,4	2,9	4,2	—	482	246	320	3,73	2,00	1,73	0,23	—	—	0,0191	94,1	91,5—99,7 (duramen)	61,7	I
6	*CARYA OVATA*	523	288	198	1411	504	—	141	162	1532	42,6	44,0	11,9	11,4	220	—	—	—	6,09	3,55	3,55	0,78	0,43	0,22	0,0575				
7	*CARYA GLABRA*	528	281	168	1290	507	—	152	163	1685	44,8	57,7	8,9	9,9	—	—	—	—	6,55	4,55	4,28	1,24	0,41	0,16	—				
8	*CARYA LACINIOSA*	456	248	132	1220	444	—	132	139	1964	48,8	47,0	10,3	11,5	—	—	—	—	5,64	3,73	3,82	1,04	0,49	0,18	—				
9	*CARYA PECAN*	438	253	152	1094	416	125	128	145	1424	45,4	48,0	10,9	15,0	274	718	678	681	7,28	3,82	4,46	1,05	0,54	0,26	—	2,6	—14,3 55,5 (alburn)	98,0	V

*) Bazoș
**) Simeria
***) Mogoșoaia
r_1, r_2, r_3, și r_4 — raporte de durabilitate minimă, respectiv la acțiunea ciupercilor;
Coniophora cerebela, *Polyporus sulphureus* Fr., *Polystictus versicolor* L. și
R — media raporturilor de durabilitate maximă pentru ciupercile menționate.

Tabloul nr. 7

Diferența procentuală dintre valorile indicilor proprietăților fizico-mecanice ale lemnului din zona de duramen și valorile indicilor lemnului din zona de alburn

Nr. crt.	Specia	Greutate specifică aparentă	Contragere		Penetrabilitatea pentru apă	Modulul de elasticitate la:				Rezistența la:							Duritatea Janka pe sec.		Indicele de reziliență	Uzura pe secțiune		Rezistența la așchiere dinamică
			radială	tangențială		Compresiune paralel cu fibrele	Încovoiere statică	Întindere paralel cu fibrele	Răsucire	Compresiune paralel cu fibrele	Încovoiere statică	Forfecare longitudinală paralelă	Întindere perpendicular pe fibre	Despicare rad.	Despicare tang.	Răsucire	transversală	radială + tangențială		transversală	radială	
1	*PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA*	3,00	6,00	23,00	63,00	—31,0	—9,0	—3,0	6,0	—0,50	2,00	8,00	2,00	9,00	2,00	7,0	3,00	11,00	17,00	22,0	22,0	9,0
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	5,00	—34,0	—10,0	37,0	—13,0	70,0	51,0	6,0	8,00	10,00	6,00	17,00	17,00	10,00	6,0	13,00	7,00	54,00	—20,0	2,0	26,9
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA*	1,00	9,00	—3,00	—	—	7,0	62,0	—	—2,00	7,00	—	22,00	12,00	13,50	—	—	—	14,00	15,5	—9,0	—
4	*CARYA PECAN*	—	—15,00	—21,00	74,00	—	17,0	31,0	11,0	25,0	18,00	10,00	27,00	37,00	20,00	—2,0	—	—	4,00	27,0	14,0	—

Observații. Pentru a se afla indicii diferitelor proprietăți pentru duramen sau alburn, folosind diferență procentuală și valorile medii ale indicilor, se pot aplica formulele:

$$x = \frac{200\,a}{200 - b} \text{ și } y = \frac{(200 - 2b).\,a}{200 - b}, \text{ cînd } b \text{ este negativ}$$

$$x = \frac{200\,a}{200 + b} \text{ și } y = \frac{(200 + 2b).\,a}{200 + b}, \text{ cînd } b \text{ este pozitiv}$$

în care: x este valoarea indicelui pentru duramen;
y — valoarea indicelui pentru alburn;
a — indice mediu pentru duramen + alburn;
b — procentul în valoare absolută.

Tabloul nr. 8

Proprietățile fizice, mecanice și tehnologice ale lemnului speciilor exotice din țara de origine și ale speciilor autohtone. Valorile pentru comparație din literatură [4], [6], [9] [10], [12] (U = 15%)

Nr. crt.	Specia	Greutatea specifică aparentă	Contragere		Modulul de elasticitate la:				Rezistența la: compresiune		Încovoiere statică	Forfecare longitudinală tangențială	Întindere paralel cu fibrele	Despicare		Răsucire	Duritatea Janka (Brinell) pe secțiune		Indicele de rezistență
			radială	tangențială	compresiune paralel cu fibrele	încovoiere statică	întindere paralel cu fibrele	răsucire	paralel cu fibrele	perpendicular pe fiare (lim. propor.)				radială	tangențială		transversală	radială + tangențială	
		g/cm³	%	%	kg/cm²												kg/cm² (kg/mm²)		kg/cm³
1	*PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA* (litoral)	0,46	0,15	0,25	—	127 000	—	8 000	444	57	723	73	970	—	—	62	314 (5,0)	276 (2,0)	0,3
	PSEUDOTSUGA TAXIFOLIA (m-ții Stîncoși)	0,42	—	—	—	92 500	—	—	362	52	594	68	—	—	—	—	305	260	—
2	*TAXODIUM DISTICHUM*	0,44	—	—	—	95 000	—	—	380	56	655	64	—	—	—	—	272	210	—
3	*JUNIPERUS VIRGINIANA*	0,45	—	—	—	58 000	—	—	359	72	544	—	—	—	—	—	371	—	—
4	*CARYA OVATA, GLABRA*	0,71	0,24	0,38	—	144 000	—	—	535	145	1 218	136	1 550	7,7	—	—	(9,2)	(3,9)	0,95
5	*CARYA PECAN*	0,63	—	—	—	117 500	—	—	483	128									
6	*ABIES ALBA*	0,43	0,12	0,26	117 000	111 800	118 000	5 800	350	—	1 008	112	—	—	—	—	797	750	—
7	*PINUS SILVESTRIS*	0,52	0,14	0,27	117 000	120 000	117 000	6 600	425	55	710	55	910	2,8	3,7	125	(3,4)	(1,3)	0,18
8	*LARIX EUROPEA*	0,59	0,11	0,26	—	138 000	—	—	470	60	870	67	1 040	3,6	3,7	160	(4,0)	(1,9)	0,24
9	*FRAXINUS EXCELSIOR*	0,69	0,18	0,30	150 000	120 000	140 000	12 600	480	110	960	90	1 070	3,4	—	130	(4,8)	(1,9)	0,35
											1020	128	1 600	4,7	7,3	240	(6,5)	(3,7)	0,35

Caracteristici suplimentare: 1. Penetrabilitatea pentru apă: 6,2mm, pentru lemnul de brad (A. alba).
2. Uzura, radială 0,66mm, transversală 0,23mm pentru lemnul de brad, radială 0,42mm pentru lemnul de fag (Fagus silvatica).
3. Rezistența la tăiere dinamică; 0,021 kg/cm² pentru lemnul de brad și 0,048 kg/cm² pentru lemnul de frasin (F. excelsior).
4. Durabilitatea; clasa V pentru lemnul de brad și fag.

Tabloul nr. 9

Caracteristicile dinților pînzelor de ferăstrău circular pentru tăierea longitudinală a lemnului speciilor exotice

Tipul de pînză	Nr. dinților	Pasul (p) mm	Unghiul de atac pentru lemnul		Unghiul spatelui	Unghiul de teșire a cefii	Înălțimea dintelui mm	Lungimea cefii mm
			verde	uscat				
A	54	0,0581.∅	25°	25°	20°	15°	0,5.p	0,25.p
B	54	0,0581.∅	20	15	15	10	0,4.p	0,25.p
C	66	0,0477.∅	20	15	15	10	0,4.p	0,25.p

Observație. 1. $p = \varnothing \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$.

în care:

∅ = diametrul pînzei și

n = numărul dinților

2. Viteza periferică a pînzei care se recomandă este de 2 900—3 300 m/min.

Tabloul nr. 10

Unghiurile cuțitelor rotitoare de rindeluit și unghiurile de tăiere pentru lemnul speciilor exotice

Tipul de cuțit	Unghiul piezișului	Unghiul contrapiezișului	Unghiul de atac	Unghiul spatelui	Unghiul de tăiere
A	35°	15°	15—20°	20—25°	70—75°
B	30	25	10—15	20—25	75—80

Observație. Viteza periferică de tăiere care se recomandă este de 1700—2 000 m/min.

Primită la redacție la 19 ianuarie 1956.

ФИЗИЧЕСКИЕ, МЕХАНИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДРЕВЕСИНЫ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ПОРОД

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Хотя интерес к экзотическим породам повысился и культура их на научных основаниях сильно продвинулась за последнее время в РНР, исследования, предпринятые до сих пор для ознакомления с породами, относятся только к их внешнему виду с точки зрения лесоводства. Физические, механические, химические и технологические свойства древесины экзотических пород не были исследованы, и данные этого рода, приводимые спорадически, были заимствованы из иностранной литературы. Однако эти данные могут представлять собой только указания информационного характера, так как они относятся исключительно к древесным породам, выросшим в соответствующих природных условиях.

Отсюда вытекает необходимость ознакомления с качественной точки зрения с древесиной экзотических пород, культивированных в условиях РНР. Несмотря на то что существующие экзотические культуры занимают небольшие поверхности и сравнительно молоды, все же они пригодны для предварительных исследований, указывающих с достаточной точностью на какие из этих, приспособившихся в РНР экзотических пород, следует в будущем обратить особое внимание.

В настоящей работе авторы исследовали только некоторые из экзотических пород, культивируемых в РНР, а именно: Pseudotsuga taxifolia

Britt, Taxodium distichum Rich., Juniperus virginiana L. и Carya ovata, C. glabra, C. laciniosa и C. pecan.

Предпринятые исследования привели к качественному определению древесины этих пород на основании их свойств и указанию области ее применения.

Применяя новые способы испытаний (1), (5), авторы установили некоторые характеристики древесины, не приведенные еще в иностранной литературе: водопроницаемость, сопротивляемость динамической резке обстругиванием, разницу свойств древесины в заболони, по сравнению с сердцевиной и т. д.; были установлены также наилучшие характеристики режущих инструментов, а ровно и новые области использования древесины исследуемых пород.

Результаты исследований были проанализированы для сравнения со свойствами пород деревьев, выросших в стране, откуда они происходили, а также со свойствами некоторых сходных пород (ель, лиственница, сосна, ясень).

Исследования установили, что физические, механические, химические и технологические свойства древесины изученных экзотических пород в общем похожи на свойства древесины тех же пород, выросших в стране их происхождения (за исключением болотного кипариса).

Некоторые качественные недостатки (сучковатость, большие наросты) зависят в большой мере от условий культуры и сравнительной молодости деревьев.

Между значениями показателей некоторых свойств древесины известных пород, выросших в стране, и значениями показателей тех же свойств пород, выросших в стране их происхождения, наблюдалась разница до 50%, что объясняется изменениями структуры древесины, вызванными особыми экологическими условиями, существующими в РНР, по сравнению со страной их происхождения.

Исследования выявили также значительные разницы некоторых свойств древесины в зоне заболони, по сравнению с зоной сердцевины.

Исследования доказали в заключение, что распространение культуры этих пород в РНР является желательным, так как для некоторых изделий из дерева их древесина не может быть заменена древесиной местных пород.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Процентное увеличение во времени веса образцов древесины, вследствие поглощения ими насыщенной парами воды из атмосферы, равняется 100%. 1,2—Pseudotsuga taxifolia: 3,4 — Taxodium distichum; 5,6 — Juniperus virginiana; 7 — Abies alba; 8 — Carya ovata; 9,10 — Carya pecan.

Рис. 2. — Процентное увеличение во времени веса образцов древесины вследствие поглащения ими воды при погружении в воду. 1,2 — Pseudotsuga taxifolia; 3,4 — Taxodium distichum; 5,6 — Juniperus virginiana; 7 — Abies alba; 8 — Carya ovata; 9 — Carya glabra; 10 — Carya pecan; 11 — Carya leciniosa.

LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES, MÉCANIQUES ET TECHNOLOGIQUES DES ESSENCES EXOTIQUES

(RÉSUMÉ)

Quoique l'intérêt pour les essences exotiques ait grandi et que les méthodes scientifiques de culture soient arrivées, les dernier temps, à un stade avancé, dans ce pays, les études entreprises jusqu'à présent pour la connaissance de ces espèces, concernent uniquement leur aspect

au point de vue de la sylviculture. Les propriétés physiques, mécaniques, chimiques et technologiques des essences exotiques n'ont pas été étudiées, les données de ce genre, citées sporadiquement, ayant été extraites de la littérature étrangère. Toutefois, ces données ne peuvent constituer que des indications à caractère informatif et se référant d'une façon exclusive aux bois des essences qui croissent dans leur aire naturelle.

Il en découle la nécessité de connaître, au point de vue qualitatif le bois des espaces exotiques cultivées dans les conditions de notre pays. Les cultures existantes d'essences exotiques, quoique portant sur de petites surfaces et étant assez jeunes, se prêtent aux recherches préliminaires et fournissent des données qui indiquent avec une suffisante précision vers lesquelles des essences exotiques acclimatées en Roumanie doit se diriger, d'une façon particulière, l'attention à l'avenir.

Dans ce travail on n'a soumis à l'étude que quelques-unes des essences exotiques, cultivées dans ce pays, notamment : *Pseudotsuga taxifolia* Britt., *Taxodium distichum* Rich., *Juniperus virginiana* L. et *Carya ovata*, *C. glabra*, *C. laciniosa* et *C. pecan*.

Les recherches entreprises ont conduit à une qualification qualitative du bois de ces espèces en raison de ses propriétés et en ont indiqué les domaines d'utilisation.

Faisant usage de nouvelles méthodes d'essais (1), (5), on a déterminé certaines caractéristiques du bois qui n'ont pas encore été étudiées dans la littérature étrangère de spécialité : perméabilité à l'eau, résistance à la coupe dynamique, différence entre les propriétés du bois et la zone d'aubier et celles du bois de la zone duramen, etc. ; on a également établi les meilleures caractéristiques des outils tranchants pour le travail de ce bois, ainsi que de nouveaux secteurs pour l'utilisation du bois des espèces étudiées.

Les résultats des recherches ont été analysés compartivement avec les propriétés du bois des essences qui poussent dans leur pays d'origine et avec celles de certaines espèces similaires (sapin, mélèze, pin, frêne).

Les recherches ont établi que les propriétés physiques, mécaniques, chimiques et technologiques, du bois des espèces exotiques étudiées sont généralement similaires à celles du bois des mêmes espèces ayant poussé dans leur pays d'origine (à l'xception du cyprès des marais).

Certains défauts de qualité (nodosité, accroissements annuels) sont dus en grande mesure aux conditions de culture et à l'âge réduit des arbres.

La valeur des indices, pour certaines propriétés du bois de certaines espèces, venues dans ce pays, a présenté des différences allant jusqu'à 50%, par rapport au bois des espèces provenant des pays d'origine, différences explicables par les modifications de structure du bois, dues aux conditions œcologiques différentes en Roumanie par rapport à celles du pays d'origine.

Les recherches ont mis en évidence également des différences importantes pour certaines propriétés du bois de la zone de l'aubier par rapport à celle du duramen.

Les études ont démontré, en conclusion, que l'extension de la culture de ces espèces dans la R.P.R. est indiquée, leur bois ne pouvant pas être remplacé, dans certaines industries, par le bois des espèces indigènes.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Accroissement procentuel au cours du temps, du poids des éprouvettes en bois, par l'absorption d'eau dans une atmosphère saturée de vapeurs ($\varphi = 100\%$). 1,2 — *Pseudotsuga taxifolia*; 3, 4 — *Taxodium distichum*; 5,6 — *Juniperus virginiana*; 7 — *Abies alba*; 8 — *Carya ovata*; 9, 10 — *Carya pecan*.

Fig. 2. — Accroissement procentuel au cours du temps, du poids des éprouvettes en bois, à la suite de l'absorption d'eau par immersion. 1,2 — *Pseudotsuga taxifolia*; 3,4 — *Taxodium distichum*; 5,6 — *Juniperus virginiana*; 7 — *Abies alba*; 8 — *Carya ovata*; 9 — *Carya glabra*; 10 — *Carya pecan*; 11 — *Carya laciniosa*.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Paşcovski, St. Purcelean, Z. Spîrchez, S. Ocskay, Cultura speciilor lemnoase exotice. ICES. Ed. Agrosilvică de stat, Bucureşti, 1954.
2. S. Paşcovschi, St. Purcelean, I. Leandru şi Z. Spîrchez, *Îndrumări tehnice pentru cultura speciilor lemnoase exotice*. ICES. Ed. Agrosilvică de stat, Bucureşti, 1954.
3. *** Gost 4631—49. *Pokazateli fiziko-mehaniceskih svoistv drevesini*. Moscova, 1949.
4. L. Vorreiter, *Holztechnologisches Handbuch*, vol. I. G. Fromme, Vienne, 1949.
5. *** *A. Handbook of Empire Timbers*. H.M. H. M. Stationary Office, Londra, 41.
6. *** *Wood Handbook, Forest Products Laboratory*. U.S. Gouvernement Printing Office. Washington, 1940.
7. J. Collardet. *Bois commerciaux*. Ecole supérieure du bois, Paris, 1938.
8. *** *Étude physique et mécanique des bois coloniaux*. Assoc. Colonies-Sciences, Paris, 1931.
9. *** Holz als Roh-Werkstoff, 1939, nr. 3, p. 127; 1940, nr. 7—8, 371.
10. Gh. I. Pană, *Contribuţii la studiul penetrabilităţii lemnului de către lichide la diferite presiuni şi temperaturi*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 1, ianuarie-martie 1956, p. 235.
11. Gh. I. Pană şi N. Ghelmeziu, *Influenţa temperaturii şi a greutăţii specifice aparente a lemnului asupra reistenţei lui la tăiere dinamică prin aşchiere*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R. Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. VI, 1954, p. 123
12. Gh. I. Pană, *Contribuţii la stabilirea influenţei diferitelor tratamente higro- şi hidrotermice asupra proprietăţilor fizico-mecanice ale lemnului de fag*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 1—2, ianuarie-iunie 1955, p. 161.
13. — *Cuţite drepte pentru rindeluirea mecanică a lemnului*. Industria lemnului, Celulozei şi Hîrtiei, 1956, nr. 1.
14. Gh. I. Pană, A. Ursulescu şi Al. Ciucu, *Cercetarea caracteristicilor tehnologice fizice şi mecanice ale lemnului de brad (Abies alba Mill) din R.P.R. în vederea utilizării în construcţii aeronautice*. ICEIL, 1955 (manuscris).
15. N. Ghelmeziu, Gh. I. Pană, A. Ursulescu, I. Bujorică, *Cercetări privitoare la elementele caracteristice ale pînzelor de fierăstraie*. ICEIL, Ed. tehnică Bucureşti, 1951.
16. I. S. Vanin., *Drevesinovedenie*. Goslesbumizdat, Moscova, 1949.
17. P. Harris. *A. Handbook of Woodcutting*. Forest Products Research, H. M. Stationary Office, Londra 46.
18. Ch. S. Sargent, *Manual of the Trees of North America*. Boston, 1933.
19. * * * Gost 980—53. *Pînze de fierăstrău circular pentru tăierea lemnului*.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REFERATE TEHNICE ŞI ŞTIINŢIFICE

DEZVOLTAREA CERCETĂRILOR DE MECANICA FLUIDELOR ŞI AERODINAMICĂ ÎN ŢARA NOASTRĂ

DE

T. OROVEANU

Mecanica fluidelor şi ramura ei mai recent dezvoltată, aerodinamica, joacă un rol de seamă în progresul tehnicii moderne. Aproape că nu există domeniu al acesteia în care mecanica fluidelor sau aerodinamica să nu fi adus contribuţii însemnate. Pe lîngă aportul pe care noile rezultate ale mecanicii fluidelor l-au dat în dezvoltarea unor ramuri ale tehnicii care au în urma lor o existenţă mai îndelungată, merită să fie amintit faptul că există domenii, mai recent dezvoltate, în care mersul înainte al teoriei s-a împletit organic şi armonios cu progresul realizărilor practice, cum ar fi, de pildă, aeronautica. O analiză cît de sumară nu poate decît să întărească aceste afirmaţii şi să arate că legăturile dintre dezvoltarea mecanicii fluidelor şi a aerodinamicii pe de o parte şi remarcabilele progrese ale tehnicii actuale pe de alta, constituie unul din cele mai grăitoare exemple pentru necesitatea cercetărilor ştiinţifice în tehnică.

În ţara noastră, studiile teoretice şi experimentale de mecanica fluidelor şi de aerodinamică au început relativ recent. Sporadice înainte de primul război mondial, ele au cunoscut o dezvoltare mai accentuată în perioada următoare, luînd însă un aspect organizat şi sistematic abia după al doilea război mondial şi mai ales în ultimii ani.

Este interesant de remarcat faptul că poporul romîn a dat o contribuţie însemnată sub formă de realizări practice, la începuturile aeronauticii. Avioanele construite de Traian Vuia la Paris şi mai tîrziu de Aurel Vlaicu în ţară, precum şi zborurile reuşite de aceştia reprezintă etape remarcabile în evoluţia tehnicii aeronautice. Opera acestor mari pionieri se încadrează printre cele mai îndrăzneţe creaţii tehnice ale vremii şi se bazează pe o excepţională intuiţie, absolut necesară într-o epocă în care problema teoretică a zborului mecanic era abia în curs de clarificare. Nu este cazul să insistăm aici asupra figurilor lui Vuia şi Vlaicu, deoarece cu alte ocazii s-a stabilit adevărul ştiinţific asupra realizărilor lor şi li s-au adus bine meritate elogii.

Prima lucrare teoretică în domeniul mecanicii fluidelor este bine cunoscuta teză de doctorat susţinută în 1913 la Göttingen de către prof. V. Vîlcovici. Studiind o problemă din teoria suprafeţelor de discontinuitate, autorul a reuşit să aducă unele contribuţii care au făcut ca această lucrare să constituie un studiu teoretic remarcabil. Ulterior, V. Vîlcovici a continuat să se ocupe de probleme de mecanica fluidelor cercetînd, în perioada la care ne referim, mişcarea unui rotor cu palete într-un fluid nelimitat. Asupra acestei probleme, V. Vîlcovici a publicat o serie de studii în „Annales scientifiques de l'Université de Jassy" în anii 1916 şi 1920, precum şi în „Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara", în anul 1929.

Primele lucrări romînești în domeniul aerodinamicii se datoresc acad. E. Carafoli, care și-a început activitatea de cercetare științifică prin studii asupra metodelor de trasare a profilelor aerodinamice. Într-o serie de note publicate în „Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris", în anul 1927, E. Carafoli a stabilit o metodă generală pentru trasarea profilelor, atît cu vîrf ascuțit, cît și cu diedru sau cu vîrf rotunjit. Această metodă se distinge prin simplitatea și generalitatea ei, permițînd ca prin construcții geometrice elementare să se obțină, făcînd să varieze anumiți parametri, orice profil cu caracteristice geometrice și aerodinamice dinainte prescrise. Principiul metodei constă în considerarea unei funcții de transformare cu trei termeni, care primesc o interpretare geometrică simplă; în același timp, se stabilește precis care sînt parametrii ce influențează caracteristicile geometrice și aerodinamice ale profilului și se arată cum cu ajutorul acestora se poate acoperi tot cîmpul aplicațiilor practice. Extinderea la profilele cu vîrf rotunjit a acestei metode este deosebit de interesantă, deoarece reprezintă cea mai simplă cale de obținere a acestor profile. Datorită acestui fapt, unele lucrări străine de specialitate numesc profilele cu vîrf rotunjit „profile Carafoli". *)

Teoria și trasarea profilelor aerodinamice a făcut și obiectul unui volum publicat de către E. Carafoli în colaborare cu prof. A. Toussaint, în anul 1928, sub titlul *Théorie et tracé des profils d'ailes sustentatrices*, la Paris.

În același timp, E. Carafoli a întreprins o serie de verificări experimentale asupra profilelor trasate prin metoda sa. Experiențele au fost executate la Institutul aeronautic de la Saint Cyr și rezultatele, în foarte bună concordanță cu teoria, au fost publicate în lucrarea *Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes*, apărută în anul 1928.

În continuare, același cercetător s-a ocupat de studiul profilelor deformate, cu aplicații la teoria aripioarelor. Studiind influența bracajului părții mobile, el a stabilit pentru prima oară expresiile forței și momentului de șarnieră, rezultatele fiind publicate în lucrarea *Influence des ailerons sur les propriétés aérodynamiques des surfaces sustentatrices*, apărută în 1929.

Concomitent, E. Carafoli s-a ocupat și de o serie de probleme de mecanica fluidelor, considerînd în primul rînd mișcarea de rotație a unui contur de formă oarecare. Conturul este reprezentat pe un cerc și se stabilește potențialul complex al mișcării în planul acestuia. Prin calcule simple, se obțin formele acestui potențial complex care corespund rotației unui cerc, unei elipse, unei plăci sau unui profil Jukovski. În același timp, autorul a stabilit formulele generale pentru rezultanta presiunilor și momentul rezultant, în cazul în care corpul are atît o mișcare de translație cît și una de rotație. Această generalizare a formulelor lui Blasius făcuse cu cîtva timp mai înainte și obiectul unor studii ale lui S. A. Ceaplîghin. Rezultatele găsite au fost publicate în „Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris", în anul 1928 și în lucrarea *Aérodynamique des ailes d'avion*, apărută de asemenea în 1928 la Paris. Ulterior, E. Carafoli a studiat și teoria rotorului cu paletă, adică fenomenul sustentației unei plăci învîrtitoare așezate într-un curent de aer. Generalizarea rezultatelor i-a permis să dea și explicarea teoretică a așa-numitului efect Raimondi, într-o notă prezentată în 1930 la Academia Nazionale dei Lincei din Roma.

Împreună cu A. Toussaint, E. Carafoli a realizat un tunel hidrodinamic plat cunoscut sub numele de „cuva Toussaint-Carafoli", care s-a dovedit deosebit de util pentru vizualizarea fenomenelor de scurgere, servind mai tîrziu ca punct de plecare pentru unele lucrări ale cercetătorilor străini.

După întoarcerea în țară, E. Carafoli realizează în colaborare cu I. Stroescu, sufleria aerodinamică de la Politehnica din București, pusă în funcțiune în anul 1930. Această suflerie, remarcabilă printr-o serie de dispoziții ingenioase a fost citată în numeroase lucrări străine de specialitate. Ea funcționează și astăzi și a servit la executarea tuturor încercărilor industriale de aerodinamică efectuate pînă în prezent în țara noastră, precum și la o serie de lucrări științifice asupra cărora vom reveni mai departe.

*) A se vedea de exemplu L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics*,

Trebuie remarcat faptul că, în legătură cu problema sufleriilor aerodinamice, E. Carafoli a studiat influenţa pereţilor liberi şi rigizi ai vînei de aer, dînd formulele de corecţie pentru cîteva cazuri importante, în lucrarea citată mai înainte *Aérodynamique des ailes d'avion.*

În aceeaşi perioadă, aerodinamica experimentală este reprezentată prin lucrările lui I. Stroescu, care s-a ocupat încă din 1926 de studiul şi construirea sufleriilor aerodinamice şi a propus mărirea sustentaţiei prin aspiraţia sau suflarea stratului limită, fiind un pionier în această direcţie.

Problema scurgerii în jurul reţelelor de profile a făcut obiectul tezei de doctorat susţinută în anul 1925 la Zürich de către prof. D. Pavel, în care se utilizează metoda transformărilor conforme. Într-o lucrare prezentată la congresul internaţional de mecanică aplicată de la Stockholm, în 1930, D. Pavel s-a ocupat de problema scurgerii prin roţile hidraulice.

Tot o problemă din teoria reţelelor de profile a fost studiată, prin reprezentări conforme, de către prof. Gh. Manea în teza sa de doctorat susţinută la Berlin.

O importantă activitate în domeniul mecanicii fluidelor a avut şi prof. D. Germani care a prezentat la congresul internaţional de mecanică aplicată de la Stockholm, în 1930, o nouă teorie a similitudinii aplicabilă la toate fenomenele fizice şi în particular la hidro- şi aerodinamică. D. Germani defineşte similitudinea între două fenomene analoge, depinzînd de aceleaşi mărimi, prin egalitatea valorilor specifice ale acestor mărimi. Aplicarea acestei definiţii conduce la legile cunoscute de similitudine şi la altele care nu fuseseră încă formulate. Asupra acestei probleme, D. Germani a revenit într-o lucrare publicată în 1931 la Bucureşti, sub titlul *Despre structura formulelor şi sinteza legilor de similitudine în fizică. Consideraţiuni asupra mărimilor şi unităţilor lor.*

Un studiu experimental sistematic asupra profilelor de aripă trasate prin metoda dată de E. Carafoli a fost întreprins în laboratorul de aerodinamică al Politehnicii din Bucureşti, în anii 1936 şi 1937, rezultatele fiind publicate în lucrarea *Travaux du laboratoire d'aérodynamique*, apărută în anul 1938.

Teoria aripilor de anvergură finită a făcut de asemenea obiectul cercetărilor lui E. Carafoli, la început sub forma verificărilor experimentale ale teoriei lui Prandtl, executate la Institutul aerodinamic de la Saint Cyr, publicate în anul 1932 în lucrarea *Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes d'envergure finie.* În aceste experienţe s-a urmărit determinarea repartiţiei portanţei în lungul anvergurii, variaţia presiunii în funcţie de alungire precum şi variaţia portanţei globale, a rezistenţei induse şi a momentelor aerodinamice, găsindu-se rezultate în bună concordanţă cu teoria.

Ulterior, acelaşi autor a elaborat o metodă pentru rezolvarea ecuaţiei integro-diferenţiale a circulaţiei, printr-un procedeu deosebit de simplu. Metoda are ca punct de plecare ideea lui Glauert de a se dezvolta circulaţia în serie Fourier, precum şi reprezentarea variaţiei coardei aripii printr-un polinom trigonometric. Se ajunge astfel la un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite care, pentru anumite forme de aripi, este rezolvat riguros. Coeficienţii dezvoltării în serie a circulaţiei sînt exprimaţi cu ajutorul funcţiilor Bessel. Pentru orice formă de aripă, o metodă de rezolvare aproximativă dă expresii explicite ale coeficienţilor seriei pe baza unor formule de recurenţă. Rezultatele sînt în foarte bun acord cu experienţa şi este de remarcat faptul că se obţine pentru prima oară formule explicite pentru calculul coeficienţilor din dezvoltarea în serie a circulaţiei, evitîndu-se metodele de iteraţie obişnuite pînă atunci.

Cu ajutorul acestei metode, autorul ei a studiat formele uzuale de aripi precum şi o serie de alte probleme de interes practic din teoria aripii de anvergură finită. Astfel au fost studiate aripile cu incidenţă variabilă şi în particular, teoria aripioarelor, dîndu-se pentru prima oară formule explicite de calcul pentru caracteristicile aerodinamice ale aripilor prevăzute cu aripioare. Aceeaşi metodă permite de asemenea studiul influenţei scobiturilor şi nacelelor pentru motoare asupra caracteristicilor aripii. Un rezultat important a găsit E. Carafoli şi în teoria virajului, reuşind să dea o soluţie explicită pentru repartiţia circulaţiei, care are şi un caracter mai general decît cele cunoscute pînă atunci. Aceste cercetări au fost comunicate într-o serie

de note la Academia de ştiinţe din Romînia şi la Academia Romînă, în anii 1943 şi 1944 şi apoi prezentate în ansamblu în lucrarea *Théorie des ailes monoplanes d'envergure finie*, apărută în anul 1945. În acest memoriu se dă şi formula generală pentru calculul deflecţiunii curentului în aval de aripă, ţinînd seama de repartiţia circulaţiei.

În mecanica fluidelor, a întreprins o serie de cercetări şi prof. C. Iacob, care s-a ocupat la început de studiul mişcării plane a unui fluid incompresibil în domenii multiplu conexe, în care a aplicat rezultatele obţinute în teza sa de doctorat *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites*, publicată în anul 1935. Mai tîrziu, C. Iacob a considerat şi problema rotaţiei corpurilor solide într-un fluid şi în special cazul rotorului cu palete în fluid nelimitat sau limitat, luînd ca punct de plecare cercetările lui W. Kucharsky.

În aceeaşi perioadă, C. Iacob a reluat, sub o serie de aspecte, studiile devenite clasice ale lui S. A. Ceaplîghin asupra mişcărilor subsonice ale fluidelor compresibile. Astfel, aplicînd metoda lui S. A. Ceaplîghin la studiul curenţilor de gaz, limitaţi de pereţi daţi, autorul aduce unele completări şi precizări la rezultatele obţinute de acest cercetător. În această direcţie, C. Iacob a publicat în 1936 şi 1937 note la Académie des Sciences din Paris şi la Academia Nazionale dei Lincei din Roma, iar ulterior un memoriu mai amplu în revista „Portugaliae Mathematica", în anul 1939.

Metoda de aproximaţie a lui S. A. Ceaplîghin a fost de asemenea considerată de către C. Iacob în memoriul citat şi în alte lucrări ulterioare. Astfel, în 1941, a reluat problema mişcării în jurul unui obstacol circular, tratată de N. A. Sliozkin, aducînd unele completări la soluţie într-o notă publicată în „Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine". În 1946, acelaşi autor a dat o variantă a metodei de aproximare a lui S. A. Ceaplîghin care a fost comunicată la Académie des Sciences din Paris. În studiul mişcării în jurul obstacolelor, varianta propusă dă rezultate mai puţin bune decît cea aleasă de Th. v. Kármán şi H. S. Tsien, după cum a arătat însuşi autorul. Tot în acelaşi an, C. Iacob a propus o metodă hodografică de aproximaţii succesive, care a făcut obiectul unei comunicări la Académie des Sciences din Paris şi al unui memoriu publicat în revista „Mathematica" din Cluj. Autorul a aplicat această metodă la studiul mişcării subsonice în jurul unui cilindru circular şi la acela al problemei lui Kirchhoff pentru fluidele compresibile.

Procedeul ingenios propus de I. Imai şi acela asemănător al lui E. Lamla, au fost de asemenea reluate de C. Iacob care, în mai multe lucrări publicate în 1946 şi 1948, a adus o serie de completări de natură matematică.

Metoda exactă a lui S. A. Ceaplîghin a mai fost utilizată de către acelaşi cercetător în anul 1941, într-un studiu publicat în „Disquisitiones Mathematicae et Physicae", pentru completarea unei soluţii date de T. Ringleb referitor la sursa dublă.

În domeniul mecanicii fluidelor incompresibile, trebuie menţionată apariţia primului tratat în limba romînă, sub titlul *Hidraulica teoretică şi aplicată*, datorit lui D. Germani. Primul volum a apărut în anul 1941, al doilea în 1945, dar, din păcate, această lucrare de mari proporţii a rămas neterminată din cauza morţii autorului.

În anul 1943, D. Dumitrescu publică în „Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik" teza sa de doctorat cu titlul *Strömung an einer Luftbase im senkrechten Rohr*, executată la Göttingen, în care studiază problema determinării vitezei ascensionale a unei bule de aer de lungime infinită care se urcă într-un tub vertical, umplut cu lichid. Soluţia se obţine cu ajutorul funcţiilor cilindrice. Tot o mişcare axial simetrică a studiat D. Dumitrescu într-o lucrare asupra unei surse situate într-un tub circular, publicată în „Buletinul Politehnicii din Bucureşti", în anul 1944. Mai înainte în 1942, acelaşi autor a publicat un studiu experimental asupra portanţei şi rezistenţei la numere Reynolds mijloci şi mici, tot în revista citată.

În domeniul mecanicii avionului, a efectuat o serie de cercetări N. Tipei care a dat în anul 1939 o metodă de calcul a performanţelor avionului, publicată în „Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest". Acelaşi cercetător s-a ocupat şi de studiul stabilităţii longitudinale a avionului, publicînd o lucrare în acest domeniu în anul 1941, în revista citată mai sus.

În domeniul aerodinamicii experimentale, mai trebuie menţionată formula de suflerie aerodinamică propusă de V. Vîlcovici şi I. Stroescu, prezentată într-o comunicare susţinută la Göttingen în anul 1943. Printr-o alegere convenabilă a formei circuitului în regiunea coturilor, se elimină utilizarea deflectoarelor ca mijloc de evitare a desprinderilor. Pe baza acestei concepţii, s-a realizat o machetă, dar sufleria mare proiectată nu a mai fost construită.

Lucrările menţionate pînă aici reprezintă contribuţia ştiinţei romîneşti la dezvoltarea mecanicii fluidelor şi aerodinamicii pînă în 1948, an în care cercetările în aceste direcţii au intrat într-o nouă fază. Prin transformarea vechii academii în Academia Republicii Populare Romîne, însoţită de o completă reorganizare şi prin înfiinţarea Institutului de mecanică aplicată al acestei academii, studiile de mecanica fluidelor şi de aerodinamică au luat un deosebit avînt. În cadrul institutului menţionat s-au organizat şi dezvoltat o secţie de hidrodinamică şi una aeromecanică şi dacă amintim faptul că cercetări în mecanica fluidelor şi în aerodinamică se efectuează şi la Institutul de matematică al Academiei R.P.R. precum şi în alte cîteva centre din ţară, rezultă că s-au creat condţii destul de favorabile care nu au întîrziat de altfel să aibă un efect remarcabil asupra dezvoltării cercetărilor la care ne referim.

Abundenţa lucrărilor ca şi numărul sensibil mai ridicat de domenii abordate, ne determină ca în această parte a expunerii să părăsim criteriul strict cronologic şi să urmărim cercetările pe specialităţile care le formează obiectul.

În mecanica fluidelor ideale incompresibile, remarcăm astfel cercetările lui E. Carafoli asupra determinării coeficientului de contracţie în cazul scurgerii plane printr-un orificiu de fund sau lateral al unui rezervor paralelipipedic, publicate în revista „Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie", în anul 1950. Utilizînd o metodă simplă, bazată pe aplicarea teoremei impulsului autorul a găsi rezultate în bună concordanţă cu experienţele.

Pentru cazul tridimensional axial-simetric, al ajutajelor cilindrice, determinarea coeficientului de contracţie a făcut obiectul unei lucrări a lui D. Dumitrescu, publicată în anul 1952, în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R."

Problema rotorului cu palete de diferite forme a fost reluată de L. Bal într-o lucrare publicată în 1950, în revista „Studii şi cercetări ştiinţifice" ale Filialei din Cluj a Academiei R.P.R. şi de Şt. Gheorghiţă, într-un studiu care a apărut în 1955, în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R." Tratarea problemei este făcută prin metode analoge cu aceea utilizată de către C. Iacob în lucrarea amintită mai înainte, rezolvarea fiind redusă la aceea a unei probleme mixte armonice.

Stabilirea unei teorii a aluviunilor a format obiectul unui studiu al lui V. Vîlcovici, publicat în anul 1952, în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R." Autorul a considerat o mişcare plană, cu rotor constant şi a asimilat particulele solide cu cilindri, calculînd apoi forţele ce se exercită asupra lor.

Problema ventilaţiei halelor industriale a fost considerată de I. Drescher care a studiat pe cale teoretică şi printr-o analogie, mişcarea aerului în încăperi prismatice de diferite secţiuni, publicînd rezultatele într-o lucrare apărută în 1953, în „Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie". Tot I. Drescher s-a ocupat şi de problema ventilaţiei băilor industriale, într-un memoriu apărut în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1955.

În domeniul mecanicii fluidelor ideale compresibile, C. Iacob a continuat studiile sale asupra metodei lui S. A. Ceaplîghin. Astfel, într-o notă publicată în anul 1950, în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R., a completat şi îmbunătăţit inegalităţile lui S. A. Ceaplînghin care servesc la calculul numeric al coeficientului de contracţie a curenţilor gazoşi subsonici. Într-un studiu apărut în 1951 în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R." C. Iacob a făcut o comparaţie a celor trei variante ale metodei de aproximaţie a lui Ceaplîghin (aceea dată de însuşi Ceaplîghin, aceea indicată de Kármán şi Tsien şi aceea propusă de autor); mai puţin satisfăcătoare pentru calculul coeficientului de contracţie, varianta Kármán-Tsien se dovedeşte a fi cea mai bună pentru studiul mişcării în jurul unui cilindru circular.

Metoda exactă a lui S. A. Ceaplîghin a fost aplicată de Simona Pop la studiul unor configuraţii de curenţi gazoşi subsonici în două lucrări care au apărut în 1953 şi 1955, în „Revista Universităţii C. I. Parhon şi a Institutului politehnic din Bucureşti".

În două lucrări publicate în anii 1952 şi 1953, în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R.", V. Vâlcovici a considerat mişcarea rotaţională a unui fluid barotrop, aducînd o serie de generalizări în legătură cu proprietăţile suprafeţelor pe care trinomul lui Bernoulli este constant.

Mecanica fluidelor vîscoase incompresibile a făcut obiectul unui mare număr de cercetări care au cuprins aspecte foarte variate. Astfel, mişcarea laminară a unui fluid vîscos greu, cu suprafaţă liberă, a fost considerată de D. Dumitrescu într-o notă apărută în 1955, în „Comunicările Academiei R.P.R." Autorul a considerat mişcarea plană şi mişcarea într-un canal de secţiune dreptunghiulară, admiţînd în acest ultim caz o repartiţie parabolică a vitezelor pe suprafaţa liberă. Într-o notă recent comunicată, L. Dumitrescu şi C. Stănescu au studiat mişcarea a două fluide grele cu suprafaţă de separaţie între ele, găsind soluţia exactă pentru cazul unui canal de secţiune circulară şi de secţiune dreptunghiulară. Un număr mare de mişcări cu suprafeţe libere a format obiectul unor cercetări întreprinse de D. Dumitrescu împreună cu V. Ionescu şi Rosée Toth care au aplicat metoda diferenţelor finite, (metoda reţelelor).

Problema corespunzătoare pentru mişcarea turbulentă a fost de asemenea atacată de D. Dumitrescu, într-o notă publicată în 1954, în „Comunicările Academiei R.P.R.", ecuaţiile lui Reynolds fiind] integrate cu ajutorul ipotezei lungimii de amestec. Ulterior, împreună cu D. Ionescu, acelaşi autor a studiat şi mişcarea turbulentă a unui lichid greu într-o conductă circulară netedă, întegrînd ecuaţiile lui Reynolds tot cu ajutorul potezei lungimii de amestec. A fost considerată mai întîi o variaţie liniară a lungimii de amestec, efectuîndu-se o integrare exactă şi una aproximativă şi apoi o variaţie parabolică pentru care caz s-a dat numai o integrare aproximativă a ecuaţiei diferenţiale a scurgerii. Lucrarea a fost publicată în 1955 în revista „Studii şi cercetări de mecanică aplicată".

Mişcarea laminară în tuburi de diferite secţiuni a fost studiată şi de C. Iacob, într-o lucrare apărută în „Revista Universităţii C. I. Parhon şi a Institutului politehnic din Bucureşti" în anul 1953, precum şi de Şt. Gheorghiţă într-un articol apărut tot în 1953, în aceeaşi revistă.

Într-o notă publicată în 1956 în „Comunicările Academiei R.P.R." T. Oroveanu şi P. Ionescu au studiat mişcarea laminară nepermanentă, cu gradient de presiune, în spaţiul dintre doi cilindri concentrici dintre care unul are o viteză de translaţie oarecare, dînd soluţia exactă a problemei.

Trebuie citate de asemenea cercetările ample şi sistematice întreprinse de N. Tipei în problema lubrificaţiei, care au fost distinse cu premiul de stat. Reluînd studiul ecuaţiilor lubrificaţiei stabilite de O. Reynolds, şi utilizînd dezvoltări în serii trigonometrice ale soluţiilor problemei, N. Tipei reuşeşte să dea o metodă generală pentru studiul mişcării în stratul lubrifiant dintre două suprafeţe de formă oarecare şi de dimensiuni finite. Această metodă generală, care poate fi aplicată la mai multe situaţii reale, ca lagăre circulare, plane şi altele, permite să se ia în considerare şi variaţia viscozităţii lubrifiantului. De asemenea, soluţiile obţinute sînt rapid convergente, permiţînd astfel obţinerea unor formule uşor de aplicat. Prezentarea metodei, însoţită de primele ei rezultate, a fost făcută de N. Tipei într-o comunicare publicată în *Lucrările sesiunii ştiinţifice a Academiei R.P.R.*, din iunie 1950 şi în două studii publicate în revista „Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie", în anul 1951 şi în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R.", în anul 1952. Utilizînd aceeaşi metodă, autorul a obţinut, în 1953, un rezultat remarcabil, dînd soluţia exactă a problemei pentru lagărele fără joc radical într-o lucrare publicată în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R." După aceea dată de Mitchell în 1905, aceasta este a doua soluţie exactă în problema lubrificaţiei. Plecînd de la aceste rezultate, V. N. Constantinescu a dat o metodă pentru calculul lagărelor fără joc radial, determi-

nînd toate elementele acestora, într-un memoriu publicat în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în anul 1954.

Verificările experimentale efectuate de N. Tipei în anii 1953 și 1954, publicate în „Studii și cercetări de mecanică aplicată" în 1955, au confirmat valabilitatea ipotezelor și aproximațiile introduse.

Metoda de rezolvare propusă de N. Tipei s-a dovedit a fi aplicabilă și în cazuri de lubrificație mai complexe, care se apropie mai mult de situațiile reale. Într-o serie de cercetări întreprinse în anii 1954—1956, dintre care numai o parte au fost publicate pînă în prezent în „Studii și cercetări de mecanică și metalurgie" în 1954, autorul a studiat mișcarea în lagărele cu elemente geometrice variabile și în lagăre cu axe neparalele. Aceeași metodă a fost aplicată recent de N. Tipei și V. N. Constantinescu la studiul lubrificației suprafețelor sferice, obținînd soluții riguroase, mai apropiate de realitate decît ale cercetătorilor străini. Lucrarea a fost publicată în „Comunicările Academiei R.P.R." în 1956.

Paralel cu studiul lubrificației în regim permanent, s-au efectuat și cercetări asupra lubrificației în regim nepermanent cu aplicații la lagărele supuse la sarcini și viteze variabile și la studiul stabilității lagărelor, probleme de un deosebit interes practic.

Într-un studiu publicat în 1951 în „Buletinul științific al Academiei R.P.R." N. Tipei a dat ecuațiile lubrificației în regim nepermanent și le-a rezolvat prin metoda care îi aparține. Pentru lagărele circulare, el a rezolvat problema într-un memoriu apărut în 1953 în „Studii și cercetări de mecanică și metalurgie", presupunînd cunoscută variația în raport cu timpul a sarcinii exterioare, așa cum se întîmplă în situațiile reale. Metoda propusă a fost aplicată, cu bune rezultate, la calculul lagărelor din diferite tipuri de motoare fabricate în țară. Pentru lagărele plane, V. N. Constantinescu a dat în 1954 o soluție riguroasă, comunicată la Academia tehnică militară, în care extinde soluția lui Mitchell la mișcările nepermanente.

Într-o altă serie de lucrări, N. Tipei a tratat și alte aspecte ale lubrificației în regim permanent, publicînd, în anul 1955, o notă în „Comunicările Academiei R.P.R." asupra stabilității mișcării în lagărele cu încărcare dinamică. Studiul problemei generale a stabilității în stratul de lubrifiant prezintă un deosebit interes practic.

Soluția generală a problemei lubrificației hidrodinamice a fost dată de același autor într-o lucrare apărută în 1954 în „Comunicările Academiei R.P.R.", în care s-a utilizat o metodă propusă de prof. O. Onicescu pentru rezolvarea ecuațiilor cu diferențe finite.

Un număr destul de însemnat de cercetări se referă la mecanica fluidelor viscoase compresibile. Astfel, începînd din 1954 s-a atacat problema scurgerii fluidelor viscoase compresibile în straturi subțiri. Ecuațiile problemei au fost stabilite de N. Tipei într-o notă publicată în „Comunicările Academiei R.P.R.", în anul 1954. Aplicînd aceste ecuații în cazul bidimensional, V. N. Constantinescu a relevat, într-o notă apărută în „Comunicările Academiei R.P.R.", în 1955, existența a două regimuri de scurgere calitativ distincte separate de un regim critic. O metodă aproximativă de rezolvare a problemei a fost indicată de V. N. Constantinescu, pentru diferite cazuri într-o lucrare publicată în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1956 și într-o notă comunicată la sesiunea științifică din Cluj a Academiei R.P.R., în 1954. Ulterior, același cercetător a studiat unele proprietăți ale ecuațiilor lubrificației cu gaze, obținînd soluții asimptotice ale problemei, publicate într-o notă în „Comunicările Academiei R.P.R.", în anul 1955. Pentru scurgerea laminară a gazelor în straturi subțiri mărginite de suprafețe solide imobile, a dat o metodă care permite determinarea acestor mișcări în cazul general. Metoda a făcut obiectul unei note publicate în Comunicările Academiei R.P.R., în 1956. De asemenea, în 1954, același autor a elaborat pentru prima oară o metodă generală aproximativă pentru studiul problemei tridimensionale a lubrificației cu gaze, apărută în „Comunicările Academiei R.P.R.". Expunerea generală a problemelor legate de lubrificația cu gaze, și aplicațiile practice, au fost făcute de V. N. Constantinescu în dizertația sa susținută pentru obținerea titlului de candidat în științe.

În 1955, renunțînd la unele aproximații, N. Tipei a cercetat într-o notă în curs de publicare mișcarea fluidelor vîscoase în straturi groase, aplicînd-o la studiul lubrificației în mișcare de rostogolire. De asemenea, N. Tipei a studiat, într-o altă notă aflată sub tipar, mișcarea fluidelor vîscoase admițînd viscozitatea variabilă cu punctul considerat și cu presiunea.

În sfîrșit, N. Tipei și V. N. Constantinescu au cercetat și aspectul termic al lubrificației, într-un memoriu publicat în „Studii și cercetări de mecanică și metalurgie", în 1954. Într-o notă recent comunicată, V. N. Constantinescu a studiat ecuațiile scurgerii fluidelor vîscoase, incompresibile și compresibile, în straturi subțiri cu transfer de căldură, dînd o metodă generală aproximativă cu care obține distribuția temperaturilor în stratul de fluid.

Cercetările teoretice și experimentale asupra lubrificației au fost sistematizate și dezvoltate de N. Tipei într-un tratat privind teoria lubrificației hidrodinamice, care se află în curs de editare.

Stratul limită compresibil a făcut obiectul cercetărilor lui St. Săvulescu în dizertația sa prezentată pentru obținerea titlului de candidat în științe, în care a dat o nouă metodă aproximativă de studiu al acestei probleme.

Cercetările experimentale au făcut de asemenea progrese datorită înființării laboratorului hidrotehnic al Institutului de mecanică aplicată. Sub conducerea lui D. Dumitrescu, au fost executate în acest laborator numeroase studii pe modele, pentru prima oară în țara noastră, răspunzîndu-se la necesități urgente în realizarea marilor construcții hidrotehnice. O parte din rezultate, cu un caracter sistematic, au fost publicate de D. Dumitrescu și P. Georgescu în „Studii și cercetări de mecanică aplicată" în anul 1954 și se referă la studiul descărcătorilor de ape mari. În același număr al revistei menționate D. Dumitrescu, St. Zarea și Rosée Toth au publicat rezultatele studiilor asupra disipatorilor de energie.

Literatura de specialitate în limba romînă s-a îmbogățit în același timp cu o serie de lucrări de sinteză. Astfel, în anul 1952 a apărut primul volum din tratatul *Mecanica fluidelor* de E. Carafoli și T. Oroveanu, iar în anul 1955, volumul al doilea. În aceste două volume se prezintă, pentru prima oară în limba romînă, ansamblul complet al problemelor staticii fluidelor și dinamicii fluidelor ideale incompresibile. În scurt timp tratatul va fi completat cu dinamica fluidelor reale și cu aceea a fluidelor compresibile.

Tot în anul 1952, a apărut și lucrarea *Introducere matematică în mecanica fluidelor* de C. Iacob, distinsă cu premiul de stat, în care se remarcă în special o prezentare amănunțită a metodelor de rezolvare a problemelor la limită, precum și studiul matematic al mișcării fluidelor compresibile.

Paralel cu dezvoltarea cercetărilor în diferitele domenii ale mecanicii fluidelor s-au amplificat și acelea în domeniul aerodinamicii. Astfel, în 1948, E. Carafoli împreună cu N. Tipei a publicat în „Buletinul științific al Academiei R.P.R." o notă referitoare la teoria aripilor în săgeată și în derivă, dînd o nouă soluție acestei probleme.

În 1949, E. Carafoli a dat o nouă metodă pentru studiul profilelor de aripă cu contur dat, care a apărut în „Buletinul științific al Academiei R.P.R." Această metodă permite rezolvarea problemei pe o cale deosebit de simplă și practică. În același an, E. Carafoli și T. Oroveanu au publicat în „Buletinul științific al Academiei R.P.R.", o notă asupra determinării caracteristicilor unei aripi care traversează un curent de secțiune circulară, obținînd rezultate cu caracter general exprimate în formule simple de calcul.

În anul 1951 a apărut tratatul *Aerodinamica* de E. Carafoli, în care se dă o prezentare de ansamblu a teoriei profilelor și a teoriei aripilor de anvergură finită în cazul regimului de scurgere incompresibil. În această lucrare de sinteză, sînt cuprinse toate rezultatele anterioare obținute de autor, atît în teoria profilelor cît și în aceea a aripilor de anvergură finită precum și o serie de alte contribuții la teoria biplanului și la studiul influenței pereților liberi și rigizi asupra caracteristicilor aerodinamice ale machetelor încercate în suflerii. Cartea a fost distinsă cu premiul de stat și s-a bucurat de o primire deosebit de bună atît în țară cît și în străinătate.

Astfel, în 1954, a apărut traducerea în limba germană, care a fost introdusă ca manual de studiu în învățămîntul superior din Republica Democrată Germană iar în 1956 traducerea în limba rusă. În felul acesta, cercetările în domeniul aerodinamicii executate de E. Carafoli au căpătat o largă răspîndire, fiind unanim apreciate.

În anul 1952, E. Carafoli și N. Patraulea au studiat problema sistemelor portante complexe de rezistență indusă minimă, dînd o teoremă generală, după cît se pare pentru prima dată, care a făcut obiectul unei note publicate în „Comunicările Academiei R.P.R.". Aceiași autori au dat, tot în 1952, ecuația circulației pentru o aripă cu fuselaj central, rezolvînd această problemă printr-o metodă ingenioasă cu caracter general. Acest studiu a făcut obiectul unei note publicate în „Comunicările Academiei R.P.R." în anul amintit mai sus.

T. Oroveanu a studiat problema aripii de rezistență indusă minimă în prezența unui suflu de secțiune circulară, determinînd repartiția circulației în lungul anvergurii; rezultatele sînt cuprinse într-o notă apărută în „Buletinul științific al Academiei R.P.R.", în 1953.

O metodă de calcul, rapidă și exactă, pentru aeromotoare, a fost dată de N. Tipei într-un studiu apărut în anul 1953, în revista „Studii și cercetări de mecanică și metalurgie". Rezultatele calculului teoretic sînt în bună concordanță cu datele experimentale.

Tot în domeniul aerodinamicii vitezelor mici a întreprins o serie de cercetări N. Patraulea, care a comunicat la Academia tehnică militară, în 1954, o lucrare asupra scurgerii în jurul unei machete de avion așezată într-o suflerie de secțiune circulară. Ulterior, N. Patraulea a atacat problema aripilor toroidale. Denumind toropter un aparat de zburat prevăzut cu o astfel de aripă, autorul a dat, într-o notă publicată în 1955, în „Comunicările Academiei R.P.R.", o teorie a zborului planat al unui astfel de aparat. Același cercetător a elaborat o teorie a aripilor inelare subțiri, apărută în 1956 în „Buletinul științific al Academiei R.P.R.". Problema este de interes practic, avînd aplicație la avioanele cu aripi inelare. Teoria turbionară stabilită este analogă cu aceea a aripilor subțiri de anvergură infinită, iar condiția la limită folosită conduce la o ecuație integrală singulară pentru care se aplică metoda de regularizare a lui Musheliș-vili.

Recent, N. Patraulea a atacat problema profilelor de aripă cu voleți fluizi, care prezintă un interes deosebit pentru hipersustentația prin jeturi a avioanelor. Lucrarea a fost comunicată la Sesiunea generală științifică a Academiei R.P.R. din iulie 1956.

Aerodinamica elicopterului a făcut obiectul cercetărilor lui N. Patraulea care a studiat deflecțiunea vînei și a calculat vitezele induse pe discul rotorului, ajungînd la rezultate noi, comunicate într-o notă prezentată la Sesiunea științifică a Academiei R.P.R. din iulie 1956.

O atenție deosebită a fost acordată aerodinamicii vitezelor mari. Aplicînd metoda sa de aproximații succesive, propusă în 1946, despre care am amintit mai înainte, C. Iacoba studiat într-o notă publicată în 1951, în „Comunicările Academiei R.P.R." mișcarea subsonică, cu circulație în jurul profilelor. Într-o altă notă, apărută în 1954, tot în „Buletinul științific al Academiei R.P.R.", C. Iacob a adus o generalizare a regulii lui Jukovski referitoare la determinarea circulației, extinzînd-o la regimul subsonic.

E. Carafoli a redactat tratatul *Aerodinamica vitezelor mari*, aflat sub tipar, în care a adus o serie de contribuții originale în problemele referitoare la mișcările subsonice. Astfel, au fost stabilite caracteristicile aerodinamice ale aripilor de anvergură finită ținînd seama de influența compresibilității, s-a studiat deflecțiunea curentului în aval de aripă precum și problema aripii în săgeată și în derivă. În aceeași lucrare, autorul a dat o metodă pentru trasarea unui profil din planul fizic compresibil, corespunzător unui profil din planul auxiliar de comparație și invers.

Aerodinamica aripilor în regim supersonic a fost atacată de C. Iacob într-un memoriu publicat în 1950, în care a considerat aripa delta situată în interiorul conului Mach, admițînd că incidența nu este nulă. Calculul l-a condus pe autor la concluzia că ipoteza simplificatoare care se face de obicei considerînd incidența nulă și introducînd valoarea ei efectivă numai în

condițiile la limită este justificată, fapt care rezultă de altfel și direct din ipotezele care stau la baza studiului regimului supersonic liniarizat.

Mișcarea conică a fost considerată și de Elena Murgulescu într-o notă apărută în 1951, în „Comunicările Academiei R.P.R." care a avut ca obiect cazul în care aripa triunghiulară depășește parțial sau total conul Mach al vîrfului.

În lucrarea sa citată mai înainte *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, C. Iacob a cercetat cazul aripii triunghiulare nesimetrice, extinzînd rezultatele anterioare ale lui P. Germain.

O nouă metodă de cercetare în mișcările supersonice conice, bazată pe o analogie hidrodinamică, a fost dată de E. Carafoli într-o notă publicată în 1952, în „Comunicările Academiei R.P.R.".

Funcția armonică ce exprimă viteza de perturbare axială este interpretată ca funcție de curent a mișcării plane a unui fluid incompresibil, iar în dezvoltarea metodei se utilizează singularități și reprezentări conforme adecvate. Această metodă a fost extinsă de autor la aripile groase și cu incidență variabilă într-o notă publicată în „Comunicările Academiei R.P.R.", în anul 1953. În afară de rezultatele cunoscute din teoria mișcărilor conice, care se găsesc într-un mod foarte simplu, metoda propusă permite să se găsească noi rezultate, pe aceeași cale simplă, ceea ce s-a făcut succesiv pentru diverse probleme de interes deosebit.

Astfel, într-o notă apărută în 1954, în „Comunicările Academiei R.P.R.", E. Carafoli a studiat problema determinării portanței și rezistenței aripii triunghiulare dublu-conice. Printr-o construcție adecvată a aripii, mișcarea din jurul acesteia se reduce la două mișcări conice suprapuse, care pot fi determinate și în felul acesta se poate calcula rezistența și portanța. Calculele privitoare la rezistența de undă a unei clase de aripi dublu conice au făcut obiectul unei lucrări a lui E. Carafoli și M. Ionescu, publicată în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1955. Portanța aripii dublu-conice subțiri a fost de asemenea calculată într-un studiu efectuat de E. Carafoli și L. Dumitrescu, publicat în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1956. Împreună cu S. Săndulescu, E. Carafoli a studiat, într-o lucrare apărută în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", influența aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripilor triunghiulare în curent supersonic, ajungînd la formule explicite de calcul, interesante îndeosebi pentru momentul de șarnieră.

Într-o notă publicată în „Comunicările Academiei R.P.R"., în 1952, E. Carafoli și Beatrice Horovitz au aplicat metoda analogiei hidrodinamice la studiul aripii prevăzute cu discuri marginale. Teoria aripilor triunghiulare cu discuri normale (aripi cruciforme), care are multe aplicații practice, a făcut în continuare obiectul cercetărilor acelorași autori, care au reușit să rezolve o serie de noi probleme prin metoda analogiei hidrodinamice. Astfel, în nota apărută în „Comunicările Academiei R.P.R.", în 1954, a fost tratată problema influenței discurilor axiale asupra mișcării supersonice în jurul aripilor unghiulare conice groase și cu incidență variabilă, iar într-un memoriu apărut în 1956, în revista „Studii și cercetări de mecanică aplicată" s-a rezolvat problema aripii unghiulare prevăzută cu discuri axiale care au incidența antisimetrică.

În tratatul său în curs de tipărire, menționat mai înainte, E. Carafoli s-a ocupat și de scurgerile conice de ordin superior. Printr-o formulă simplă, se găsește mișcarea conică de ordin superior corespunzătoare unor condiții la limită care se pot dezvolta în polinoame omogene în funcție de coordonatele în plan ale aripii.

Problema aripii plane, cu borduri de atac supersonice, care traversează un con aproape circular (fuselaj conic) a făcut obiectul unei note publicate de N. Patraulea în „Buletinul științific al Academiei R P.R." în 1953, unde se dă o rezolvare riguroasă. Un procedeu analog a fost întrebuințat de N. Patraulea, în colaborare cu D. Pantazopol, pentru studiul mișcării supersonice în jurul unei aripi prevăzute cu un con marginal, publicat în „Buletinul științific al Academiei R.P.R"., în 1954.

Elena Murgulescu şi-a continuat studiile asupra mişcărilor conice printr-o notă publicată în „Comunicările Academiei R.P.R.", în 1952, în care a considerat cazul unei aripi subţiri de secţiune dată, cu un bord de atac supersonic şi altul subsonic. Într-o altă notă apărută în 1954, în „Comunicările Academiei R.P.R"., Elena Murgulescu s-a ocupat de problema aripii triunghiulare cu fuselaj conic, considerînd ambele borduri de atac subsonice. În ipoteza că deschiderea aripii este mică şi fuselajul are secţiune circulară, s-a aplicat metoda de aproximare a lui P. Germain.

Problema aripii subţiri de secţiune dată a fost atacată şi de C. Iacob, care a presupus că aripa este complet interioară conului Mach al vîrfului, într-un studiu apărut în „Buletinul ştiinţific al Academiei R,P.R." în 1954. În acelaşi studiu, autorul a reluat şi problema aripii triunghiulare plane prevăzute cu un fuselaj conic simetric, utilizînd metoda de aproximare a lui P. Germain.

Prima lucrare de sinteză asupra întregului domeniu al aerodinamicii mari este aceea menţionată mai înainte, de E. Carafoli, care va apare în cursul acestui an şi va include toate contribuţiile originale ale autorului în acest domeniu.

O ramură nouă a aerodinamicii care s-a dezvoltat mult în ultimii ani se referă la suprafeţele permeabile. Prima lucrare efectuată în ţara noastră în această direcţie aparţine lui E. Carafoli care a studiat, într-o notă apărută în *Lucrările sesiunii ştiinţifice a Academiei R.P.R.* din iunie 1950, teoria suprafeţelor portante permeabile, asimilînd profilul cu o linie de vîrtejuri şi presupunînd că mişcarea în exterior este irotaţională.

Studii sistematice în aerodinamica suprafeţelor permeabile a întreprins N. Patraulea. Admiţînd, în conformitate cu fenomenul real, că în spatele unei suprafeţe premeabile se formează o zonă de vîrtejuri, el a dat o soluţie analogă cu aceea a lui Oseen pentru obstacolele impermeabile, pe care a publicat-o în „Comunicările Academiei R.P.R.", în anul 1952. Avînd ca punct de plecare această soluţie, N. Patraulea a studiat scurgerea în jurul ecranelor permeabile date. Ecranul are forma unei plăci plane permeabile de anvergură finită şi structura lui rezultă dacă se dă repartiţia vitezelor la infinit aval. Se consideră de asemenea şi cazul ecranelor permeabile date, iar pentru confruntarea teoriei cu rezultatele experienţelor executate în suflerie, se studiază şi influenţa frontierelor acesteia. Rezultatele au fost publicate într-un studiu apărut în revista „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1954. Între timp, N. Patraulea a elaborat o teorie a mişcărilor cu dîră aproape rectilinie, denumită astfel deoarece folosirea ecuaţiilor de mişcare liniarizate conduce la concluzia că în zona de vîrtejuri din spatele obstacolului permeabil, rotorul este constant pe linii paralele cu viteza de la infinit. Această teorie, publicată în „Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R." în 1955, conduce, pe o cale mai simplă, la aceleaşi concluzii ca şi soluţia de tip Oseen găsită anterior de acelaşi cercetător. Extinderea teoriei la mişcările subsonice a fost făcută de N. Patraulea în colaborarea cu C. Stănescu, cu adoptarea medotei de liniarizare Prandtl-Glauert, într-o lucrare apărută în 1955 în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată".

Teoria mişcărilor cu dîră aproape rectilinie i-a permis lui N. Patraulea să elaboreze o teorie a paraşutei, considerînd mişcarea plană în jurul unui semicerc permeabil. Acest studiu asupra paraşutei în mişcarea plană a făcut obiectul unei note publicate în „Comunicările Academiei R.P.R.", în 1955.

În colaborare cu E. Larisch, N. Patraulea a studiat mişcarea cu dîră în jurul unei suprafeţe portante permeabile, problema reducîndu-se la rezolvarea unei ecuaţii integrale studiate de S. G. Mihlin. În nota publicată în 1955, în „Comunicările Academiei R.P.R." se dau şi formulele pentru coeficienţii de portanţă şi rezistenţă ai unei plăci plane permeabile cu incidenţă mică.

Tot N. Patraulea şi E. Larisch au aplicat teoria mişcărilor cu dîre aproape rectilinii la studiul profilelor de aripă cu volet de intrados permeabil. Problema prezintă un interes practic remarcabil şi autorii au căutat să conducă pînă la capăt calculele, dînd formule pentru

calculul reacţiunilor aerodinamice şi pentru determinarea singularităţilor de pe volet. Rezultatele au fost prezentate într-o notă apărută în 1955 în „Comunicările Academiei R.P.R.".

O altă aplicaţie a teoriei amintite au făcut-o aceiaşi autori într-o lucrare asupra teoriei aripilor plane suflate, apărută în 1956 în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată". Soluţia se dă prin rezolvarea unei ecuaţii integrale cu nucleu Cauchy şi prezintă interes pentru hipersustentaţia aripilor de avion.

Rezultatele obţinute în aerodinamica suprafeţelor permeabile au fost strînse de N. Patraulea în lucrarea sa cu acelaşi titlu apărută în 1956. În afară de contribuţiile citate mai sus, autorul prezintă un studiu general asupra suprafeţelor permeabile şi o clasificare a acestora, o serie de rezultate în legătură cu suprafeţele permeabile ideale (fără dîră de vîrtejuri libere), consideraţii asupra teoriei elicii cu număr infinit de pale precum şi o schiţă a unei teorii neliniarizate a mişcării în jurul suprafeţelor permeabile.

Studiile experimentale de aerodinamică nu au fost neglijate în perioada de care ne ocupăm. Astfel, E. Carafoli, I. Stroescu şi N. Cămărăşescu au executat încercări în suflerie cu diverse tipuri de ecrane permeabile, în vederea aplicării rezultatelor la perdelele forestiere de protecţie, rezultatele fiind publicate în „Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie" în anul 1953. Tot în 1953, au apărut în aceeaşi revistă studiile experimentale executate de D. Taşcă, I. Nedelescu şi D. Căpriţă referitoare la determinarea presiunilor pe acoperişuri de peroane. Problema corespunzătoare pentru acoperişuri de tribune a fost cercetată şi experimentată de T. Oroveanu şi I. Nedelescu, rezultatele fiind publicate în 1954, în „Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie". Completarea acestor determinări a efectuat-o ulterior I. Nedelescu, care a publicat rezultatele în 1955, în aceeaşi revistă.

Un studiu experimental asupra repartiţiei circulaţiei la aripile eliptice în săgeată, cu rezultate interesante, au executat Al. Marinescu şi St. Săvulescu, rezultatele fiind publicate în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1955.

Toate aceste cercetări au fost executate în sufleriile de la Institutul politehnic. Între timp Institutul de mecanică aplicată şi-a construit o suflerie proprie de dimensiuni mari, care va intra în funcţie în toamna acestui an şi va putea servi la numeroase studii experimentale.

În domeniul mecanicii avionului, N. Tipei a dat în 1953 o metodă pentru calculul mişcării variate a avionului pe traiectorii orizontale, publicată în „Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie". În colaborare cu A. Matei, N. Tipei a studiat mişcarea avionului în zbor planat, iar împreună cu E. Moisei, picajul vertical al avionului. Aceste lucrări au fost publicate în „Revista Universităţii C. I. Parhon şi a Institutului politehnic Bucureşti".

În 1955 V. N. Constantinescu a publicat în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată" un memoriu asupra vriei permanente a avionului.

Problema stabilităţii avionului a fost abordată de T. Hacker care a dat într-o notă apărută în 1955, în „Comunicările Academiei R.P.R.", un criteriu de stabilitate longitudinală a avionului în etapa cu perioadă scurtă a mişcării perturbate pentru mişcările de bază nepermanente, orizontale şi rectilinii. Tot T. Hacker a studiat stabilitatea longitudinală a avionului în evoluţiile cele mai defavorabile, considerînd mişcări de bază uniforme sau variate, într-o lucrare publicată în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1955. Aceste cercetări asupra stabilităţii avionului sînt continuate de T. Hacker într-o lucrare prezentată la Sesiunea generală ştiinţifică a Academiei R.P.R., din iulie 1956.

Studiul stabilităţii elicopterului a făcut obiectul preocupărilor lui Al. Marinescu într-o lucrare publicată în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1954. Ulterior, Al. Marinescu a cercetat şi problema stabilităţii la punct fix a elicopterului cu rotor antrenat prin jet, publicînd rezultatele în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1955. Acelaşi cercetător a studiat problema stabilităţii elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative într-un memoriu apărut în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", în 1956, precum şi stabilitatea elicopterului cu rotoare în tandem apărut tot în 1956, în aceeaşi revistă.

Un domeniu în care cercetările s-au dezvoltat la noi foarte recent este acela al termoaerodinamicii. În 1955, V. V. Constantinescu a extins metoda de calcul a arderii laminare, preconizată de Scurlock și Tsien la mișcări axial-simetrice, urmînd ideea lui Tsien. Lucrarea a apărut în 1956 în „Studii și cercetări de mecanică aplicată". Urmînd ideea lui Scurlock pentru scurgerile incompresibile, E. Larisch a dat o metodă pentru rezolvarea ecuației integrale a problemei pe care a extins-o la scurgerile cu variație de secțiune; lucrarea a apărut în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1956.

V. N. Constantinescu și-a extins rezultatele găsite și pentru cazul în care există variație lentă de secțiune, admițînd că profilul vitezelor se menține același.

O altă direcție de preocupări teoretice, care s-a dezvoltat în ultimul timp, se referă la scurgerea fluidelor prin medii poroase. Într-un studiu publicat în 1952, în „Buletinul științific al Academiei R.P.R." E. Carafoli și N. Patraulea s-au ocupat de problema scurgerii în jurul unei plăci permeabile situată într-un mediu poros. S-a admis că legea lui Darcy este valabilă, iar placa a fost asimilată cu un strat de vîrtejuri.

T. Oroveanu a publicat în colaborare cu P. Ionescu, în revista „Studii" a Institutului de petrol și gaze, în anul 1955, o lucrare în care se dau formulele pentru calculul debitului unei sonde imperfecte din punct de vedere hidrodinamic, în ipoteza că mișcarea este plană. Rezultatele completează și generalizează pe acelea cunoscute din literatura de specialitate.

Cercetări sistematice asupra scurgerii prin medii poroase neomogene a întreprins T. Oroveanu. Într-o notă apărută în 1955, în „Comunicările Academiei R.P.R.", s-a dat o nouă formă a ecuației diferențiale a scurgerii și s-a indicat soluția aproximativă pentru cazul în care permeabilitatea variază în limite reduse. Aceeași ecuație a servit la studiul cîtorva cazuri de variație unidimensională a permeabilității, pentru care problema se reduce la găsirea unei funcții armonice. Rezultatele găsite de T. Oroveanu în această direcție sînt date într-o lucrare apărută în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1956.

Studiind unele probleme referitoare la scurgerea plan-radială a petrolului în straturi permeabile neomogene, T. Oroveanu a dat într-o notă publicată în 1955 în „Comunicările Academiei R.P.R." soluția pentru cazul în care permeabilitatea variază radial și presiunea pe conturul de alimentare este de asemenea variabilă. O soluție analogă, pentru cazul în care permeabilitatea are o variație oarecare, reprezentată însă printr-un produs de două funcții, a fost găsită de același autor, cu condiția ca presiunea pe conturul de alimentare să fie constantă și a fost publicată în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1955.

Recent, la sesiunea științifică a Institutului de petrol și gaze din mai 1956, T. Oroveanu a prezentat o notă în care se dă soluția aproximativă pentru scurgerea plan-radială a unui lichid compresibil printr-un mediu poros, admițînd că permeabilitatea variază radial.

Împreună cu H. Pascal, T. Oroveanu a dat o metodă aproximativă pentru studiul scurgerii unui amestec de lichid și gaz printr-un mediu poros, care a făcut obiectul unei note apărută în „Comunicările Academiei R.P.R.", în 1955. Cu ajutorul acestei metode, autorii au stabilit expresia vitezei de propagare a undelor plane într-un astfel de amestec aflat într-un mediu poros și au publicat rezultatele în „Comunicările Academiei R.P.R.", în 1956. Scurgerea plan-radială staționară a unui amestec de lichid și gaz printr-un mediu poros a fost de asemenea studiată de T. Oroveanu și H. Pascal, într-un memoriu apărut în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1956. Rezultatele au fost găsite prin aplicarea metodei propuse de autori în lucrarea anterioară menționată.

T. Oroveanu a întreprins și cercetări asupra scurgerii unui curent de aer printr-un strat de cereale, verificînd mai întîi pe cale experimentală valabilitatea legii lui Darcy. Rezultatele, care au în vedere aplicațiile la ventilația cerealelor depozitate în silozuri, sînt cuprinse într-o lucrare publicată în „Studii și cercetări de mecanică aplicată", în 1956.

Din trecerea în revistă destul de sumară a principalelor rezultate obținute la noi în țară în domeniul mecanicii fluidelor și aerodinamicii se poate observa că, deși preocupările în aceste direcții sînt de dată relativ recentă și au luat amploare numai în ultimul timp, contribuțiile

cercetătorilor romîni sînt destul de însemnate. Existența unui număr de specialiști cu experiență precum și a unui grup destul de larg de tineri care își încep activitatea în mecanica fluidelor sau în aerodinamică, sînt premise care arată că dezvoltarea în viitor a cercetătorilor este asigurată pe o scară din ce în ce mai vastă.

Primită la redacție la 4 iunie 1956.

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ В РНР В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И АЭРОДИНАМИКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор дает исторический обзор развития исследований в области механики жидкостей и аэродинамики в Румынской Народной Республике за последние 50 лет, указывая какие достижения являются самыми важными.

L'ESSOR DES RECHERCHES DANS LE DOMAINE DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES ET DE L'AÉRODYNAMIQUE DANS LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

(RÉSUMÉ)

L'auteur donne un aperçu historique du développement des recherches dans le domaine de la mécanique des fluides et de l'aérodynamique dans la République Populaire Roumaine, à partir des premières années du XXe siècle et en souligne les réalisations les plus importantes.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VII, nr. 4, 1956

REFERATE TEHNICE ŞI ŞTIINŢIFICE

UN APARAT DE LABORATOR PENTRU DETERMINAREA MODULULUI DE DEFORMAŢIE AL PĂMÎNTURILOR

DE

R. N. VARLAN

Modulul de deformaţie al pămîntului se foloseşte în metodele de dimensionarea sistemelor rutiere rigide şi nerigide şi la calculul exact al fundaţiilor construcţiilor civile şi industriale [1], [2].

El se defineşte ca raportul dintre presiunea specifică considerată ca fiind uniform repartizată suprafeţei pămîntului prin intermediul unei plăci de încărcare (circulară sau rectangulară) şi tasarea relativă a acesteia.

Tasarea relativă este raportul dintre tasarea absolută, măsurată prin intermediul unui microcomparator şi dimensiunea minimă în plan a suprafeţei de încărcare, amplificată sau redusă cu un coeficient α

$$E_d = \frac{p}{\lambda}, \tag{1}$$

în care

E_d este modulul de deformaţie al materialului încercat (kg/cm²);

p, presiunea specifică (kg/cm²);

$\lambda = \frac{l}{\alpha D}$, tasarea relativă;

l, tasarea absolută a suprafeţei de încărcare (cm);

D, diametrul sau latura minimă a suprafeţei de încărcare (cm);

α, coeficient variabil cu forma în plan şi rigiditatea suprafeţei de încărcare şi cu omogeneitatea pămîntului încercat (cu valori cuprinse între 0,79 şi 1,57).

Principiul de determinarea modulului de deformaţie constă în încărcarea unei probe din materialul de încercat, în trepte de presiune prin intermediul unei suprafeţe de încărcare şi măsurarea tasării acesteia, corespunzătoare fiecărei trepte de presiune. Raportînd pe o diagramă valorile p şi λ obţinute, se capătă curba caracteristică de deformaţie a materialului sau curba încărcare-tasare relativă, $\lambda = f(p)$.

Valoarea modulului de deformație se determină prin extragerea din diagramă, a presiunii corespunzătoare tasării relative admisibile (prevăzută în norme sau cerută de proiectant) și înlocuirea acestor valori în formula (1).

Pentru determinarea *pe teren* a modulului de deformație al pămînturilor sau complexelor rutiere, s-au fixat pînă în prezent, un utilaj și o metodică de lucru, care sînt descrise în diferite publicații de specialitate [3], [4] sau norme tehnice [5], [6].

În ceea ce privește determinarea *în laborator* a acestui factor de capacitate portantă, nu s-a ajuns încă la stabilirea unui aparataj și a unei metode de lucru care să răspundă cerințelor producției. Aparate provizorii, necesare unei probleme speciale de studiu, sînt prezentate în literatura tehnică [7], însă ele nu pot fi generalizate, nerăspunzînd tuturor condițiilor care se cer unui asemenea aparataj, care trebuie să permită:

1. Respectarea principiului de determinare pentru obținerea unei curbe încărcare-deformație.
2. Realizarea simplă și comodă a încărcării.
3. Măsurarea precisă a tasărilor.
4. Folosirea de diverse ștampe de încărcare, funcție de gradul de consistență sau îndesare al materialului.
5. Prelevarea de probe netulburate, a transportării acestora și a montării lor în aparat.
6. Prepararea de probe tulburate.
7. Saturarea cu apă a probei prin infiltrații de jos în sus, pentru a pune materialul în condițiile cele mai dezavantajoase.
8. Demontarea și montarea rapidă și comodă a aparatului pentru transport și efectuarea încărcărilor direct pe șantier.
9. Compararea determinărilor efectuate de diferiți experimentatori (înlăturarea ecuației personale).

★

În urma studiilor și încercărilor efectuate în anii 1954—1955 pe un aparat provizoriu, am ajuns la proiectarea și executarea unui aparat de laborator pentru determinarea modulului de deformație al pămînturilor, care răspunde condițiilor arătate.

Aparatul se compune (fig. 1) dintr-un cilindru sau ștuț, de 13 cm diametru, care conține proba de pămînt (*6*) solidarizat de talpă (*7*) printr-un inel de prindere (*9*) cu ajutorul unor șuruburi (*8*) cu piulițe fluturi (*10*); la partea superioară a cilindrului se prinde printr-un sistem baionetă, un capac de ghidaj (*4*) prin mijlocul căruia culisează tija (*1*) ce are la capătul superior un platan pentru așezat greutăți și la cel inferior este filetată pentru a înșuruba diverse ștampe cilindrice de încărcare (*5*); tija poate fi blocată într-o poziție oarecare cu ajutorul unui șurub cu cap moletat (*11*). Tasările ștampei de încărcare se citesc prin intermediul unui microcomparator (*2*) fixat de tijă printr-un sistem de prindere (*3*) analog celui întrebuințat la edometru.

Aparatul mai are (fig. 2) o serie de anexe: ștuțuri de rezervă (*B*), prelungitoare inferioare tăietoare (*C*) și prelungitoare superioare (*D*), care împreună alcătuiesc ștuțuri de luat probe netulburate (*E*). talpă cu găuri (*F*) pentru înlocuirea celei pline [(*7*) — fig. 2] în cazul necesității de saturare cu apă a probei de pămînt și ștampe de încărcare de diferite dimensiuni (*G*).

În cele ce urmează vom arăta pe scurt modul în care aparatul satisface fiecare din condițiile expuse mai sus.

1. Respectarea principiului de determinare

Pentru a caracteriza capacitatea portantă a pămînturilor de fundație, au fost propuși o serie de indici, constante și module, a căror determinare în majoritatea cazurilor pleacă de la același principiu arătat aici și anume încărcarea unei suprafețe în trepte și măsurarea tasării corespunzătoare a acesteia.

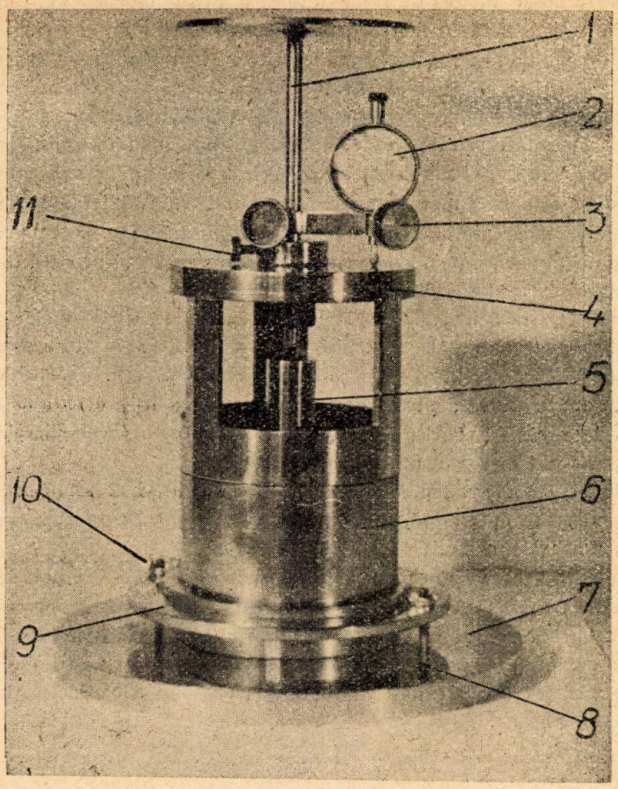


Fig. 1

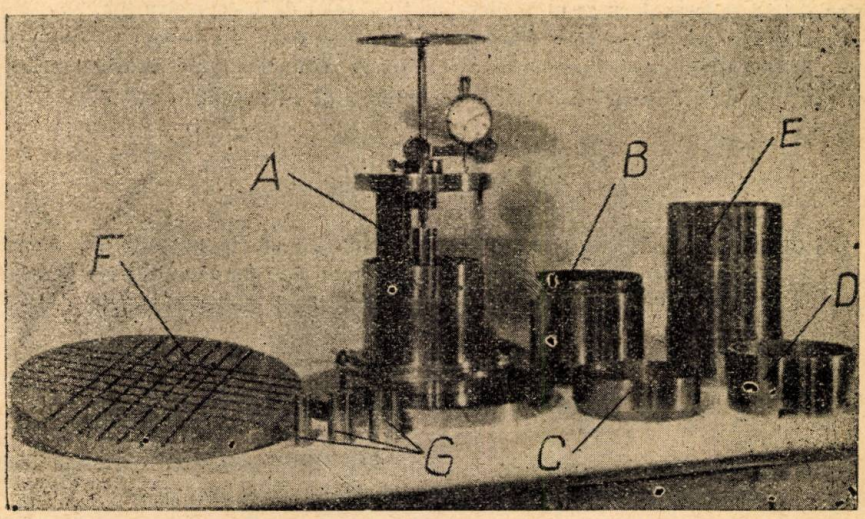


Fig. 2

Diferența între acești factori de capacitate portantă și modulul de deformație constă fie în ipoteza în care se consideră că lucrează pămîntul sub încărcări exterioare, fie în condițiile impuse încercării și prelucrării rezultatelor obținute, fie în metodica de încercare, diferită din punctul de vedere al aplicării încărcării.

Astfel, metoda de determinare a constantei lui Winkler (Bettungsziffer — kg/cm³) consideră că deformația pămîntului este locală, netransmisibilă, manifestîndu-se numai în limitele suprafeței încărcate, comparînd pămîntul cu un sistem de arcuri spirale nelegate între ele [8].

Metoda de determinare a modulului de reacțiune al lui Westergaard, preconizează că încărcarea suprafeței de încărcare să se facă pînă la obținerea unei valori prescrise a tasării, raportul dintre presiunea pe suprafața de contact în acel moment și această tasare, reprezentînd modulul de reacție K, în kg/cm³ [9].

Una din metodele cele mai răspîndite de dimensionare a sistemelor rutiere este aceea care folosește indicele californian de capacitate portantă (C.B.R. — Californian, Bearing Ratio). Determinarea acestui indice se bazează pe înfigerea unui poanson în proba de pămînt pînă la atingerea unei anumite valori a poansonării și compararea în procente a presiunii măsurate față de presiunea determinată pentru un material de comparație (macadam) la aceeași valoare a poansonării, și considerat ca avînd un indice portant de 100% [10].

Spre deosebire de cei cîțiva factori de capacitate portantă mai importanți descriși mai sus, modulul de deformație se determină, după cum am arătat, prin interpretarea unei curbe caracteristice de deformație a materialului încercat.

Aparatul de care ne ocupăm respectă principiul de determinare necesar obținerii acestei curbe, dînd posibilitatea încărcării în trepte de presiune și citirii tasărilor corespunzătoare sub fiecare treaptă. Valorile obținute servesc tocmai la trasarea curbei încărcare-tasare, din care se capătă modulul de deformație de calcul, în funcție de condițiile viitoare de lucru la care va fi supus materialul încercat (îmbrăcăminte sau fundație), folosind valoarea tasării relative (λ) corespunzătoare.

2. Realizarea încărcării

Pentru a obține creșterea în trepte a presiunii pe suprafața ștampei de încărcare, platanul superior al tijei se încarcă cu greutăți plate, de tipul celor de la edometru (fig. 3).

Greutățile se așează una peste alta prin suprapunere, după efectuarea citirii la microcomparator pentru treapta de încărcare anterioară. Trebuie dată o atenție deosebită așezării greutăților pentru a nu crea șocuri ce ar influența tasarea sub o anumită treaptă.

3. Măsurarea tasărilor

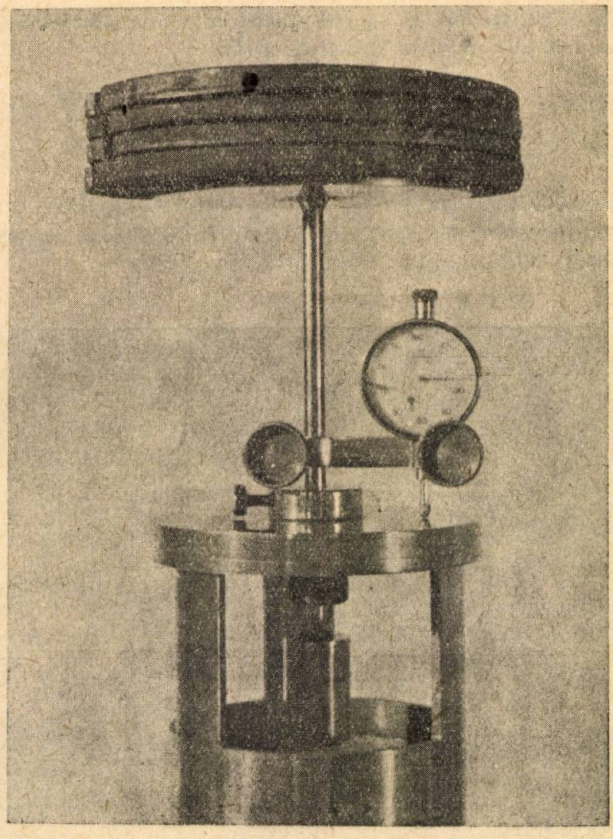
Din figura 3 se poate vedea că sistemul de prindere a microcomparatorului este similar cu cel de la edometru. Microcomparatorul este prins rigid de tijă, planul de comparație fiind capacul aparatului; astfel, microcomparatorul urmărește fidel tasarea suprafeței de încărcare, prin intermediul tijei.

4. Folosirea diverselor stampe de încărcare

În funcție de natura și starea fizică a pămîntului supus determinării se alege diametrul suprafeței de încărcare (ștampei), folosind datele din tabloul dat mai jos.

Această diferențiere a ștampelor este absolut necesară, deoarece un diametru prea mic duce a poansonarea probei (prin forfecarea materialului), iar unul prea mare, la îndesarea sa. Alegerea

judicioasă a diametrului ștampei de încercare conduce la compensarea fenomenelor de forfecare cu cele de îndesare în porțiunea mijlocie a curbei $\lambda = f(p)$, obținînd caracteristica reală de deformație a materialului încercat.



F.g. 3

Tabloul redat și în STAS. E. 4775—55 a fost întocmit în urma încercărilor efectuate pe diferite tipuri de pămînturi cu diferite stări de consistență.

În figura 2 se arată ștampele de încercare (G) folosite la determinarea modulului de deformație.

Tablou

Natura și starea fizică *) a pămîntului	D cm	A cm²
Pămînturi argiloase în stare de consistență tare sau plastic-vîrtoasă și nisipuri îndesate	1,60	2,0
Pămînturi argiloase în stare de consistență plastic-consistentă sau plastic-moale și nisipuri cu îndesare mijlocie	2,40	4,5
Pămînturi argiloase în stare de consistență plastic-curgătoare și nisipuri afînate	3,19	8,0

*) Starea fizică se înțelege conform STAS 1917-50.

Diametrul ştampei este acela care dimensionează ştuţul ce cuprinde proba ; pentru ca la efectuarea încercării, influenţa pereţilor şi fundului să fie neglijabilă, trebuie ca raportul dintre diametrul ştampei celei mai mari întrebuinţate şi diametrul ştuţului să fie minimum 1 : 4, iar faţă de înălţimea ştuţului să fie minimum 1 : 3, [3].

Ţinînd seama de aceste condiţii, s-a ales diametrul interior şi înălţimea ştuţului, urmărindu-se şi realizarea unei cifre rotunde a volumului său.

5. Prelevarea şi încercarea probelor netulburate

Pentru a da posibilitatea ridicării de probe netulburate de pe teren, a transportării lor şi a montării în aparat în vederea încercării lor, aparatul cuprinde o serie de ştuţuri de rezervă cu prelungitoare tăietoare inferioare şi superioare (fig. 4).

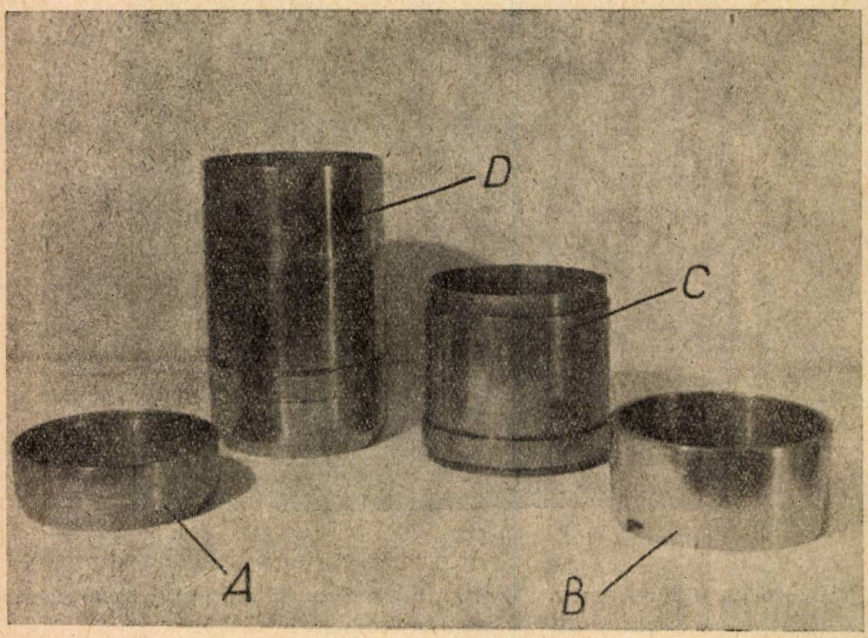


Fig. 4

Montînd prelungitoarele (*A*) şi (*B*) la ştuţul (*C*), se capătă un ştuţ de luat probe netulburate (*D*), care se poate parafina la ţcele două capete şi transporta la laboratorul de încercare.

Prin scoaterea celor două prelungitoare şi nivelarea feţelor probei, se capătă un ştuţ la care se montează capacul, tija, microcomparatorul, ştampa de încercare şi talpa, putîndu-se efectua determinarea modulului de deformaţie la umiditatea şi starea fizică naturală a probei cu structura netulburată.

Încercările de probe netulburate sînt necesare pentru a cunoaşte capacitatea portantă a patului drumurilor în debleu.

6. Prepararea probelor tulburate

Pentru a putea prelucra probe tulburate la diverse grade de compactare și umidități, este necesar ca aparatul să permită efectuarea compactării după tipul încercărilor în cilindrul Proctor sau C.B.R.

Demontînd capacul aparatului, tija și microcomparatorul, și adăugînd la capătul superior al ștuțului un prelungitor, se capătă un cilindru de confecționat probe tulburate în condițiile dorite de umiditate și greutate volumetrică (fig. 5).

Încercările pe probe tulburate sînt necesare obținerii datelor asupra capacității portante a patului drumurilor în rambleu.

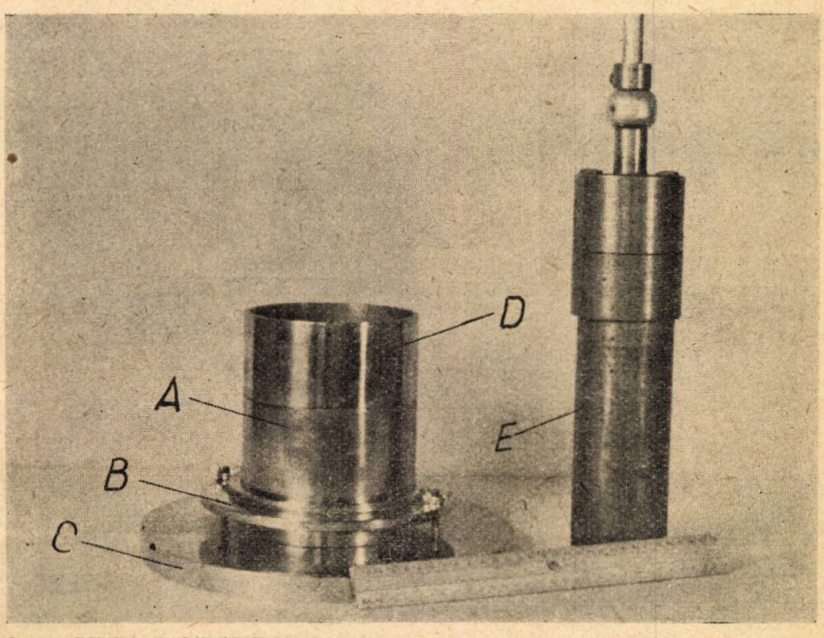


Fig. 5

7. Saturarea cu apă a probelor prin infiltrații de jos în sus

Printre factorii care influențează în mod defavorabil capacitatea portantă a patului unui drum este ridicarea umidității pămîntului prin infiltrații din șanțuri sau pînze freatice de mică adîncime. Influența acestora devine dezastruoasă pentru viabilitatea drumului, în perioadele în care se manifestă fenomenul de înghеț-dezgheț, alimentînd formarea lentilelor de ghiață sub platforma șoselei.

Pentru a reproduce fenomenul de saturare cu apă prin infiltrații, aparatul cuprinde în afară de talpa plină (*A*) și una cu canale și găuri (*B*) (fig. 6). Alcătuirea feței superioare a tălpilor este identică (fig. 7), permițînd montarea ștuțurilor cu probe tulburate sau netulburate, prelucrarea probelor tulburate putîndu-se efectua, conform punctului 6, cu oricare din tălpi.

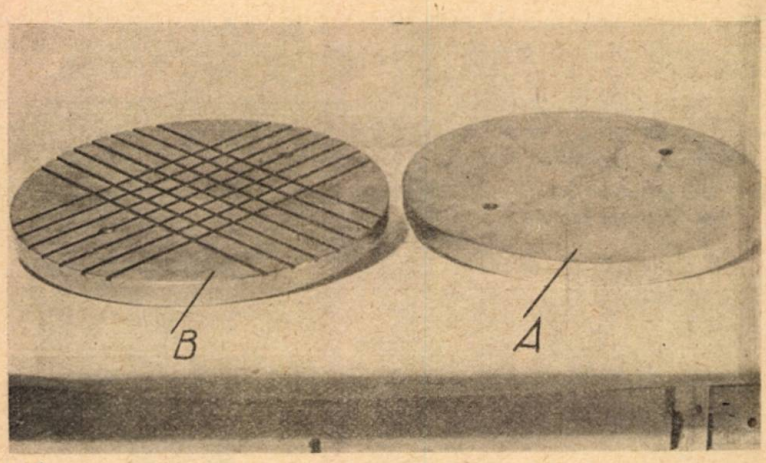


Fig. 6

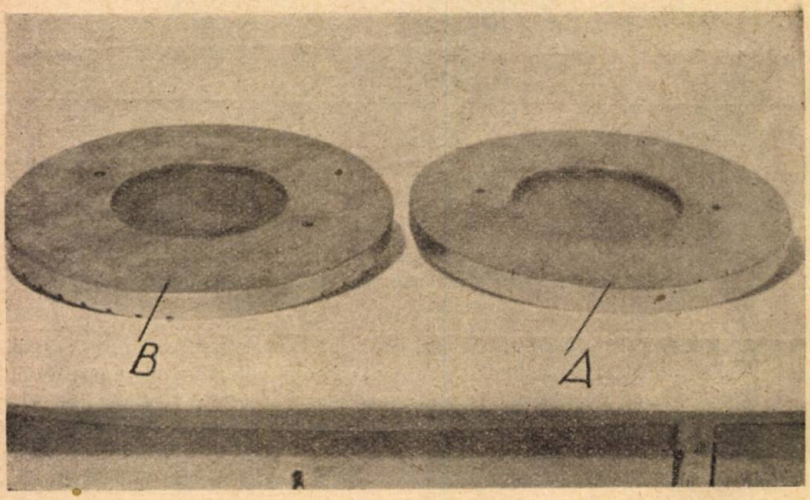


Fig. 7

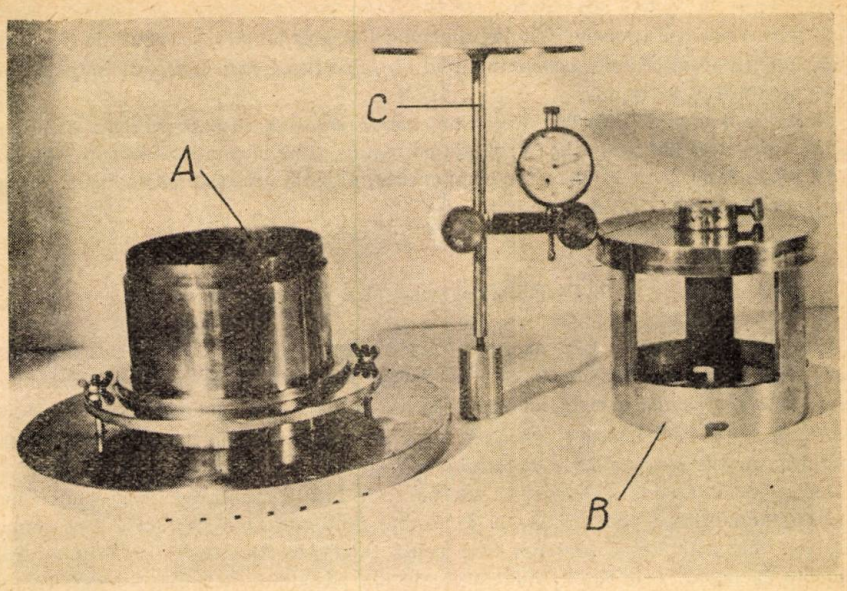


Fig. 8

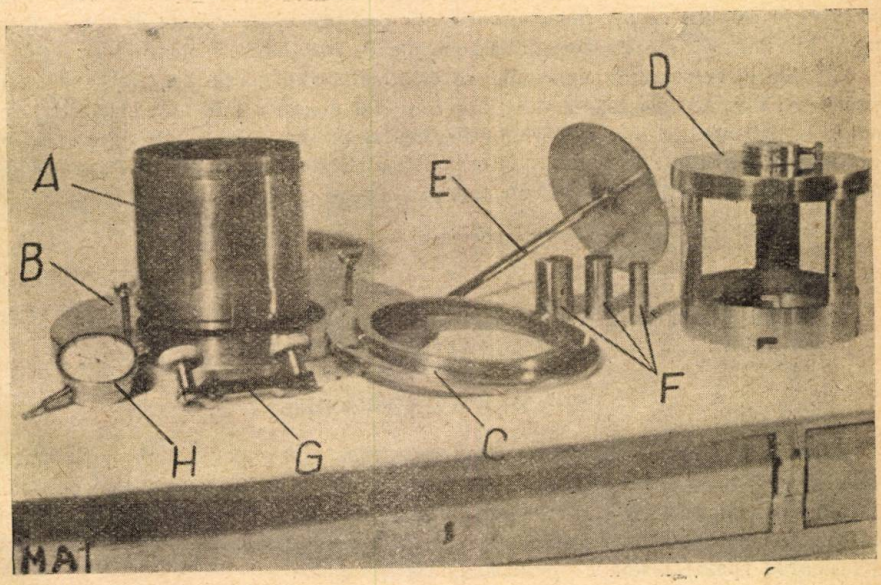


Fig. 9

8. Demontarea aparatului pentru transport și montarea rapidă pentru încercări pe șantier

Avîndu-se în vedere necesitatea efectuării de încercări direct pe șantier, pentru a se înlătura inconvenientul transportării de probe numeroase la laboratoare centrale și posibilitatea alterării condițiilor inițiale ale probelor netulburate, aparatul a fost conceput în ipoteza demontării și montării sale rapide.

În figura 8 se arată cele trei părți componente esențiale ale aparatului : știftul cu talpa și inelul de prindere (A) ; capacul (B) și tija cu platan, ștampă și microcomparator (C).

El poate fi desfăcut în elemente componente, ușor de ambalat într-o ladă specială. În figura 9 acestea sînt arătate separat.

9. Posibilitatea comparării rezultatelor

Unul dintre defectele cele mai importante ale metodei de determinare a indicelui de capacitate portantă (C.B.R.), care este un factor foarte răspîndit azi la dimensionarea sistemelor rutiere nerigide, constă în faptul că de cele mai multe ori, rezultatele încercărilor efectuate de diverse laboratoare și diferiți experimentatori nu pot fi comparate, intervenind așa-numita ecuație personală de determinare.

La aparatul descris aici, aceasta nu poate influența rezultatele, respectarea metodicii de lucru (standardizată prin STAS—E 4775—55) fiind suficientă pentru a face comparabile rezultatele. Singurul factor personal care poate interveni, fără însă a denatura rezultatele, este modul de așezare prin suprapunere a greutăților pe platanul tijei, suprapunere care trebuie făcută cu atenție, fără impact ; o lipsă de atenție poate duce însă numai la un punct oarecum deplasat față de curba medie $\lambda = f(p)$ și nimic mai mult.

*

*

Metodica de lucru, așa cum decurge din principiul de determinare expus în cele ce preced, făcînd obiectul unui standard în care a fost inclus și aparatul de care ne ocupăm, nu vom intra în detaliile de determinare, considerînd că principiile arătate la începutul prezentului articol sînt suficiente pentru a înțelege modul de funcționare și mersul încercării.

Studiile în curs asupra modulului de deformație al pămînturilor și sistemelor rutiere, efectuate cu aparatul acesta, ne vor arăta care sînt defectele sale încă existente și ne vor conduce la îmbunătățiri care să permită folosirea sa pe scară largă. Introducerea aparatului și metodicii de lucru într-un standard creează obligativitatea întrebuințării sale și deci condiții pentru controlarea calităților și defectelor inerente unui prototip.

Primită la redacție la 5 ianuarie 1956

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРИБОР ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ГРУНТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Статья содержит описание прибора-прототипа для определения в лабораторных условиях модуля деформации, являющегося одним из факторов несущей способности грунтов и используемого в настоящее время в широком масштабе при новейших расчетах для установления размеров дорожных систем, а также при точном расчете фундаментов гражданских и промышленных построек.

Автор указывает, в чем заключается принцип определения модуля деформации, и сравнивает его в общих чертах с некоторыми другими факторами несущей способности.

Перечисляются особые требования, которым должен удовлетворять прибор при подобного рода определениях; эти требования и были главной причиной, по которой до настоящего времени не было возможности создать прибор, который мог бы внедрен в лабораториях соответствующей специальности для серийных определений.

Исследуется, в какой мере представленный аппарат отвечает предъявляемым к нему требованиям; к работе приложены фотографии, необходимые для наглядного подтверждения высказываний автора.

UN APPAREIL DE LABORATOIRE POUR LA DÉTERMINATION DU MODULE DE DÉFORMATION DES SOLS

(RÉSUMÉ)

L'article comprend la description d'un appareil prototype pour la détermination, dans les conditions de laboratoire, du module de déformation, facteur de capacité portante des sols, utilisé à présent sur une large échelle dans les calculs modernes de dimensionnement des systèmes routiers et dans le calcul exact des fondations des constructions civiles et industrielles.

On montre en quoi consiste le principe de détermination du module de déformation et l'on fait une courte comparaison avec quelques autres facteurs de capacité portante.

On énumère les exigences spéciales auxquelles doit répondre un appareil destiné à des déterminations de ce genre, exigences qui ont été la principale raison pour laquelle on n'a pu, jusqu'à présent, construire un appareil, pouvant être introduit dans les laboratoires de spécialité, pour les déterminations en série.

On examine la façon dont l'appareil présenté répond aux exigences, et l'on accompagne l'exposé de photographies, illustrant par des exemples les affirmations faites.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Ivanov, *Stroitelstvo avtomobilnih dorog.* Dorizdat, Moscova, 1948.
2. *** *Instrucția po naznaceniiu konstrucții dorojnih odejd nejestkovo tipa.* Avtotransizdat, Moscova, 1954.
3. *** *Obosnovanie rascetnih parametrov dlia nejestkih dorojnih pokrîtii.* Culegere de lucrări sub redacția prof. N. N. Ivanov, Dorizdat, Moscova, 1952.
4. R. Ruckly, *L'application de la mécanique des sols dans le domaine de la construction des routes en Suisse.* Proceedings of the Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. III, Switzerland-Zürich, 1953, p. 288.
5. *** *Vremennîe tehniceskie uslovia i instrukții, na issledovanie gruntov osnovanii promîșlennîh i grajdabnskih zdanii i soorujenii.* TU-107-53, Moscova, 1954.
6. *** *Schweizerische Normen für die Messung der Tragfähigkeit von Strassen.* Strasse und Autobahn, 1955, nr. 4.
7. V. M. Bezruk și K. A. Kneaziuk, *Ustroistvo țementno-gruntovnîh. Osnovanii i pokrîtii.* Dorizdat, Moscova, 1951
8. R. Ariano, *I materiali stradali,* Milano, 1948.
9. R. L'Herminier, *Routes et pistes d'envol.* Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, sept. 1950, nr. 145.
10. *** *Symposium on the Development of CBR Flexible Pavement Design Methods for Airfields.* Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York, 1949, vol. 75, nr. 1.

I. I. GOLDENBLAT; *Nekotorie voprosi mehaniki deformiruemih sred* (Unele probleme ale mecanicii mediilor deformabile), Gostehizdat, Moscova, 1955, 272 pag.

Mecanica mediilor deformabile capătă o importanţă din ce în ce mai mare în cele mai variate discipline ale tehnicii : mecanica construcţiilor, construcţii de maşini, geofizică etc. care îi pun mereu noi probleme. Lucrarea lui I. I. Goldenblat caută să prezinte succint atît rezultate cunoscute, cît şi rezultate recente în acest domeniu.

Autorul nu se limitează numai la teoria clasică a elasticităţii ; deoarece se iau din ce în ce mai mult în consideraţie corpuri cu calităţi mecanice complexe (anizotrope, vîscoase, vîsco-elastice etc.) I. I. Goldenblat se referă la toate aceste categorii de corpuri, dînd importante studii de structură a rezolvării problemelor, bazate pe diferitele proprietăţi fizice.

În prima parte a lucrării se prezintă teoria generală, care leagă problemele stării de deformaţie de problemele stării de tensiune în cazul corpurilor izotrope şi anizotrope. Folosind un instrument de calcul vectorial şi tensorial foarte concis, autorul trece în revistă principalele proprietăţi ale tensorilor tensiune, deformaţie şi viteză de deformaţie precum şi invarianţii lor (cap. I-III). Apoi studiază formele generale de legătură între aceşti tensori în cazul proceselor staţionare şi nestaţionare de deformaţie ale mediilor izotrope (cap. IV-V) ; aceleaşi studii se fac şi pentru corpuri anizotrope elastic liniare şi neliniare, vîscoase, vîsco-elastice etc. (cap. VI). De asemenea, se cercetează legătura între axele principale ale tensorilor tensiune şi deformaţie în diverse cazuri (cap. VII).

În a doua parte a lucrării, I. I. Goldenblat se ocupă de o problemă specială, a cărei importanţă este din ce în ce mai mare, pentru practică : termodinamica stării de deformaţie. După ce prezintă pe scurt primele două principii ale termodinamicii, precum şi alte cîteva rezultate din acest domeniu (cap. VIII-IX), autorul stabileşte ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare stării de deformaţie pentru cazul corpurilor izotrope şi anizotrope şi arată cum se pot rezolva aceste ecuaţii (cap. X-XII). De asemenea, studiază cazul deformaţiilor finite şi unele probleme dinamice (cap. XIII-XIV), atît în coordonate euleriene cît şi în coordonate lagrangene.

Folosind o bogată bibliografie precum şi rezultatele cercetărilor personale, I. I. Goldenblat prezintă într-un număr mic de pagini un material foarte vast şi modern.

Prin problemele pe care le ridică şi prin generalitatea cu care tratează aceste probleme, cartea lui I. I. Goldenblat este deosebit de interesantă şi de folositoare pentru cercetătorii din domeniul mecanicii mediilor continue.

Petre P. Teodorescu

N.N. PATRAULEA, *Aerodinamica suprafeţelor permeabile*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956, 173 pag.

Lucrarea lui N. N. Patraulea asupra aerodinamicii suprafeţelor permeabile, alcătuită în cea mai mare parte din contribuţii personale, prezintă un interes deosebit deoarece aduce un material bogat într-o ramură încă puţin dezvoltată a aerodinamicii.

Deşi scurgerea aerului în jurul suprafeţelor permeabile şi prin acestea prezintă un interes practic deosebit atît pentru anumite dispozitive folosite în aviaţie, cît şi pentru numeroase alte aplicaţii, numărul lucrărilor asupra acestor probleme este pînă în prezent destul de limitat. Este cazul să amintim că la noi în ţară începutul a fost făcut de acad. prof. E. Carafoli, care a elaborat în 1950 o teorie a suprafeţelor portante permeabile.

N. N. Patraulea se ocupă de mai mulţi ani cu problemele de acest gen şi a reuşit să găsească o serie de rezultate interesante pe care le-a publicat cu începere din anul 1952. În cartea

sa recent apărută, a strîns şi sistematizat aceste rezultate, aducînd şi alte completări tot originale, pe care le-a încadrat cu unele consideraţii generale asupra unor teorii fundamentale din mecanica fluidelor. Primul capitol al lucrării conţine prezentarea ecuaţiilor generale de mişcare ale fluidelor ideale, insistîndu-se şi asupra unor probleme din teoria vîrtejurilor, care îşi găsesc aplicarea în restul lucrării.

Capitolul al doilea se ocupă de definirea şi clasificarea suprafeţelor permeabile. Autorul stabileşte ecuaţia caracteristică a unei astfel de suprafeţe care este o relaţie între forţa ce se exercită pe unitatea de suprafaţă într-un punct oarecare şi viteza din acel punct. În clasificarea suprafeţelor permeabile se disting suprafeţe ideale, în spatele cărora nu se formează o dîră de vîrtejuri şi suprafeţele reale, la care această dîră apare. De asemenea, autorul distinge suprafeţe permeabile pasive, la traversarea cărora fluidul suferă un salt de presiune negativ şi suprafeţe active la care fenomenul este invers (discul elicii, al rotorului de elicopter etc.). Se mai dau şi o serie de determinări experimentale pentru coeficientul de permeabilitate al suprafeţelor pasive cu structură izotropă, o schiţă de deducere teoretică a ecuaţiei caracteristice şi se examinează problema saltului de temperatură la traversarea unei suprafeţe permeabile. Capitolul se încheie cu unele consideraţii asupra similitudinii.

Suprafeţele permeabile ideale formează obiectul capitolului următor. După ce se expun cîteva rezultate clasice relative la naşterea vîrtejurilor, se generalizează paradoxul lui D'Alambert pentru corpurile permeabile ideale. Mai departe, se studiază distribuţia forţelor pe o suprafaţă permeabilă ideală şi se extinde teorema lui Jukovski pentru mişcarea în jurul acestor suprafeţe. În restul capitolului, se mai definesc plăcile, plane, permeabile, convergente sau divergente, se tratează un exemplu de mişcare convergentă precum şi problema suprafeţei portante permeabile ideale, a cărei rezolvare este redusă la aceea a unei ecuaţii integrale studiate de S. G. Mihlin.

În capitolul al patrulea, autorul consideră problema naşterii vîrtejurilor datorită forţelor cu acţiune permanentă într-un volum finit, pe care o rezolvă în ipoteza liniarizării ecuaţiilor de mişcare.

Rezultatele îi servesc lui N. N. Patraulea la construirea teoriei mişcărilor cu dîră aproape rectilinie, expusă în capitolul următor. Adoptînd schema lui Oseen, adică admiţînd că mişcarea este rotaţională numai în dîra care se formează în spatele corpului permeabil sau impermeabil, autorul demonstrează că, în anumite condiţii, potenţialul de viteze din domeniul mişcării irotaţionale poate fi prelungit analitic în interiorul dîrei de vîrtejuri. În cadrul acestei teorii, care presupune că vîrtejurile sînt transportate în interiorul dîrei pe traiectorii aproximativ rectilinii, autorul extinde teorema lui Jukovski şi tratează apoi cazul mişcărilor subsonice compresibile. Această problemă, în care se adoptă aproximaţia Prandtl-Glauert, a fost studiată de N. N. Patraulea în colaborare cu C. Stănescu.

Capitolul al şaselea prezintă teoria ecranelor de protecţie elaborată de autor pe baza teoriei liniarizate. Se studiază problema găsirii ecranului plan care corespunde unei repartiţii de viteze date la infinit aval precum şi problema determinării mişcării în jurul unui ecran permeabil dat. Pentru compararea teoriei cu experienţele întreprinse anterior de acad. prof. E. Carafoli, I. Stroescu şi N. Cămărăşescu, N. N. Patraulea a calculat şi corecţia datorită influenţei frontierelor tunelului aerodinamic. Rezultatele teoretice concordă satisfăcător cu datele experimentale.

În capitolul următor, se expune teoria aerodinamică a paraşutei. Autorul studiază numai mişcarea plană în jurul unui semicerc permeabil, utilizînd tot teoria liniarizată.

Capitolul al optulea cuprinde teoria suprafeţelor portante permeabile. După ce prezintă soluţiile date de acad. prof. E. Carafoli şi de H. A. Rahmatulin, autorul aplică teoria mişcărilor cu dîră aproape rectilinie şi studiază în condiţiile acesteia mişcarea în jurul unei suprafeţe portante permeabile. Rezolvarea se reduce în esenţă la o ecuaţie integrală de tipul aceleia studiate de S. G. Mihlin. Capitolul se încheie cu teoria profilelor de aripă cu volet de intrados permeabil, elaborată de autor în colaborare cu E. Larisch.

În capitolul al nouălea este tratată teoria elicei cu număr infinit de pale, considerîndu-se discul acesteia ca o suprafaţă permeabilă activă.

O teorie neliniarizată este propusă de N. N. Patraulea în capitolul următor. Se studiază, naşterea vîrtejurilor pe baza ecuaţiilor neliniarizate, precum şi comportarea dîrelor la infinit aval. Pentru rezolvarea problemelor neliniarizate, se propune un sistem de aproximaţii succesive.

În capitolul al unsprezecelea sînt date ecuaţiile generale de mişcare ale fluidelor vîscoase, iar în ultimul capitol se prezintă teoria Oseen pe care autorul a extins-o la mişcările în jurul corpurilor permeabile.

Lucrarea lui N. N. Patraulea ridică o serie de probleme deosebit de interesante şi credem că va constitui punctul de plecare şi pentru alte cercetări pe lîngă acelea efectuate de autor şi grupate în acest volum.

T. Oroveanu

V. NICOLAU, A. FROIMESCU şi M. WEISSENBERG,
Betonul precomprimat. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956, . . p.

Editura Academiei Republicii Populare Romîne, a scos de sub tipar în cursul acestui an lucrarea „Betonul precomprimat", de V.Nicolau, A. Froimescu şi M. Weissenberg.

În literatura noastră de specialitate se umple astfel un gol adînc simţit de proiectanţi şi executanţi, care nu aveau la îndemînă decît manuale tipărite în limbi străine, sau cursul litografiat al Prof. M. H a n g a n, ce fusese epuizat de mai mulţi ani.

Lucrarea cuprinde şase capitole şi anume :

Cap. I. Consideraţii generale ;
Cap. II. Materiale şi proprietăţile lor ;
Cap. III. Metode de execuţie a elementelor de construcţ din beton precomprimat, la care transmiterea efortului de la armături la beton se face prin aderenţă ;
Cap. IV. Metode de execuţie a elementelor din beton precomprimat la care transmiterea efortului de la armături la beton se face prin ancoraje de capăt ;
Cap. V. Alte metode de execuţie a elementelor de beton precomprimat ;
Cap.VI. Proiectarea elementelor de construcţii din beton precomprimat.

Planul lucrării este clar şi la baza dezvoltărilor teoretice sînt puse proprietăţile materialelor — beton şi oţel — indicîndu-se şi unele rezultate ale încercărilor efectuate de colectiv.

Se prezintă pe larg în special rezultatele studiilor colectivului de la I.M.A., condus de prof. Ing. V. N i c o l a u, ca şi unele date din experienţa de la noi din ţară, în acest domeniu.

Problemele tratate atît cele privind materialele folosite în R.P.R., cît şi cele privind dimensionarea elementelor de beton precomprimat, cuprind datele de bază ca şi detalierele necesare sub o formă unitară, astfel că ele vor putea fi de un real ajutor pentru proiectanţi şi executanţi. O serie de tabele fac mai comod calculul, astfel încît se poate economisi apreciabil timpul de lucru la proiectare.

În special la tipurile de elemente studiate şi propuse de colectiv, metoda de calcul e foarte detaliat prezentată şi are toate tabelele necesare pentru a se uşura munca proiectantului.

Se poate afirma că autorii nu au greşit insistînd mai mult pe elementele originale sau experimentale de colectiv, deşi unele din chestiunile tratate apar inegal dezvoltate (De exemplu : sistemele de ancorare, sau metodele de calcul pentru grinzile armate cu tiranţi).

Rezultă deci, că scopul indicat de autori în prefaţă, de a pune la îndemîna constructorilor din ţara noastră datele de bază necesare pentru proiectarea şi executarea construcţiilor din beton precomprimat cu materialele şi utilajul existent la noi în ţară, a fost atins.

În afara părţilor pozitive care au fost semnalate mai sus, sînt de făcut şi unele observaţii, care fără să ştirbească valoarea lucrării, ar merita poate să fie luate în considerare.

După cum arată şi autorii, lucrarea se bazează pe materialul documentar sovietic, existent pînă la începutul anului 1954, cît şi pe rezultatele studiilor teoretice şi experimentale efectuate în anii 1952-1953, de colectivul de specialitate al Institutului de Mecanică Aplicată de pe lîngă Academia R.P.R., care se referă mai ales la elemente încovoiate simplu rezemate.

Deoarece redactarea lucrării a fost terminată la începutul anului 1954, ea nu cuprinde rezultatele studiilor întreprinse ulterior de colectiv şi nici date din materialul documentar obţinut după această dată.

Credem că este criticabil faptul că au fost necesari editurii aproape doi ani pentru a scoate această lucrare de sub tipar.

Ritmul foarte rapid de dezvoltare al acestui gen de construcţii în toată lumea, face ca unele din datele conţinute, care reprezentau situaţia din anii 1953—1954, să-şi piardă din actualitate în 1956. De exemplu, au apărut între timp normele sovietice pentru calculul podurilor de şosea pe grinzi din beton precomprimat, la care unele din prescripţii diferă de cele prevăzute în proiectul de norme al candidatului în ştiinţe tehnice T r o i ţ k i, care a stat la baza lucrării.

Conform acestor norme noi, calculul grinzilor de beton post comprimat, la efortul din armături în momentul preîntinderii lor, se face tot la rupere ca pentru un element comprimat excentric, şi nu numai prin compararea eforturilor unitare de compresiune cu valoarea maximă admisă în proiectul de norme al lui Troiţki, egală cu 0,4 R (unde R este marca betonului).

Ca o concluzie generală, se poate afirma că lucrarea se prezintă la un nivel superior, conţinînd datele teoretice şi practice de bază pentru proiectarea şi executarea construcţiilor de beton precomprimat, bazate pe experienţa colectivului Institutului de Mecanică Aplicată de pe lîngă Academia R.P.R., şi pe unele din realizările de la noi din ţară, în acest domeniu.

Referindu-se în special la construcţiile care au la baza structurii de rezistenţă, grinda încovoiată simplu rezemată, lucrarea se poate folosi şi pentru dimensionarea sau verificarea eforturilor unitare din secţiunile elementelor structurilor de rezistenţă static nedeterminate de beton precomprimat, la care calculul eforturilor static nedeterminate a fost efectuat separat cu metodele specifice.

C. Ionescu

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

ERATĂ

pag.	rînd sau formulă	în loc de :	se va citi :
821	(23)	$\dots \left[\frac{2}{1 + L_2^{'}} + \dots \right.$	$\dots \left[\frac{2}{1 + L_2^{'2}} + \dots \right.$
822	(32)	$\dots - \frac{\dots}{\pi\left(1 + L_2^{'2}\right)} \dots$	$\dots \frac{\dots}{\pi\left(1 + L_2^{'2}\right)^2}$
823	(35)	$\dots \frac{4 L_2^{'}}{\dots} \dots$	$\dots \frac{4 L_2^{'2}}{\dots} \dots$
827	(60)	$\dots - \frac{2\alpha}{3\beta} \dots$	$\dots \frac{2\alpha}{3B} \dots$
832	8 de sus	$C_{la}^{'} = C_{za}$ (60), $C_{la}^{'} = C_{za}$ (53)	$C_{la}^{'} = C_{la}$ (60), $C_{za}^{'} = C_{za}$ (53)
837	(109)	$\dots \left[\frac{u}{K_1 Y^2 - K_2} + \dots \right.$	$\dots \left[\frac{u}{K_1 Y^2 + K_2} + \dots \right.$
837	(111)	$C_{nv1} = \dots$	$C_{nv2} = \dots$
837	(111)	$\dots \text{are tg} \left(\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \right) L \dots$	$\dots \text{arc tg} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} L \Big) \dots$
840	3 de sus	en considération	en considerant
868	(2.25)	$\dots \frac{1}{b} \dots$	$\dots \frac{1}{C}$
893	(15)	$\dots (-1)_j \dots$	$\dots (-1)^j \dots$
929	2 de sus	$\dots \mathfrak{M} + \frac{1}{1+\mu} \dots$	$\mathfrak{M} + \frac{1}{1+\mu} A^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \frac{1}{1+\mu} \dots$
929	3 „ „	$\dots \left\{ \frac{1}{1 = \mu} \dots \right.$	$\dots \left\{ \frac{1}{1+\mu} A^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{1}{1+\mu} \dots \right.$
929	1 de jos	$\frac{d^2}{dx^2} ch^2 x \dots$	$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} ch^2 x \dots$
996	13 de sus	$\dots (> + \dots$	$\dots (\lambda + \dots$
1063	15 „ „	(67 — 51 %)	(67 şi 50 %)
1063	23 „ „	76,5 — 76 %	76,5 şi 76 %
1064	21 „ „	6 — 63 %	6 şi 63 %
1064	26 „ „	53 — 47 %	53 şi 47 %

Studii şi cercetări de mecanică aplicată, nr. 4, 1956